数学题解辞典编辑委员会

顾　问　赵宪初

主　编　唐秀颍

副主编　鲍志新　夏明德

编辑委员　（以下按姓氏笔画为序）

*陈振宣　郁　桢　顾鸿达　章景翰　曾　容

主要编写人

陈振宣　赵家镐　闻炘威　贺龙泉　顾正明

计算核对

刘志浩　李大元　沈明哲　顾鸿达　蔡武冈

插　图

朱恩源　姜宝坤

责任编辑　唐尚斌

—

甲

注：有*号者为本书责任编委

前　　言

随着科学文化事业的发展，广大中等学校数学教师热切希望有一部以题解为中心的、比较系统的、实用的工具书．鉴于建国三十余年来中学数学教学已经积累了比较丰富的实践经验，各种文献资料也提供了众多的题材，这就有可能在总结我国教学实践经验的基础上，广泛吸收各方面的精华，遵照教育部《全日制六年制重点中学数学教学大纲(草案)》的精神，编纂一部比较符合我国国情、门类比较齐全、查阅比较方便的数学题解辞典．为此，我们邀集上海市部分富有教学经验的数学教师编写了这部工具书．

本辞典分代数、三角、平面几何、立体几何、平面解析几何、初等微积分六卷．主要供中等学校数学教师教学、进修时使用，也可供数学爱好者及中等学校学生参考．

编纂本辞典时，力求贯彻下列要求：

1．重视提高解题的分析能力．释文着重分析解题思路，揭示解题规律，使读者不仅得到简明而准确的解答，而且学会思考问题的方法．

2．注重题材的广泛性和代表性．选题时，注意筛选收录中外各类数学题解辞典和各种参考资料中富有启发性的题目，我国高等学校历届入学考试和国内外各种数学竞赛中有代表性的试题，以及中学数学范围内传统的著名题，特别是在教学实践中有助于巩固数学概念、富于思考性的自编题．此外，还酌收少量一般教材中常见的典型题．

3．注意题材归类，以典型带一般．题目编排分类清楚，条理分明，各类题目选好典型，加以分析说明，使读者举一反三，触类旁通．

由于我们水平有限，虽经努力，但上述编纂要求未必都能达到，选材和释文也可能有疏漏和不当之处，热诚地欢迎读者批评指正。

数学题解辞典编辑委员会

1982年7月

凡　　例

1．本书分坐标法、曲线和方程、直线、圆、椭圆、双曲线、抛物线、一般二次曲线、高次曲线和超越曲线九章，共收录平面解析几何题目一千二百余道．正文后附录解析几何简史和汉英对照解析几何名词．

2．题目按学科知识体系的章节分类分组编排．正文前刊有按类组形式编制的目录，正文后附有按题目的条件和结论分类编制的索引，以供检索．

3．在各章开头用双线相隔的部分，为解题或证题所需要的定理、法则、公式等知识提要，按章节编序，作为解题的依据．

4．题目解答一般是一题一解，部分题目有其它较好解法的，则一题多解，分别列出．本书中已收录题目的结论，在其它题目中应用时，一般不再重复，只注明“参见第×××题”．

5．对典型题或较复杂的题目，以[分析]的形式提示解题的关键和思路的分析；另以[说明]的形式标明有关解题规律的总结和题目意义的推广．在典型题后还配置若干相关的题目，以收触类旁通之效．

6．本书附插图728幅，分别附于有关题目下面；同一题中有一幅以上者，分别注明图1、图2……．

7．本书涉及的知识，除第八、九两章外，基本上按照《全日制六年制重点中学数学教学大纲(草案)》的要求；超出大纲要求的知识(在提要中相关序号的左上角用*号标明)以及部分难度较高的题目，仅供教师参考，不宜作为教学要求．

目　　录

第一章　坐 标 法

第二章　曲线与方程

第三章 直 线

第四章 圆

第五章　椭　　圆

第六章 双 曲 线

第七章　抛物线

第八章　一般二次曲线

第九章　高次曲线、超越曲线

第一章　坐　标　法

通过建立坐标系，把几何的基本对象(点)和代数的基本对象(数)联系起来，进而使作为动点轨迹的曲线和方程联系起来，为将平面图形问题转化为有关点的坐标的代数问题来研究，创造了条件. 平面解析几何就是从这一基本观念出发，用代数方法研究平面图形性质的一门科学.

---

1. 直线坐标系

设点 A、B 的坐标分别为 $A(x_A)$、$B(x_B)$；点 $P(x_P)$是分 AB 为定比 $\lambda=AP:PB$ 的分点.

(1) 有向线段 AB 的数量：

$$AB=x_B-x_A. \tag{1.11}$$

(2) A、B 两点间的距离：

$$|AB|=|x_B-x_A|. \tag{1.12}$$

(3) 定比分点 P 的坐标：

$$x_P=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}\quad(\lambda\neq-1). \tag{1.13}$$

2. 平面直角坐标系

设平面上点 A、B、C 的坐标分别为 $A(x_A, y_A)$、$B(x_B, y_B)$、$C(x_C, y_C)$；点 A、B 在 x 轴、y 轴上的射影分别为 A_x、B_x, A_y、B_y. 把有向线段 AB 看作向量，$\overrightarrow{AB}$ 在Ox 轴上的射影为 $\overrightarrow{A_xB_x}$,

射影 $\overrightarrow{A_xB_x}$ 的值 A_xB_x 记作 $(\overrightarrow{AB})_{Ox}$, $\overrightarrow{A_xB_x}=(\overrightarrow{AB})_{Ox}\vec{e}_1$ ($\vec{e}_1$ 为 Ox 轴上的单位向量); $\overrightarrow{AB}$ 在 Oy 轴上射影 $\overrightarrow{A_yB_y}$ 的值 A_yB_y 记作 $(\overrightarrow{AB})_{Oy}$, $\overrightarrow{A_yB_y}=(\overrightarrow{AB})_{Oy}\vec{e}_2$($\vec{e}_2$ 为 Oy 轴上的单位向量). $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB})$ 表示以 Ox 为始边, $\overrightarrow{AB}$ 为终边的有向角, 即 $\overrightarrow{AB}$ 的幅角. $\overrightarrow{AB}$ 的模记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|AB|$.

设 α 为直线 AB 的倾角, k_{AB} 为直线 AB 的斜率; 点 $P(x_P, y_P)$ 是分 AB 为定比 $\lambda=\frac{AP}{PB}$ 的分点.

(1) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在坐标轴上射影的值(见第 9 题):

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB})_{Ox}&=x_B-x_A=|AB|\cos(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB}),\\(\overrightarrow{AB})_{Oy}&=y_B-y_A=|AB|\sin(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB}).\end{aligned}\tag{1.21}$$

(2) A、B 两点之间的距离:

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}.\tag{1.22}$$

(3) A、B 两点连线的斜率:

$$k_{AB}=\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\quad\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2},\ x_A\neq x_B\right).\tag{1.23}$$

(4) 定比分点 P 的坐标:

$$x_P=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda},\ y_P=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}\quad(\lambda\neq-1).\tag{1.24}$$

当 $\lambda>0$ 时, P 为 AB 的内分点; 当 $\lambda<0$ 时, P 为 AB 的外分点; 当 $\lambda=1$ 时, P 为 AB 的中点, 其坐标为

$$x_P=\frac{x_A+x_B}{2},\ y_P=\frac{y_A+y_B}{2}.$$

(5) 三角形 ABC 的面积:

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}\text{的绝对值.}\tag{1.25}$$

(6) 存在斜率的两直线互相平行的充要条件: 两直线的斜率

相等，即

$$k_1=k_2. \tag{1.26}$$

(7) 存在斜率的两直线互相垂直的充要条件：两直线的斜率之积等于 -1，即

$$k_1\cdot k_2=-1. \tag{1.27}$$

3. 平面极坐标系

设点 A、B、C 的极坐标分别为：$A(\rho_1, \theta_1)$、$B(\rho_2, \theta_2)$、$C(\rho_3, \theta_3)$. 在极点与原点重合，极轴与 x 轴正半轴重合的条件下，点 P 的极坐标为 (ρ, θ)，直角坐标为 (x, y).

(1) 极坐标与直角坐标的关系：

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta, \end{cases} \quad \begin{cases} \rho^2=x^2+y^2 \\ \operatorname{tg}\theta=\dfrac{y}{x} \quad (x\neq 0). \end{cases} \tag{1.31}$$

(2) A、B 两点的距离：

$$|AB|=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1-\theta_2)}. \tag{1.32}$$

(3) 三角形 ABC 的面积(见第 101 题)：

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\rho_1\rho_2\sin(\theta_2-\theta_1)+\rho_2\rho_3\sin(\theta_3-\theta_2)+\rho_3\rho_1\sin(\theta_1-\theta_3)|. \tag{1.33}$$

(4) A、B、C 三点共线的充要条件(见第 98 题)：

$$\frac{\sin(\theta_2-\theta_3)}{\rho_1}+\frac{\sin(\theta_3-\theta_1)}{\rho_2}+\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\rho_3}=0 \quad (\rho_1\rho_2\rho_3\neq 0). \tag{1.34}$$

***4. 平面斜坐标系**

设斜坐标轴的夹角为 ω，A、B、C 三点的斜坐标分别为 $A(x_A, y_A)$、$B(x_B, y_B)$、$C(x_C, y_C)$，线段 AB 的定比 $\left(\lambda=\dfrac{AP}{PB}\right)$ 分点为 $P(x_P, y_P)$.

(1) A、B 两点间的距离:

$$|AB|=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+2(x_A-x_B)(y_A-y_B)\cos\omega}. \tag{1.41}$$

(2) 定比分点 P 的坐标:

$$x_P=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda},\quad y_P=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}\quad (\lambda\neq-1). \tag{1.42}$$

当 $\lambda=1$ 时, P 为 AB 的中点,其坐标为

$$x_P=\frac{x_A+x_B}{2},\quad y_P=\frac{y_A+y_B}{2}.$$

(3) 三角形 ABC 的面积(见第 107 题):

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}\sin\omega \text{ 的绝对值}. \tag{1.43}$$

5. 坐标变换

设点 P 原来的坐标为 (x,y),变换后的坐标为 (x',y'). (x_0,y_0) 为新原点的坐标, θ 为坐标轴旋转过的角.

(1) 平移:

$$\begin{cases}x=x'+x_0\\ y=y'+y_0,\end{cases}\quad \begin{cases}x'=x-x_0\\ y'=y-y_0.\end{cases} \tag{1.51}$$

(2) 旋转:

$$\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta\\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x'=x\cos\theta+y\sin\theta\\ y'=-x\sin\theta+y\cos\theta.\end{cases} \tag{1.52}$$

(3) 一般变换:

$$\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta+x_0\\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta+y_0.\end{cases} \tag{1.53}$$

§1. 直线坐标系

1. 设 $A(x_A)$ 和 $B(x_B)$ 为数轴上任意两点. 求证:

$$AB=x_B-x_A.$$

[分析] 根据坐标概念, 点 P 的坐标 x, 是以原点为始点, 以点 P 为终点的有向线段的数量, 即 $\overrightarrow{OP}=x\vec{e}$, 其中 $\vec{e}$ 为数轴上的单位向量. 按向量的加法法则即可得证.

[证一] 设数轴的原点为点 O, 单位向量为 $\vec{e}$. 则 $\overrightarrow{OA}=x_A\vec{e}$, $\overrightarrow{OB}=x_B\vec{e}$.

$$\because\quad \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB},\quad \therefore\quad \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=x_B\vec{e}-x_A\vec{e},$$

即 $$AB\vec{e}=(x_B-x_A)\vec{e}.\quad \therefore\quad AB=x_B-x_A.$$

[证二] (1) 当 $x_B>x_A>0$ 时, 则

$$AB=OB-OA=x_B-x_A.$$



如果 $x_A>x_B>0$, 则

$$AB=-(BA)=-(OA-OB)$$
$$=-(x_A-x_B)=x_B-x_A.$$



(2) 当 $x_A<0<x_B$ 时, 则

$$AB=AO+OB=OB-OA=x_B-x_A.$$



如果 $x_B<0<x_A$, 则

$$AB=AO+OB=OB-OA=x_B-x_A.$$



(3) 当 $x_A<x_B<0$ 时, 则

$$AB=AO-BO=-OA+OB=x_B-x_A.$$



如果 $x_B<x_A<0$, 则

$$AB=OB-OA=x_B-x_A.$$



[说明] (1) 本题是证直线 (一维) 几何中诸定理的主要工具. (2) 由此可得 A、B 两点间的距离为 $|AB|=|x_B-x_A|$.

2. 设 A、B、C 为轴上任意三点. 求证: $AB+BC=AC$, 或 $AB+BC+CA=0$.

[分析] 建立直线坐标系后运用上题结果: $AB=x_B-x_A$, 即可得证.

[证] 取定原点, 在轴上建立直线坐标系, 设 A、B、C 三点的坐标分别

为 x_A、x_B 和 x_C，则 $AB+BC=x_B-x_A+x_C-x_B=x_C-x_A=AC$.

$$\because\ AC=-CA,\quad \therefore\ AB+BC+CA=0.$$

［说明］ 本题称为夏尔 (Chasles) 定理. 运用数学归纳法或直接运用 $AB=x_B-x_A$ 进一步可证: $A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{n-1}A_n=A_1A_n$.

3. 设 P、A、B、C 为同一直线上的任意四点. 求证:

(1) $PA\cdot BC+PB\cdot CA+PC\cdot AB=0$;

(2) $PA^2\cdot BC+PB^2\cdot CA+PC^2\cdot AB+BC\cdot CA\cdot AB=0$.

［分析］ 在直线上建立直线坐标系，把有向线段的值转化为点的坐标的代数式，通过计算化简即可证明.

［证］ 取 P 为原点，以 A、B、C 所在直线为轴建立直线坐标系. 设 P、A、B、C 的坐标分别为 0、x_1、x_2 和 x_3. 则

(1) $PA\cdot BC+PB\cdot CA+PC\cdot AB$

$$=x_1(x_3-x_2)+x_2(x_1-x_3)+x_3(x_2-x_1)$$

$$=x_1x_3-x_1x_2+x_1x_2-x_2x_3+x_2x_3-x_1x_3=0.$$

(2) $PA^2\cdot BC+PB^2\cdot CA+PC^2\cdot AB+BC\cdot CA\cdot AB$

$$=x_1^2(x_3-x_2)+x_2^2(x_1-x_3)+x_3^2(x_2-x_1)+(x_3-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_1)$$

$$=x_1^2x_3-x_1^2x_2+x_2^2x_1-x_2^2x_3+x_3^2(x_2-x_1)+(x_3-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_1)$$

$$=x_3(x_1^2-x_2^2)+x_1x_2(x_2-x_1)+x_3^2(x_2-x_1)$$

$$\quad+(x_3-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_1)$$

$$=(x_2-x_1)[-x_3(x_1+x_2)+x_1x_2+x_3^2]+(x_3-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_1)$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)-(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)=0.$$

［说明］ (1) 式又称欧拉(Euler)定理，(2) 式又称斯图尔特(Stewart)定理.

4. 设 A、B、C、D 是同一直线上的四点，且 $\dfrac{CA}{CB}=-\dfrac{DA}{DB}=\lambda(\lambda\neq\pm1)$，又点 O 为 AB 的中点. 求证: $OA^2=OC\cdot OD$.

［证］ 取 O 为原点，以 A、B、C、D 所在直线为坐标轴，建立直线坐标系. 因 O 为 AB 的中点，故可设 A、B 两点的坐标分别为 x_1 和 $-x_1$.

$$\because\ \frac{CA}{CB}=\lambda,\quad 即\ \frac{AC}{CB}=-\lambda\ (\lambda\neq1).$$

∴ 点 C 的坐标为 $\frac{x_1+\lambda x_1}{1-\lambda}=\frac{1+\lambda}{1-\lambda}x_1$. 同理，点 D 的坐标为

$$\frac{x_1+\lambda(-x_1)}{1+\lambda}=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}x_1 \quad (\lambda\neq -1).$$

$$\therefore\quad OC\cdot OD=\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}x_1\right)\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}x_1\right)=x_1^2=OA^2.$$

5. 设点 M 为线段 AB 的中点，O 为直线 AB 上任意一点. 求证：$OA^2-OB^2=-2AB\cdot OM$.

［证］ 取点 O 为原点，以 AB 所在直线为坐标轴，建立直线坐标系. 设 A、B 两点的坐标分别为 x_1、x_2，则点 M 的坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，

$$\begin{aligned}\therefore\quad OA^2-OB^2&=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)\\&=2OM(-AB)=-2AB\cdot OM.\end{aligned}$$

6. 设 A、B、C、D 为直线上四点，且 $\frac{AC}{CB}+\frac{AD}{DB}=0$. 求证：$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}$.

［证］ 取点 A 为原点，以 A、B、C、D 所在直线为坐标轴，建立直线坐标系. 设四点坐标分别为 $A(0)$、$B(b)$、$C(c)$ 和 $D(d)$.

$$\because\quad \frac{AC}{CB}+\frac{AD}{DB}=0,\quad \text{即}\quad \frac{c}{b-c}+\frac{d}{b-d}=0,$$

$$\therefore\quad b(c+d)=2cd,\quad \text{即}\quad \frac{c+d}{cd}=\frac{2}{b}.$$

$$\because\quad \frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{c+d}{cd},\quad \text{且}\quad \frac{2}{AB}=\frac{2}{b},$$

$$\therefore\quad \frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}.$$

7. 设 M、A、B、C 为同一直线上的四点，点 N 为此直线上的任意一点. 求证：

(1) $\frac{AM\cdot AN}{AB\cdot AC}+\frac{BM\cdot BN}{BC\cdot BA}+\frac{CM\cdot CN}{CA\cdot CB}=1$，

(2) $\frac{AM^2}{AB\cdot AC}+\frac{BM^2}{BC\cdot BA}+\frac{CM^2}{CA\cdot CB}=1$.

［证］ (1) 取 M 为原点，以 A、B、C 所在直线为坐标轴，建立直线坐标系. 设 A、B、C、N 的坐标分别为：x_1、x_2、x_3 和 x. 则

$$\frac{AM\cdot AN}{AB\cdot AC}+\frac{BM\cdot BN}{BC\cdot BA}+\frac{CM\cdot CN}{CA\cdot CB}$$

$$=\frac{(-x_1)(x-x_1)}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)}+\frac{(-x_2)(x-x_2)}{(x_3-x_2)(x_1-x_2)}+\frac{(-x_3)(x-x_3)}{(x_1-x_3)(x_2-x_3)}$$

$$=\frac{x_1(x-x_1)(x_2-x_3)+x_2(x-x_2)(x_3-x_1)+x_3(x-x_3)(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)}$$

$$=\frac{(x_1x_2-x_3x_1+x_2x_3-x_1x_2)x-x_1^2x_2+x_1^2x_3-x_2^2x_3+x_2^2x_1+x_3(x-x_3)(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)}$$

$$=\frac{(x_2-x_1)xx_3+(x_2-x_1)x_1x_2+(x_1-x_2)(x_1+x_2)x_3+(x_1-x_2)(x-x_3)x_3}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)}$$

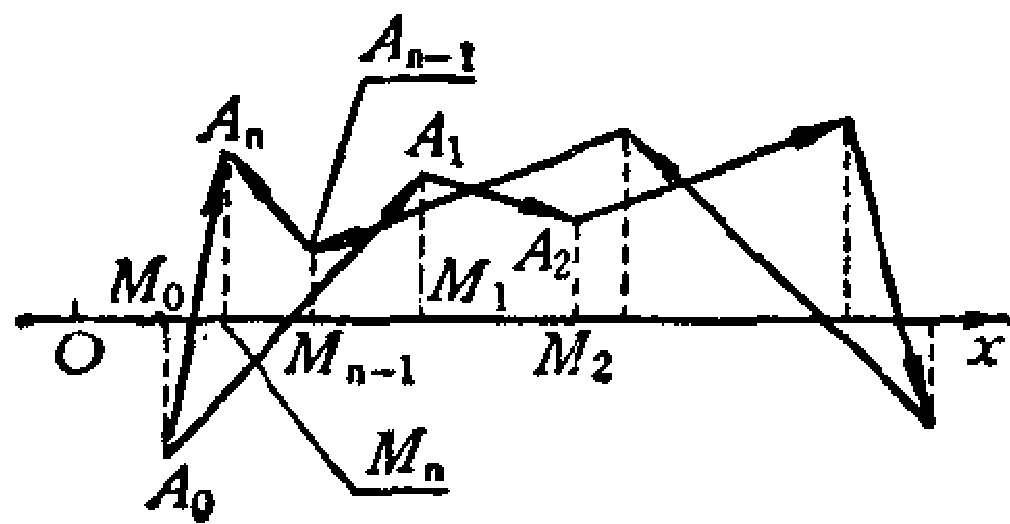
$$=\frac{(x_1-x_2)[-xx_3-x_1x_2+x_3(x_1+x_2)+x_3(x-x_3)]}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)}$$

$$=\frac{-[x_3^2-(x_1+x_2)x_3+x_1x_2]}{(x_2-x_3)(x_3-x_1)}=\frac{-(x_3-x_1)(x_3-x_2)}{(x_2-x_3)(x_3-x_1)}=1.$$

(2) 上式如果 M、N 两点重合，则从(1)即得(2).

8．试证：n 个向量的合向量在一条轴上射影的值，等于这 n 个向量在这一条轴上射影的值之和.

［证］ 设 n 个向量分别为 $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\cdots$, $\overrightarrow{a_n}$. 经平移后，使其首尾相连得一向量折线 $A_0A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ 如图. 且 $\overrightarrow{a_i}=\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ $(i=1, 2, 3, \cdots, n)$. 又设 A_0、A_1、$A_2\cdots A_{n-1}$、A_n 在轴 Ox 上的射影分别为 M_0、M_1、M_2、$\cdots$、M_{n-1}、M_n.



$$(\overrightarrow{A_{i-1}A_i})_{Ox}=M_{i-1}M_i\quad(i=1, 2, 3, \cdots, n).$$

$$\because\quad M_0M_1+M_1M_2+\cdots+M_{n-1}M_n=M_0M_n,$$

$$\therefore\quad (\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n})_{Ox}=(\overrightarrow{A_0A_n})_{Ox}=M_0M_n$$

$$=M_0M_1+M_1M_2+\cdots+M_{n-1}M_n$$

$$=(\overrightarrow{A_0A_1})_{Ox}+(\overrightarrow{A_1A_2})_{Ox}+\cdots+(\overrightarrow{A_{n-1}A_n})_{Ox}.$$

§2. 直角坐标系

9. 设 A、B 两点坐标分别为 $A(x_A, y_A)$、$B(x_B, y_B)$. 求证:

(1) $\overrightarrow{AB}$ 在 Ox 轴上射影的值为

$$(\overrightarrow{AB})_{Ox}=x_B-x_A=|AB|\cos(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB});$$

$\overrightarrow{AB}$ 在 Oy 轴上射影的值为

$$(\overrightarrow{AB})_{Oy}=y_B-y_A=|AB|\sin(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB}).$$

(2) 如果 $\overrightarrow{AB}$ 所在轴上的单位向量为 $\vec{e}$, 则

$$(\overrightarrow{AB})_{Ox}=AB\cos(\overrightarrow{Ox}, \vec{e}),$$

其中 AB 表示 $\overrightarrow{AB}$ 在其轴上的值.

[证] (1) 设 A、B 在 x 轴、y 轴上的射影分别为 M_A、M_B; N_A、N_B. 则各点坐标分别为 $M_A(x_A, 0)$、$M_B(x_B, 0)$; $N_A(0, y_A)$、$N_B(0, y_B)$. 按向量射影的值的定义可得:

$$(\overrightarrow{AB})_{Ox}=M_AM_B=x_B-x_A,$$
$$(\overrightarrow{AB})_{Oy}=N_AN_B=y_B-y_A.$$

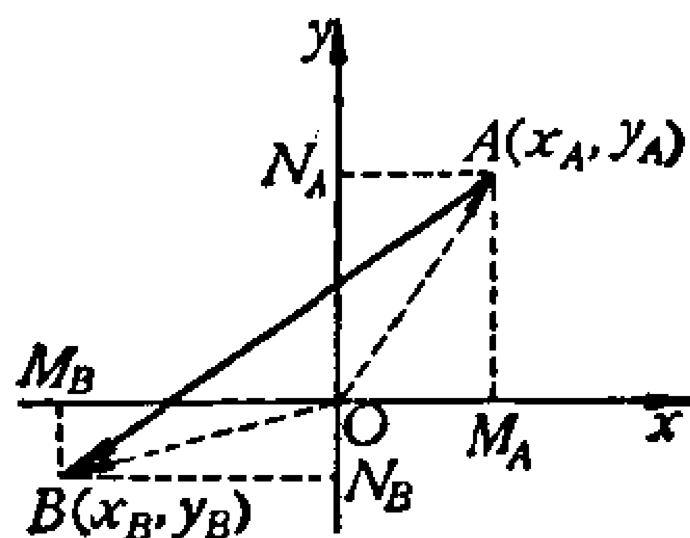


图 1

再根据三角函数概念可得:

$$\cos(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB})=\frac{(\overrightarrow{AB})_{Ox}}{|AB|}, \sin(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB})=\frac{(\overrightarrow{AB})_{Oy}}{|AB|}.$$

$$\therefore\quad (\overrightarrow{AB})_{Ox}=|AB|\cos(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB}), (\overrightarrow{AB})_{Oy}=|AB|\sin(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB}).$$

(2) 当 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\vec{e}$ 同向, $AB>0$, $|AB|=AB$, $(\overrightarrow{Ox}, \vec{e})=(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB})$, 从(1)即得 $(\overrightarrow{AB})_{Ox}=|AB|\cos(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB})=AB\cos(\overrightarrow{Ox}, \vec{e})$.

当 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\vec{e}$ 反向, $AB<0$, $|AB|=-AB$, $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB})=\pi+(\overrightarrow{Ox}, \vec{e})$, 从(1)得

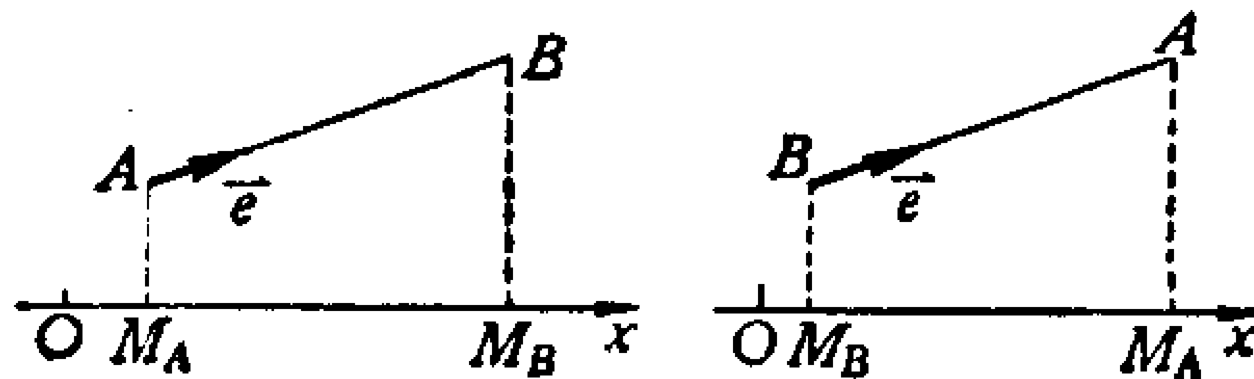


图 2

$$(\overrightarrow{AB})_{Ox}=|AB|\cos(\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{AB})=-AB\cos[\pi+(\overrightarrow{Ox},\ \vec{e})]$$
$$=AB\cos(\overrightarrow{Ox},\ \vec{e}).$$

［说明］ 本题和上题的结论合称为向量射影定理．本题(1)的结论即提要(1.21)，以它推导距离、斜率、分点、面积等公式十分便利；同时又是推导直线参数方程和特殊曲线参数方程的重要工具．本题(2)的结论便于进行第二次投影．

10．已知两点 $A(a_1,\ b_1)$、$B(a_2,\ b_2)$，点 P 是 AB 的延长线上的一点，且 $|AB|\cdot|BP|=m\quad(m>0)$．求点 P 的坐标．

［分析］ 把向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BP}$ 分别投影到两轴上，应用提要 (1.21) 即可得解．

［解］ 设所求点 P 的坐标为$(x,\ y)$，$(\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{AB})=\alpha$，则

$$\cos\alpha=\frac{a_2-a_1}{|AB|},\quad \sin\alpha=\frac{b_2-b_1}{|AB|}.$$

$$\because\quad |AB|\cdot|BP|=m,\quad \therefore\quad |BP|=\frac{m}{|AB|}.$$

$$\therefore\quad (\overrightarrow{BP})_{Ox}=x-a_2=|BP|\cos\alpha=\frac{m}{|AB|}\cdot\frac{a_2-a_1}{|AB|}$$
$$=\frac{m(a_2-a_1)}{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}.$$
$$\therefore\quad x=a_2+\frac{m(a_2-a_1)}{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}.$$

同理，

$$(\overrightarrow{BP})_{Oy}=y-b_2=|BP|\sin\alpha=\frac{m}{|AB|}\cdot\frac{b_2-b_1}{|AB|}$$
$$=\frac{m(b_2-b_1)}{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}.$$
$$\therefore\quad y=b_2+\frac{m(b_2-b_1)}{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}.$$

即点 P 坐标为

$$\left(a_2+\frac{m(a_2-a_1)}{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2},\ b_2+\frac{m(b_2-b_1)}{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}\right).$$

11．两圆相交于 A、B 两点，若点 A 的坐标为$(5,\ -\sqrt{5})$，根据下列条件求点 B 的坐标．

(1) 两圆心都在 x 轴上;(2)两圆心都在 y 轴上;(3)两圆心都在直线 $y=-2$ 上.

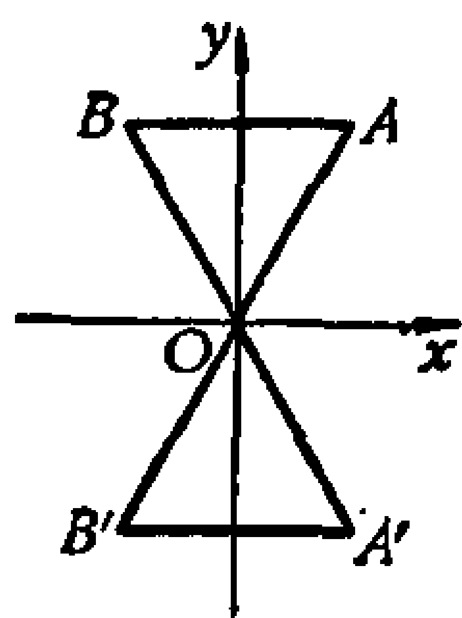
[分析] 相交两圆关于连心线成轴对称,交点也关于连心线成轴对称.

[解] (1) 点 $A(5, -\sqrt{5})$ 关于 x 轴对称的点为 $B(5, \sqrt{5})$;

(2) 点 $A(5, -\sqrt{5})$ 关于 y 轴对称的点为 $B(-5, -\sqrt{5})$;

(3) 点 $A(5, -\sqrt{5})$ 关于直线 $y=-2$ 的对称点为 $B(x, y)$, 则 $x=5$, 由 $\frac{y-\sqrt{5}}{2}=-2$, 得 $y=\sqrt{5}-4$, 故点 B 的坐标为 $(5, \sqrt{5}-4)$.

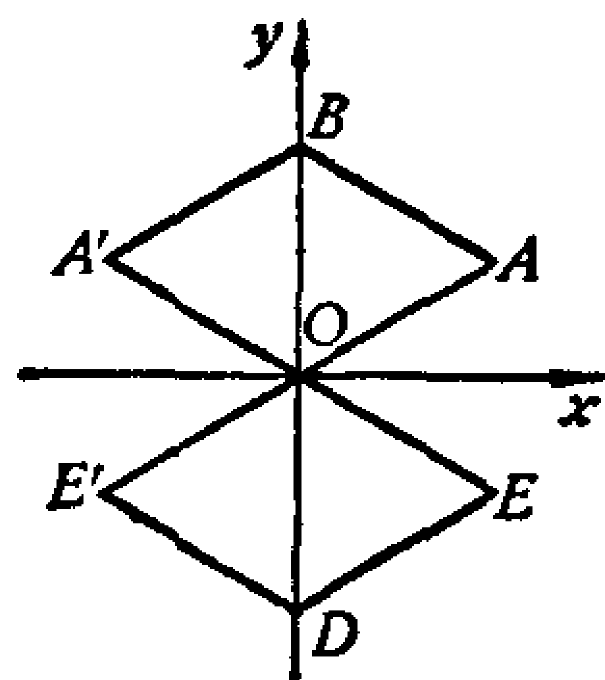
12. 等边三角形边长为 b, 一顶点在原点, 一高在 y 轴上, 求其它各顶点的坐标.



[解] 如图,(1) 若等边 $\triangle AOB$ 在 x 轴上方,则其顶点坐标为: $O(0, 0)$、$A\left(\frac{b}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$、$B\left(-\frac{b}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$.

(2) 若等边 $\triangle A'OB'$ 在 x 轴下方, 则其顶点坐标为: $O(0, 0)$、$A'\left(\frac{b}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$、$B'\left(-\frac{b}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$.

13. 等边三角形边长为 b, 一顶点为原点, 一边在 y 轴上, 求其它各顶点的坐标.



[解] (1) 若一边在 y 轴的正半轴上,则顶点 B 的坐标为 $(0, b)$. 当第三顶点 A 在第一象限时,其坐标为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b, \frac{b}{2}\right)$; 当第三顶点 A' 在第二象限时, 其坐标为 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}b, \frac{b}{2}\right)$.

(2) 若一边在 y 轴的负半轴上, 则顶点 D 的坐标为 $(0, -b)$. 当第三顶点 E 在第四象限时, 其坐标为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b, -\frac{b}{2}\right)$; 当第三顶点 E' 在第三象限时, 其坐标为 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}b, -\frac{b}{2}\right)$.

14. 求和 x 轴的距离与和 y 轴的距离之比是 3:4, 且与两点 $A(1, 2)$、$B(-3, 4)$ 等距离的点 P 的坐标.

[分析] 根据点 P 所应满足的条件列出方程求解.

［解］ 设点 P 的坐标为(x, y)，根据条件有：

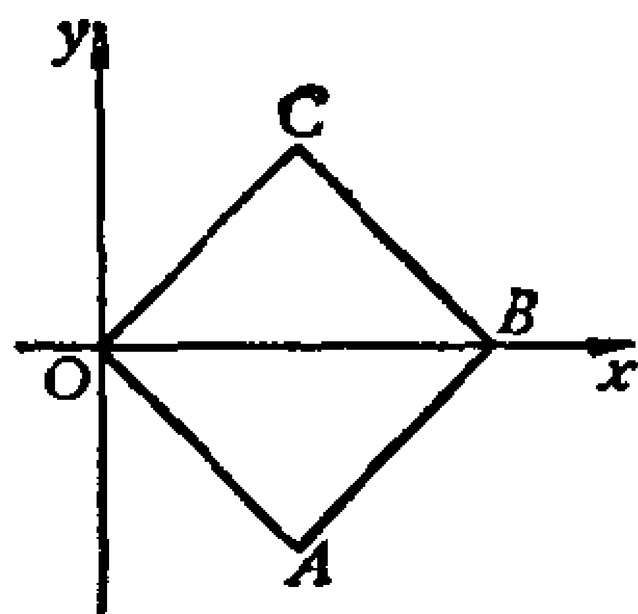
$$\left|\frac{y}{x}\right|=\frac{3}{4}\cdots① \quad 和 \quad (x-1)^2+(y-2)^2=(x+3)^2+(y-4)^2\cdots②.$$

由①得 $y=\pm\frac{3}{4}x$，分别与②联立，解得

$$\begin{cases}x=-4\\ y=-3\end{cases} 和 \begin{cases}x=-\frac{20}{11}\\ y=\frac{15}{11}.\end{cases}$$

∴ 所求点 P 的坐标为$(-4, -3)$ 或 $\left(-\frac{20}{11}, \frac{15}{11}\right)$.

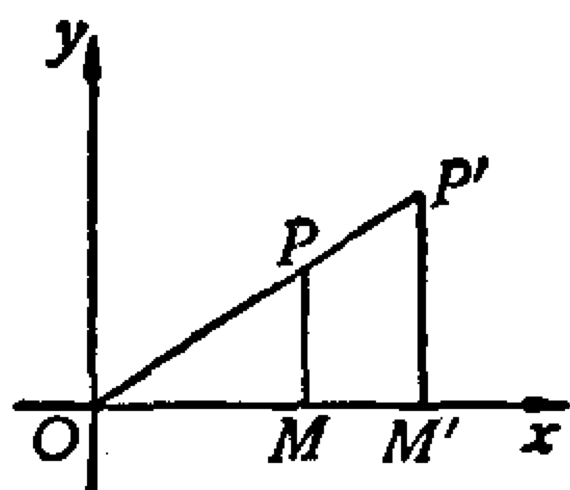
15. 正方形边长为 $2a$，一顶点为原点，一对角线在 x 轴正半轴上. 求其它各顶点坐标.



［解］ 如图，其它三顶点坐标为：

$A(\sqrt{2}a, -\sqrt{2}a)$、$B(2\sqrt{2}a, 0)$、$C(\sqrt{2}a, \sqrt{2}a)$.

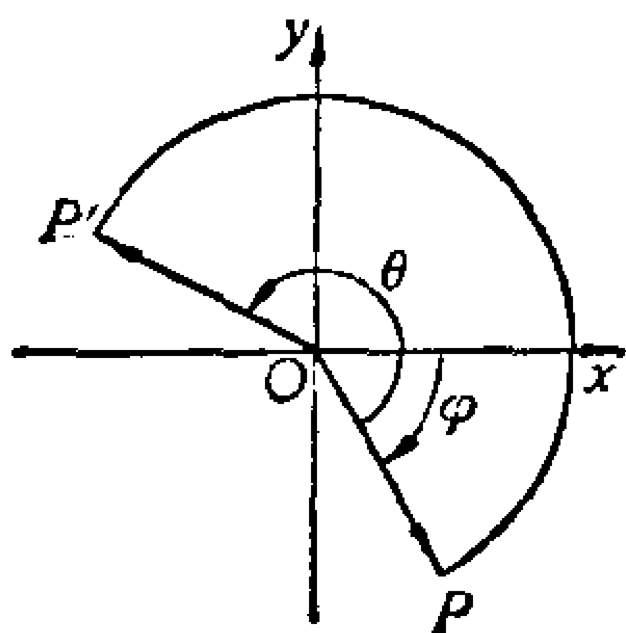
16. 以原点为位似中心，位似比为 $k(k\neq0)$，点 $P(x, y)$ 经过位似变换后到达 P'，试求 P' 的坐标(x', y')，并求位似变换对应的矩阵.



［解］ ∵ $OP':OP=k$, $MP\perp Ox$, $M'P'\perp Ox$, $\triangle OMP\backsim\triangle OM'P'$, ∴ $OP':OP=OM':OM=M'P':MP$. ∴ $\begin{cases}x'=kx\\ y'=ky.\end{cases}$ 位似变换对应的矩阵为 $\begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}$.

17. 以原点为旋转中心，将 $\overrightarrow{OP}$ 旋转角 θ（$\theta>0$，按逆时针方向旋转；$\theta<0$，按顺时针方向旋转）到达 $\overrightarrow{OP'}$，如果点 P 的坐标为(x, y)，试求点 P' 的坐标(x', y')，并求此旋转变换对应的矩阵.

［解］ 设 $\overrightarrow{OP}$ 的幅角为 φ， ∵ $|OP'|=|OP|$,



$$\therefore\quad x'=(\overrightarrow{OP'})_{Ox}=|OP'|\cos(\theta+\varphi)$$
$$=|OP|\cos\theta\cos\varphi-|OP|\sin\theta\sin\varphi$$
$$=x\cos\theta-y\sin\theta.$$
$$y'=(\overrightarrow{OP'})_{Oy}=|OP'|\sin(\theta+\varphi)$$
$$=|OP|\sin\theta\cos\varphi+|OP|\cos\theta\sin\varphi$$
$$=x\sin\theta+y\cos\theta.$$

旋转变换对应的矩阵为$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.

[说明] 如果 $\theta=\frac{\pi}{2}$, 则变换对应的矩阵为$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. 如果 $\theta=-\frac{\pi}{2}$, 则变换对应的矩阵为$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. 如果 $\theta=\pi$, 则变换对应的矩阵为$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, 即关于原点的对称变换.

18. 如果先施行变换 T_1:

$$\begin{cases}x'=a_{11}x+a_{12}y\\ y'=a_{21}x+a_{22}y,\end{cases}\quad 再施行变换\ T_2:\ \begin{cases}x''=b_{11}x'+b_{12}y'\\ y''=b_{21}x'+b_{22}y',\end{cases}$$

所得变换 T 称为变换 T_1、T_2 的积, 记为 $T=T_2T_1$. 试求变换 T_1、T_2 的积 T.

[解] $\because$ $\begin{cases}x'=a_{11}x+a_{12}y\\ y'=a_{21}x+a_{22}y\end{cases}$ 对应的矩阵为$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$,

$\begin{cases}x''=b_{11}x'+b_{12}y'\\ y''=b_{21}x'+b_{22}y'\end{cases}$ 对应的矩阵为$\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$,

$$\therefore\quad x''=b_{11}(a_{11}x+a_{12}y)+b_{12}(a_{21}x+a_{22}y)$$
$$=(a_{11}b_{11}+a_{21}b_{12})x+(a_{12}b_{11}+a_{22}b_{12})y;$$
$$y''=b_{21}(a_{11}x+a_{12}y)+b_{22}(a_{21}x+a_{22}y)$$
$$=(a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22})x+(a_{12}b_{21}+a_{22}b_{22})y.$$

由此可得矩阵乘法法则与变换的积的对应关系:

$$T_2T_1=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{21}b_{12} & a_{12}b_{11}+a_{22}b_{12}\\ a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22} & a_{12}b_{21}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}.$$

这里应注意: (1)先施行变换的矩阵在右,后施行变换的矩阵在左. (2)右矩

阵的第一列与左矩阵的第一、二行对应元素积的代数和为积的第一列；右矩阵的第二列与左矩阵的第一、二行对应元素积的代数和为积的第二列.

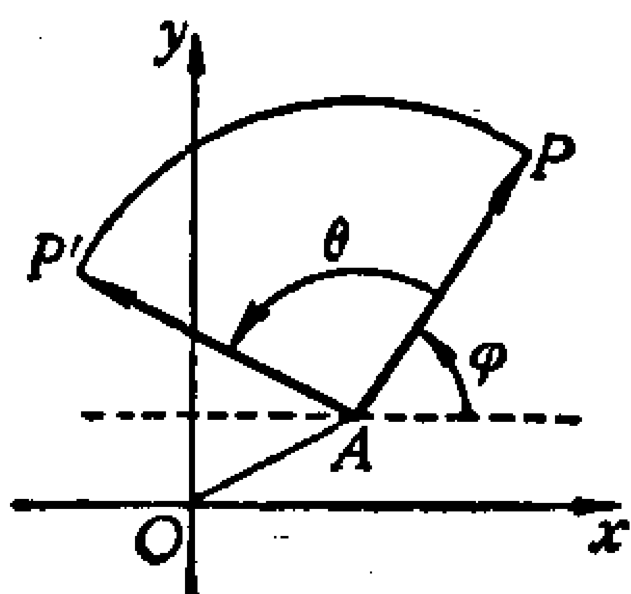
［说明］ 有了矩阵乘法法则，就为求变换的积和用矩阵表达变换方程带来方便. 例如旋转变换方程可表达如下：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x\cos\theta-y\sin\theta \\ x\sin\theta+y\cos\theta \end{pmatrix}.$$

结合矩阵的加法和数与矩阵的乘法，可把求变换方程转化为矩阵的初步运算来解决. 参见第19、20、23题.

19. 设向量 $\overrightarrow{AP}$ 两端坐标为 $A(x_0, y_0)$、$P(x, y)$，$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AP})=\varphi$. 将 $\overrightarrow{AP}$ 绕 A 点旋转角 θ 到达 $\overrightarrow{AP'}$，试求 P' 的坐标 (x', y').

［解］ $\because\ \overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP'}$，$|AP|=|AP'|$，



$$\begin{aligned}\therefore\quad (\overrightarrow{OP'})_{Ox} &= (\overrightarrow{OA})_{Ox}+(\overrightarrow{AP'})_{Ox} \\ &= x_0+|AP'|\cos(\theta+\varphi) \\ &= x_0+|AP|\cos\theta\cos\varphi-|AP|\sin\theta\sin\varphi \\ &= x_0+(x-x_0)\cos\theta-(y-y_0)\sin\theta.\end{aligned}$$

同理，

$$\begin{aligned} y' &= (\overrightarrow{OP'})_{Oy}=(\overrightarrow{OA})_{Oy}+(\overrightarrow{AP'})_{Oy} \\ &= y_0+|AP'|\sin(\theta+\varphi) \\ &= y_0+(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta.\end{aligned}$$

［说明］ 这变换可以看作平移与旋转的结合：

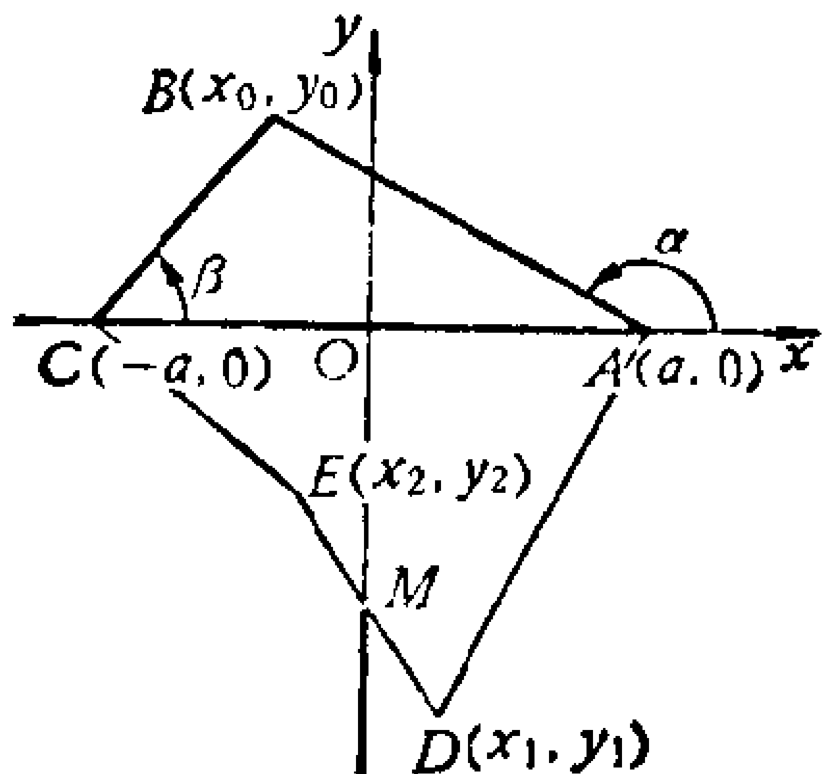
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x-x_0)\cos\theta-(y-y_0)\sin\theta \\ (x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x-x_0)\cos\theta-(y-y_0)\sin\theta+x_0 \\ (x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta+y_0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

结果与上相同.

20. 甲、乙两小队做军事游戏，甲队按下列方案将一球埋藏于某地：以三已知目标 A、B、C 为标志，将 AB 绕点 A 按逆时针方向旋转 $90°$，到达 AD；再将 CB 绕点 C 按顺时针方向旋转 $90°$，到达 CE；最后将球埋在 DE 的中点 M 处，并有意将标志

B移去. 试问乙队如何只根据标志A、C找到球的埋藏处M的位置?

[分析一] 要找到点M, 应先找到D、E, 而D、E又取决于A、B、C, 但点B已被移去, 故在建立坐标系后, 暂时设点B的坐标为(x_0, y_0), 按题意列出D、E两点的坐标(x_1, y_1)、(x_2, y_2)所满足的方程, 求出D、E坐标后, 再求点M的坐标. 如果点M的坐标与点B的坐标无关, 则点M的位置可定.



[解一] 取A、C两点所在直线为x轴, AC的中点O为原点, 建立直角坐标系. 设A、B、C的坐标分别为$(a, 0)$、(x_0, y_0)、$(-a, 0)$. 其中a为已知数, 而x_0, y_0是未知数. 令D、E两点坐标分别为(x_1, y_1)、(x_2, y_2).

$$\because\ AB\perp AD,\quad \therefore\ \frac{y_1}{x_1-a}\cdot\frac{y_0}{x_0-a}=-1,$$

即
$$y_1=\frac{(x_0-a)(a-x_1)}{y_0}\cdots①.\quad \because\ |AB|=|AD|,$$

$$\therefore\ (x_0-a)^2+y_0^2=(x_1-a)^2+y_1^2\cdots②.\quad 以①代入②:$$

$$(x_0-a)^2+y_0^2=(x_1-a)^2+\frac{(x_0-a)^2(x_1-a)^2}{y_0^2},$$

$\because\ (x_0-a)^2+y_0^2\neq 0$, 即得$y_0^2=(x_1-a)^2$. $\therefore\ x_1=a-y_0$, 或$x_1=a+y_0$(不合题意, 舍去). 代入①: $y_1=x_0-a$, $\therefore$ 点D的坐标为$(a-y_0, x_0-a)$. 同理, 点E的坐标为$(y_0-a, -x_0-a)$. $\therefore$ DE中点M的坐标为$(0, -a)$. 即点M在AC的中点O的下方, 且$|OM|=|OA|$. 由此可以找到埋藏球的地点.

[分析二] 可根据A、B、C三点的坐标, 运用向量旋转计算出D、E两点的坐标.

[解二] 取坐标系及各点坐标同前. 令$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB})=\alpha$, $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{CB})=\beta$. 则$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AD})=\alpha+\frac{\pi}{2}$, $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{CE})=\beta-\frac{\pi}{2}$. 根据提要(1.21):

$$x_1-a=(\overrightarrow{AD})_{Ox}=|AD|\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-|AB|\sin\alpha=-(y_0-0),$$

$$\therefore\ x_1=a-y_0.$$

$$y_1-0=(\overrightarrow{AD})_{Oy}=|AD|\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=|AB|\cos\alpha=x_0-a,$$

$\therefore\ y_1=x_0-a$. 故点 D 的坐标为$(a-y_0,\ x_0-a)$.

又 $x_2-(-a)=(\overrightarrow{CE})_{Ox}=|CE|\cos\left(\beta-\dfrac{\pi}{2}\right)=|CB|\sin\beta=y_0-0,$

$$\therefore\quad x_2=y_0-a.$$

$$y_2-0=(\overrightarrow{CE})_{Oy}=|CE|\sin\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)=-|CB|\cos\beta=-(x_0+a),$$

$\therefore\ y_2=-x_0-a$. 故点 E 坐标为$(y_0-a,\ -x_0-a)$. 于是 DE 的中点 M 为$(0,\ -a)$. 结果同[解一].

[分析三] 运用矩阵来描述旋转,也可获得 D、E 两点的坐标.

[解三] 建立坐标系和设各点坐标同前.

$$\because\ \begin{pmatrix}x_1-a\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 90^\circ & -\sin 90^\circ\\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0-a\\ y_0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0-a\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y_0\\ x_0-a\end{pmatrix},$$

$$\therefore\ \begin{cases}x_1-a=-y_0\\ y_1=x_0-a.\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}x_1=a-y_0\\ y_1=x_0-a.\end{cases}$$

又 $$\begin{pmatrix}x_2+a\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(-90^\circ) & -\sin(-90^\circ)\\ \sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0+a\\ y_0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0+a\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_0\\ -x_0-a\end{pmatrix},$$

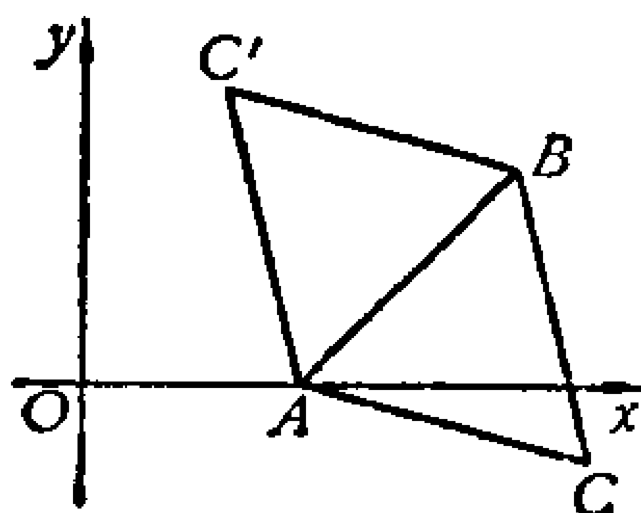
$$\therefore\ \begin{cases}x_2+a=y_0\\ y_2=-x_0-a,\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}x_2=y_0-a\\ y_2=-x_0-a.\end{cases}$$

$\therefore$ 点 M 的坐标为$(0,\ -a)$. 结果同[解一].

[说明] 求满足一定条件的点的坐标$(x,\ y)$,可根据题设条件,列出 x、y 满足的方程组,解方程组求出 x、y. 列方程的依据为:(1) 点所满足的条件的坐标化;(2)利用向量射影公式(1.21),建立已知点坐标与未知点坐标的关系;(3)利用矩阵运算描述点的几何变换,根据矩阵相等的概念,列出变换前后点的坐标之间的方程.

21. 正三角形两个顶点的坐标是 $A(1,\ 0)$、$B(2,\ 1)$. 求第三个顶点 C 的坐标.

［分析］ 点C是正三角形的顶点，应满足$|CA|=|CB|=|AB|$的条件，据此可列出方程求解.



［解］ 设点C的坐标为(x, y)，

$\because$ $|CA|=|AB|$，

$\therefore$ $(x-1)^2+y^2=2\cdots①$.

又 $\because$ $|CB|=|AB|$，

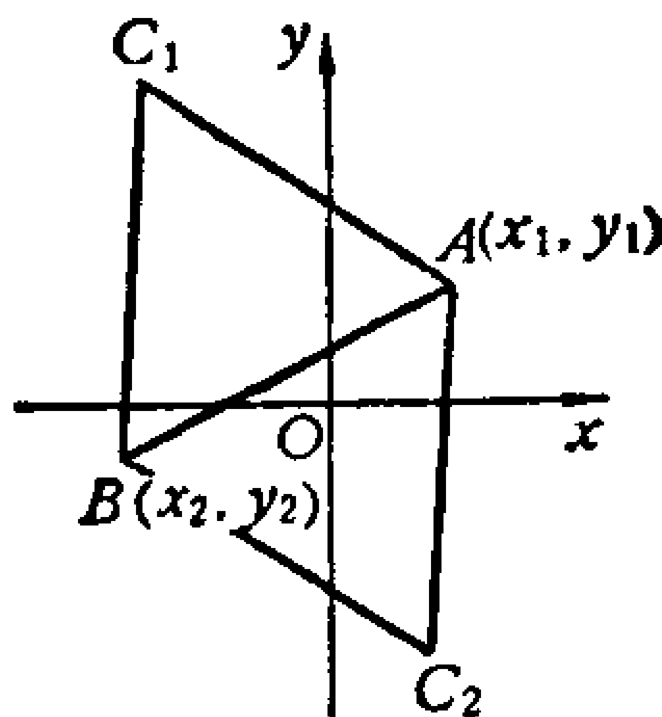
$\therefore$ $(x-2)^2+(y-1)^2=2\cdots②$.

由①、②得
$$\begin{cases}x^2+y^2-2x-1=0\\ x^2+y^2-4x-2y+3=0\end{cases}\cdots③.$$

解③得
$$\begin{cases}x=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\\ y=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2},\end{cases}\quad \begin{cases}x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\\ y=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$$

$\therefore$ 正三角形第三个顶点的坐标为
$$C\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\text{ 或 }C'\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right).$$

22. 已知两点$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$. 求以AB为一边的正三角形的第三顶点的坐标.



［解一］ 设点C_1坐标为(x, y). 向量$\overrightarrow{BA}$对应的复数$z_1=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i$；向量$\overrightarrow{BC_1}$对应的复数$z_2=(x-x_2)+(y-y_2)i$. 而
$$z_1\cdot(\cos 60°+i\sin 60°)=z_2.$$

$$\therefore\ [(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i]\left[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]=(x-x_2)+(y-y_2)i.$$

$$\frac{x_1-x_2}{2}-\frac{\sqrt{3}(y_1-y_2)}{2}+\left(\frac{y_1-y_2}{2}+\frac{\sqrt{3}(x_1-x_2)}{2}\right)i$$
$$=x-x_2+(y-y_2)i.$$

$$\therefore\ x=\frac{x_1+x_2-\sqrt{3}y_1+\sqrt{3}y_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2+\sqrt{3}x_1-\sqrt{3}x_2}{2}.$$

故点C_1坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2-\sqrt{3}\,y_1+\sqrt{3}\,y_2}{2},\ \frac{y_1+y_2+\sqrt{3}\,x_1-\sqrt{3}\,x_2}{2}\right).$$

同理可求另一顶点 C_2 的坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2+\sqrt{3}\,y_1-\sqrt{3}\,y_2}{2},\ \frac{y_1+y_2-\sqrt{3}\,x_1+\sqrt{3}\,x_2}{2}\right).$$

［解二］ 对应于旋转角 θ 变换的矩阵为

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix}\cos 60^\circ & -\sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-x_2\\ y_1-y_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(x_1-x_2)\cos 60^\circ-(y_1-y_2)\sin 60^\circ\\ (x_1-x_2)\sin 60^\circ+(y_1-y_2)\cos 60^\circ\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(x_1-x_2)-\frac{\sqrt{3}}{2}(y_1-y_2)\\ \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1-x_2)+\frac{1}{2}(y_1-y_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x_2\\ y-y_2\end{pmatrix}.$$

$\therefore$ 点 C_1 的坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2-\sqrt{3}\,y_1+\sqrt{3}\,y_2}{2},\ \frac{\sqrt{3}\,x_1-\sqrt{3}\,x_2+y_1+y_2}{2}\right).$$

同理从

$$\begin{pmatrix}\cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ)\\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-x_2\\ y_1-y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x_2\\ y-y_2\end{pmatrix}$$

可求出点 C_2 的坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2+\sqrt{3}\,y_1-\sqrt{3}\,y_2}{2},\ \frac{y_1+y_2-\sqrt{3}\,x_1+\sqrt{3}\,x_2}{2}\right).$$

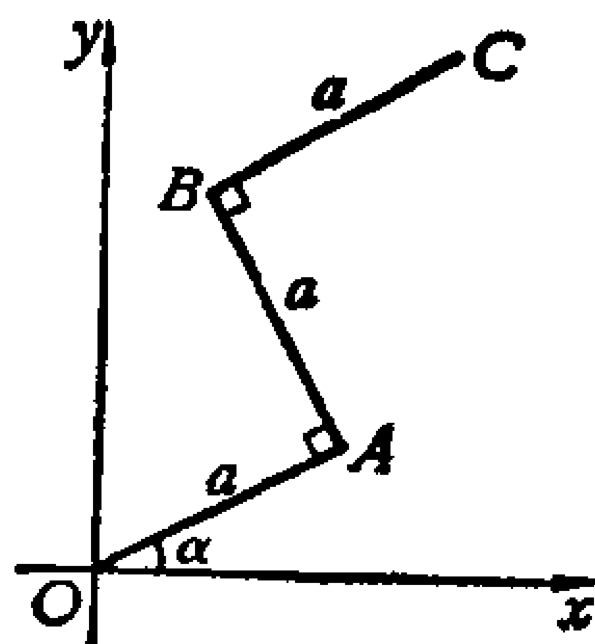
23. 有 _|‾ 形折线 $OABC$, 每段长均为 a, 各段之间均互相垂直, 设第一段的一端位于原点 O, 这段与 x 轴正向的夹角为 α. 求点 A、B、C 的坐标.

［解一］ $|OA|=|AB|=|BC|=a$, $\because$ $(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OA})=\alpha$,

$$\therefore\ (\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{AB})=\alpha+\frac{\pi}{2},\ (\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{BC})=\alpha+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=\alpha.$$

设点 A 坐标为 $(x_1,\ y_1)$, 则 $x_1=a\cos\alpha$, $y_1=a\sin\alpha$. 设点 B 坐标为 $(x_2,\ y_2)$, 则

$$(\overrightarrow{AB})_{Ox}=a\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-a\sin\alpha=x_2-x_1;$$



$$(\overrightarrow{AB})_{Oy}=a\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=a\cos\alpha=y_2-y_1.$$

$$\therefore\quad x_2=a(\cos\alpha-\sin\alpha),$$
$$y_2=a(\sin\alpha+\cos\alpha).$$

设点 C 坐标为 (x_3, y_3)，则

$$(\overrightarrow{BC})_{Ox}=a\cos\alpha=x_3-x_2;$$
$$(\overrightarrow{BC})_{Oy}=a\sin\alpha=y_3-y_2.$$

$\therefore$ $x_3=a(2\cos\alpha-\sin\alpha)$, $y_3=a(2\sin\alpha+\cos\alpha)$.

$\therefore$ 各点坐标为：$A(a\cos\alpha,\ a\sin\alpha)$，$B(a\cos\alpha-a\sin\alpha,\ a\sin\alpha+a\cos\alpha)$，$C(2a\cos\alpha-a\sin\alpha,\ 2a\sin\alpha+a\cos\alpha)$.

［解二］ 根据三角函数定义可知点 A 坐标为 $(a\cos\alpha,\ a\sin\alpha)$. 设点 B 坐标为 (x, y)，并设 $\alpha\neq 0$，则

$$\begin{cases}(x-a\cos\alpha)^2+(y-a\sin\alpha)^2=a^2\\ \dfrac{y-a\sin\alpha}{x-a\cos\alpha}=\operatorname{tg}\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}\quad\cdots①.$$

解方程组①得

$$\begin{cases}x=a\cos\alpha-a\sin\alpha\\ y=a\cos\alpha+a\sin\alpha\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x=a\cos\alpha+a\sin\alpha\\ y=a\sin\alpha-a\cos\alpha.\end{cases}$$

根据图形位置应取

$$\begin{cases}x=a\cos\alpha-a\sin\alpha\\ y=a\cos\alpha+a\sin\alpha.\end{cases}$$

$\therefore$ 点 B 的坐标是 $(a\cos\alpha-a\sin\alpha,\ a\cos\alpha+a\sin\alpha)$. $\alpha=0$ 时，容易看出点 B 坐标为 (a, a)，可以统一到前面的一般式中去. 设点 C 坐标为 (x, y)，并设 $\alpha\neq 90°$，则

$$\begin{cases}[x-(a\cos\alpha-a\sin\alpha)]^2+[y-(a\cos\alpha+a\sin\alpha)]^2=a^2\\ \dfrac{y-a\cos\alpha-a\sin\alpha}{x-a\cos\alpha+a\sin\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\end{cases}\quad\cdots②.$$

解方程组②得

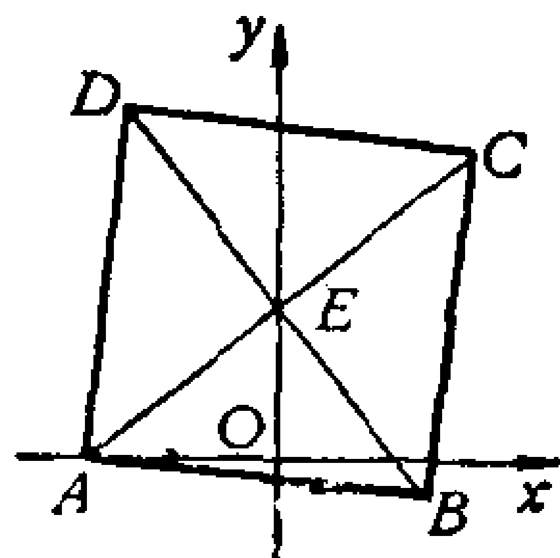
$$\begin{cases}x=2a\cos\alpha-a\sin\alpha\\ y=2a\sin\alpha+a\cos\alpha\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x=-a\sin\alpha\\ y=a\cos\alpha.\end{cases}$$

根据图形位置应取

$$\begin{cases} x=2a\cos\alpha-a\sin\alpha \\ y=2a\sin\alpha+a\cos\alpha. \end{cases}$$

$\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，容易看出点 C 坐标为 $(-a, 2a)$，可以统一到 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ 的结论之中． ∴ 点 C 坐标为 $(2a\cos\alpha-a\sin\alpha,\ 2a\sin\alpha+a\cos\alpha)$．

24．已知正方形的一个顶点为 $A(-4,0)$，它的中心为 $E(0,3)$．求其它各顶点的坐标．



［分析一］ 设正方形其它三个顶点为 B、C、D．用分点公式容易求出点 C 的坐标．根据 $|BE|=|DE|=|AE|$ 与 $BD\perp AE$，列出 B、D 的坐标所满足的方程，即可得解．

［解一］ 设点 C 坐标为 (x, y)． ∵ E 为 AC 中点， ∴ $\frac{-4+x}{2}=0$，$x=4$；$\frac{0+y}{2}=3$，$y=6$．即点 C 坐标为 $(4, 6)$．

设点 B 坐标为 (x, y)． ∵ $|BE|=|DE|=|AE|$，

$$\therefore\quad x^2+(y-3)^2=(-4-0)^2+(0-3)^2=25\cdots①.$$

$$\because\quad BD\perp AE,\quad\therefore\quad \frac{y-3}{x-0}\cdot\frac{0-3}{-4-0}=-1,$$

即

$$y=-\frac{4}{3}x+3\cdots②.$$

解①、②组成的方程组得

$$\begin{cases} x=3 \\ y=-1, \end{cases}\quad \begin{cases} x=-3 \\ y=7. \end{cases}$$

∴ 点 B 的坐标为 $(3, -1)$，点 D 的坐标为 $(-3, 7)$．

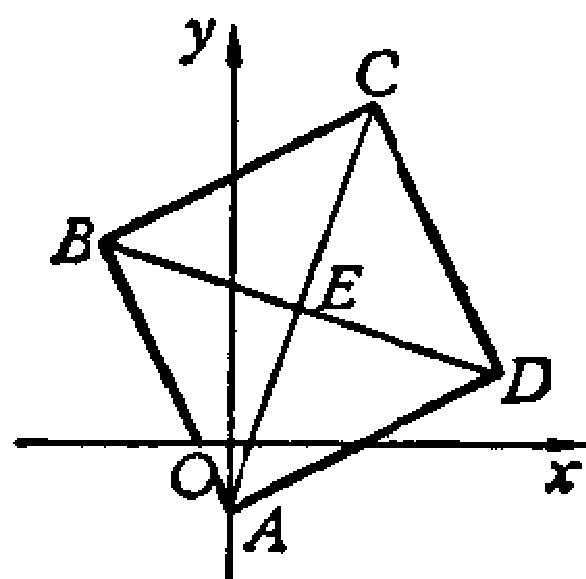
［分析二］ 利用复数的向量表示来解．

［解二］ 设点 B 坐标为 (x, y)，向量 $\overrightarrow{EA}$ 绕点 E 按逆时针旋转 $90°$ 得向量 $\overrightarrow{EB}$．根据复数知识可知：$\overrightarrow{EA}=-4-3i$，$\overrightarrow{EB}=x+(y-3)i$．而 $(-4-3i)\cdot i=x+(y-3)i$．$3-4i=x+(y-3)i$．利用复数相等条件解得 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1. \end{cases}$ ∴点 B 坐标为 $(3, -1)$．同理可求得点 C 坐标为 $(4, 6)$，点 D 坐标为 $(-3, 7)$．

25．已知正方形 $ABCD$ 相对两个顶点 $A(0, -1)$ 和 $C(2, 5)$．

求另外两顶点 B 和 D 的坐标.

[解一] 设点 B、D 的坐标分别为(x_B, y_B)和(x_D, y_D). ∵ AC 和 BD 互相平分,易得对角线中点 E 的坐标为(1, 2),



∴ $\frac{x_B+x_D}{2}=1\cdots$①, $\frac{y_B+y_D}{2}=2\cdots$②.

∵ $|AC|=|BD|$,

∴ $(x_B-x_D)^2+(y_B-y_D)^2=40\cdots$③.

∵ $AC\perp BD$, ∴ $\frac{y_B-y_D}{x_B-x_D}\cdot\frac{6}{2}=-1\cdots$④.

联立方程 ①、②、③、④, 解得

$x_B=-2,\ y_B=3;\ x_D=4,\ y_D=1.$ 或 $x_B=4,\ y_B=1;\ x_D=-2,\ y_D=3.$

即 $B(-2, 3)$, $D(4, 1)$ 或 $B(4, 1)$, $D(-2, 3)$.

[解二] 设点 B 坐标为 (x, y). 向量$\overrightarrow{EB}$对应的复数 $z_1=(x-1)+(y-2)i$, 向量$\overrightarrow{EA}$对应的复数 $z_2=-1-3i$. 根据复数乘法的几何意义可知 $z_1\cdot i=z_2$. 即

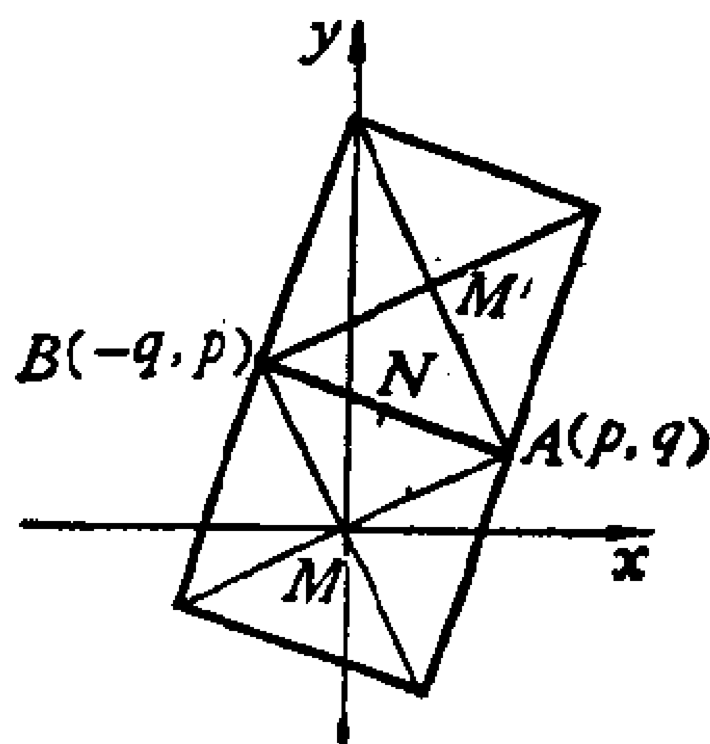
$$[(x-1)+(y-2)i]i=-1-3i,\ (x-1)i-(y-2)=-1-3i.$$

又根据复数相等的定义有 $x-1=-3$ 和 $y-2=1$. ∴ $x=-2$, $y=3$. 即点 B 坐标为$(-2, 3)$.

设点 D 坐标为(x, y). ∵ 点 E 是对角线 BD 的中点, ∴ $\frac{x-2}{2}=1$; $\frac{y+3}{2}=2$. 得 $x=4$, $y=1$. 即点 D 坐标为$(4, 1)$.

如果 A、B、C、D 的旋转方向是逆时针方向, 则点 B 和点 D 坐标对换. 即点 B 坐标为$(4, 1)$, 点 D 坐标为$(-2, 3)$.

26. 已知正方形相邻两顶点坐标是 $A(p, q)$, $B(-q, p)$. 求正方形的中心坐标.



[分析] 设正方形的中心为 M, 则 $|MA|=|MB|$, 且 $AM\perp BM$, 故 M 点可求.

[解] 设正方形中心坐标为 $M(x, y)$.

∵ $|MA|=|MB|$,

∴ $(x-p)^2+(y-q)^2=(x+q)^2+(y-p)^2\cdots$①.

∵ $MA\perp MB$,

$$\therefore\quad \frac{y-q}{x-p}\cdot\frac{y-p}{x+q}=-1\cdots②.$$

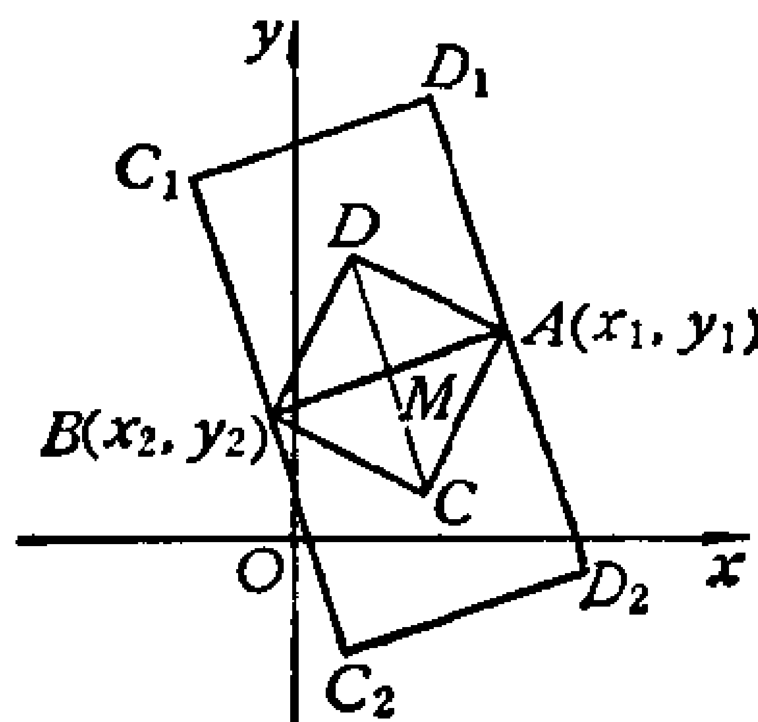
联立方程①、②,解得

$$\begin{cases}x=0\\y=0,\end{cases}\quad\begin{cases}x=p-q\\y=p+q.\end{cases}$$

∴ 正方形中心 M 的坐标为 $(0,0)$ 或 $(p-q, p+q)$.

[说明] 取 AB 中点 N, 将 $\overrightarrow{NA}$ 旋转 $\pm 90°$, 也可得解.

27. 已知两点 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$. 求以 A、B 为两顶点的正方形另外两个顶点的坐标.



[分析] 把 A、B 作为相邻两顶点的正方形有两个，把 A、B 作为相对顶点的正方形只有一个，据此可根据复数乘法意义求解.

[解] 设 A、B 是正方形的相邻两顶点. 设顶点 D_1 的坐标为 (x, y). 向量 $\overrightarrow{AD_1}$ 对应的复数 $z_1=(x-x_1)+(y-y_1)i$, 向量 $\overrightarrow{AB}$ 对应的复数 $z_2=(x_2-x_1)+(y_2-y_1)i$. $z_1\cdot i=z_2$,

$$\therefore\quad [(x-x_1)+(y-y_1)i]\cdot i=(x_2-x_1)+(y_2-y_1)i,$$

$$(x-x_1)i-(y-y_1)=(x_2-x_1)+(y_2-y_1)i.$$

$$x=x_1+y_2-y_1,\ y=x_1+y_1-x_2.$$

$$\therefore\quad D_1 \text{ 的坐标为 } (x_1+y_2-y_1,\ x_1+y_1-x_2).$$

设顶点 C_1 的坐标为 (x, y), 则向量 $\overrightarrow{BC_1}$ 对应的复数 $z_3=(x-x_2)+(y-y_2)i$. 向量 $\overrightarrow{BA}$ 对应的复数 $z_4=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i$. $z_4\cdot i=z_3$,

$$\therefore\quad [(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i]\cdot i=(x-x_2)+(y-y_2)i,$$

$$(x_1-x_2)i-(y_1-y_2)=(x-x_2)+(y-y_2)i.$$

$$x=x_2+y_2-y_1,\ y=x_1+y_2-x_2.$$

∴ 点 C_1 的坐标为 $(x_2+y_2-y_1,\ x_1+y_2-x_2)$. 同理可解出

D_2 的坐标为 $(x_1+y_1-y_2,\ x_2+y_1-x_1)$.

C_2 的坐标为 $(x_2+y_1-y_2,\ x_2+y_2-x_1)$.

如果 A、B 是正方形的相对两顶点,则 AB 中点 M 的坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

设点 C 坐标为 (x, y). 向量 $\overrightarrow{MA}$ 对应的复数

$$z_5=\frac{x_1-x_2}{2}+\frac{y_1-y_2}{2}i,$$

向量 $\overrightarrow{MC}$ 对应的复数

$$z_6=\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)i. \quad z_6\cdot i=z_5,$$

$$\therefore\quad \left[\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)i\right]i=\frac{x_1-x_2}{2}+\frac{y_1-y_2}{2}i,$$

$$\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)i-\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\frac{x_1-x_2}{2}+\frac{y_1-y_2}{2}i.$$

$$x=\frac{x_1+x_2+y_1-y_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2+x_2-x_1}{2}.$$

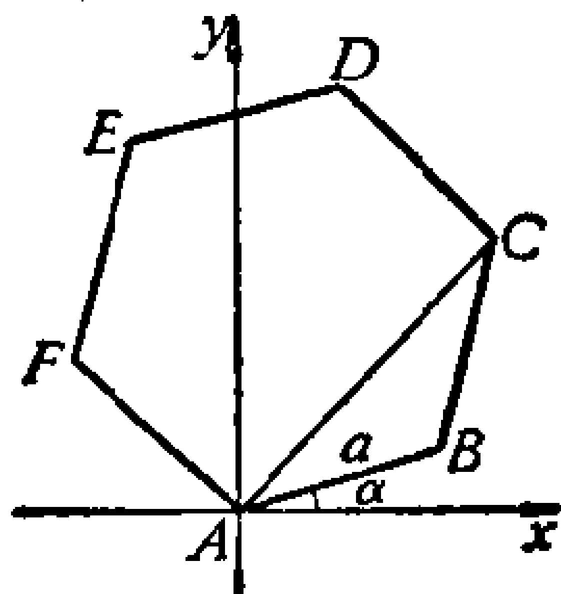
$\therefore$ 点 C 坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2+y_1-y_2}{2},\ \frac{y_1+y_2+x_2-x_1}{2}\right).$$

$\because$ $|CM|=|MD|$, $\therefore$ 点 D 的坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2+y_2-y_1}{2},\ \frac{y_1+y_2+x_1-x_2}{2}\right).$$

28. 一正六边形 $ABCDEF$(逆时针向), 点 A 位于原点 O 上, AB 与 x 轴正向夹角为 $\alpha(0<\alpha<90°)$, 边长为 a. 求顶点 B、C、F 的坐标.



[解] 设各点坐标为 $B(x_B, y_B)$、$C(x_C, y_C)$、$F(x_F, y_F)$, 则 $x_B=a\cos\alpha$, $y_B=a\sin\alpha$.

$\because$ $AC=\sqrt{3}a$, $\angle xAC=\alpha+30°$,

$\therefore$ $x_C=\sqrt{3}a\cos(\alpha+30°)$,

$y_C=\sqrt{3}a\sin(\alpha+30°)$.

$\because$ $\angle xAF=120°+\alpha$,

$\therefore$ $x_F=a\cos(120°+\alpha)$, $y_F=a\sin(120°+\alpha)$.

$\therefore$ 所求各点坐标为:

$B(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$、$C(\sqrt{3}a\cos(\alpha+30°), \sqrt{3}a\sin(\alpha+30°))$、

$F(a\cos(\alpha+120°), a\sin(\alpha+120°))$.

29. 设平行四边形三顶点坐标为 $A(0, 0)$、$B(0, b)$、$C(a, c)$,

求第四个顶点 D 的坐标.

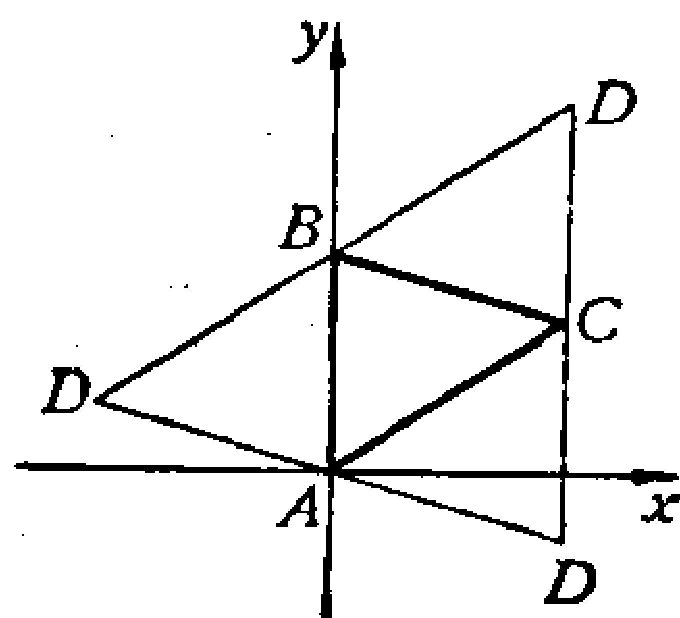
［分析］ 第四个顶点 D 的可能位置有三个，用对角线中点重合来确定 D 的坐标.

［解］ 设第四个顶点的坐标为 $D(x, y)$，分三种情况研究.

(1) 若四个顶点按逆时针顺序为 $ACDB$，则

$$\frac{x}{2}=\frac{a}{2};\quad \frac{y}{2}=\frac{b+c}{2}.$$

∴ 点 D 的坐标为 $(a, b+c)$.



(2) 若四个顶点按逆时针顺序为 $ACBD$，则

$$\frac{x+a}{2}=0;\quad \frac{y+c}{2}=\frac{b}{2}.$$

∴ $x=-a,\ y=b-c$. ∴ 点 D 的坐标为 $(-a, b-c)$.

(3) 若四个顶点按逆时针顺序为 $ADCB$，则

$$\frac{x}{2}=\frac{a}{2},\quad \frac{y+b}{2}=\frac{c}{2}.$$

∴ $x=a,\ y=c-b$. 点 D 的坐标为 $(a, c-b)$.

30. 点 P 到 x 轴的距离与到 y 轴距离之比是 $3:4$，且与点 $A(1, 2)$、$B(-3, 4)$ 所组成的三角形面积是 5. 求点 P 的坐标.

［分析］ 将点 P 所应满足的条件转化为方程，然后求解.

［解］ 设点 P 的坐标为 (x, y)，根据条件得

$$\begin{cases}\left|\dfrac{y}{x}\right|=\dfrac{3}{4} & \cdots① \\ \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=\pm 10 & \cdots②,\end{cases}$$

即

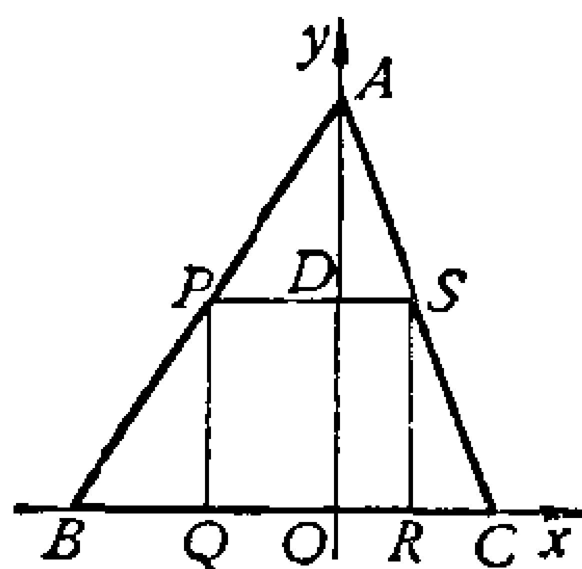
$$\begin{cases}y=\dfrac{3}{4}x \\ x+2y=0,\end{cases} \begin{cases}y=\dfrac{3}{4}x \\ x+2y=10,\end{cases} \begin{cases}y=-\dfrac{3}{4}x \\ x+2y=0,\end{cases} \begin{cases}y=-\dfrac{3}{4}x \\ x+2y=10.\end{cases}$$

分别解得

$$\begin{cases}x=0 \\ y=0,\end{cases} \begin{cases}x=4 \\ y=3,\end{cases} \begin{cases}x=0 \\ y=0,\end{cases} \begin{cases}x=-20 \\ y=15.\end{cases}$$

∴ 所求点 P 坐标为: $(0, 0)$ 或 $(4, 3)$ 或 $(-20, 15)$.

31. $\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A(0, a)$, $B(b, 0)$, $C(c, 0)$, P、Q、R、S 为内接正方形的四个顶点, P、S 分别在 AB、AC 上, Q、R 在 BC 上. 求点 P、Q、R、S 的坐标.



[解] 如图, 设正方形边长为 y, 根据条件

$$\frac{PS}{BC}=\frac{DA}{OA}, \text{ 即 } \frac{y}{c-b}=\frac{a-y}{a},$$

$$\therefore\quad y=\frac{ac-ab}{a+c-b}.$$

$\therefore$ 点 S、P 的纵坐标是 $\dfrac{ac-ab}{a+c-b}$.

又 $\because\quad \dfrac{AD}{SR}=\dfrac{DS}{RC},\ \dfrac{AD}{PQ}=\dfrac{DP}{QB}.$

设点 S 的横坐标为 x_1, 点 P 的横坐标为 x_2, 则

$$\frac{\dfrac{ac-ab}{a+c-b}-a}{\dfrac{ab-ac}{a+c-b}}=\frac{x_1}{c-x_1}\cdots①,\quad \frac{\dfrac{ac-ab}{a+c-b}-a}{\dfrac{ab-ac}{a+c-b}}=\frac{x_2}{b-x_2}\cdots②.$$

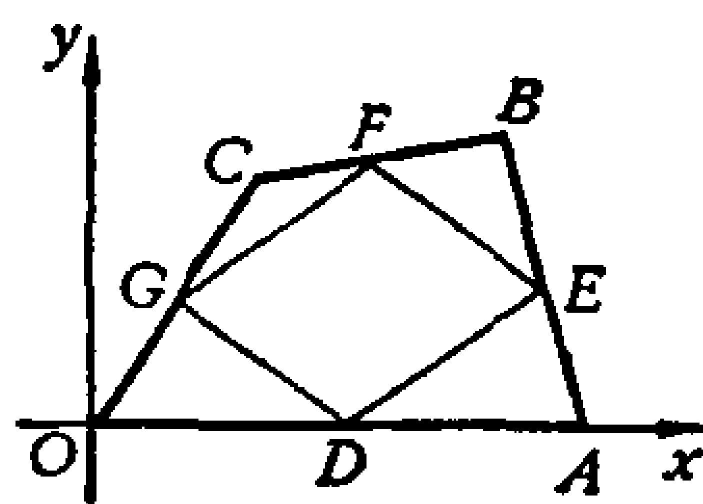
解①得 $x_1=\dfrac{ac}{a+c-b}$, 解②得 $x_2=\dfrac{ab}{a+c-b}$.

$\therefore$ 点 S、P 的坐标分别是

$$\left(\frac{ac}{a+c-b}, \frac{ac-ab}{a+c-b}\right)、\left(\frac{ab}{a+c-b}, \frac{ac-ab}{a+c-b}\right).$$

点 R 坐标为 $\left(\dfrac{ac}{a+c-b}, 0\right)$, 点 Q 坐标为 $\left(\dfrac{ab}{a+c-b}, 0\right)$.

32. 用解析法证明: 连接任意四边形各邻边中点而得另一四边形的周长, 等于原四边形两对角线之和.



[证] 建立直角坐标系如图. 设四边形顶点坐标为 $O(0, 0)$、$A(a, 0)$、$B(b, c)$、$C(d, f)$, 则四中点坐标为

$$D\left(\frac{a}{2}, 0\right)、E\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)、$$

$$F\left(\frac{b+d}{2}, \frac{c+f}{2}\right)、G\left(\frac{d}{2}, \frac{f}{2}\right).$$

四边形 $DEFG$ 的周长 $=|DE|+|EF|+|FG|+|GD|$

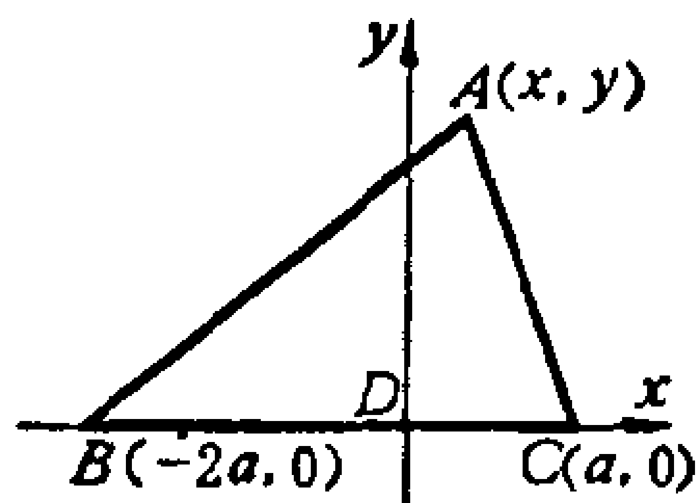
$$=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2+\left(\frac{f}{2}\right)^2}$$

$$+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2+\left(\frac{f}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{(a-d)^2+f^2}=|BO|+|AC|.$$

由此命题得证.

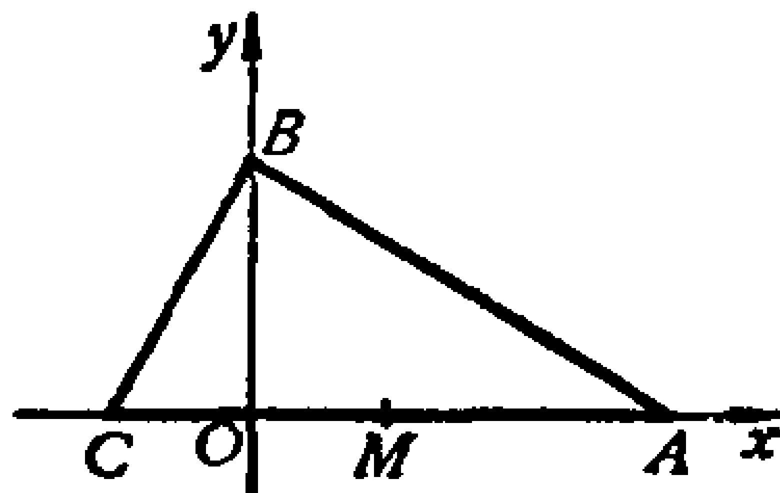
33. 设 D 为 $\triangle ABC$ 边 BC 上的一点，而 $BD=2DC$. 求证：$|AB|^2+2|AC|^2=3|AD|^2+6|CD|^2$.



［证］ 建立直角坐标系如图. $\triangle ABC$ 三顶点的坐标分别为 $A(x, y)$、$B(-2a, 0)$、$C(a, 0)$.

$$|AB|^2+2|AC|^2=(x+2a)^2+y^2+2(x-a)^2+2y^2$$
$$=3(x^2+y^2)+6a^2$$
$$=3|AD|^2+6|CD|^2.$$

34. $\triangle ABC$ 中 $\angle C=2\angle A$, M 为 AC 边的中点, $BO\perp AC$, O 是垂足. 求证: $|OM|=\frac{1}{2}|BC|$.



［证］ 取 AC 所在直线为 x 轴, BO 所在直线为 y 轴建立直角坐标系如图. 设 $\angle A=\theta$, 则 $\angle C=2\theta$. 点 B 坐标为 $(0, b)$, 则点 A 坐标为 $(b\operatorname{ctg}\theta, 0)$, 点 C 坐标为 $(-b\operatorname{ctg}2\theta, 0)$. 点 M 坐标为 $(x, 0)$, 则

$$x=\frac{b}{2}(\operatorname{ctg}\theta-\operatorname{ctg}2\theta)=\frac{b}{2}\csc 2\theta,$$

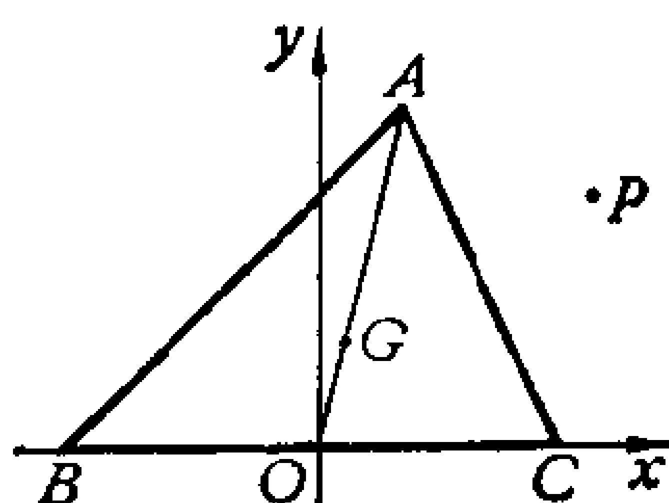
即 $|OM|=\frac{b}{2}\csc 2\theta$.　$\because$　$|BC|=b\csc 2\theta$,　$\therefore$　$|OM|=\frac{1}{2}|BC|$.

当 $\angle C$ 是钝角或直角时结论仍成立, 证法相同.

35. $\triangle ABC$ 的重心为 G, P 为任意一点. 求证:

(1) $3(GA^2+GB^2+GC^2)=BC^2+CA^2+AB^2$;

(2) $PA^2+PB^2+PC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3GP^2$.



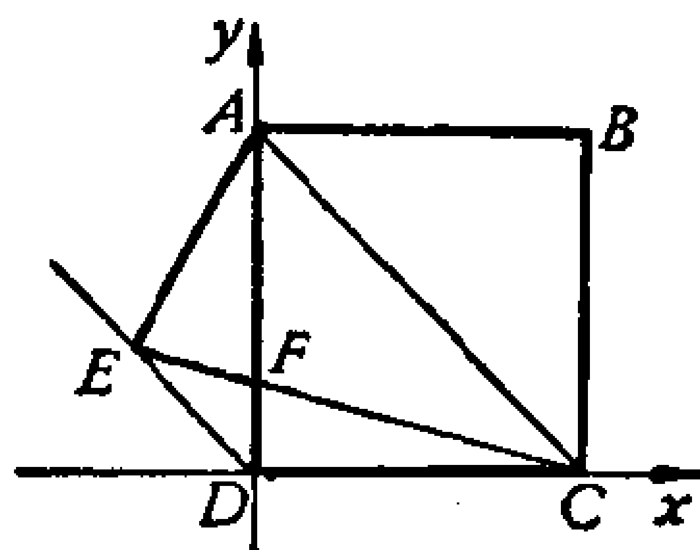
［证］ (1) 取 BC 为 x 轴，BC 中点为原点建立直角坐标系. 设点 A、B、C 坐标分别为 (a,b)、$(-c,\ 0)$、$(c,\ 0)$，则重心 G 的坐标为 $\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3}\right)$，

$$\because\quad 3(GA^2+GB^2+GC^2)=2a^2+2b^2+6c^2,$$
$$BC^2+CA^2+AB^2=2a^2+2b^2+6c^2,$$
$$\therefore\quad 3(GA^2+GB^2+GC^2)=BC^2+CA^2+AB^2.$$

(2) 设点 P 坐标为 $(x,\ y)$，

则 $$AP^2+BP^2+CP^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(x+c)^2+y^2+(x-c)^2+y^2$$
$$=3x^2+3y^2-2ax-2by+a^2+b^2+2c^2.$$
$$GA^2+GB^2+GC^2+3GP^2$$
$$=\frac{2}{3}a^2+\frac{2}{3}b^2+2c^2+3\left[\left(x-\frac{a}{3}\right)^2+\left(y-\frac{b}{3}\right)^2\right]$$
$$=3x^2+3y^2-2ax-2by+a^2+b^2+2c^2.$$
$$\therefore\quad PA^2+PB^2+PC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3GP^2.$$

36. 在正方形 $ABCD$ 中，过一个顶点 D 作对角线 CA 的平行线 DE，若 $|CE|=|AC|$，且 CE 交边 DA 于点 F. 求证 $|AE|=|AF|$.



［证］ 建立直角坐标系如图. 设正方形顶点坐标分别为 $A(0,\ a)$、$B(a,\ a)$、$C(a,\ 0)$、$D(0,\ 0)$.
$\because$ $CA\parallel DE$，$\therefore$ DE 在第二象限的平分线上. 可设点 E 坐标为 $E(x,\ -x)$ $(x<0)$.

$$\because\quad |CE|=|AC|=\sqrt{2}\,a,$$
$$\therefore\quad (x-a)^2+x^2=2a^2.$$

$\therefore$ $x=\frac{a}{2}(1-\sqrt{3})$. 故点 E 的坐标为 $\left(\frac{a}{2}(1-\sqrt{3}),\ \frac{a}{2}(\sqrt{3}-1)\right)$.

设点 F 的坐标为 $(0,\ y)$，$\because$ E、F、C 共线，

$$\therefore\quad \begin{vmatrix} \frac{a}{2}(1-\sqrt{3}) & \frac{a}{2}(\sqrt{3}-1) & 1 \\ 0 & y & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

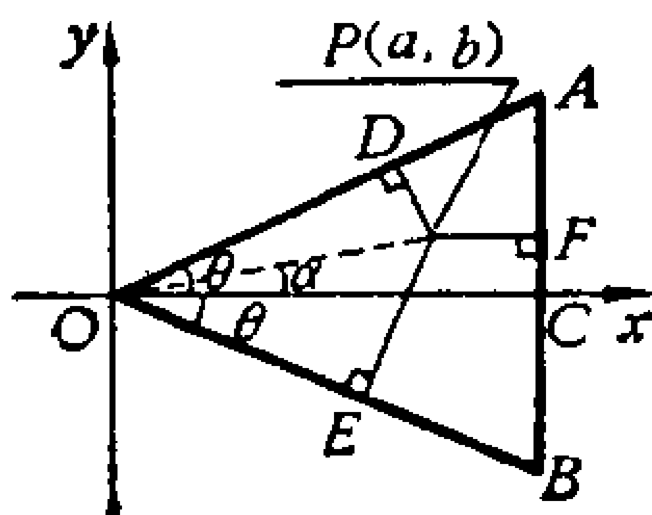
即 $$\frac{a}{2}y(\sqrt{3}+1)-\frac{a^2}{2}(\sqrt{3}-1)=0,$$

$$\therefore\quad y=(2-\sqrt{3})a.\quad\therefore\quad |AF|=a-(2-\sqrt{3})a=(\sqrt{3}-1)a,$$

$$|AE|=\sqrt{\frac{a^2}{4}(\sqrt{3}-1)^2+\frac{3a^2}{4}(\sqrt{3}-1)^2}=(\sqrt{3}-1)a.$$

$$\therefore\quad |AE|=|AF|.$$

37. 如图，已知等腰$\triangle OAB$的一顶点重合于原点，顶角$\angle AOB$的平分线OC位于x轴的正半轴上，P为其内部一点，其坐标为$(a,\ b)$，设$\angle BOA=2\theta$，$OC=h$。求点P到两腰的距离$|PD|$、$|PE|$和到底边的距离$|PF|$。



［解］ 设$\angle xOP=\alpha$.

$$\because\quad \angle xOA=\angle BOx=\theta,$$
$$PD\perp OA,\ PE\perp OB.$$

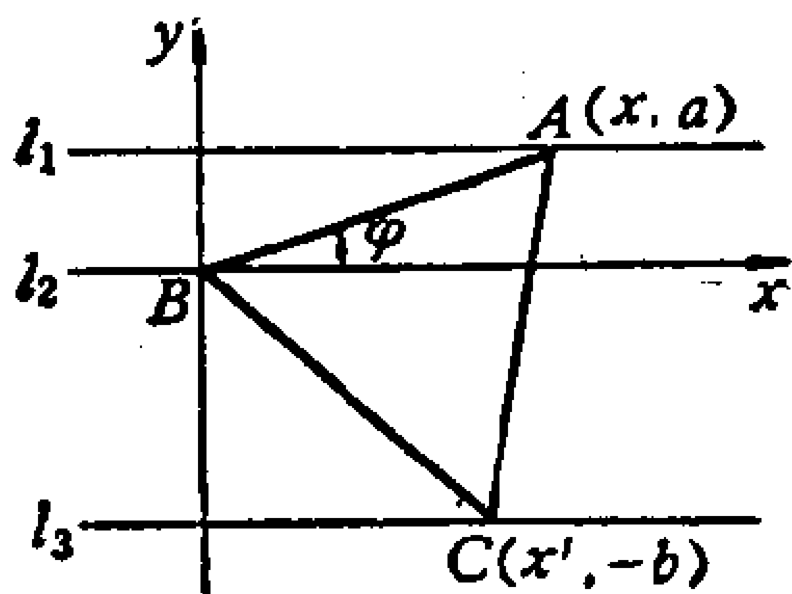
$$\begin{aligned}\therefore\quad |PD|&=|OP|\sin(\theta-\alpha)\\&=|OP|\cos\alpha\sin\theta-|OP|\sin\alpha\cos\theta\\&=a\sin\theta-b\cos\theta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|PE|&=|OP|\sin(\theta+\alpha)=|OP|\cos\alpha\sin\theta+|OP|\sin\alpha\cos\theta\\&=a\sin\theta+b\cos\theta.\end{aligned}$$

又因$\triangle OAB$为等腰三角形，OC为顶角的平分线，$\therefore$ $OC\perp AB$，而$PF\perp AB$，故点F坐标应为$(h,\ b)$.

$$\therefore\quad |PF|=|h-a|=h-a.$$

38. 已知三平行线l_1、l_2、l_3. l_1与l_2之间，l_2与l_3之间的距离分别为a、b. 正三角形ABC的三顶点分别在l_1、l_2、l_3上. 求此正三角形的边长.



［分析］ 如图，取点B为原点，l_2为x轴，建立直角坐标系. 利用$|AB|=|BC|=|CA|$的条件，找出点A的横坐标x与a、b的关系，即可求解.

［解一］ 如图建立直角坐标系. 设A、C两点坐标分别为$(x,\ a)$、$(x',\ -b)$. $\because$ $|AB|=|BC|=|AC|$,

$$\therefore\quad x^2+a^2=x'^2+b^2=(x-x')^2+(a+b)^2.$$

由此得方程组:

$$\begin{cases} x^2-x'^2=b^2-a^2 & \cdots① \\ x^2-2x'x+a^2+2ab=0 & \cdots②. \end{cases}$$

从②得 $x'=\dfrac{x^2+a^2+2ab}{2x}$, 代入①得

$$3x^4+2x^2(a^2-2ab-2b^2)-(a^2+2ab)^2=0.$$

$\therefore\quad x=\dfrac{a+2b}{\sqrt{3}}$. 故此正三角形的边长

$$|AB|=\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{\frac{4}{3}(a^2+ab+b^2)}=\frac{2}{3}\sqrt{3(a^2+ab+b^2)}.$$

［解二］ 建立直角坐标系同前. 设$(\overrightarrow{Bx}, \overrightarrow{BA})=\varphi$, 则

$$(\overrightarrow{Bx}, \overrightarrow{BC})=\varphi-\frac{\pi}{3}.$$

$$\because\quad (\overrightarrow{BC})_{By}=|BC|\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)$$

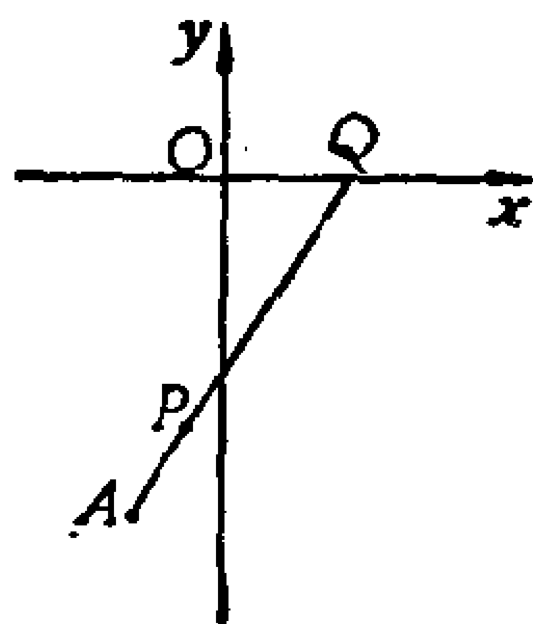
$$=|BA|\sin\varphi\cos\frac{\pi}{3}-|BA|\cos\varphi\sin\frac{\pi}{3}.$$

$$\therefore\quad -b=\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

从此得 $x=\dfrac{a+2b}{\sqrt{3}}$. $\therefore$ 正三角形的边长

$$|AB|=\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{\frac{4}{3}(a^2+ab+b^2)}=\frac{2}{3}\sqrt{3(a^2+ab+b^2)}.$$

39. 已知两点 $P(-1, -6)$ 和 $Q(3, 0)$, 延长 QP 到 A, 使 $|AP|=\dfrac{1}{3}|PQ|$. 求点 A 的坐标.



［解］ 设点 A 坐标为(x, y). 根据题意

$$\lambda=\frac{PA}{AQ}=-\frac{1}{4}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{-1-\frac{1}{4}\times 3}{1-\frac{1}{4}}=-\frac{7}{3},\quad y=\frac{-6}{1-\frac{1}{4}}=-8.$$

∴ 点 A 的坐标为 $\left(-\frac{7}{3}, -8\right)$.

40. 已知两点 $A(2, 3)$ 和 $B(8, 0)$, 求线段 AB 的内分点 P, 使 $AP:PB=PB:AB$.

[解] 设点 P 的坐标为 (x, y). ∵ $\frac{AP}{PB}=\frac{PB}{AB}$,

$$\therefore \frac{x-2}{8-x}=\frac{8-x}{8-2}\cdots①, \quad \frac{y-3}{0-y}=\frac{0-y}{0-3}\cdots②.$$

由①得 $x^2-22x+76=0$, 解得 $x=11\pm3\sqrt{5}$. ∵ 点 P 内分 AB, ∴ 取 $x=11-3\sqrt{5}$. 由②得 $y^2+3y-9=0$, 解得 $y=\frac{-3\pm3\sqrt{5}}{2}$. 同理取 $y=\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$. ∴ 点 P 的坐标为 $\left(11-3\sqrt{5}, \frac{-3+3\sqrt{5}}{2}\right)$.

41. 设 $\triangle ABC$ 三顶点的坐标分别为 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$. 求 $\triangle ABC$ 的重心 G 的坐标.

[分析] 三角形的重心 G 为中线 AM 的三等分点, 即 $AG:GM=2:1$. 利用分点公式即可得解.

[解] 设 BC 的中点为 M, 则 $x_M=\frac{x_2+x_3}{2}$, $y_M=\frac{y_2+y_3}{2}$.

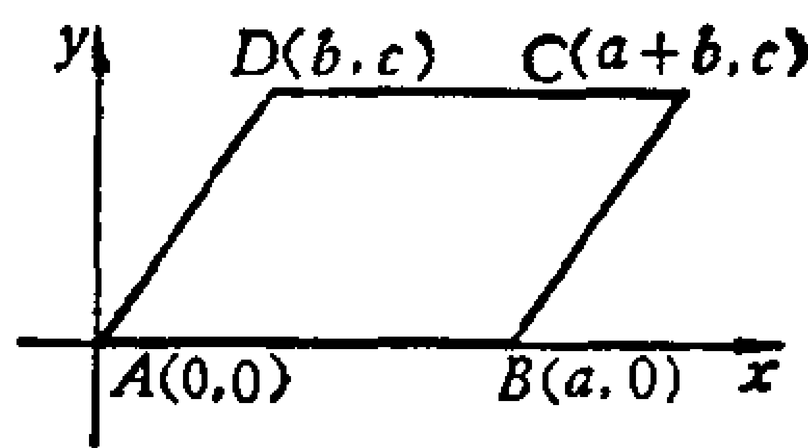
$$\because AG:GM=2:1, \quad \therefore x_G=\frac{x_1+2x_M}{1+2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},$$

$$y_G=\frac{y_1+2y_M}{1+2}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

故重心 G 的坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

42. 求证平行四边形的对角线互相平分.

[证一] 建立直角坐标系如图. 平行四边形 $ABCD$ 四顶点坐标分别为 $A(0, 0)$、$B(a, 0)$、$C(a+b, c)$、$D(b, c)$.



∵ AC 的中点坐标为 $M_1\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$, BD 的中点坐标为 $M_2\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$. ∴ M_1 与 M_2 重合. ∴ 对角线 AC、BD 互相平分.

［证二］ 建立直角坐标系，并设平行四边形 $ABCD$ 的四顶点的坐标分别为 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$、$D(x_4, y_4)$.

$$\because \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}, \quad \therefore \quad (\overrightarrow{AB})_{Ax}=(\overrightarrow{DC})_{Ax}, \ (\overrightarrow{AB})_{Ay}=(\overrightarrow{DC})_{Ay}.$$

$$\therefore \quad x_2-x_1=x_3-x_4 \cdots ①, \ y_2-y_1=y_3-y_4 \cdots ②.$$

从①、②得 $x_1+x_3=x_2+x_4$, $y_1+y_3=y_2+y_4$. 即

$$\frac{x_1+x_3}{2}=\frac{x_2+x_4}{2}, \quad \frac{y_1+y_3}{2}=\frac{y_2+y_4}{2}.$$

∴ 对角线 AC、BD 的中点重合，故互相平分.

43. 设任意六边形 $ABCDEF$, 各边 AB、BC、CD、DE、EF、FA 的中点依次为 M、N、P、Q、R、S. 求证 $\triangle MPR$ 与 $\triangle NQS$ 的重心重合.

［证］ 设六边形 $ABCDEF$ 的顶点坐标分别为:

$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$、$D(x_4, y_4)$、$E(x_5, y_5)$、$F(x_6, y_6)$,

则六边的中点坐标分别为:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)、N\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)、P\left(\frac{x_3+x_4}{2}, \frac{y_3+y_4}{2}\right)、$$

$$Q\left(\frac{x_4+x_5}{2}, \frac{y_4+y_5}{2}\right)、R\left(\frac{x_5+x_6}{2}, \frac{y_5+y_6}{2}\right)、S\left(\frac{x_6+x_1}{2}, \frac{y_6+y_1}{2}\right).$$

∴ $\triangle MPR$ 的重心 G_1 的坐标为(见第 41 题):

$$x_{G_1}=\frac{1}{6}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6),$$

$$y_{G_1}=\frac{1}{6}(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6).$$

$\triangle NQS$ 的重心 G_2 的坐标为:

$$x_{G_2}=\frac{1}{6}(x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_1),$$

$$y_{G_2}=\frac{1}{6}(y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_1).$$

因 $x_{G_1}=x_{G_2}$, $y_{G_1}=y_{G_2}$, 故 G_1 与 G_2 重合.

44. 任意四边形 $ABCD$ 四顶点坐标为 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$、$D(x_4, y_4)$. 求证两双对边中点连线 EG、FH 和两对角线 AC、BD 中点 M、N 的连线相交于一点(叫做四边形的

平均中心)，并求出该点的坐标.

［分析］ 分别求出三线段 EG、FH、MN 的中点，再证明三中点重合.

［证］ 根据条件，点 E 的坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right),\text{ 点 } G \text{ 的坐标为}\left(\frac{x_3+x_4}{2},\ \frac{y_3+y_4}{2}\right).$$

∴ EG 的中点 P_1 的坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\ \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)$.

点 F 的坐标为 $\left(\frac{x_1+x_4}{2},\ \frac{y_1+y_4}{2}\right)$，点 H 的坐标为 $\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$.

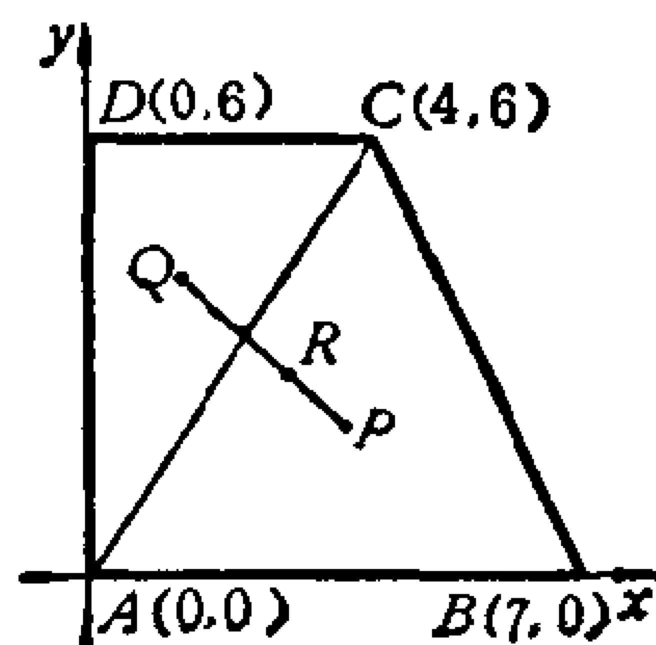
∴ FH 的中点 P_2 的坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\ \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)$.

点 M 的坐标为 $\left(\frac{x_1+x_3}{2},\ \frac{y_1+y_3}{2}\right)$，点 N 的坐标为 $\left(\frac{x_2+x_4}{2},\ \frac{y_2+y_4}{2}\right)$.

∴ MN 的中点 O 的坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\ \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)$.

∴ O 与 P_1、P_2 重合. 即三直线 EG、FH、MN 共点. 从证明过程可知该点坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\ \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)$.

45. 质量均匀的直角梯形板的四个顶点坐标分别是 $A(0,0)$、$B(7,0)$、$C(4,6)$、$D(0,6)$. 求直角梯形板的重心 R 的坐标.



［分析］ 将梯形分成两个三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$，分别求其重心 P 和 Q，再根据物理知识，可知梯形重心 R 在直线 PQ 上，且

$$\frac{PR}{RQ}=\frac{\triangle ACD\text{ 面积}}{\triangle ABC\text{ 面积}}.$$

由此可以求出点 R 的坐标.

［解］ 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 的重心 P、Q 的坐标分别为 $(x_1,\ y_1)$ 和 $(x_2,\ y_2)$，则

$$x_1=\frac{11}{3},\ y_1=\frac{6}{3}=2;\ x_2=\frac{4}{3},\ y_2=\frac{12}{3}=4.$$

∴ 点 P 和 Q 的坐标为

$$\left(\frac{11}{3},\ 2\right)\text{和}\left(\frac{4}{3},\ 4\right).$$

$$\because\quad \triangle ABC\text{的面积 } S_1=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&0&1\\7&0&1\\4&6&1\end{vmatrix}=21,$$

$$\triangle ACD\text{的面积 } S_2=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&0&1\\4&6&1\\0&6&1\end{vmatrix}=12.$$

$\therefore\quad \frac{PR}{RQ}=\frac{4}{7}$. 设重心 R 坐标为(x, y)，则

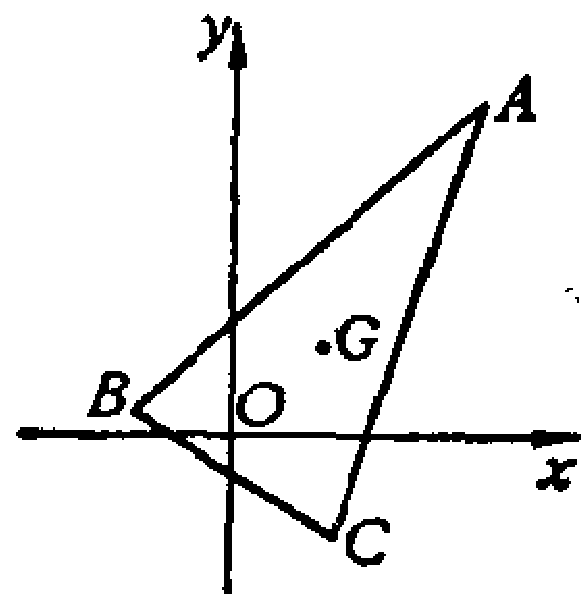
$$x=\frac{\frac{11}{3}+\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{7}}=\frac{31}{11},\quad y=\frac{2+\frac{4}{7}\cdot 4}{1+\frac{4}{7}}=\frac{30}{11}.$$

$\therefore$　点 R 的坐标为 $\left(\frac{31}{11}, \frac{30}{11}\right)$.

46. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 A 的坐标是 $(3, 4)$，而顶点 B 在第二象限，又重心 G 的坐标是 $(1, 1)$.

(1) 设顶点 B 的坐标为(a, b)，试用 a、b 表示顶点C的坐标；

(2) 若垂心 O 在原点，求 a、b 的值.



[分析]　点 C 随着点 B 而确定. 把 (a, b) 看作定点，利用重心坐标和顶点坐标的关系，可以求出点 C 的坐标. 又，根据垂心定义可知 $AO\perp BC$, $BO\perp CA$，从而可推出 a、b 的两个关系式. 解方程组可求出 a、b.

[解]　(1) 设点 C 的坐标为(x, y)，则 $1=\frac{x+a+3}{3}$, $1=\frac{y+b+4}{3}$.

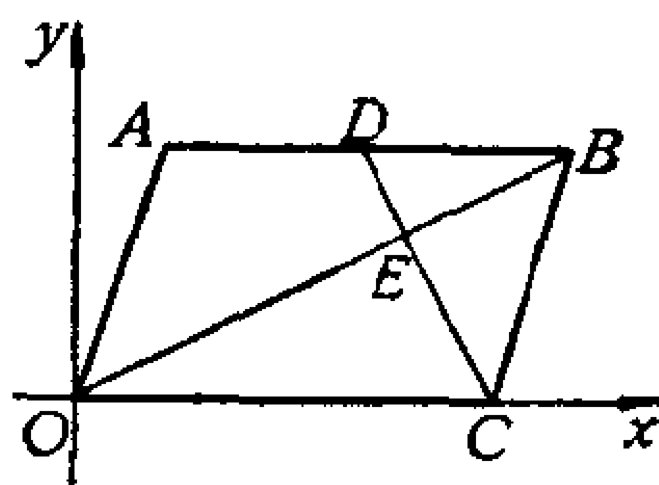
$\therefore\quad x=-a,\quad y=-b-1.\quad \therefore$　点 C 坐标为$(-a, -b-1)$.

(2) $O(0, 0)$是垂心，$\therefore\ AO\perp BC$, $\therefore\ \frac{-1-2b}{-2a}=-\frac{3}{4}$, 得 $3a+4b=-2$…①. 又 $BO\perp CA$, $\therefore\ \frac{5+b}{3+a}=-\frac{a}{b}$, 得$(b+5)b=-a^2-3a$…②.

解①和②组成的方程组，得 $a=\frac{6}{5}$, $b=-\frac{7}{5}$ 或 $a=-\frac{6}{5}$, $b=\frac{2}{5}$. 由于点 B 在第二象限，$\therefore\ a=-\frac{6}{5}$, $b=\frac{2}{5}$.

47. 用解析法证明：平行四边形一顶点和任意一条对边中点之连线与不过此顶点的对角线互相分割为1:2.

［分析］ 证明对角线的1:2的分点，与顶点和对边中点连线的1:2的分点互相重合.



［证］ 以平行四边形一顶点为原点，一边所在直线为x轴，建立直角坐标系. 设平行四边形四顶点坐标分别是$O(0, 0)$、$A(b, c)$、$B(b+a, c)$、$C(a, 0)$，则AB中点D的坐标为$\left(b+\frac{a}{2}, c\right)$. 设线段$DC$上1:2的分点为$E'$，$E'$的坐标为$(x, y)$，则

$$x=\frac{b+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2b+2a}{3},\ y=\frac{c+0}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2c}{3}.$$

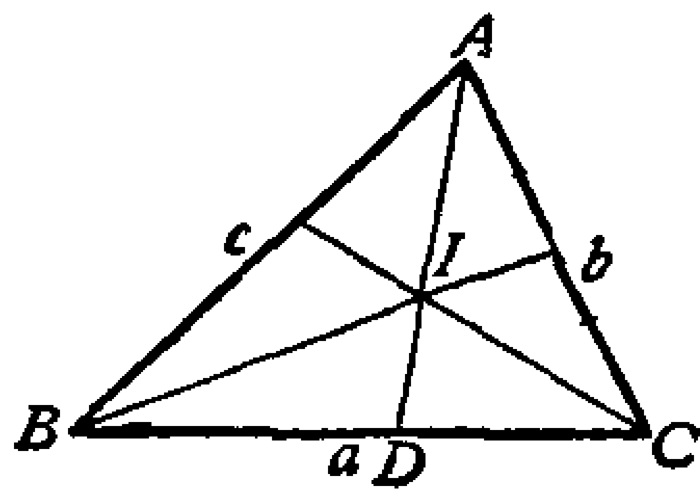
∴ E'的坐标为$\left(\frac{2b+2a}{3}, \frac{2c}{3}\right)$. 设对角线$BO$上1:2的分点为$E''$，$E''$的坐标为$(x, y)$，则

$$x=\frac{b+a+0}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2b+2a}{3},\ y=\frac{c+0}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2c}{3}.$$

∴ E''的坐标为$\left(\frac{2a+2b}{3}, \frac{2c}{3}\right)$. ∵ E''和E'坐标相同，∴ E''、E'重合. 即顶点和对边中点之连线与不过此顶点的对角线互相分割为1:2.

如果取OA中点为D，同理可证.

48. 已知三角形三顶点坐标分别为$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$，三边长为$|BC|=a$、$|CA|=b$、$|AB|=c$. 求这个三角形内心I的坐标.



［分析］ 如图，利用角平分线性质，先求出点D的坐标；再在$\triangle ABD$中用角平分线性质求内心I的坐标.

［解］ 设$\angle A$的平分线交BC于D，点D坐

标为 (x_D, y_D). $\because \dfrac{BD}{DC}=\dfrac{|AB|}{|AC|}=\dfrac{c}{b}$,

$$\therefore\ x_D=\frac{x_2+\frac{c}{b}x_3}{1+\frac{c}{b}}=\frac{bx_2+cx_3}{b+c},\quad y_D=\frac{y_2+\frac{c}{b}y_3}{1+\frac{c}{b}}=\frac{by_2+cy_3}{b+c}.$$

$\therefore$ 点 D 坐标为 $\left(\dfrac{bx_2+cx_3}{b+c}, \dfrac{by_2+cy_3}{b+c}\right)$.

$$\because\ \frac{|BD|}{|BD|+|DC|}=\frac{c}{b+c},\quad \therefore\ |BD|=\frac{ac}{b+c}.$$

设内心 I 坐标为 (x, y), $\because$ BI 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore\ \frac{AI}{ID}=\frac{|AB|}{|BD|}=\frac{b+c}{a}.$$

运用定比分点公式即得

$$x=\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c},\quad y=\frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}.$$

$\therefore$ 内心 I 的坐标为 $\left(\dfrac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \dfrac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$.

[说明] 在解析几何中引用平面几何知识，常可简化解题过程，本题即运用了角平分线的性质定理. 用相同的方法可得 $\triangle ABC$ 三个旁心的坐标分别为

$$I_A\left(\frac{bx_2+cx_3-ax_1}{b+c-a}, \frac{by_2+cy_3-ay_1}{b+c-a}\right)、$$

$$I_B\left(\frac{cx_3+ax_1-bx_2}{c+a-b}, \frac{cy_3+ay_1-by_2}{c+a-b}\right)、$$

$$I_C\left(\frac{ax_1+bx_2-cx_3}{a+b-c}, \frac{ay_1+by_2-cy_3}{a+b-c}\right).$$

49. 已知 $\triangle ABC$ 三个顶点坐标为 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$，在顶点 A、B、C 处分别挂上质量为 m_1、m_2、m_3 的物体，求此三物体的联合质心.

[分析] 先求 B、C 处两物体的联合质心 E，再求它和 A 处物体的联合质心 M，则 M 就是三物体的联合质心.

[解] 设点 B、C 处两物体的联合质心为 $E(x_E, y_E)$，根据物理知识可知 $\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{m_3}{m_2}$.

$$\therefore\quad x_E=\frac{x_2+\frac{m_3}{m_2}x_3}{1+\frac{m_3}{m_2}}=\frac{m_2x_2+m_3x_3}{m_2+m_3},\quad y_E=\frac{y_2+\frac{m_3}{m_2}y_3}{1+\frac{m_3}{m_2}}=\frac{m_2y_2+m_3y_3}{m_2+m_3}.$$

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $\left(\frac{m_2x_2+m_3x_3}{m_2+m_3}, \frac{m_2y_2+m_3y_3}{m_2+m_3}\right)$. 视点 E 处的质量为 m_2+m_3. 设 E、A 处两物体的联合质心为 $M(x, y)$，则 $\frac{AM}{ME}=\frac{m_2+m_3}{m_1}$.

$$\therefore\quad x=\frac{x_1+\frac{m_2+m_3}{m_1}\cdot\frac{m_2x_2+m_3x_3}{m_2+m_3}}{1+\frac{m_2+m_3}{m_1}}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3},$$

$$y=\frac{y_1+\frac{m_2+m_3}{m_1}\cdot\frac{m_2y_2+m_3y_3}{m_2+m_3}}{1+\frac{m_2+m_3}{m_1}}=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}.$$

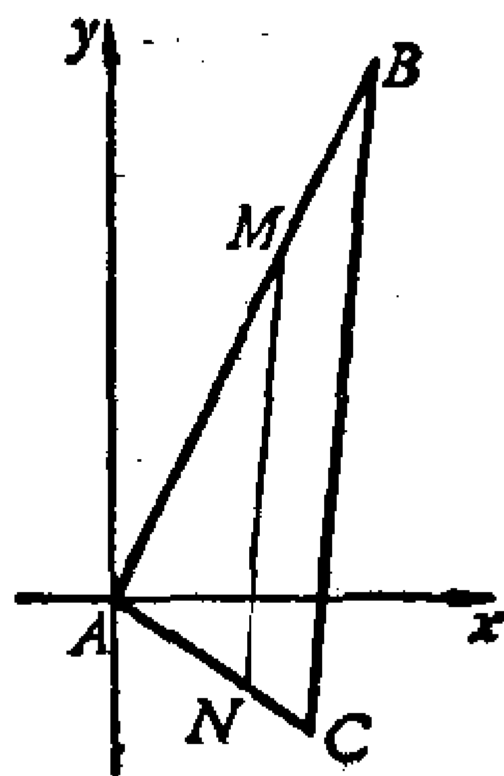
$\therefore$ 三物体联合质心 M 的坐标为

$$\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}, \frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}\right).$$

［说明］ 应用数学归纳法可以推出 n 个质点的质量中心公式：

$$x=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},\quad y=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

50. 三角形的顶点是 $A(0, 0)$、$B(4, 8)$、$C(6, -4)$. 点 M 分 AB 边成比 $3:1$, N 是 AC 边上一点，且 $\triangle AMN$ 面积等于 $\triangle ABC$ 面积的一半. 求点 N 分 AC 边所成的比.



［分析］ 列出点 N 坐标所应满足的条件，然后求解.

［解一］ 设点 M 坐标为 (x, y), $\because\ \frac{AM}{MB}=\frac{3}{1}$,

$$\therefore\quad x=\frac{0+3\times4}{1+3}=3,\quad y=\frac{0+3\times8}{1+3}=6.$$

$\therefore$ 点 M 的坐标是 $M(3, 6)$.

$$\triangle ABC\text{ 面积}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}6 & -4 & 1\\ 4 & 8 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=32.$$

设点N坐标为(x,y)，∵ A、N、C三点共线，∴ $\frac{y}{x}=\frac{-4}{6}$，即$y=-\frac{2}{3}x$.

由方程组

$$\begin{cases} y=-\frac{2}{3}x & \cdots\cdots① \\ \frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ x & y & 1\\ 3 & 6 & 1\end{vmatrix}=16\cdots② \end{cases}\quad \text{解得}\begin{cases} x=4 \\ y=-\frac{8}{3}. \end{cases}$$

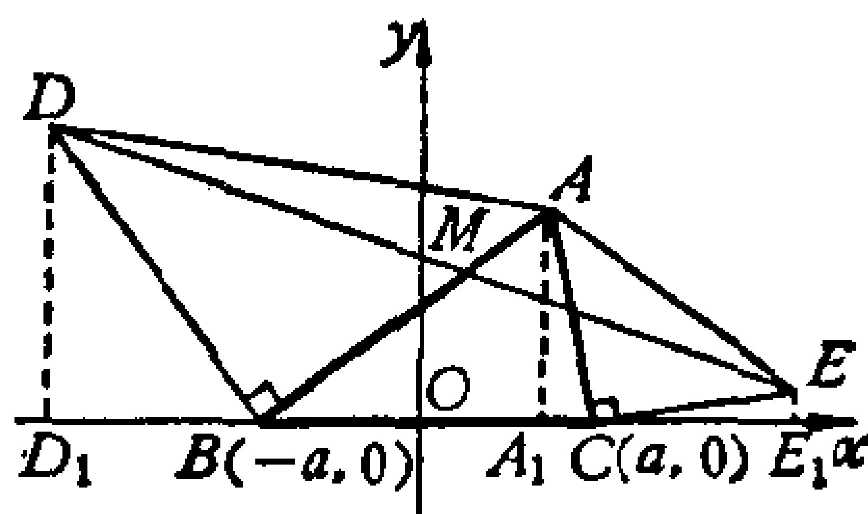
∴ 点N坐标为$\left(4, -\frac{8}{3}\right)$. $\frac{AN}{NC}=\frac{4}{2}=2$. ∴ 点$N$分$AC$所成的比为$2:1$.

[解二] 设$\frac{AN}{NC}=\lambda$，则$\frac{AN}{AC}=\frac{\lambda}{1+\lambda}$. $\frac{AM}{AB}=\frac{3}{4}$，而

$$\frac{\triangle AMN\text{ 的面积}}{\triangle ABC\text{ 的面积}}=\frac{AM\cdot AN}{AB\cdot AC}=\frac{1}{2}.\quad \therefore\ \frac{3}{4}\cdot\frac{\lambda}{1+\lambda}=\frac{1}{2},$$

$\lambda=2$. ∴ 点N分AC所成的比为$2:1$.

51. 固定$\triangle ABC$的底边BC的位置，使顶点A在BC一侧移动，分别以B、C为直角顶点，以AB、AC为腰向三角形外作两个等腰直角$\triangle ABD$、$\triangle ACE$. 求证DE的中点M为定点.



[证] 以直线BC为x轴、BC中点O为原点，并使点A在x轴上方，建立直角坐标系. 设$|BC|=2a$，则$B(-a, 0)$、$C(a, 0)$. 设点A坐标为(x_0, y_0)，∵ $\triangle AA_1C\cong\triangle CE_1E$，∴ $|CE_1|=|AA_1|$，则$x_E=OE_1=a+y_0$，$y_E=|A_1C|=a-x_0$. 同样，$x_D=-a-y_0$，$y_D=a+x_0$.

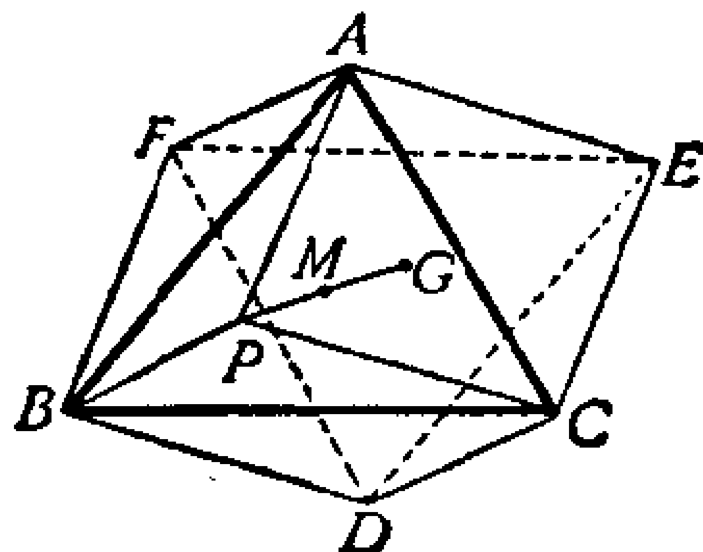
设DE的中点M的坐标为(x_M, y_M)，其中

$$x_M=\frac{x_D+x_E}{2}=0,\ y_M=\frac{y_D+y_E}{2}=a,$$

即点M的坐标为$(0, a)$，故为定点.

52. 以三定点$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$为顶点的三

角形 ABC 内部有一动点 $P(x_0, y_0)$. 作以 BP 与 CP 为两边的平行四边形 $BPCD$, CP 与 AP 为两边的平行四边形 $CPAE$, AP 与 BP 为两边的平行四边形 $APBF$. 若 G 为 $\triangle DEF$ 的重心, (1)求 G 的坐标; (2)证明 GP 经过与 P 位置无关的一个定点, 并求此定点的坐标.



［分析］ 利用平行四边形对角线互相平分的性质, 可求 D、E、F 的坐标, 从而得解.

［解］ (1) $\because$ BC 与 PD 互相平分,

$$\therefore \quad \frac{x_D+x_0}{2}=\frac{x_2+x_3}{2}, \quad \frac{y_D+y_0}{2}=\frac{y_2+y_3}{2}.$$

$$\therefore \quad x_D=x_2+x_3-x_0, \; y_D=y_2+y_3-y_0.$$

同理,
$$x_E=x_3+x_1-x_0, \; y_E=y_3+y_1-y_0.$$
$$x_F=x_1+x_2-x_0, \; y_F=y_1+y_2-y_0.$$

$$\therefore \quad x_G=\frac{x_2+x_3-x_0+x_3+x_1-x_0+x_1+x_2-x_0}{3}=\frac{2(x_1+x_2+x_3)}{3}-x_0,$$

$$y_G=\frac{2(y_1+y_2+y_3)}{3}-y_0.$$

(2) GP 的中点 M 的坐标为:

$$x_M=\frac{x_G+x_0}{2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \quad y_M=\frac{y_G+y_0}{2}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

$\therefore$ GP 经过与 P 位置无关的定点 $M\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

53. 设直线 AB 的倾角等于由 $C(3, -5)$、$D(0, -9)$ 两点所确定的直线的倾角的 2 倍, 求直线 AB 的斜率.

［解］ 设直线 CD 的倾角为 θ, 则 $\operatorname{tg}\theta=\frac{-5+9}{3-0}=\frac{4}{3}$.

$\therefore$ 直线 AB 的斜率

$$k=\operatorname{tg}2\theta=\frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}=\frac{\frac{8}{3}}{1-\frac{16}{9}}=-\frac{24}{7}.$$

54. 求下列两点连线的斜率与倾角:

(1) $A(-2, 4)$、$B(-3, \sqrt{3}+4)$;

(2) $A(R\cos\alpha, R\sin\alpha)$、$B(R\cos\beta, R\sin\beta)$,

$$\left(-\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\pi}{2}\right).$$

[解] (1) 直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\dfrac{\sqrt{3}+4-4}{-3-(-2)}=-\sqrt{3}$, 故 AB 的倾角为 $\dfrac{2\pi}{3}$.

(2) 直线 AB 的斜率

$$k_{AB}=\frac{R(\sin\alpha-\sin\beta)}{R(\cos\alpha-\cos\beta)}=\frac{2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{-2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$=-\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\because\quad -\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\pi}{2},\quad \therefore\quad 0<\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\pi}{2}<\pi.$$

故 AB 的倾角为 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\pi}{2}$.

55. **已知一道路上两点 $A(-1354, 2100)$、$B(1054, -1900)$ (单位为米, 坐标系 x 轴的正方向为正北方). 试求有向直线 AB 的方位角.**

[分析] AB 的方位角是 $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB})$, 即以 $\overrightarrow{Ox}$ 为始边, $\overrightarrow{AB}$ 为终边之角, 注意它与直线 AB 倾角的区别.

[解] $(\overrightarrow{AB})_{Ox}=x_B-x_A=1054-(-1354)=2408$,

$(\overrightarrow{AB})_{Oy}=y_B-y_A=-1900-2100=-4000$.

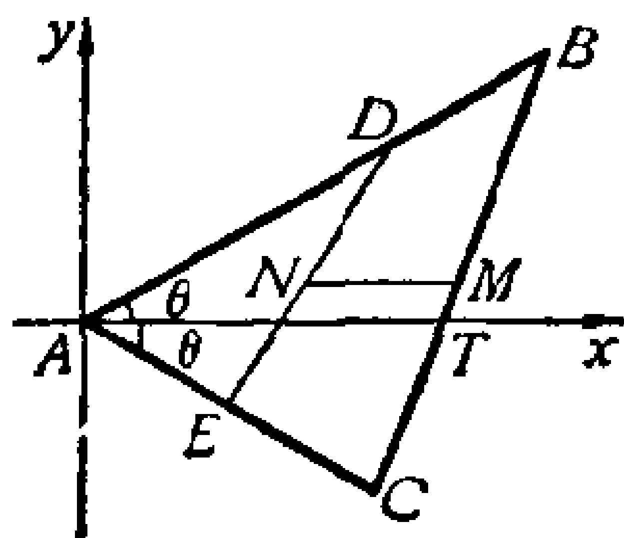
$$\therefore\quad \operatorname{tg}(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB})=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-4000}{2408}\approx-1.6611.$$

根据点 A、B 的坐标可知 $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB})$ 在第四象限,

$$\therefore\quad (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB})\approx360^\circ-58^\circ57'=301^\circ3'.$$

56. **$\triangle ABC$ 中, AT 为 $\angle A$ 的内角平分线, D、E 分别在 AB、AC 上, 且 $|BD|=|CE|$, BC、DE 的中点分别为 M、N. 求证 $MN\parallel AT$.**

［分析］ 线段 BC、DE 的中点 M、N 分别依赖于这两线段的端点坐标．考虑到 AT 是 $\angle CAB$ 的平分线，故可取 A 为原点，AT 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系．用参数设定 $|AB|$、$|AC|$、$|BD|$ 及 $\angle CAB$以后，计算有关各点的坐标；若得 $y_M=y_N$，即可得证．



［证］ 取 A 为原点，AT 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系（如图）．

设 $\angle CAB=2\theta$, $|AB|=2m$, $|AC|=2n$, $|BD|=|CE|=2l$，则 B、C、D、E 各点坐标分别为：

$$B(2m\cos\theta,\ 2m\sin\theta)、C(2n\cos\theta,\ -2n\sin\theta)、$$

$$D(2(m-l)\cos\theta,\ 2(m-l)\sin\theta)、E(2(n-l)\cos\theta,\ -2(n-l)\sin\theta).$$

M、N 两点的纵坐标分别为：

$$y_M=\frac{1}{2}(y_B+y_C)=(m-n)\sin\theta,$$

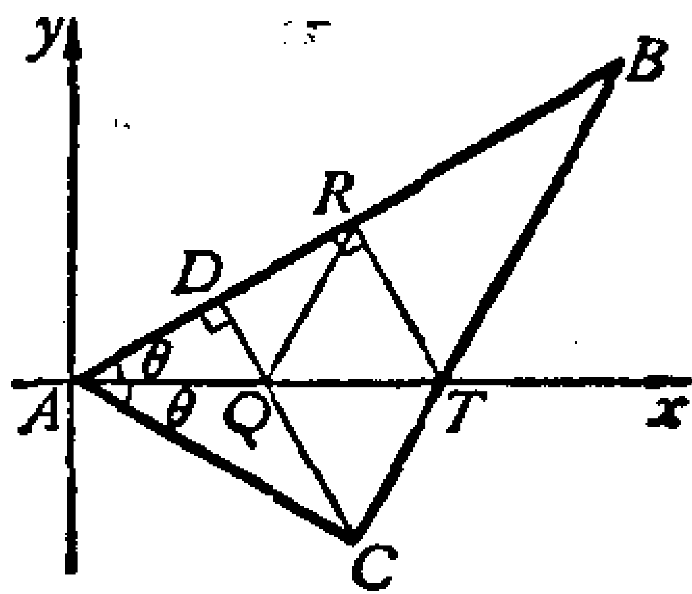
$$y_N=\frac{1}{2}(y_D+y_E)=(m-n)\sin\theta.$$

$$\therefore\quad y_M=y_N.\quad 故\quad MN\parallel AT.$$

［说明］ 用解析法解几何题，首先要选取适当的坐标系．一般利用图中的垂直关系、特殊点，选取坐标轴与原点．同时根据题中条件，选择适当的参数，使有关点的坐标便于计算．选参数时，不局限于线段长度，有时角度、线段长度并用．选用参数的个数不宜过多，能使问题的图形确定即可．

57．在直角$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A$ 的平分线 AT 交 BC 于 T，$CD\perp AB$ 交 AT 于 Q，$TR\perp AB$ 交 AB 于 R．求证：

$$QR\parallel BC.$$



［分析］ 若以 A 为原点，AT 为 x 轴，建立直角坐标系，并设 $\angle CAB=2\theta$，$|AT|=a$，则可求点 Q、R、C 坐标，并由 $k_{RQ}=k_{CT}$ 得证．

［证］ 取 A 为原点，AT 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系．则点 T、C、R 的坐标分别为 $(a,\ 0)$、$(a\cos^2\theta,\ -a\sin\theta\cos\theta)$、$(a\cos^2\theta,\ a\sin\theta\cos\theta)$．又设点 Q 的坐标为 $(x_1,\ 0)$，

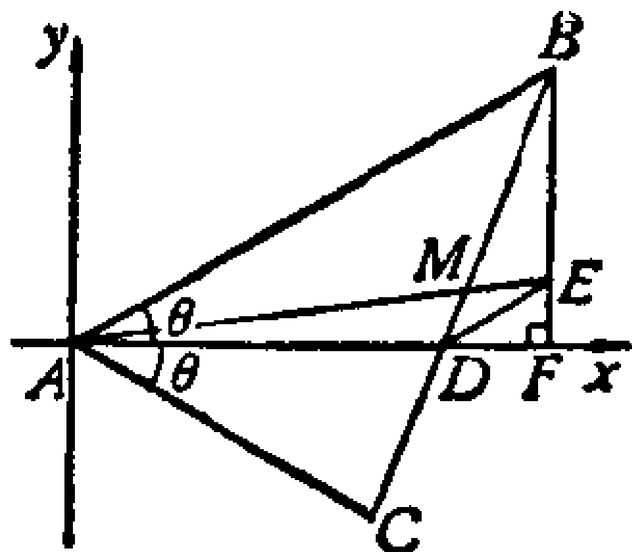
$\because\ CQ\perp AB,\quad \therefore\ \dfrac{a\sin\theta\cos\theta}{x_1-a\cos^2\theta}\cdot\operatorname{tg}\theta=-1,\quad \therefore\ x_1=a\cos 2\theta.$

RQ、CT 的斜率分别为:

$$k_{RQ}=\frac{a\sin\theta\cos\theta}{a\cos^2\theta-a\cos 2\theta}=\operatorname{ctg}\theta,\ \ k_{CT}=\frac{a\sin\theta\cos\theta}{a-a\cos^2\theta}=\operatorname{ctg}\theta.$$

$$\because\ k_{RQ}=k_{CT},\quad \therefore\ QR\parallel BC.$$

58. 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 $\angle A$ 的平分线, AM 为中线, 过 B 作 AD 的垂线与 AM 的延长线相交于 E. 求证: $ED\parallel AB$.



[证] 取 A 为原点, 直线 AD 为 x 轴, 建立直角坐标系. 设 $|AB|=2c$, $|AC|=2b$, $\angle CAB=2\theta$, 则 $B(2c\cos\theta,\ 2c\sin\theta)$、$C(2b\cos\theta,\ -2b\sin\theta)$. 点 M 的坐标为:

$$x_M=(b+c)\cos\theta,\ y_M=(c-b)\sin\theta.$$

令点 E 的坐标为 $(x_E,\ y_E)$, 则 $x_E=2c\cos\theta$. $\because$ A、M、E 三点共线,

$$\therefore\ \frac{(c-b)\sin\theta}{(c+b)\cos\theta}=\frac{y_E}{2c\cos\theta},\ \ y_E=\frac{2c(c-b)}{c+b}\sin\theta.$$

令点 D 的坐标为 $(x_D,\ 0)$, $\because$ B、D、C 三点共线, $\therefore$ BC、BD 斜率相同, 即 $\dfrac{2(c+b)\sin\theta}{2(c-b)\cos\theta}=\dfrac{2c\sin\theta}{2c\cos\theta-x_D}$. 从此解出

$$x_D=2c\cos\theta-\frac{2c(c-b)}{c+b}\cos\theta=\frac{4bc}{b+c}\cos\theta.$$

$\therefore$ 直线 DE 的斜率为

$$k_{DE}=\frac{\dfrac{2c(c-b)}{c+b}\cdot\sin\theta}{2c\cos\theta-\dfrac{4bc\cos\theta}{c+b}}=\frac{c-b}{c+b-2b}\cdot\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}\theta.$$

$$\because\ k_{DE}=k_{AB}=\operatorname{tg}\theta,\quad \therefore\ DE\parallel AB.$$

59. 证明两点 $P_1(x_1,\ y_1)$、$P_2(x_2,\ y_2)$ 在原点张直角的充要条件为 $x_1x_2+y_1y_2=0$ (点 P_1 和 P_2 都不和原点重合).

[证] 必要性: 设点 P_1、P_2 都不在 y 轴上, $\because$ $\angle P_1OP_2=90°$, $\therefore\ \dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2}=-1$, 即 $y_1y_2+x_1x_2=0$. 如果点 P_1、P_2 中有一点在 y 轴上,

则 $x_1 \cdot x_2=0$. $\because$ $\angle P_1OP_2=90°$, $\therefore$ 另一点必在 x 轴上, 故 $y_1 \cdot y_2=0$. 从而 $y_1y_2+x_1x_2=0$. 又,点 P_1、P_2 不可能都在 y 轴上.

充分性: 设 x_1、x_2 都不等于 0. $\because$ $x_1x_2+y_1y_2=0$, $\therefore$ $\frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2}=-1$, 即 $OP_1 \perp OP_2$, $\therefore$ $\angle P_1OP_2=90°$. 如果 x_1、x_2 中有一个为 0, 不妨设 $x_1=0$. $\because$ $x_1x_2+y_1y_2=0$, $\therefore$ $y_1 \cdot y_2=0$; 但 $y_1 \neq 0$, $\therefore$ $y_2=0$, 即点 P_1 在 y 轴上而点 P_2 在 x 轴上, $\therefore$ $\angle P_1OP_2=90°$. 又, x_1、x_2 不可能都为 0.

60. 试用解析法证明菱形对角线互相垂直平分.

〔证一〕 取菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 为 x 轴, AC 中点 O 为原点, 建立直角坐标系(图 1), 设 $A(-a, 0)$、$C(a, 0)$, 菱形边长为 $b(b>a)$, 则另两个顶点的坐标满足下列方程: $(x+a)^2+y^2=(x-a)^2+y^2=b^2$. 解得: $B(0, \sqrt{b^2-a^2})$、$D(0, -\sqrt{b^2-a^2})$. $\therefore$ B、D 两顶点在 y 轴上, 且与原点距离相等, 故菱形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 互相垂直平分.

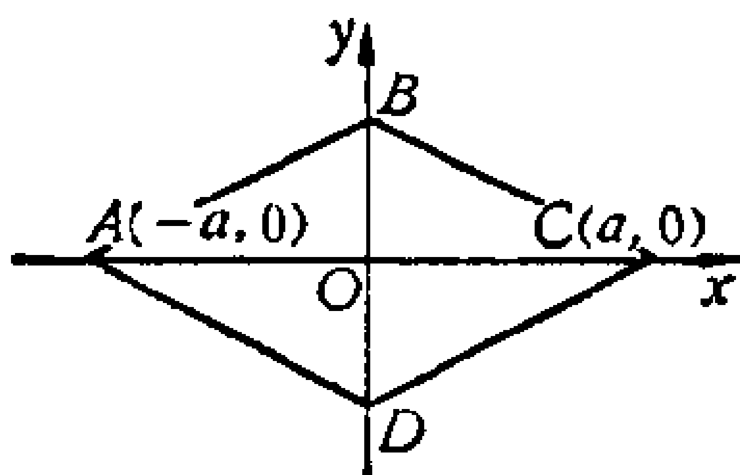


图 1

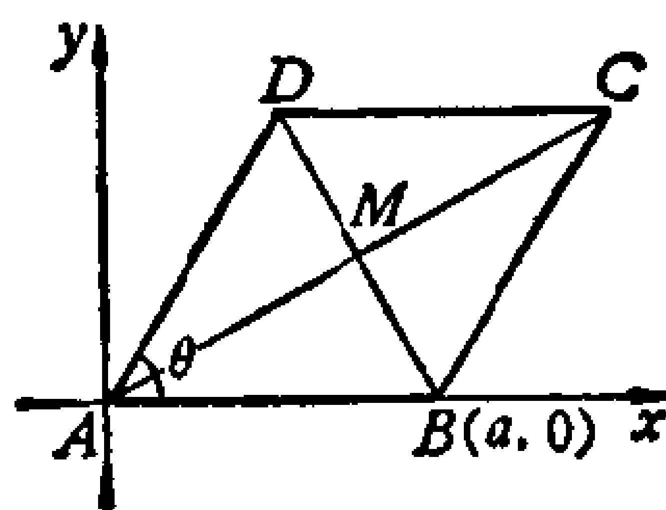


图 2

〔证二〕 取菱形 $ABCD$ 的一顶点 A 为原点, AB 所在直线为 x 轴, 建立直角坐标系(图 2). 菱形边长为 a, 一内角 $\angle BAD=\theta$(锐角), 四顶点坐标分别为: $A(0, 0)$、$B(a, 0)$、$C(a+a\cos\theta, a\sin\theta)$、$D(a\cos\theta, a\sin\theta)$, 对角线 AC、BD 的斜率分别为:

$$k_{AC}=\frac{a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}, \quad k_{BD}=\frac{a\sin\theta}{a\cos\theta-a}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta-1}.$$

$$\because \quad k_{AC} \cdot k_{BD}=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta-1}=-1, \quad \therefore \quad AC \perp BD.$$

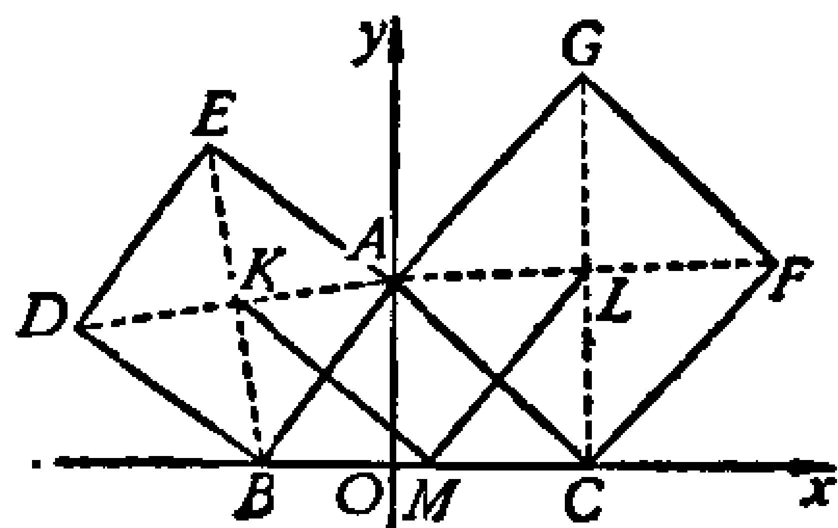
AC、BD 的中点 M、N 的坐标为:

$$x_M=\frac{a}{2}(1+\cos\theta), \quad y_M=\frac{a}{2}\sin\theta;$$

$$x_N=\frac{a+a\cos\theta}{2}=\frac{a}{2}(1+\cos\theta), \quad y_N=\frac{a}{2}\sin\theta.$$

$\therefore$ M、N 重合，即 AC、BD 互相平分.

61. 以 $\triangle ABC$ 的两边 AB、AC 为边，分别向三角形外作两个正方形 $ABDE$、$ACFG$，设 K、L 为它们的中心，M 为 BC 的中点. 求证：$|KM|=|LM|$，$KM\perp LM$.



［分析］ 适当建立直角坐标系后，求出点 A、B、C、M、L、K 各点坐标，用距离公式和垂直条件就可证明.

［证］ 以直线 BC 为 x 轴，BC 边上高 AO 所在直线为 y 轴，建立直角坐标系. 设点 A、B、C 坐标分别是 $(0,a)$、$(b,0)$、$(c,0)$，则点 M 坐标为 $\left(\frac{b+c}{2},0\right)$. 设正方形 $ACFG$ 中心 L 的坐标为 (x,y)，则因 $AL\perp CL$ 且 $|AL|=|CL|$，得

$$\begin{cases}\dfrac{y-a}{x}\cdot\dfrac{y}{x-c}=-1\\ x^2+(y-a)^2=(x-c)^2+y^2.\end{cases}$$

解之，得 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(c-a)\\ y=\dfrac{1}{2}(a-c),\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(c+a)\\ y=\dfrac{1}{2}(c+a).\end{cases}$

根据图形位置应取 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(c+a)\\ y=\dfrac{1}{2}(c+a),\end{cases}$ $\therefore$ 点 L 坐标为 $\left(\frac{c+a}{2},\frac{c+a}{2}\right)$. 同理求得正方形 $ABDE$ 中心 K 的坐标为 $\left(\frac{b-a}{2},\frac{a-b}{2}\right)$.

$$\because\quad |ML|=\sqrt{\left(\frac{c+a}{2}-\frac{c+b}{2}\right)^2+\left(\frac{c+a}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2+(a+c)^2},$$

$$|MK|=\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}-\frac{b+c}{2}\right)^2+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2+(a+c)^2}.$$

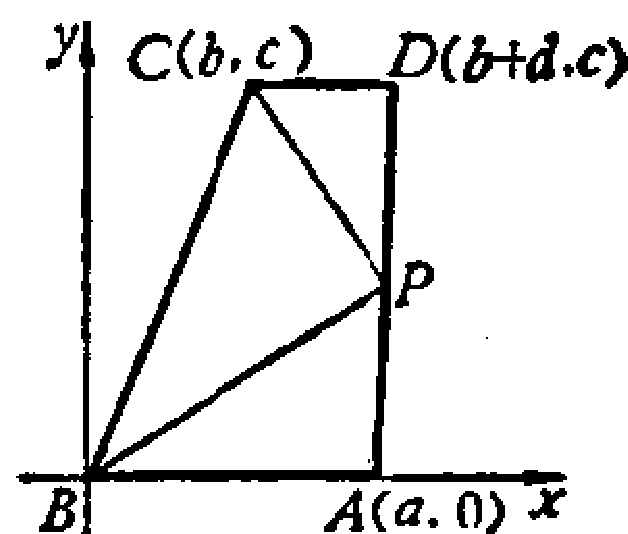
$\therefore$ $|ML|=|MK|$.

$$k_{ML}\cdot k_{MK}=\frac{\frac{c+a}{2}}{\frac{c+a}{2}-\frac{b+c}{2}}\cdot\frac{\frac{a-b}{2}}{\frac{b-a}{2}-\frac{b+c}{2}}=\frac{c+a}{a-b}\cdot\frac{a-b}{-(a+c)}=-1,$$

$\therefore\quad ML\perp MK.$

［说明］ 证明有关线段的相等、平行、垂直问题，一般是先确定有关点的坐标，再利用距离、斜率等公式以及平行、垂直的充要条件进行论证.

62. 梯形 $ABCD$ 的两底 $|AB|$、$|CD|$ 之和等于一腰 $|BC|$，另一腰 $|AD|$ 的中点为 P. 求证 $PB\perp PC$.



［证］ 取点 B 为原点，AB 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系如图. 设梯形四顶点坐标为:

$A(a,\ 0)$、$B(0,\ 0)$、$C(b,\ c)$、$D(b+d,\ c)$.

$\because\quad |AB|+|CD|=|BC|,\quad \therefore\quad a+d=\sqrt{b^2+c^2},$

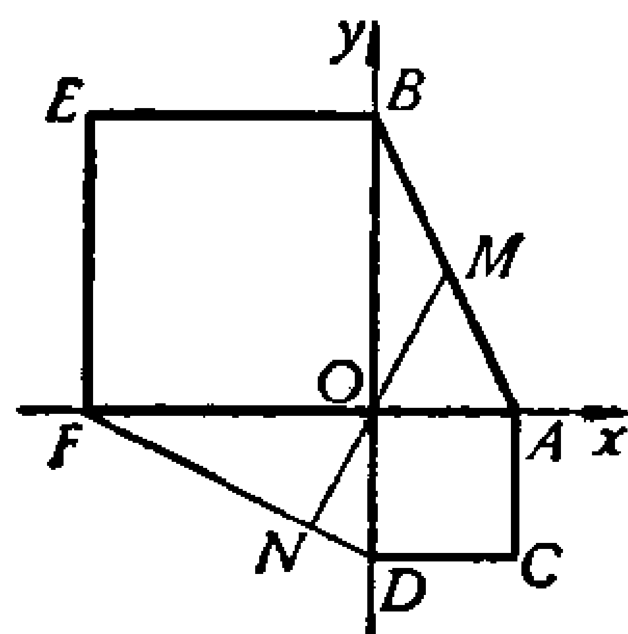
即 $\quad (a+d)^2-b^2=c^2.\quad \because\quad P\left(\dfrac{a+b+d}{2},\ \dfrac{c}{2}\right),$

$\therefore$ BP、CP 的斜率分别为:

$$k_{BP}=\frac{\dfrac{c}{2}}{\dfrac{1}{2}(a+b+d)}=\frac{c}{b+a+d},\quad k_{CP}=\frac{c-\dfrac{c}{2}}{b-\dfrac{1}{2}(b+a+d)}=\frac{c}{b-(a+d)}.$$

$$\because\quad k_{BP}\cdot k_{CP}=\frac{c^2}{b^2-(a+d)^2}=\frac{c^2}{-c^2}=-1,\quad \therefore\quad BP\perp CP.$$

63. $\triangle ABO$ 中，$\angle AOB=90^\circ$，分别以 OA、OB 为边在这三角形外侧作正方形 $OACD$、$OBEF$. M 为 AB 的中点. 求证 $OM\perp DF$.



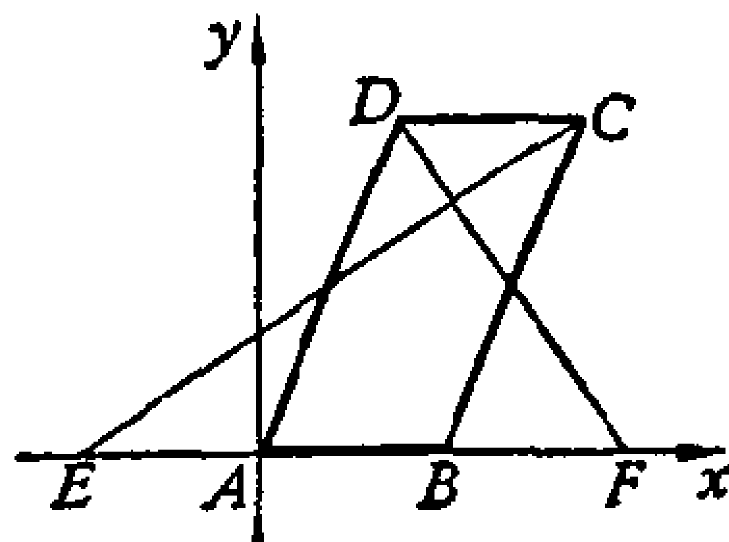
［证］ 取 O 为原点，OA 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系. 设 $A(a,\ 0)$、$B(0,\ b)$，则 $D(0,\ -a)$、$F(-b,\ 0)$、$M\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$. OM、DF 的斜率分别为:

$$k_{OM}=\frac{\dfrac{b}{2}}{\dfrac{a}{2}}=\frac{b}{a},\quad k_{DF}=\frac{-a}{0+b}=-\frac{a}{b}.$$

$$\because\quad k_{OM}\cdot k_{DF}=-1,\quad \therefore\quad OM\perp DF.$$

64. 平行四边形 $ABCD$ 中，$|BC|=2|AB|$，若将 AB 向两方

延长使 $|AE|=|AB|=|BF|$. 求证 $CE\perp DF$.



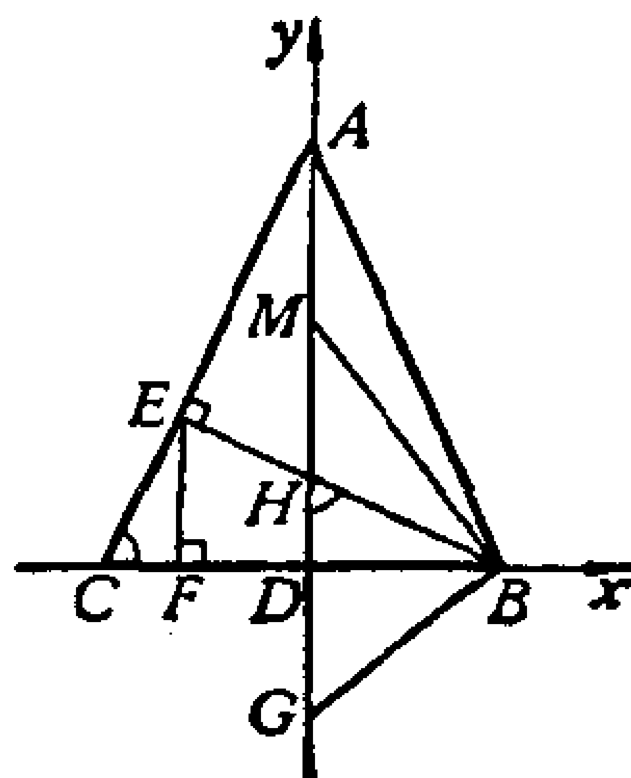
〔证〕 取 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系. 设 $|AB|=a$，$\angle BAD=\theta$，则各点坐标为：$A(0,\ 0)$、$E(-a,\ 0)$、$F(2a,\ 0)$、$C(a+2a\cos\theta,\ 2a\sin\theta)$、$D(2a\cos\theta, 2a\sin\theta)$，$CE$、$DF$ 的斜率分别为：

$$k_{CE}=\frac{2a\sin\theta}{a+2a\cos\theta+a}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta},$$

$$k_{DF}=\frac{2a\sin\theta}{2a\cos\theta-2a}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta-1}.$$

$$\because\ k_{CE}\cdot k_{DF}=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta-1}=-1,\quad\therefore\ CE\perp DF.$$

65. 在 $\triangle ABC$ 中，$|AB|=|AC|$，作高 AD、BE 相交于 H，引 $EF\perp BC$，垂足为 F，延长 AD 至 G，使 $|DG|=|EF|$，点 M 为 AH 的中点. 求证 $BM\perp BG$.



〔证〕 取 BC 所在直线为 x 轴，D 为原点，建立直角坐标系如图. 设 $|BC|=2a$，$\angle ABC=\angle BCA=\alpha$，则各点坐标分别为：$B(a,\ 0)$、$A(0,\ a\operatorname{tg}\alpha)$、$H(0,\ a\operatorname{ctg}\alpha)$. E 点纵坐标为

$$y_E=2a\sin\alpha\cos\alpha=a\sin2\alpha.$$

从而可得 M、G 两点坐标为 $M\left(0, \frac{a}{2}(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\right)$、$G(0,\ -a\sin2\alpha)$. BM 与 BG 的斜率分别为：

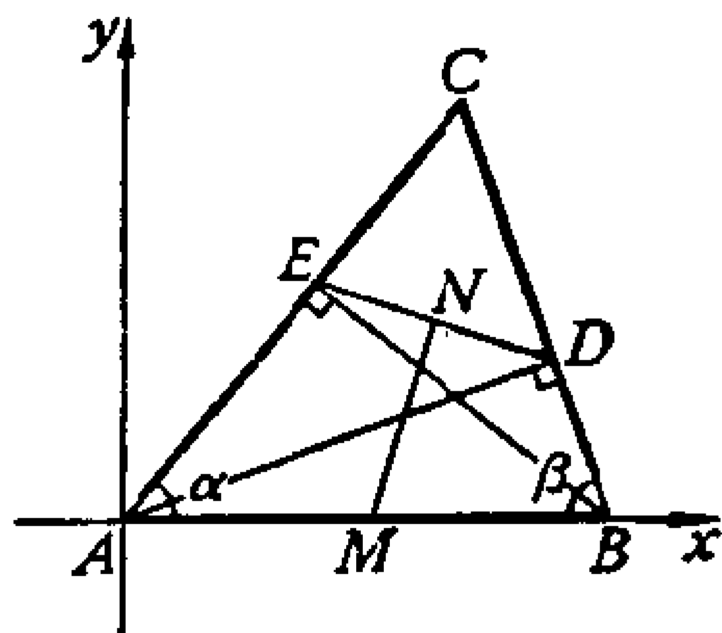
$$k_{BM}=\frac{\frac{a}{2}(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)}{0-a}=-\frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha}=-\frac{1}{\sin2\alpha},$$

$$k_{BG}=\frac{-a\sin2\alpha-0}{0-a}=\sin2\alpha.\quad\because\ k_{BM}\cdot k_{BG}=-1,\quad\therefore\ BM\perp BG.$$

66. $\triangle ABC$ 两边 BC、CA 上的高分别为 AD、BE，M 为边 AB 的中点，N 为 DE 的中点. 求证 $MN\perp DE$.

〔分析〕 欲证 $MN\perp DE$，可先确定点 D、E、M、N 的坐标. 适当选取

坐标系，用参数设定 $|AB|$、$\angle BAC$ 和 $\angle CBA$ 以后，根据 $\triangle ABE$、$\triangle ABD$ 是直角三角形的条件，就能算出 D、E、M、N 的坐标. 通过斜率计算可证 $MN\perp DE$.



［证］ 取 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系如图. 设 $|AB|=2a$，$\angle BAC=\alpha$，$\angle CBA=\beta$，则点 M 的坐标为 $(a,\ 0)$. D、E 的坐标分别为：$x_D=2a-2a\cos^2\beta=2a\sin^2\beta$，$y_D=2a\cos\beta\sin\beta=a\sin 2\beta$；$x_E=2a\cos^2\alpha$，$y_E=2a\cos\alpha\sin\alpha=a\sin 2\alpha$. $\therefore$ DE 的中点 N 的坐标为：

$$x_N=a(\cos^2\alpha+\sin^2\beta),\ y_N=a\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$$

DE 的斜率：

$$k_{DE}=\frac{a(\sin 2\alpha-\sin 2\beta)}{2a(\cos^2\alpha-\sin^2\beta)}=\frac{2\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{(1+\cos 2\alpha-1+\cos 2\beta)}=\operatorname{tg}(\alpha-\beta);$$

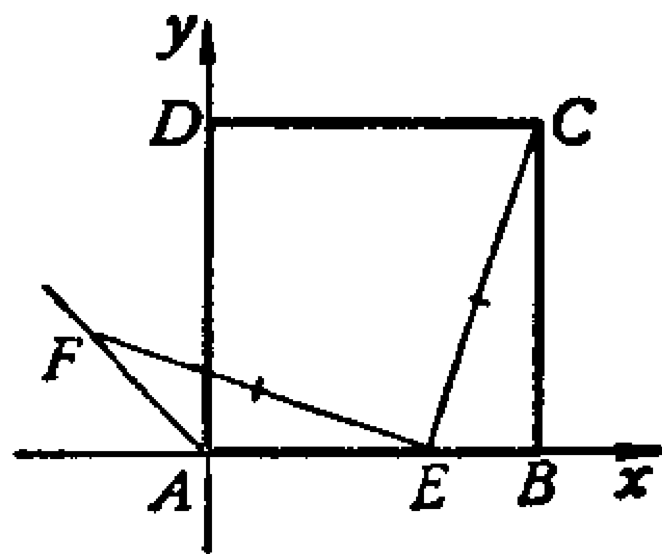
MN 的斜率：

$$k_{MN}=\frac{a\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{a(\cos^2\alpha+\sin^2\beta-1)}=\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}=-\operatorname{ctg}(\alpha-\beta).$$

$$\because\ k_{DE}\cdot k_{MN}=-1,\quad\therefore\ MN\perp DE.$$

［说明］ 第 64—66 题同时选用线段长和角度作参数，使坐标计算比较简便.

67. 在正方形 $ABCD$ 中，过顶点 C 任意作一直线 CE 交 AB 于 E，以 E 为中心，CE 为半径作弧交 $\angle BAD$ 的外角平分线于 F. 求证 $CE\perp EF$.



［分析］ 利用正方形两邻边互相垂直关系，以点 A 为原点，两邻边所在直线为轴，建立直角坐标系. 欲证 $CE\perp EF$，只须证 $k_{CE}\cdot k_{EF}=-1$. 当 E 的坐标用参数设定后，利用 F 到两轴距离相等及 $|FE|=|EC|$ 就可确定点 F 的坐标.

［证］ 取 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系. 设正方形边长为 a，$|AE|=\lambda$，则点 C、E 坐标分别为 $(a,\ a)$、$(\lambda,\ 0)$. 因 F 在 $\angle BAD$ 的外角平分线上，故令 $F(-\mu,\ \mu)$. $\because$ $|FE|=|EC|$，$\therefore$ $(\lambda+\mu)^2+\mu^2=(a-\lambda)^2+a^2$，即 $\mu^2+\lambda\mu+a\lambda-a^2=0$. 解得 $\mu_1=a-\lambda$，

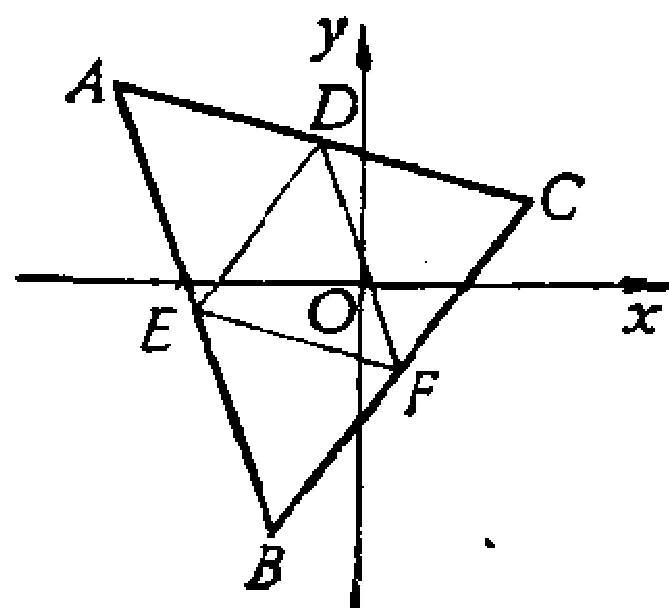
$\mu_2=-a$(不合题意). 直线 CE、EF 的斜率分别为:

$$k_{CE}=\frac{a}{a-\lambda},\quad k_{EF}=-\frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

$$\because\quad k_{CE}\cdot k_{EF}=\frac{a\mu}{(\lambda+\mu)(\lambda-a)}=\frac{a(a-\lambda)}{(\lambda+a-\lambda)(\lambda-a)}=-1,$$

$$\therefore\quad CE\perp EF.$$

68. 三角形 ABC 三顶点坐标为 $A(x_1,\ y_1)$、$B(x_2,\ y_2)$、$C(x_3,\ y_3)$. 求证各边中点连线分此三角形为四个面积相等的三角形.



[证] 线段 AC、AB 的中点 D、E 的坐标分别为

$$\left(\frac{x_1+x_3}{2},\ \frac{y_1+y_3}{2}\right)、\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right),$$

∴ $\triangle ADE$ 的面积是下式的绝对值:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ \dfrac{x_1+x_2}{2} & \dfrac{y_1+y_2}{2} & 1\\ \dfrac{x_1+x_3}{2} & \dfrac{y_1+y_3}{2} & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{8}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_1+x_2 & y_1+y_2 & 2\\ x_1+x_3 & y_1+y_3 & 2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}.$$

而 $\triangle ABC$ 的面积是 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$ 的绝对值,

∴ $\triangle ADE$ 的面积是 $\triangle ABC$ 面积的四分之一. 同理可证:

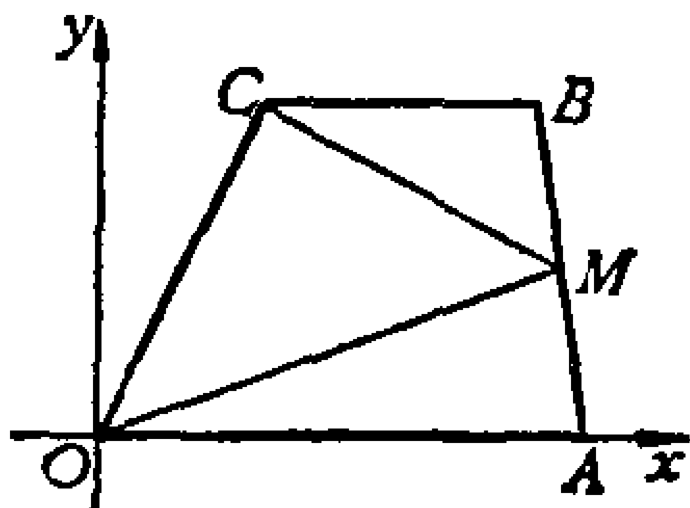
$$\triangle BEF\text{ 的面积}=\triangle FCD\text{ 的面积}$$

$$=\triangle DEF\text{ 的面积}=\frac{1}{4}\triangle ABC\text{ 的面积}.$$

∴ $\triangle AED$ 的面积 $=\triangle BEF$ 的面积 $=\triangle FCD$ 的面积 $=\triangle DEF$ 的面积.

[说明] 用解析法证明有关直线图形面积的一些性质，常常是通过三角形面积公式(1.25)计算证得.

69. 已知梯形 $OABC$, 一腰 AB 中点为 M. 求证三角形 OMC 的面积是梯形 $OABC$ 面积的一半.

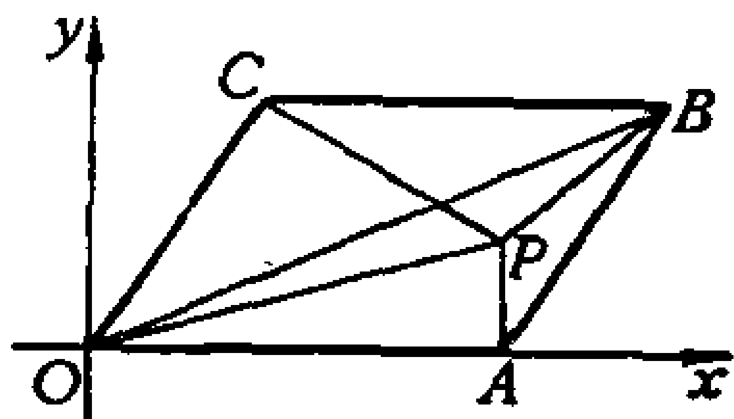


[证] 如图建立直角坐标系. 设梯形四顶点坐标为: $O(0,\ 0)$、$A(a,\ 0)$、$B(b,\ c)$、$C(d,\ c)$, 则点 M 的坐标为 $\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{c}{2}\right)$.

$$\because\quad \triangle OMC \text{ 的面积 } S_1=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\frac{a+b}{2} & \frac{c}{2}\\ d & c\end{vmatrix}=\frac{c}{4}(a+b-d),$$

梯形 $OABC$ 的面积 $S_2=\frac{c}{2}(a+b-d)$. $\quad\therefore\quad S_1=\frac{1}{2}S_2$.

70. 已知平行四边形 $OABC$, P 为 $\triangle OAB$ 内任意一点. 求证 $\triangle PBC$ 的面积等于 $\triangle PBO$ 的面积与 $\triangle PAB$ 的面积之和.



[证] 如图建立直角坐标系. 设平行四边形四顶点的坐标为: $O(0,\ 0)$、$A(a,\ 0)$、$B(a+b,\ c)$、$C(b,\ c)$. 又, 点 P 坐标为 $(x,\ y)$.
$\because$ 点 P 在 $\triangle OAB$ 的内部,

$$\therefore\ \triangle PBC \text{ 的面积 } S_1=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x & y & 1\\ a+b & c & 1\\ b & c & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x & y & 1\\ a & 0 & 0\\ b & c & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}a(c-y).$$

$$\triangle PBO \text{ 的面积 } S_2=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x & y & 1\\ a+b & c & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(cx-ay-by).$$

$$\triangle PAB \text{ 的面积 } S_3=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}a & 0 & 1\\ a+b & c & 1\\ x & y & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}a & 0 & 1\\ b & c & 0\\ x-a & y & 0\end{vmatrix}$$

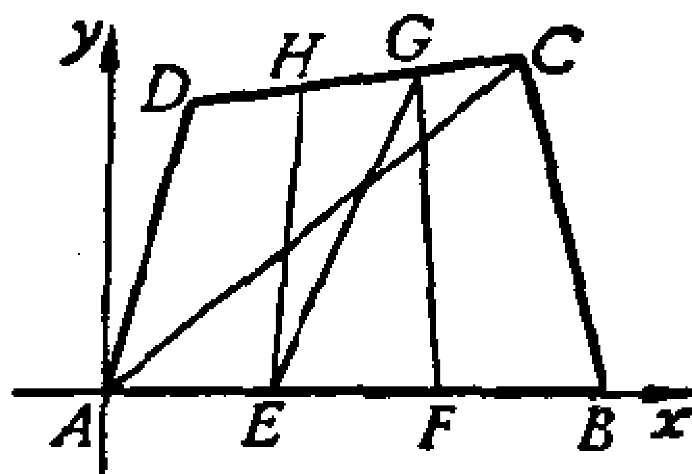
$$=\frac{1}{2}(by-cx+ac).$$

$$\therefore\quad S_2+S_3=\frac{1}{2}(cx-ay-by+by-cx+ac)=\frac{1}{2}(ac-ay)=S_1.$$

即 $\triangle PBC$ 的面积等于 $\triangle PBO$ 与 $\triangle PAB$ 的面积之和.

［说明］ (1) 根据点的坐标，运用行列式求三角形的面积，应取其绝对值的一半．但采用绝对值记号，将给计算带来困难，如能按顶点的逆时针方向顺序，写出顶点坐标的行列式，则可确定其值必正，故不需再加绝对值记号．本题计算三角形面积即用此法．(2) 如点 P 在 $\triangle OBC$ 的内部，则 $S_2=\frac{1}{2}(ay+by-cx)$，就有 $S_3=S_1+S_2$.

71．任意四边形 $ABCD$ 中，边 AB、CD 的三等分点分别为 E、F 和 G、H．求证四边形 $ABCD$ 的面积是四边形 $EFGH$ 面积的三倍．



［分析］ 在建立适当坐标系，并假设 A、B、C、D 四点的坐标后，根据定比分点公式易得 E、F、G、H 四点的坐标．再计算四边形 $ABCD$ 和 $EFGH$ 的面积，进行比较．

［证］ 建立直角坐标系如图．设四边形 $ABCD$ 的顶点坐标顺次为：(0, 0)、$(3a, 0)$、$(3b, 3c)$、$(3d, 3e)$．则分点 E、F、G、H 的坐标分别为：$(a, 0)$、$(2a, 0)$、$(d+2b, e+2c)$、$(b+2d, c+2e)$．四边形 $ABCD$ 的面积

$$S=S_{\triangle BCA}+S_{\triangle CDA}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}3a & 0 & 1\\ 3b & 3c & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}3b & 3c & 1\\ 3d & 3e & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{9}{2}(ac+be-cd).$$

四边形 $EFGH$ 的面积

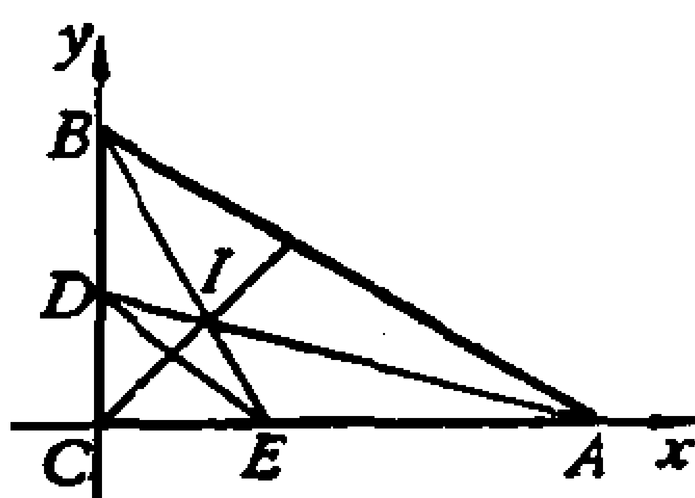
$$S_1=S_{\triangle EFG}+S_{\triangle EGH}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}a & 0 & 1\\ 2a & 0 & 1\\ d+2b & e+2c & 1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}a & 0 & 1\\ d+2b & e+2c & 1\\ b+2d & c+2e & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{3}{2}(ac+be-cd).\quad \therefore\quad S=3S_1.$$

即四边形 $ABCD$ 的面积是四边形 $EFGH$ 面积的三倍．

72．直角三角形两锐角 A、B 的平分线 AD、BE 分别交对边 BC、AC 于 D、E，I 为内心．求证三角形 ABI 的面积等于四边形 $ABDE$ 面积的一半．

［分析］ 利用角平分线性质求出 E、D、I 各点坐标，再用面积公式计算，即可证明.



［证］ 建立直角坐标系如图. 设点 C、A、B 的坐标为: $(0, 0)$、$(a, 0)$、$(0, b)$, 斜边 AB 长为 c, 则 $\frac{|CE|}{|EA|}=\frac{b}{c}$, $\frac{|CD|}{|DB|}=\frac{a}{c}$. 利用定比分点公式求得点 E 的横坐标 $x_E=\frac{ab}{b+c}$, 点 D 的纵坐标 $y_D=\frac{ab}{c+a}$.

$\because\ \frac{|BI|}{|IE|}=\frac{b}{\frac{ab}{b+c}}=\frac{b+c}{a}$, 故点 $I(x, y)$ 的坐标

$$x=\frac{0+\frac{b+c}{a}\cdot\frac{ab}{b+c}}{1+\frac{b+c}{a}}=\frac{ab}{a+b+c},\quad y=\frac{b+\frac{b+c}{a}\cdot 0}{1+\frac{b+c}{a}}=\frac{ab}{a+b+c}.$$

$\therefore$ $\triangle ABI$ 的面积 $S_1=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ \frac{ab}{a+b+c} & \frac{ab}{a+b+c} & 1 \end{vmatrix}=\frac{abc}{2(a+b+c)}$.

四边形 $ABDE$ 面积 $S_2=\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}\frac{ab}{b+c}\cdot\frac{ab}{c+a}$

$$=\frac{ab}{2}\left(1-\frac{ab}{(b+c)(c+a)}\right)=\frac{abc(b+c+a)}{2(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{abc(b+c+a)^2}{2(a+b+c)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{2abc(c^2+ac+bc+ab)}{2(a+b+c)(b+c)(c+a)}$$

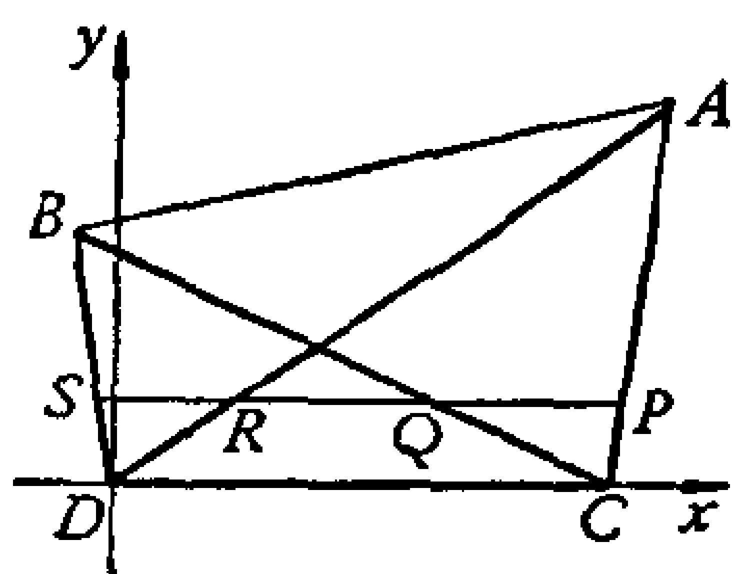
$$=\frac{2abc(c+b)(c+a)}{2(a+b+c)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{abc}{a+b+c}.\quad \therefore\quad S_1=\frac{1}{2}S_2.$$

即 $\triangle ABI$ 的面积等于四边形 $ABDE$ 面积的一半.

73. 已知同底的两三角形 ABC 和 ABD, 一条平行于 CD 的直线分别交 AC、BC、AD、BD 于点 P、Q、R、S.

求证：$\dfrac{\triangle ABC \text{的面积}}{\triangle ABD \text{的面积}}=\dfrac{|PQ|}{|RS|}$.



［分析］ 以 D 为原点，直线 DC 为 x 轴，建立直角坐标系，则两个三角形的面积可分别通过其顶点坐标而求得．而 S、R、Q、P 四点的位置由 SP 和 CD 间的距离而定，故可在假设其距离为 λ 后，求出它们的坐标，进而求得 $|PQ|$ 与 $|RS|$ 之比．再与两个三角形面积之比相比较．

［证］ 如图建立直角坐标系．设点 D、C、A、B 四点坐标为：$(0, 0)$、$(a, 0)$、(b, c)、(d, f)．$\because$ 直线 $\overline{PQRS} \parallel CD$，故设点 P、Q、R、S 四点坐标分别为：(x_1, λ)、(x_2, λ)、(x_3, λ)、(x_4, λ)．$\because$ 点 A、P、C 共线，

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} b & c & 1 \\ x_1 & \lambda & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix}=0, \text{ 解得 } x_1=\frac{\lambda(b-a)+ac}{c}.$$

同理，由点 B、Q、C 共线，解得 $x_2=\dfrac{\lambda(d-a)+af}{f}$.

由点 A、R、D 共线，解得 $x_3=\dfrac{b\lambda}{c}$.

由点 B、S、D 共线，解得 $x_4=\dfrac{d\lambda}{f}$.

$$\text{三角形 } ABC \text{ 面积 } S_1=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} b & c & 1 \\ d & f & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(ac+bf-dc-af).$$

$$\text{三角形 } ABD \text{ 面积 } S_2=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} b & c & 1 \\ d & f & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(bf-cd).$$

$$|PQ|=|x_1-x_2|=\frac{\lambda}{cf}(bf-af-dc+ac),$$

$$|RS|=|x_3-x_4|=\frac{\lambda}{cf}(bf-cd).$$

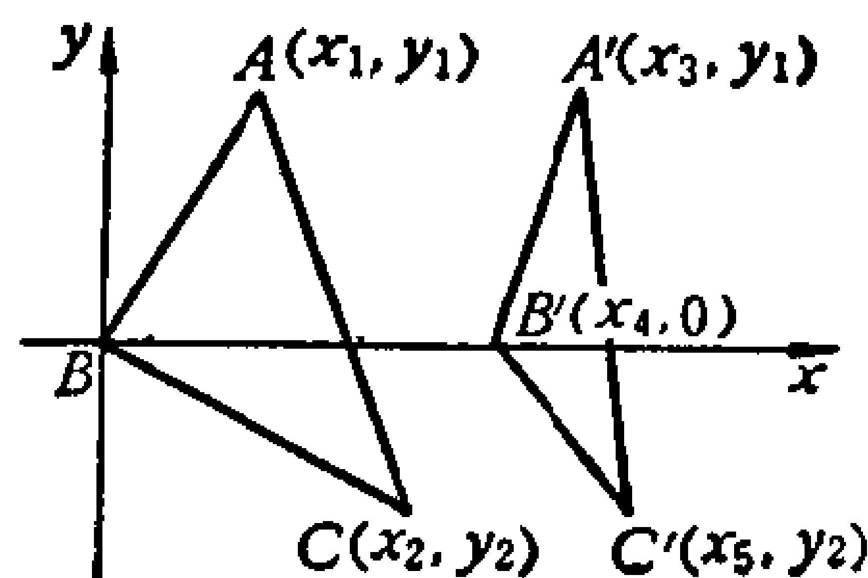
$$\therefore \quad \frac{|PQ|}{|RS|}=\frac{bf-af-dc+ac}{bf-cd}=\frac{S_1}{S_2}.$$

［说明］ 用解析法证题，坐标系的选择是关键．要利用图形中的平行或

垂直关系来建立坐标系，使有关点的坐标容易确定，从而简化证明过程.

74. 已知两 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$，且直线 AA'、BB'、CC' 互相平行. 如果 $\triangle ABC$ 表示三角形 ABC 的面积（A、B、C 为逆时针序时取正值，反之取负值），其余类推. 求证：

$$3(\triangle ABC+\triangle A'B'C')=\triangle AB'C'+\triangle BC'A'+\triangle CA'B'+\triangle A'BC+\triangle B'CA+\triangle C'AB.$$



［证］ 以 B 为原点，直线 BB' 为 x 轴，建立直角坐标系如图. 设 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 各顶点坐标为：$A(x_1, y_1)$、$B(0, 0)$、$C(x_2, y_2)$，$A'(x_3, y_1)$、$B'(x_4, 0)$、$C'(x_5, y_2)$.

$$3(\triangle ABC+\triangle A'B'C')$$

$$=\frac{3}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}+\frac{3}{2}\begin{vmatrix} x_3 & y_1 & 1\\ x_4 & 0 & 1\\ x_5 & y_2 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3x_1+3x_3 & y_1 & 1\\ 3x_4 & 0 & 1\\ 3x_2+3x_5 & y_2 & 1\end{vmatrix};$$

$$\triangle AB'C'+\triangle BC'A'+\triangle CA'B'+\triangle A'BC+\triangle B'CA+\triangle C'AB$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_4 & 0 & 1\\ x_5 & y_2 & 1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1\\ x_5 & y_2 & 1\\ x_3 & y_1 & 1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_1 & 1\\ x_4 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & y_1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_4 & 0 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_1 & y_1 & 1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_5 & y_2 & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_4 & 0 & 1\\ x_5 & y_2 & 1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & y_1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ x_5 & y_2 & 1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & y_1 & 1\\ x_4 & 0 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}$$

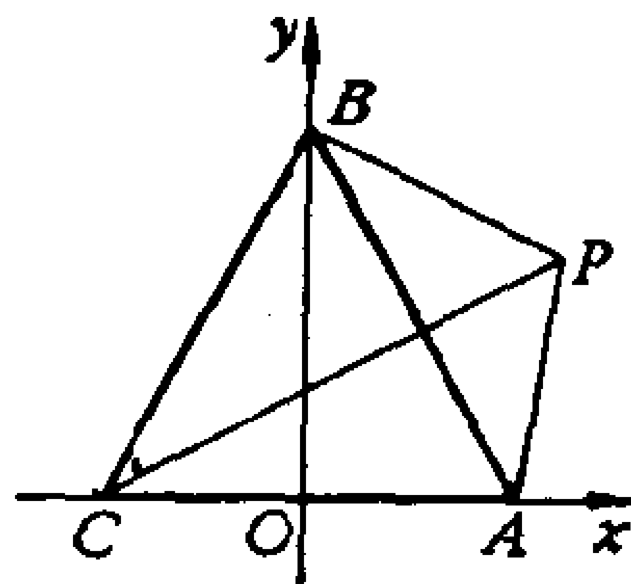
$$+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & y_1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_4 & 0 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ x_5 & y_2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3x_1+3x_3 & y_1 & 1\\ 3x_4 & 0 & 1\\ 3x_5+3x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}.$$

$\therefore\ 3(\triangle ABC+\triangle A'B'C')$

$=\triangle AB'C'+\triangle BC'A'+\triangle CA'B'+\triangle A'BC+\triangle B'CA+\triangle C'AB.$

75. 已知正三角形 ABC 的边长为 a, 又 P 为平面上任意一点. 求证: $|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2\geqslant a^2$.



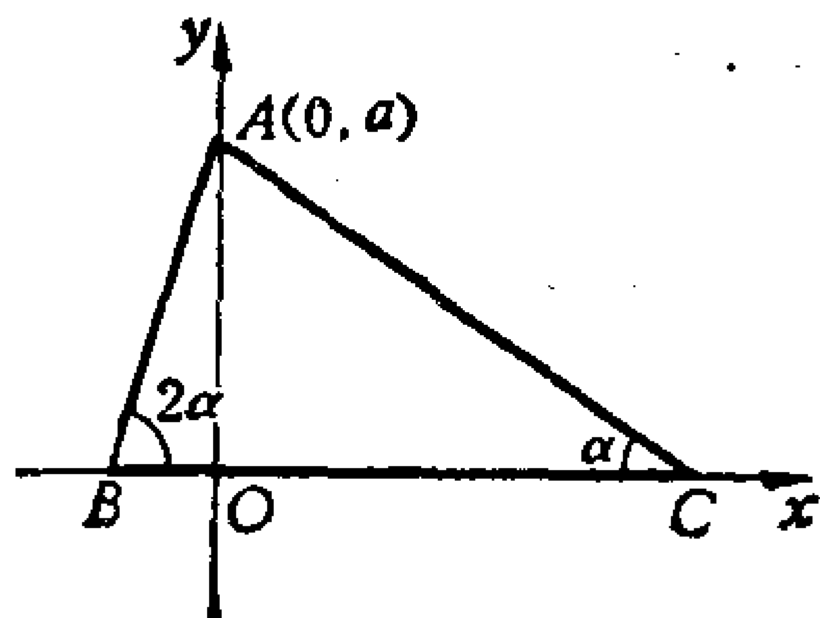
[证] 以 CA 所在直线为 x 轴, CA 的中垂线为 y 轴, 建立直角坐标系. 设正三角形三顶点的坐标分别为 $A\left(\frac{a}{2}, 0\right)$、$B\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$、$C\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$, 点 P 坐标为 (x, y), 则

$$\begin{aligned}&|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2\\&=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2+(x-0)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2\\&=3x^2+\frac{1}{4}(a-2\sqrt{3}y)^2+a^2\geqslant a^2.\end{aligned}$$

当且仅当 $x=0$, $y=\frac{\sqrt{3}}{6}a$ 时, 即 P 为三角形 ABC 的中心时, 等号成立.

$$\therefore\ |PA|^2+|PB|^2+|PC|^2\geqslant a^2.$$

76. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=2\angle C$. 求证: $|AC|<2|AB|$.



[证] 取 BC 所在直线为 x 轴, 点 A 在 BC 上的射影 O 为原点, 建立直角坐标系. 设点 A 的坐标为 $(0, a)$, $\angle C=\alpha$, 则 $\angle B=2\alpha$. B、C 两点的坐标分别为 $(-a\operatorname{ctg}2\alpha, 0)$、$(a\operatorname{ctg}\alpha, 0)$.

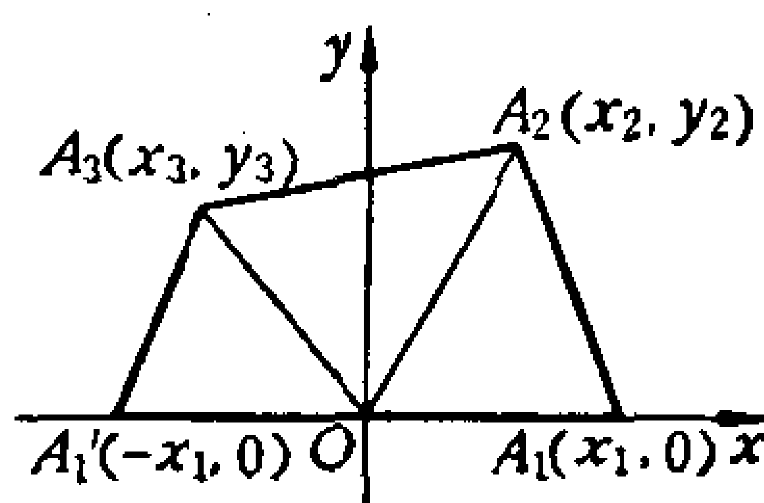
$$\begin{aligned}\because\ 2|AB|-|AC|&=2\sqrt{a^2+a^2\operatorname{ctg}^2 2\alpha}-\sqrt{a^2+a^2\operatorname{ctg}^2\alpha}\\&=2a\csc 2\alpha-a\csc\alpha=\frac{2a}{\sin 2\alpha}-\frac{a}{\sin\alpha}\\&=\frac{2a\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha\sin 2\alpha}=\frac{2a(1-\cos\alpha)}{\sin 2\alpha}>0,\end{aligned}$$

$(\because\ 1>\cos\alpha;\ 0<2\alpha<\pi,\ \sin 2\alpha>0)$

$\therefore\ |AC|<2|AB|$.

77. 设 A_1、A_1'、A_2、A_3 为平面上任意四点, 且 O 为 A_1A_1'

的中点．求证：$|A_1A_2|^2+|A_2A_3|^2+|A_3A_1'|^2\geqslant|OA_1|^2+|OA_2|^2+|OA_3|^2$.



［证］ 取 O 为原点，$A_1'A_1$ 为 x 轴，建立直角坐标系．设 A_1、A_2、A_3、A_1' 的坐标为 $(x_1, 0)$、(x_2, y_2)、(x_3, y_3)、$(-x_1, 0)$，则

$$\begin{aligned}&|A_1A_2|^2+|A_2A_3|^2+|A_3A_1'|^2-|OA_1|^2-|OA_2|^2-|OA_3|^2\\&=(x_1-x_2)^2+y_2^2+(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(x_3+x_1)^2\\&\quad+y_3^2-x_1^2-x_2^2-y_2^2-x_3^2-y_3^2\\&=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2-2x_2x_3+x_3^2+2x_3x_1+y_2^2+y_3^2-2y_2y_3\\&=(x_1+x_3-x_2)^2+(y_2-y_3)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad |A_1A_2|^2+|A_2A_3|^2+|A_3A_1'|^2\geqslant|OA_1|^2+|OA_2|^2+|OA_3|^2.$$

当且仅当 $x_1+x_3=x_2$、$y_2=y_3$ 时，A_1A_3 的中点与 OA_2 的中点重合，即 $OA_1A_2A_3$ 是平行四边形时，等号成立．

78．试证：对于任意实数 x_1、x_2、y_1、y_2，

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}\text{ 成立.}$$

［证］ 建立直角坐标系，原点为 O，设以 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 为坐标的点分别为 A、B．若 A、O、B 不在一直线上，则有 $|AB|<|OA|+|OB|$，即

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}.$$

若 A、O、B 在一直线上，则从 $AO+OB=AB$ 得 $|AO+OB|=|AB|$．而

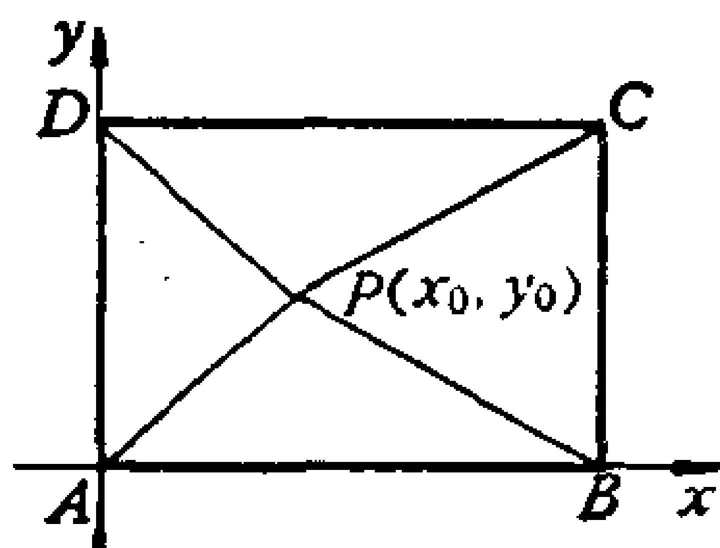
$$|AO+OB|\leqslant|AO|+|OB|,\quad\therefore\quad |AB|\leqslant|OA|+|OB|,$$

即
$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}.$$

故对于任意实数 x_1、x_2、y_1、y_2，恒有

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}.$$

79．设 P 为矩形 $ABCD$ 内使 $\angle APB=\angle CPD$ 的点，求证点 P 必在 AD、BC 中点的连线上．



［分析］ 点 P 的位置依赖于两角的关系，而角由两边的斜率确定，故可用两直线夹角公式求解．

［证］ 以点 A 为原点，AB 所在直线为 x

轴，建立直角坐标系. 若 $|AB|=a$, $|BC|=b$, 则各点坐标为 $B(a, 0)$、$C(a, b)$、$D(0, b)$. 设点 P 坐标为 (x_0, y_0). ∵ $\angle APB=\angle DPC$, 则有

$$\frac{k_{PB}-k_{PA}}{1+k_{PB}k_{PA}}=\frac{k_{PD}-k_{PC}}{1+k_{PD}k_{PC}},$$

即

$$\frac{\dfrac{y_0}{x_0-a}-\dfrac{y_0}{x_0}}{1+\dfrac{y_0}{x_0-a}\cdot\dfrac{y_0}{x_0}}=\frac{\dfrac{y_0-b}{x_0}-\dfrac{y_0-b}{x_0-a}}{1+\dfrac{y_0-b}{x_0}\cdot\dfrac{y_0-b}{x_0-a}}.$$

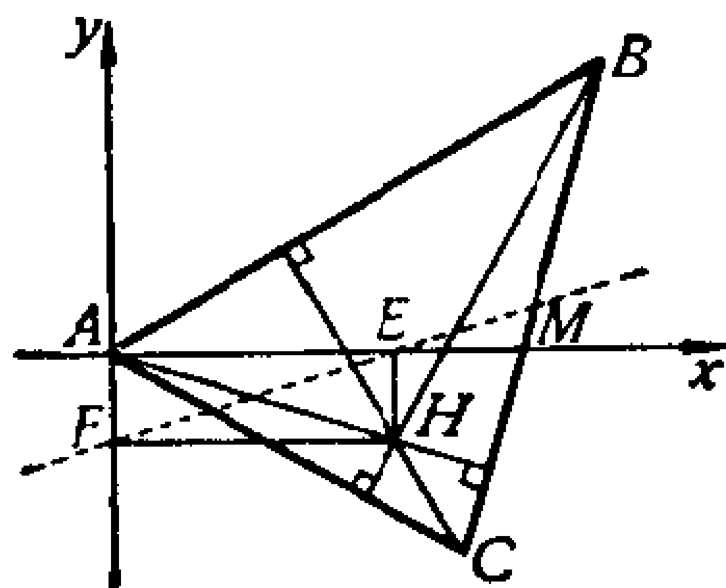
整理得 $(2y_0-b)(x_0^2+y_0^2-ax_0-by_0)=0$. 如果 $x_0^2+y_0^2-ax_0-by_0=0$, 则

$$\left(x_0-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y_0-\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

此时点 P 到矩形对角线交点 $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ 的距离等于对角线一半，即点 P 与矩形四个顶点之一重合，这与点 P 是矩形 $ABCD$ 内一点矛盾，因此 $x_0^2+y_0^2-ax_0-by_0\neq 0$. 而 $2y_0-b=0$, 即 $y_0=\frac{b}{2}$. ∴ 点 P 在 AD、BC 中点的连线上.

80. 自 $\triangle ABC$ 的垂心 H 引 $\angle A$ 的内、外角平分线的垂线，垂足分别为 E、F. 求证：E、F 与 BC 边上的中点 M 共线.

[证] 取 A 为原点，$\angle A$ 的内、外角平分线为 x、y 轴，建立直角坐标系如图. 设 $\angle A=2\alpha$, $|AB|=c$, $|AC|=b$, 则 B、C 的坐标分别为 $(c\cos\alpha, c\sin\alpha)$ 和 $(b\cos\alpha, -b\sin\alpha)$. 令 $\triangle ABC$ 的垂心为 $H(x, y)$. ∵ $BH\perp AC$,



$$\therefore \quad \frac{y-c\sin\alpha}{x-c\cos\alpha}\cdot\frac{-b\sin\alpha}{b\cos\alpha}=-1,$$

即

$$x\cos\alpha-y\sin\alpha=c\cos 2\alpha\cdots①.$$

$$\because \quad AH\perp BC, \quad \therefore \quad \frac{y}{x}\cdot\frac{c\sin\alpha+b\sin\alpha}{c\cos\alpha-b\cos\alpha}=-1,$$

即 $y=\frac{b-c}{b+c}x\operatorname{ctg}\alpha\cdots②$. 解联立方程①与②得:

$$x=\frac{(b+c)\cos 2\alpha}{2\cos\alpha}, \quad y=\frac{(b-c)\cos 2\alpha}{2\sin\alpha}.$$

∴ E、F 两点的坐标分别为

$$\left(\frac{(b+c)\cos 2\alpha}{2\cos\alpha},\ 0\right)、\left(0,\ \frac{(b-c)\cos 2\alpha}{2\sin\alpha}\right).$$

BC 中点 M 的坐标为

$$\left(\frac{(b+c)\cos\alpha}{2},\ \frac{(c-b)\sin\alpha}{2}\right).$$

$$\therefore\ \begin{vmatrix} \frac{(b+c)\cos 2\alpha}{2\cos\alpha} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{(b-c)\cos 2\alpha}{2\sin\alpha} & 1 \\ \frac{(b+c)\cos\alpha}{2} & \frac{-(b-c)\sin\alpha}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{b^2-c^2}{4\sin\alpha\cos\alpha}\begin{vmatrix} \cos 2\alpha & 0 & 1 \\ 0 & \cos 2\alpha & 1 \\ \cos^2\alpha & -\sin^2\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{b^2-c^2}{4\sin\alpha\cos\alpha}\begin{vmatrix} \cos 2\alpha & 0 & 1 \\ \cos 2\alpha & \cos 2\alpha & 1 \\ \cos 2\alpha & -\sin^2\alpha & 1 \end{vmatrix}=0.$$

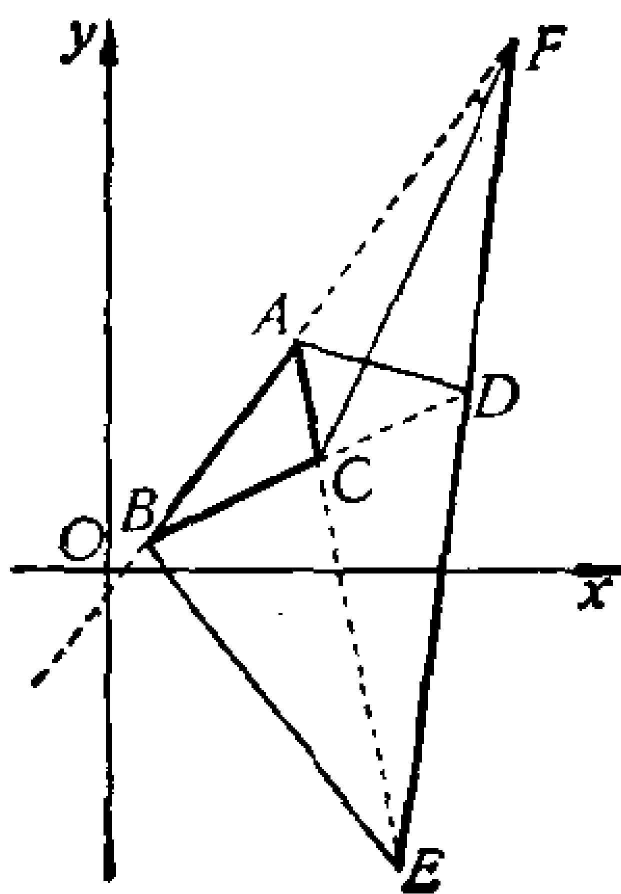
$\therefore$ E、F、M 三点共线.

81. $\triangle ABC$ 的三外角平分线分别与其对边的延长线交于 D、E、F. 试证 D、E、F 三点共线.

[证明] 如图，设 $\triangle ABC$ 的顶点坐标分别为: $A(x_1,\ y_1)$、$B(x_2,\ y_2)$、$C(x_3,\ y_3)$;

三边长 $|BC|=a,\ |CA|=b,\ |AB|=c.$

$$\because\ AF:FB=-|AC|:|BC|=-\frac{b}{a},$$



$$\therefore\ x_F=\frac{x_1-\frac{b}{a}x_2}{1-\frac{b}{a}}=\frac{ax_1-bx_2}{a-b},$$

$$y_F=\frac{y_1-\frac{b}{a}y_2}{1-\frac{b}{a}}=\frac{ay_1-by_2}{a-b}.$$

同理，$x_E=\dfrac{cx_3-ax_1}{c-a}$，$y_E=\dfrac{cy_3-ay_1}{c-a}$. $x_D=\dfrac{bx_2-cx_3}{b-c}$，$y_D=\dfrac{by_2-cy_3}{b-c}$.

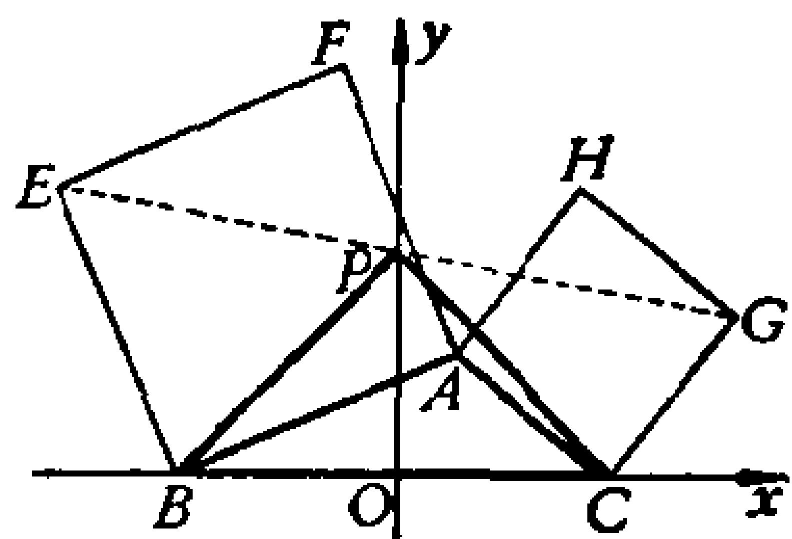
又 ∵ $$\begin{vmatrix} x_D & y_D & 1 \\ x_E & y_E & 1 \\ x_F & y_F & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{bx_2-cx_3}{b-c} & \dfrac{by_2-cy_3}{b-c} & 1 \\ \dfrac{cx_3-ax_1}{c-a} & \dfrac{cy_3-ay_1}{c-a} & 1 \\ \dfrac{ax_1-bx_2}{a-b} & \dfrac{ay_1-by_2}{a-b} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}\begin{vmatrix} bx_2-cx_3 & by_2-cy_3 & b-c \\ cx_3-ax_1 & cy_3-ay_1 & c-a \\ ax_1-bx_2 & ay_1-by_2 & a-b \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ cx_3-ax_1 & cy_3-ay_1 & c-a \\ ax_1-bx_2 & ay_1-by_2 & a-b \end{vmatrix}=0.$$

∴ D、E、F 三点共线.

82. 在 $\triangle ABC$ 的外侧作正方形 $ABEF$、$ACGH$，以 BC 为斜边在 A 点的同侧作一等腰直角三角形 BCP. 求证 E、P、G 三点共线.



［证一］ 取 BC 所在直线为 x 轴，BC 的中点 O 为原点，建立直角坐标系. 设 $\triangle ABC$ 三顶点的坐标顺次为 (b, c)、$(-a, 0)$、$(a,0)$. ∵ $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CG}$，∴ $x_G=(\overrightarrow{OG})_{Ox}=(\overrightarrow{OC})_{Ox}+(\overrightarrow{CG})_{Ox}=a+c$，$y_G=(\overrightarrow{OG})_{Oy}=(\overrightarrow{OC})_{Oy}+(\overrightarrow{CG})_{Oy}=a-b$. ∵ $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BE}$，∴ $x_E=(\overrightarrow{OE})_{Ox}=(\overrightarrow{OB})_{Ox}+(\overrightarrow{BE})_{Ox}=-a-c$，$y_E=(\overrightarrow{OE})_{Oy}=(\overrightarrow{OB})_{Oy}+(\overrightarrow{BE})_{Oy}=a+b$. ∵ $\triangle BCP$ 为等腰直角三角形，$OP=\frac{1}{2}BC=a$，∴ 点 P 坐标为 $(0, a)$. 而 EG 的中点坐标也为 $(0, a)$，故点 P 与 EG 中点重合，即 E、P、G 三点共线.

［证二］ 取坐标系同［证一］.

$$\because\ \overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA}(-i)=a+(b-a+ci)(-i)$$
$$=a+c+i(a-b),\quad \therefore\ \overrightarrow{PG}=a+c-bi.$$
$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}\cdot i=-a+(b+a+ci)i=-a-c+(a+b)i,$$

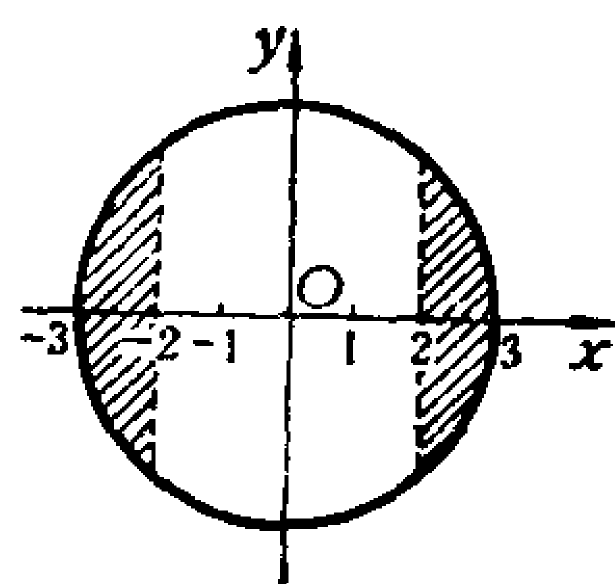
$\overrightarrow{EP}=a+c-bi.$ ∵ $\dfrac{a+c-bi}{a+c-bi}=1,$ ∴ $EP\parallel PG.$

∴ E、P、G 三点共线.

［说明］ 在解析几何中，若要证明 P、Q、R 三点共线，一般利用三点 $P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$、$R(x_3, y_3)$共线的充要条件 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$；或者证明 Q 是 PR 的定比分点；也可通过 $\overrightarrow{PQ}$、$\overrightarrow{QR}$ 对应的复数之商为实数，从而得到 $PQ\parallel QR$，亦即 P、Q、R 三点共线.

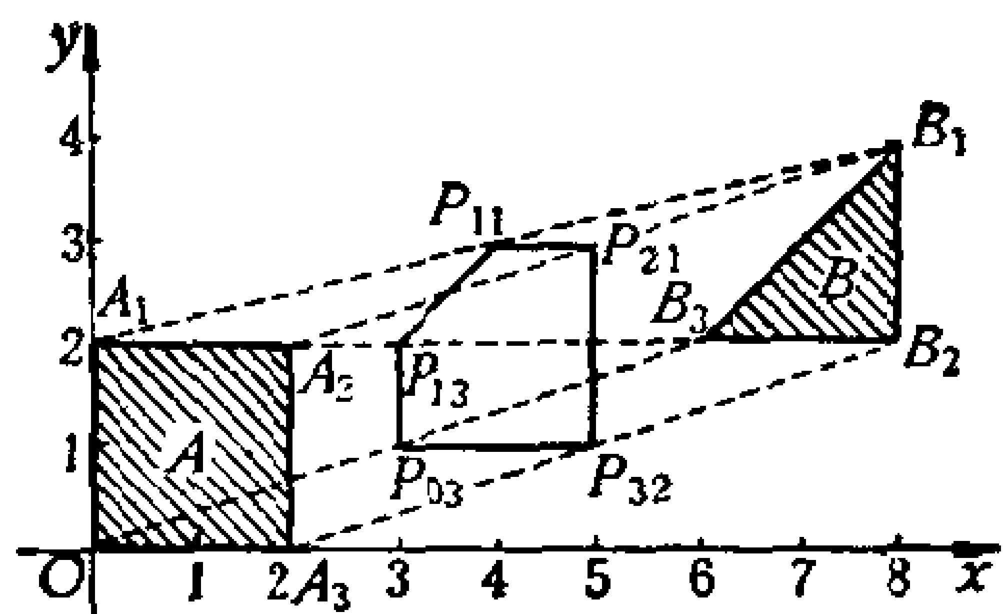
83．作出满足下列条件的点集：

$$D=\{(x, y)\,|\,|x|>2,\ x^2+y^2\leqslant 9\}.$$



［解］ ∵ $x^2+y^2\leqslant 9$， ∴ 点(x, y)到原点的距离不大于3. ∵ $|x|>2$， ∴ $x>2$，或$x<-2$.
∴ 点集 D 所在的区域如图阴影部分所示.

84．设 $A=\{(x, y)\,|0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 2\}$，$B=\{(x, y)\,|\,x\leqslant 8, y\geqslant 2;\ y\leqslant x-4\}$ 是 xy 平面上的点集．试求：$C=\left\{\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)\middle|\,(x_1, y_1)\in A,\ (x_2, y_2)\in B\right\}$ 所示图形的面积．



［分析］ 利用已知条件与不等式运算先导出 $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 和 $\dfrac{y_1+y_2}{2}$ 的取值范围，以及它们之间的关系，从而确定点集 C，并画出它的图形，再计算其面积.

［解］ 上图中划有斜线的部分，分别表示点集 A 和 B（包括边界在内）. ∵ $(x_2, y_2)\in B$，由已知 $x_2\leqslant 8$，$y_2\geqslant 2$，且 $y_2\leqslant x_2-4$，得 $2\leqslant x_2-4$， ∴ $x_2\geqslant 6$. 于是 $6\leqslant x_2\leqslant 8$…①. 又由 $x_2\leqslant 8$，得 $x_2-4\leqslant 4$. ∴ $y_2\leqslant x_2-4\leqslant 4$…②. 于是 $2\leqslant y_2\leqslant 4$…③. 再由 $(x_1-y_1)\in A$，易得 $0\leqslant x_1\leqslant 2$…④，$0\leqslant y_1\leqslant 2$…⑤，$y_1\leqslant x_1+2$…⑥，

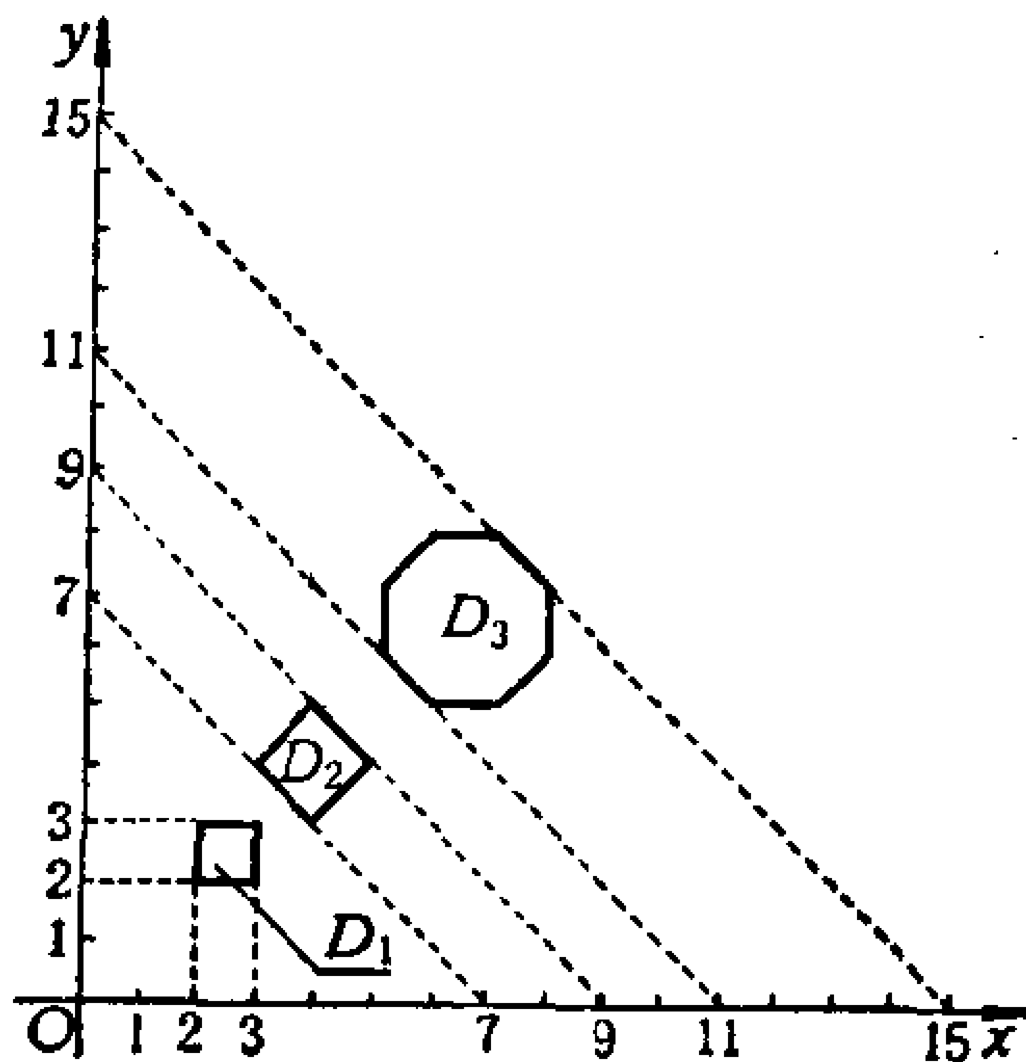
由①、④得$3\leqslant\frac{x_1+x_2}{2}\leqslant5$；由③、⑤得$1\leqslant\frac{y_1+y_2}{2}\leqslant3$；由②、⑥得$\frac{y_1+y_2}{2}\leqslant\frac{x_1+x_2}{2}-1$. 因而

$$C=\left\{\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)\middle|(x_1,y_1)\in A,(x_2,y_2)\in B\right\}$$
$$=\{(x,y)\,|\,3\leqslant x\leqslant5,\ 1\leqslant y\leqslant3,\text{ 且 }y\leqslant x-1\}.$$

设A_1B_1的中点为P_{11}（如图），A_2B_1、A_3B_2、OB_3、A_1B_3的中点分别为P_{21}、P_{32}、P_{03}、P_{13}. 故点集C所示图形为五边形$P_{11}P_{21}P_{32}P_{03}P_{13}$，它的面积是

$$4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}\quad(\text{面积单位}).$$

85. 设O为原点，在直角坐标平面上作出满足下列条件的点集：$D_1=\{(x_1,y_1)\,|\,2<x_1<3,\ 2<y_1<3\}$，$D_2=\{(x_2,y_2)\,|\,7<x_2+y_2<9,\ -1<x_2-y_2<1\}$. 如$P\in D_1$，$Q\in D_2$，以$OP$、$OQ$为两边作平行四边形$OPRQ$，求第四顶点$R(x_3,y_3)$构成的点集$D_3$.（当$O$、$P$、$Q$位于同一半直线$OQ$上，则点$R$满足条件$OR=OP+OQ$.）



［解］ $\because$ $2<x_1<3,\ 2<y_1<3\cdots$①，$\therefore$ D_1为图中的正方形内部.

$\because$ $7<x_2+y_2<9,\ -1<x_2-y_2<1\cdots$②，

$\therefore$ $\begin{cases}3<x_2<5\\3<y_2<5\end{cases}\cdots$③. 故$D_2$为另一正方形内部. $\because$ $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$，

$\therefore$ $\begin{cases}x_3=x_1+x_2\\y_3=y_1+y_2\end{cases}\cdots$④. 从①与③、④得：$5<x_3<8,\ 5<y_3<8\cdots$⑤. 从④、②与 $4<x_1+y_1<6$，$-1<x_1-y_1<1$ 得：$11<x_3+y_3<15$，$-2<x_3-y_3<2$. 从而D_3为图中的六边形内部.

86. 证明格点三角形不可能是正三角形.（凡坐标均为整数的点称为格点或整点，顶点均为格点的三角形即格点三角形.）

［分析］ 命题用否定形式出现，可应用反证法，即设格点三角形为正三

角形，然后导出矛盾的结果，从而使命题得到证明.

［证］ 通过平移使三角形的一顶点为新原点 O，则其它两顶点 A、B 的坐标仍为整数 (m_1, n_1)、(m_2, n_2)，假设此三角形为正三角形，则

$$\operatorname{tg}\angle AOB=\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}=\frac{\frac{n_2}{m_2}-\frac{n_1}{m_1}}{1+\frac{n_1}{m_1}\cdot\frac{n_2}{m_2}}=\frac{m_1n_2-m_2n_1}{m_1m_2+n_1n_2}.$$

$\because$ m_1、m_2、n_1、n_2 均为整数， $\therefore$ $\frac{m_1n_2-m_2n_1}{m_1m_2+n_1n_2}$ 为有理数，而 $\sqrt{3}$ 是无理数，有理数不可能等于无理数，得出矛盾，证明假设是错误的. 因此格点三角形不可能是正三角形.

［说明］ 有关格点的证明题大多可用反证法，根据整数经过四则运算结果为有理数的性质导出矛盾，从而得证.

87．求证：格点多边形(顶点坐标都是整数的多边形)的面积的两倍为整数.

［分析］ 多边形的面积都可化成顶点在多边形顶点处的三角形面积的和. 因此只要证明顶点为格点的三角形的面积的两倍是整数.

［证］ 设格点三角形的三个顶点坐标分别为 (a_1, b_1)、(a_2, b_2)、(a_3, b_3). $\because$ a_1、a_2、b_1、b_2、c_1、c_2 都是整数， $\therefore$ 格点三角形面积的两倍

$$2S=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & 1\\ a_2 & b_2 & 1\\ a_3 & b_3 & 1\end{vmatrix}\text{的绝对值是整数.}$$

由于格点多边形可以分割为若干个这样的三角形，因而它的面积的两倍也是整数.

88．在坐标平面内有五个格点，证明其中必有两点连线的中点也是格点.

［分析］ 根据线段中点坐标可知，若要使两格点的中点也为格点，则这两个格点的横坐标和纵坐标的奇偶性应分别相同，而这五个格点中必有两个点符合要求.

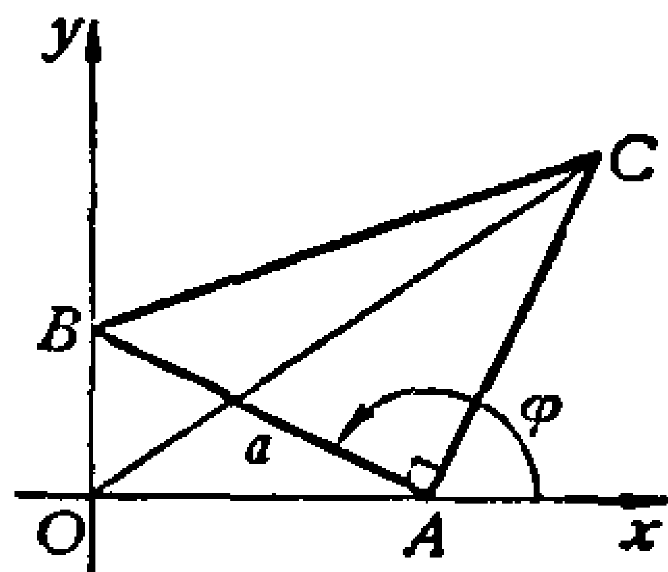
［证］ 格点的坐标一共只有下列四种情况：(奇，奇)、(奇，偶)、(偶，奇)、(偶，偶)，故五个格点中必有两个点的纵、横坐标奇偶性一致. 而中点坐标

是两端点坐标和的一半，同奇或同偶的两数和的一半必为整数．由此可见，五个格点中必有两点连线的中点是格点．

89．求证：不存在三个顶点的坐标都是有理数的正三角形．

［证］ 假定一正三角形三个顶点的坐标 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)、(x_3, y_3) 都是有理数，则它的面积 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ 的绝对值必定是有理数．又正三角形的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，其中 a 为边长，而边长的平方为 $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$，也是有理数，因此 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 为无理数，即这个正三角形面积又为无理数．从而得出矛盾，故假设是错误的，即三个顶点坐标都是有理数的正三角形是不存在的．

90．定长为 a 的线段 AB 的两端分别在 x、y 轴上滑动，以 A 为直角顶点作等腰直角 $\triangle ABC$（A、B、C 的旋转方向是顺时针的）．试求 $|OC|$ 的最大值和最小值．



［分析一］ $|OC|$ 的值依赖于点 C 的位置，而点 C 的位置依赖于点 A 的位置，点 A 的位置又依赖于 AB 的位置．AB 为定长且两端固定在两轴上滑动，只要 AB 的倾角确定即可确定点 A 位置，故可选择 AB 的倾角 φ 为自变量，建立 $|OC|$ 和 φ 的函数关系，从而求得 $|OC|$ 的最大值和最小值．

［解一］ 设 AB 的倾角为 φ，点 C 的坐标为 (x, y)，则

$$x=a\cos(\pi-\varphi)+a\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=a\sin\varphi-a\cos\varphi,$$

$$y=a\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=-a\cos\varphi.$$

$$\begin{aligned}|OC|&=\sqrt{x^2+y^2}=a\sqrt{(\sin\varphi-\cos\varphi)^2+\cos^2\varphi}\\&=a\sqrt{1-2\sin\varphi\cos\varphi+\cos^2\varphi}\\&=a\sqrt{1-\sin2\varphi+\frac{1}{2}(1+\cos2\varphi)}\end{aligned}$$

$$=a\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos 2\varphi-2\sin 2\varphi)}$$

$$=a\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\cos(2\varphi+\alpha)}\quad(\operatorname{tg}\alpha=2).$$

当 $\cos(2\varphi+\alpha)=1$ 时，$|OC|$ 有最大值$\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}a=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)a$.

当 $\cos(2\varphi+\alpha)=-1$ 时，$|OC|$ 有最小值$\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}a=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)a$.

以上是假设 $\triangle ABC$ 在第一象限时的情况，若 $\triangle ABC$ 在其它象限时，亦可类似地求解.

[分析二] $|OC|$ 的变化与点 C 的位置有关，点 C 的运动又依赖于向量 $\overrightarrow{AB}$ 的滑动，而向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模 $|AB|=a$ 是定值，故可设$(\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{AB})=\varphi$ 为自变量，用 φ 来表示动点 C 的坐标，建立目标函数即可求解.

[解二] 设 $(\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{AB})=\varphi$, 则 $(\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{AC})=\varphi-\frac{\pi}{2}$, 点 A 坐标为 $(-a\cos\varphi,\ 0)$. 若点 C 坐标为$(x,\ y)$, 则根据提要(1.21),

$$(\overrightarrow{AC})_{Ox}=a\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=a\sin\varphi=x+a\cos\varphi.$$

$$\therefore\quad x=a(\sin\varphi-\cos\varphi).$$

$$(\overrightarrow{AC})_{Oy}=a\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=-a\cos\varphi=y.$$

$\therefore$ 点 C 坐标为$(a\sin\varphi-a\cos\varphi,\ -a\cos\varphi)$.

$$\therefore\quad |OC|=\sqrt{x^2+y^2}=a\sqrt{(\sin\varphi-\cos\varphi)^2+\cos^2\varphi}$$

$$=a\sqrt{1-2\sin\varphi\cos\varphi+\cos^2\varphi}$$

$$=a\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos 2\varphi-2\sin 2\varphi)}$$

$$=a\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\cos(2\varphi+\alpha)}\quad(\operatorname{tg}\alpha=2).$$

当 $\cos(2\varphi+\alpha)=1$ 时，$|OC|$ 有最大值$\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}a=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)a$.

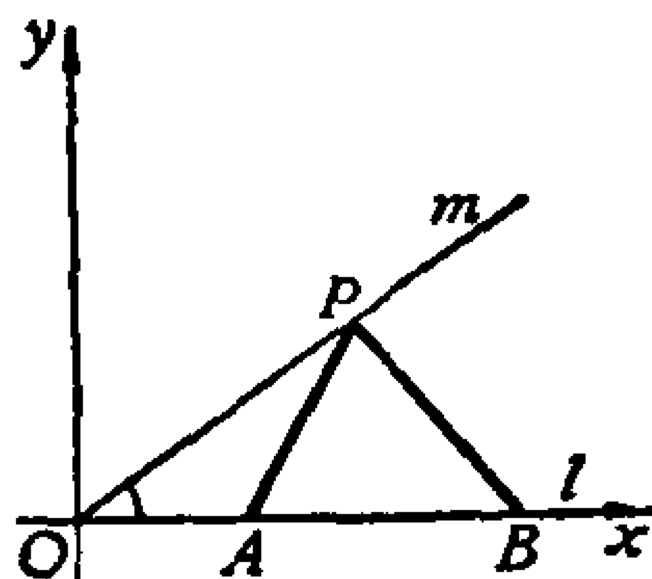
当 $\cos(2\varphi+\alpha)=-1$ 时，$|OC|$ 有最小值$\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}a=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)a$.

[说明] (1) 在解析几何中解最大(小)值问题，常以长度、角度为自变

量. 为了便于使用向量射影公式,通常选用某动向量的幅角为自变量.

(2) [解一]与[解二]的区别在于前者只适用于图形在第一象限内的情形,后者不受图形所在象限的限制.

91. 设 l、m 为两相交直线,A、B 为 l 上两定点,P 为 m 上的动点. 问点 P 在什么位置时才能使 (1) $|AP|^2+|BP|^2$ 取最小值; (2) $||AP|^2-|BP|^2|$ 取最小值.



[分析] $|AP|^2+|BP|^2$ 和 $||AP|^2-|BP|^2|$ 的值和点 P 位置有关, 因此可取点 P 的坐标为自变量,列出函数式后求解.

[解] 以直线 l 为 x 轴, 直线 l、m 交点 O 为原点, 建立直角坐标系. 设点 A、B 坐标为 $(a,\ 0)$、$(b,\ 0)$. 又 $\angle xOP=\alpha$, $|OP|=t$,则点 P 坐标为$(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)$.

(1) $|PA|^2+|PB|^2=(t\cos\alpha-a)^2+(t\sin\alpha)^2+(t\cos\alpha-b)^2+(t\sin\alpha)^2$

$$=2t^2-2(a\cos\alpha+b\cos\alpha)t+a^2+b^2$$

$$=2\left[t-\frac{1}{2}(a+b)\cos\alpha\right]^2+a^2+b^2-\frac{1}{2}(a+b)^2\cos^2\alpha.$$

$\therefore$ 当 $t=\frac{1}{2}(a+b)\cos\alpha$ 时, $|PA|^2+|PB|^2$ 取得最小值

$$a^2+b^2-\frac{1}{2}(a+b)^2\cos^2\alpha.$$

(2) $||PA|^2-|PB|^2|=|[2(b-a)\cos\alpha]t+a^2-b^2|$.

$\therefore$ 当 $t=\frac{b+a}{2\cos\alpha}$ 时, $||PA|^2-|PB|^2|$ 取得最小值 0.

92. 求一点 $P(x,\ y)$, 使它到已知三点 $A(x_1,\ y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,\ y_3)$的距离的平方和最小.

[解] 设 $PA^2+PB^2+PC^2=u$, 则

$$u=(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+(x-x_3)^2+(y-y_1)^2+(y-y_2)^2+(y-y_3)^2$$

$$=3x^2-2x(x_1+x_2+x_3)+x_1^2+x_2^2+x_3^2+3y^2$$

$$-2y(y_1+y_2+y_3)+y_1^2+y_2^2+y_3^2$$

$$=3\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2$$

$$+y_1^2+y_2^2+y_3^2-\frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{3}-\frac{(y_1+y_2+y_3)^2}{3}.$$

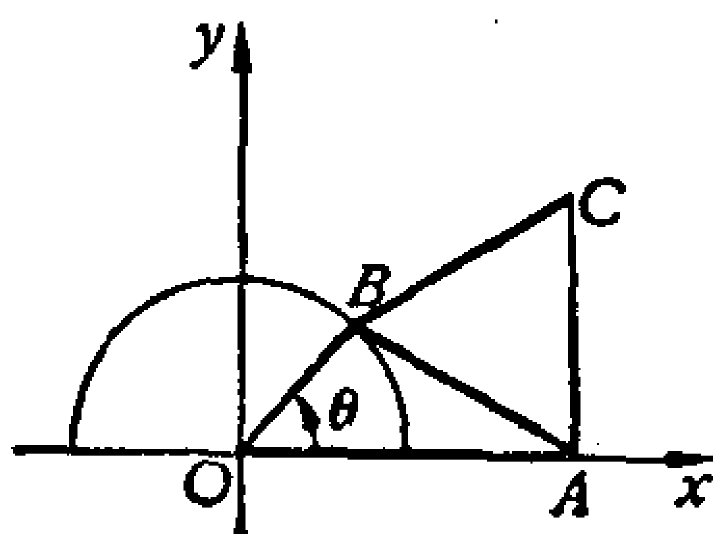
当 $x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$ 时 u 有最小值.

故所求的点为 $P\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

[说明] 本题可以推广为已知平面上 n 个点 $A_1(x_1, y_1)$、$A_2(x_2, y_2)\cdots A_n(x_n, y_n)$, 求一点 P, 使 $PA_1^2+PA_2^2+\cdots+PA_n^2$ 为最小. 结论为点 P 的坐标是 $\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}, \frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}\right)$.

93. 圆心在原点 O, 半径等于 1 的上半圆上有一动点 B, 定点 A 的坐标为 $(2, 0)$; $\triangle ABC$ 是正三角形 (A、B、C 顺时针向). 当点 B 运动到什么位置时, 四边形 $OACB$ 的面积最大?

[分析] 四边形 $OACB$ 的面积和点 B 的位置有关, 点 B 的位置由 $\angle AOB$ 决定. 因此可以设 $\angle AOB=\theta$ 为自变量求解.



[解] 设 $\angle AOB=\theta$, 点 $B(\cos\theta, \sin\theta)$, 则 $|AB|^2=(\cos\theta-2)^2+\sin^2\theta$. 四边形 $OACB$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ \cos\theta & \sin\theta & 1\end{vmatrix}+\frac{\sqrt{3}}{4}|AB|^2$$

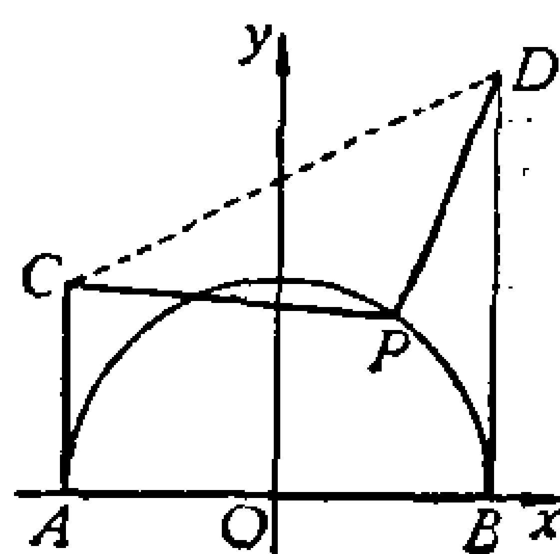
$$=\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{4}[(\cos\theta-2)^2+\sin^2\theta]=\frac{5\sqrt{3}}{4}+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right).$$

$\therefore$ 当 $\theta=\frac{5}{6}\pi$ 时, 四边形 $OACB$ 的面积最大, 最大值为 $\frac{5\sqrt{3}}{4}+2$.

94. 已知半圆 O 的直径是 AB, $AC\perp AB$ 且 $|AC|=\frac{1}{2}|AB|$, 在同一侧再作 $BD\perp AB$ 且 $|BD|=\frac{3}{2}|AB|$, P 为半圆周上一点, 求封闭图形 $ABDPC$ 面积的最大值.

[解一] 取圆心 O 为原点, 直径 AB 所在直线为 x 轴, 建立直角坐标系

如图. 令半径为r, 则$A(-r, 0)$、$B(r, 0)$、$C(-r, r)$、$D(r, 3r)$. 设点P的坐标为(x_0, y_0), 则封闭图形$ABDPC$的面积



$$S=S_{梯形ABDO}-S_{\triangle OPD}$$

$$=4r^2-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-r & r & 1\\ x_0 & y_0 & 1\\ r & 3r & 1\end{vmatrix}$$

$$=4r^2-\frac{1}{2}(2rx_0-2ry_0+4r^2)=-rx_0+ry_0+2r^2.$$

解得 $x_0=y_0+2r-\frac{S}{r}\cdots$①. 而 $|OP|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$, $\therefore\ x_0^2+y_0^2=r^2\cdots$②. ①代入②, 得 $2y_0^2+2\left(2r-\frac{S}{r}\right)y_0+\left(2r-\frac{S}{r}\right)^2-r^2=0$. $\because\ y_0$是实数, $\therefore\ \Delta=4\left(2r-\frac{S}{r}\right)^2-8\left[\left(2r-\frac{S}{r}\right)^2-r^2\right]\geqslant 0$, 解得 $(2-\sqrt{2})r^2\leqslant S\leqslant(2+\sqrt{2})r^2$. $\therefore S_{最大}=(2+\sqrt{2})r^2$, 即封闭图形$ABDPC$面积的最大值为$(2+\sqrt{2})r^2$面积单位.

[解二] 坐标系同前. 设点P的坐标为$(r\cos\theta, r\sin\theta)$, 则封闭图形$ABDPC$的面积

$$S=S_{梯形ABDO}-S_{\triangle OPD}=4r^2-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-r & r & 1\\ r\cos\theta & r\sin\theta & 1\\ r & 3r & 1\end{vmatrix}$$

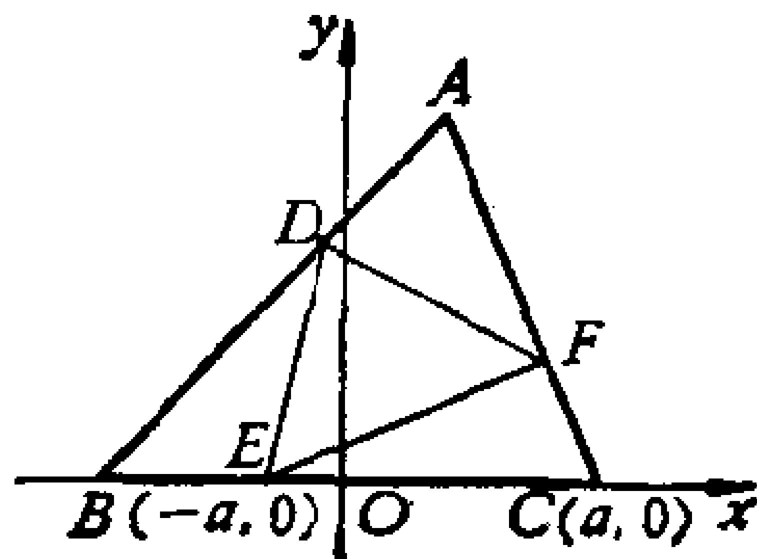
$$=4r^2-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-r & r & 1\\ r(\cos\theta+1) & r(\sin\theta-1) & 0\\ 2r & 2r & 0\end{vmatrix}$$

$$=r^2(2+\sin\theta-\cos\theta)=r^2\left[2+\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right], \theta\in[0, \pi).$$

$\therefore$ 当 $\theta=\frac{3\pi}{4}$ 时, $S_{最大}=(2+\sqrt{2})r^2$. 结论同前解.

95. D、E、F分别是$\triangle ABC$的AB、BC、CA边上的动点, 在时刻$t=0$时, 它们分别从A、B、C出发, 各以一定的速度向B、C、A移动, 在时刻$t=1$时到达B、C、A位置. (1) 试证在动点D、E、F移动过程中, $\triangle DEF$的重心不变; (2) $\triangle DEF$

的面积的最小值是 $\triangle ABC$ 面积的多少?



[分析] $\triangle DEF$ 的重心和面积均依赖于顶点 D、E、F 的位置, 而动点 D、E、F 在相同的时间里走完各自的路程 AB、BC、CA, 所以在同一时刻 t_0, D、E、F 各自把 AB、BC、CA 分成相等的比 λ. 可利用定比分点公式求出时刻 t_0 时 D、E、F 的坐标来求解.

[证] (1) 以 BC 所在直线为 x 轴, BC 中点 O 为原点, 建立直角坐标系. 若 $|BC|=2a$, 则 $B(-a, 0)$、$C(a, 0)$. 设 D、E、F 移动速度为 v_D、v_E、v_F, 由条件可知 $|AB|=v_D\cdot 1=v_D$. 同理, $|BC|=v_E$, $|AC|=v_F$. 经 t_0 时刻时, $|AD|:|BE|:|CF|=v_Dt_0:v_Et_0:v_Ft_0=|AB|:|BC|:|CA|$.

即 $\dfrac{|AD|}{|AB|}=\dfrac{|BE|}{|BC|}=\dfrac{|CF|}{|CA|}$.

$$\therefore\quad \frac{|AD|}{|AB|-|AD|}=\frac{|BE|}{|BC|-|BE|}=\frac{|CF|}{|CA|-|CF|},$$

即 $\dfrac{|AD|}{|DB|}=\dfrac{|BE|}{|EC|}=\dfrac{|CF|}{|FA|}$. 设其比值为 $\lambda(\lambda>0)$, 则

$$\begin{cases} x_D=\dfrac{x_A-\lambda a}{1+\lambda} \\ y_D=\dfrac{y_A}{1+\lambda}, \end{cases}\quad \begin{cases} x_E=\dfrac{-a+\lambda a}{1+\lambda} \\ y_E=0, \end{cases}\quad \begin{cases} x_F=\dfrac{a+\lambda x_A}{1+\lambda} \\ y_F=\dfrac{\lambda y_A}{1+\lambda}. \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle DEF$ 的重心 M 的坐标 $x_M=\dfrac{1}{3}(x_D+x_E+x_F)=\dfrac{(1+\lambda)x_A}{3(1+\lambda)}=\dfrac{x_A}{3}$. 同理 $y_M=\dfrac{y_A}{3}$. 而点 $\left(\dfrac{x_A}{3}, \dfrac{y_A}{3}\right)$ 是定点, $\therefore$ $\triangle DEF$ 的重心不变.

$$(2)\quad S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \dfrac{x_A-\lambda a}{1+\lambda} & \dfrac{y_A}{1+\lambda} & 1 \\ \dfrac{-a+\lambda a}{1+\lambda} & 0 & 1 \\ \dfrac{a+\lambda x_A}{1+\lambda} & \dfrac{\lambda y_A}{1+\lambda} & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2(1+\lambda)^2}\begin{vmatrix} x_A-\lambda a & y_A & 1 \\ -a+\lambda a & 0 & 1 \\ a+\lambda x_A & \lambda y_A & 1 \end{vmatrix}$$

$$=ay_A\cdot\frac{\lambda^2-\lambda+1}{(1+\lambda)^2}.$$

又 $S_{\triangle ABO}=ay_A$, $\therefore$ $\dfrac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABO}}=\dfrac{\lambda^2-\lambda+1}{(\lambda+1)^2}$.

设$N=\dfrac{\lambda^2-\lambda+1}{(\lambda+1)^2}$（$\lambda$为一切正实数），则

$$(N-1)\lambda^2+(2N+1)\lambda+N-1=0.$$

由$\Delta=(2N+1)^2-4(N-1)^2\geqslant 0$，解得$N\geqslant\dfrac{1}{4}$．即$S_{\triangle DEF}\geqslant\dfrac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

∴ $\triangle DEF$的面积最小时是$\triangle ABC$面积的四分之一.

§3. 极 坐 标 系

96. $\triangle ABC$三顶点极坐标分别为$A\left(5,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$、$B\left(8,\ \dfrac{5\pi}{6}\right)$、$C\left(-3,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$. 求证$\triangle ABC$是等边三角形.

[证] $|AB|=\sqrt{5^2+8^2-2\times5\times8\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{\pi}{2}\right)}=\sqrt{49}=7;$

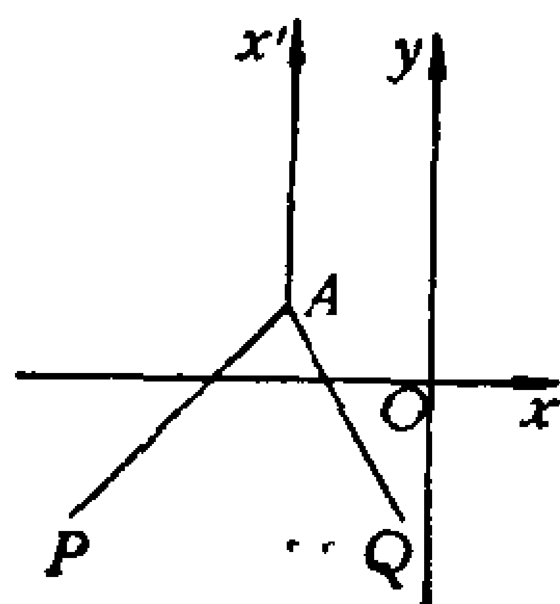
$$|BC|=\sqrt{8^2+(-3)^2-2\times8\times(-3)\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)}=\sqrt{49}=7;$$

$$|AC|=\sqrt{5^2+(-3)^2-2\times5\times(-3)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}=\sqrt{49}=7.$$

∵ $|AB|=|BC|=|AC|$，∴ $\triangle ABC$是等边三角形.

97. 已知极点在点$A(-2,\ 1)$处，极轴与y轴的正半轴同向，求点$P(-5,\ -2)$和$Q(-2+\sqrt{3},\ -2)$的极坐标.

[解] $|AP|=\sqrt{(-5+2)^2+(-2-1)^2}=3\sqrt{2}$.



设$(\overrightarrow{Ax'},\ \overrightarrow{AP})=\varphi$，根据提要(1.21)，

$$(\overrightarrow{AP})_{Ax'}=|AP|\cos\varphi=3\sqrt{2}\cos\varphi.$$

∵ $Ax'\parallel Oy$，∴ $(\overrightarrow{AP})_{Ax'}=(\overrightarrow{AP})_{Oy}$.

而$(\overrightarrow{AP})_{Oy}=-2-1=-3$，∴ $3\sqrt{2}\cos\varphi=-3$，

$\cos\varphi=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，根据点$P$的位置，得$\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$.

点P的极坐标为$\left(3\sqrt{2},\ \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

$$|AQ|=\sqrt{(-2+\sqrt{3}+2)^2+(-2-1)^2}=2\sqrt{3}.$$

设$(\overrightarrow{Ax'}, \overrightarrow{AQ})=\varphi'$，$(\overrightarrow{AQ})_{Ax'}=|AQ|\cos\varphi'=-3$，$\cos\varphi'=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，根据点$Q$的位置，得 $\varphi'=\dfrac{7\pi}{6}$. 点Q的极坐标是$\left(2\sqrt{3},\ \dfrac{7\pi}{6}\right)$.

98. 已知直线上三点的极坐标为$A(\rho_1, \theta_1)$、$B(\rho_2, \theta_2)$、$C(\rho_3, \theta_3)$，ρ_1、ρ_2、ρ_3均大于0. 求证：

$$\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\rho_3}+\frac{\sin(\theta_2-\theta_3)}{\rho_1}+\frac{\sin(\theta_3-\theta_1)}{\rho_2}=0.$$

［分析］ 不妨设 A、B、C 的位置如图，由 $S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OBC}=S_{\triangle OAC}$，可证得结论.

［证］ 设极点O不在已知直线上.

$$\because\quad S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OBC}=S_{\triangle OAC},$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin(\theta_2-\theta_1)+\frac{1}{2}\rho_2\rho_3\sin(\theta_3-\theta_2)=\frac{1}{2}\rho_1\rho_3\sin(\theta_3-\theta_1).$$

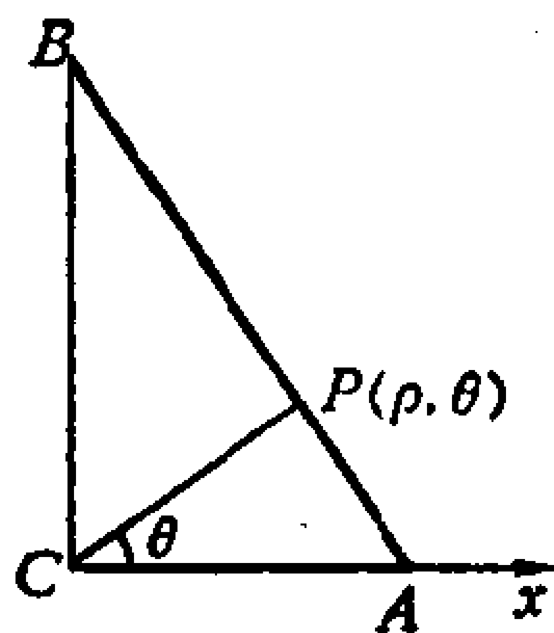
即 $\rho_1\rho_2\sin(\theta_1-\theta_2)+\rho_2\rho_3\sin(\theta_2-\theta_3)+\rho_1\rho_3\sin(\theta_3-\theta_1)=0.$

$$\because\quad \rho_1\rho_2\rho_3\neq0,$$

$$\therefore\quad \frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\rho_3}+\frac{\sin(\theta_2-\theta_3)}{\rho_1}+\frac{\sin(\theta_3-\theta_1)}{\rho_2}=0.$$

设极点O在直线上，则有三种情况：(i) $\theta_1=\theta_2=\theta_3$；(ii) $\theta_1=\theta_2$，$\theta_3=\pi+\theta_1$；(iii) $\theta_2=\theta_3=\pi+\theta_1$. 容易验证结论也都成立.

99. 证明直角三角形斜边上的高与斜边之和大于两直角边之和.



［证］ 取直角三角形ABC的直角顶点C为极点，CA为极轴，建立极坐标系. 设点C在斜边上的射影为P，点P的极坐标为(ρ, θ)，其中$|CP|=\rho>0$，$\theta\in\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$\because\quad |AC|=\frac{\rho}{\cos\theta},\ |BC|=\frac{\rho}{\sin\theta},\ |AB|=\rho(\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta).$$

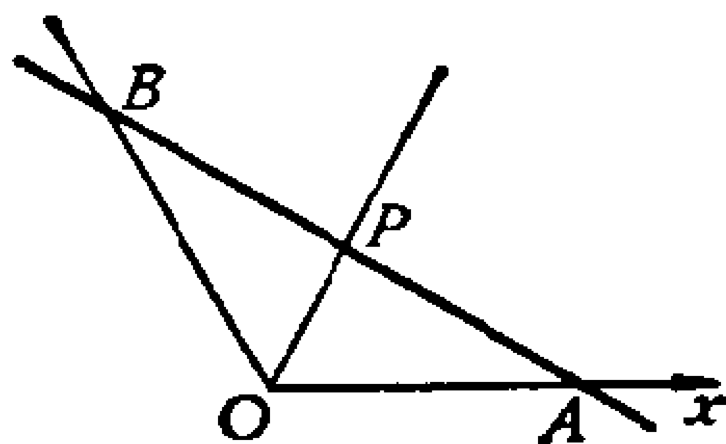
$$\therefore\quad |CP|+|AB|-|AC|-|BC|=\rho\left(1+\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}-\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)$$

$$=\frac{\rho}{\sin\theta\cos\theta}(\sin\theta\cos\theta+1-\sin\theta-\cos\theta)$$

$$=\frac{\rho(1-\sin\theta)(1-\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta}>0.$$

$\therefore\quad |CP|+|AB|>|AC|+|BC|.$

100. 设过点 $P\left(\rho, \frac{\pi}{3}\right)$ 任意作一直线交极轴 Ox 于 $A(\rho_1, 0)$，交直线 $\theta=\frac{2\pi}{3}$ 于 $B\left(\rho_2, \frac{2\pi}{3}\right)$，其中 ρ、ρ_1、ρ_2 均为正数．求证：$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{1}{\rho}$.



［证一］ 如图，$\because\ S_{\triangle OAP}+S_{\triangle OPB}=S_{\triangle OAB}$，

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\rho_1\rho\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\rho\rho_2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin\frac{2\pi}{3},$$

即 $\rho_1\rho+\rho\rho_2=\rho_1\rho_2$. $\because\ \rho_1$、ρ_2、ρ 均不等于零，故等式两边同除以 $\rho\rho_1\rho_2$ 得

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{1}{\rho}.$$

［证二］ $\because\quad \angle AOP=\angle POB=\frac{\pi}{3}$,

$$\therefore\quad \frac{|OA|}{|OB|}=\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{\sqrt{\rho^2+\rho_1^2-2\rho\rho_1\cos\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{\rho^2+\rho_2^2-2\rho\rho_2\cos\frac{\pi}{3}}}.$$

$$\because\quad |OA|=\rho_1,\ |OB|=\rho_2,\quad \therefore\quad \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}=\frac{\rho^2+\rho_1^2-\rho\rho_1}{\rho^2+\rho_2^2-\rho\rho_2},$$

即 $\rho^2\rho_1^2-\rho^2\rho_2^2=\rho\rho_1^2\rho_2-\rho\rho_1\rho_2^2$，$\rho^2(\rho_1+\rho_2)(\rho_1-\rho_2)=\rho\rho_1\rho_2(\rho_1-\rho_2)$.
不妨设 $\rho_1\neq\rho_2$（若 $\rho_1=\rho_2$，则结果是显然的），两边同除以 $\rho^2\rho_1\rho_2(\rho_1-\rho_2)$，得 $\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{1}{\rho}$.

101. 已知 $\triangle ABC$ 三顶点的极坐标为 $A(\rho_1, \theta_1)$、$B(\rho_2, \theta_2)$、$C(\rho_3, \theta_3)$．求证：三角形面积

$$S=\frac{1}{2}|\rho_1\rho_2\sin(\theta_2-\theta_1)+\rho_2\rho_3\sin(\theta_3-\theta_2)+\rho_3\rho_1\sin(\theta_1-\theta_3)|.$$

［证］ 若点 O 在 $\triangle ABC$ 内部(如图 1)，则

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OCA}$$
$$=\frac{1}{2}|\rho_1\rho_2\sin(\theta_2-\theta_1)+\rho_2\rho_3\sin(\theta_3-\theta_2)+\rho_3\rho_1\sin(\theta_1-\theta_3)|.$$

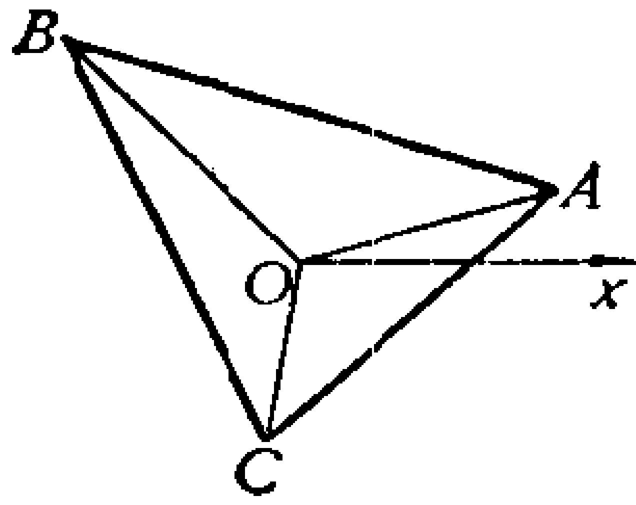


图 1

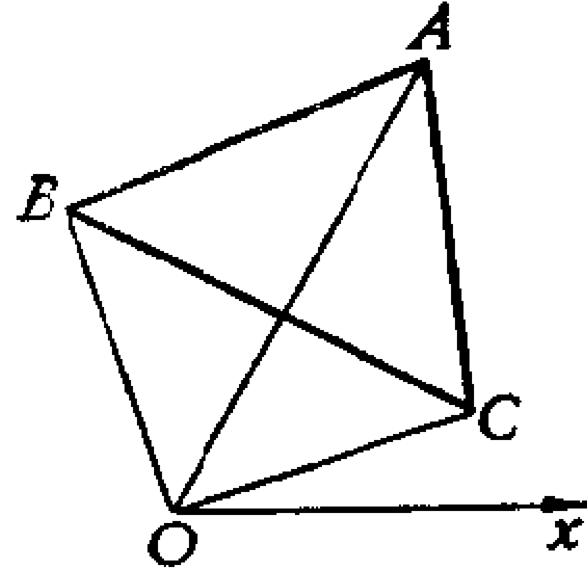


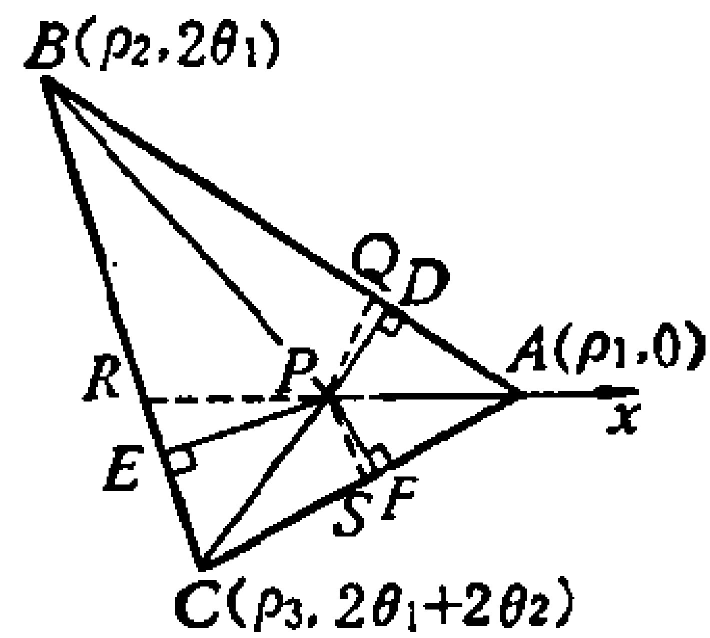
图 2

若点 O 在 $\triangle ABC$ 外部(如图 2)，则

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OCA}-S_{\triangle OCB}$$
$$=\frac{1}{2}|\rho_1\rho_2\sin(\theta_2-\theta_1)+\rho_3\rho_1\sin(\theta_1-\theta_3)-\rho_2\rho_3\sin(\theta_2-\theta_3)|$$
$$=\frac{1}{2}|\rho_1\rho_2\sin(\theta_2-\theta_1)+\rho_3\rho_1\sin(\theta_1-\theta_3)+\rho_2\rho_3\sin(\theta_3-\theta_2)|.$$

对于 $\triangle ABC$ 顶点的其它相关位置，结论都成立.

102. 设 P 为 $\triangle ABC$ 内部或边上一点，P 到三边的距离为 $|PD|$、$|PE|$、$|PF|$. 求证：$|PA|+|PB|+|PC|\geqslant 2(|PD|+|PE|+|PF|)$.



［证］ 取 P 为极点，PA 为极轴，建立极坐标系. 设 A、B、C 的极坐标分别为 $(\rho_1,\ 0)$、$(\rho_2, 2\theta_1)$、$(\rho_3,\ 2\theta_1+2\theta_2)$. $\angle CPA=2\theta_3=2\pi-(2\theta_1+2\theta_2)$，$|PA|=\rho_1$，$|PB|=\rho_2$，$|PC|=\rho_3$. PQ、PR、PS 分别为 $\angle APB$、$\angle BPC$、$\angle CPA$ 的平分线. $|PQ|=t_1$，$|PR|=t_2$，$|PS|=t_3$. Q、R、S 的极坐标分别为 $(t_1,\ \theta_1)$、$(t_2,\ 2\theta_1+\theta_2)$、$(t_3,\ 2\pi-\theta_3)$. ∵ A、Q、B 三点共线，根据第 98 题得

$$\frac{\sin(0-2\theta_1)}{t_1}+\frac{\sin(2\theta_1-\theta_1)}{\rho_1}+\frac{\sin(\theta_1-0)}{\rho_2}=0.$$

∴ $t_1=\dfrac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}\cos\theta_1\leqslant\sqrt{\rho_1\rho_2}\cos\theta_1$. 同理可得 $t_2\leqslant\sqrt{\rho_2\rho_3}\cos\theta_2$，$t_3\leqslant$

$\sqrt{\rho_3\rho_1}\cos\theta_3$. 令$\sqrt{\rho_1}$、$\sqrt{\rho_2}$、$\sqrt{\rho_3}$分别为第77题中的$OA_1$、$OA_2$、$OA_3$，并$\angle A_1OA_2=\theta_1$，$\angle A_2OA_3=\theta_2$，$\angle A_3OA_1'=\theta_3$，则

$$|A_1A_2|^2+|A_2A_3|^2+|A_3A_1'|^2=\rho_1+\rho_2-2\sqrt{\rho_1\rho_2}\cos\theta_1+\rho_2+\rho_3$$
$$-2\sqrt{\rho_2\rho_3}\cos\theta_2+\rho_3+\rho_1-2\sqrt{\rho_3\rho_1}\cos\theta_3$$
$$\geqslant|OA_1|^2+|OA_2|^2+|OA_3|^2=\rho_1+\rho_2+\rho_3,$$

移项得

$$\rho_1+\rho_2+\rho_3\geqslant 2(\sqrt{\rho_1\rho_2}\cos\theta_1+\sqrt{\rho_2\rho_3}\cos\theta_2+\sqrt{\rho_3\rho_1}\cos\theta_3)$$
$$\geqslant 2(t_1+t_2+t_3)\geqslant 2(|PD|+|PE|+|PF|).$$

当且仅当三角形为正三角形且P为其中心时，等号成立.

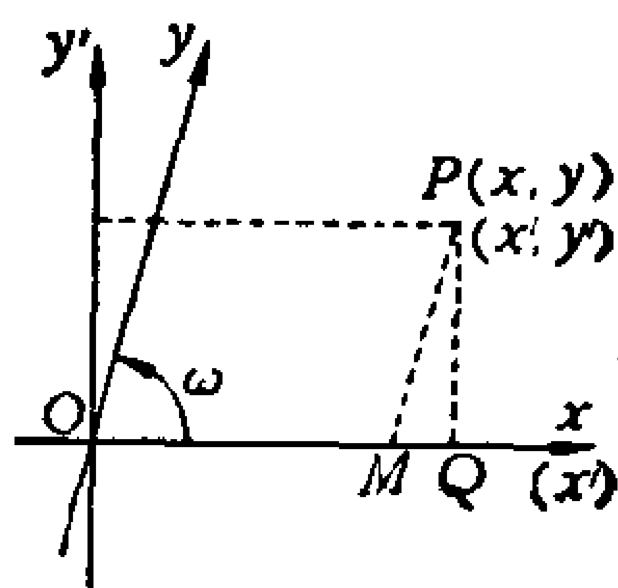
［说明］ 这个不等式称为埃德斯-莫德尔 (Erdös-Mordell) 不等式. 这里通过一个比该不等式更强的不等式来进行证明. 如果应用三角不等式: "若$\alpha+\beta+\gamma=\pi$，x、y、z为任意实数，则$x^2+y^2+z^2\geqslant 2xy\cos\alpha+2yz\cos\beta+2zx\cos\gamma$"，则在已证得$t_1\leqslant\sqrt{\rho_1\rho_2}\cos\theta_1$，$t_2\leqslant\sqrt{\rho_2\rho_3}\cos\theta_2$，$t_3\leqslant\sqrt{\rho_3\rho_1}\cos\theta_3$之后，可直接得

$$\rho_1+\rho_2+\rho_3\geqslant 2(\sqrt{\rho_1\rho_2}\cos\theta_1+\sqrt{\rho_2\rho_3}\cos\theta_2+\sqrt{\rho_3\rho_1}\cos\theta_3)$$
$$\geqslant 2(t_1+t_2+t_3)\geqslant 2(|PD|+|PE|+|PF|).$$

§4. 斜坐标系

103. 已知一直角坐标系和夹角为ω的斜坐标系有相同的原点和x轴，如果点P的直角坐标为(x', y')，斜坐标为(x, y).

求证: $\begin{cases} x'=x+y\cos\omega \\ y'=y\sin\omega. \end{cases}$



［证］ 过P作y轴的平行线，交x轴于M；过P作y'轴的平行线，交x'轴于Q. ∵ $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})=\omega$，∴ $(\overrightarrow{Mx}, \overrightarrow{MP})=\omega$.

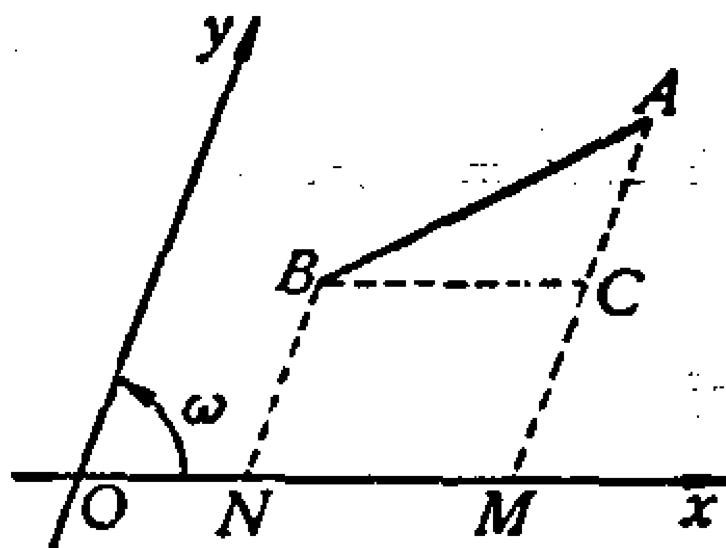
$$x'=OQ=OM+MQ=OM+MP\cdot\cos\omega=x+y\cos\omega,$$
$$y'=QP=MP\cdot\sin\omega=y\sin\omega.$$

$$\therefore\ \begin{cases} x'=x+y\cos\omega \\ y'=y\sin\omega. \end{cases}$$

［说明］ 以上证明为点P在第一象限的情况，当点P在其它象限时，也可类似证明．以下第104—107题相同．

104．两坐标轴夹角为ω的斜坐标系中，已知两点A、B的斜坐标分别为(x_A, y_A)、(x_B, y_B)．求证：A、B两点间的距离

$$|AB|=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+2(x_A-x_B)(y_A-y_B)\cos\omega}.$$



［分析］ 直角坐标系中两点间距离公式的推导是用勾股定理，与此相应，在斜坐标系中只要用余弦定理即可．或者利用直角坐标与斜坐标的坐标变换推求．

［证一］ 作AM、BN平行y轴，分别交x轴于M、N，作BC平行x轴，交AM于C．

$$BC=NM=OM-ON=x_A-x_B;\ CA=MA-MC=y_A-y_B.$$

$$\angle BCA=\angle OMA=180^\circ-\angle AMx=180^\circ-\omega.$$

$$AB^2=BC^2+CA^2-2BC\cdot CA\cos\widehat{BCA}$$
$$=(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2-2(x_A-x_B)(y_A-y_B)\cos(180^\circ-\omega).$$

$$\therefore\quad |AB|=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+2(x_A-x_B)(y_A-y_B)\cos\omega}.$$

［证二］ 设A、B的直角坐标分别为(x'_A, y'_A)、(x'_B, y'_B)．则根据上题有

$$\begin{cases}x'_A=x_A+y_A\cos\omega\\ y'_A=y_A\sin\omega\end{cases}\cdots①,\quad \begin{cases}x'_B=x_B+y_B\cos\omega\\ y'_B=y_B\sin\omega\end{cases}\cdots②.$$

∵ 在直角坐标系中，$|AB|=\sqrt{(x'_A-x'_B)^2+(y'_A-y'_B)^2}$，

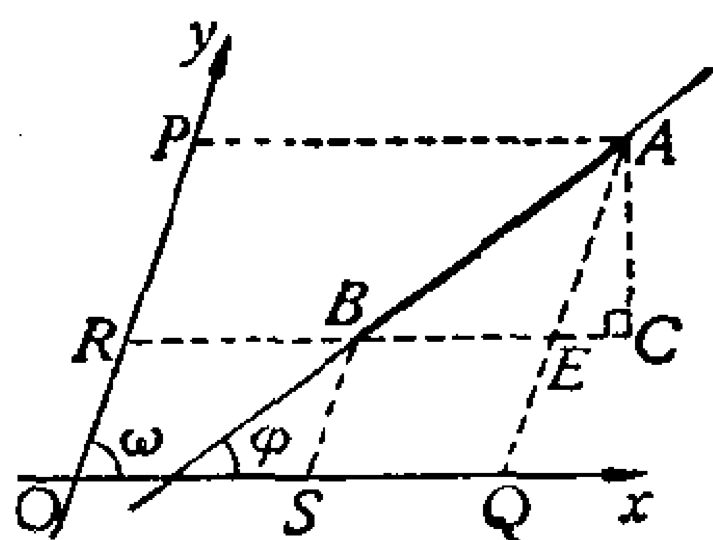
利用①、②得

$$|AB|=\sqrt{[(x_A-x_B)+(y_A-y_B)\cos\omega]^2+[(y_A-y_B)\sin\omega]^2}$$
$$=\sqrt{(x_A-x_B)^2+2(x_A-x_B)(y_A-y_B)\cos\omega+(y_A-y_B)^2\cos^2\omega+(y_A-y_B)^2\sin^2\omega}$$
$$=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+2(x_A-x_B)(y_A-y_B)\cos\omega}.$$

105．两坐标轴夹角为ω的斜坐标系中，点A、B的斜坐标为$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$，直线AB的倾角为φ．求证：直线AB的斜率

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{(y_1-y_2)\sin\omega}{(x_1-x_2)+(y_1-y_2)\cos\omega}.$$

［证］ 过点 A 作两轴平行线 AP、AQ 分别交 y 轴于 P，交 x 轴于 Q. 过点 B 作两轴平行线 BR、BS 分别交 y 轴于 R，交 x 轴于 S. 自点 A 作 $AC\perp RB$，垂足为 C.

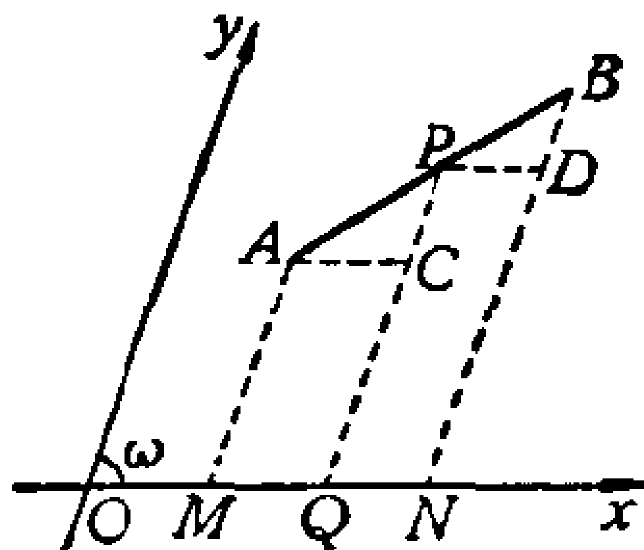


$$CA=EA\cdot\sin\omega=(y_1-y_2)\sin\omega,$$

$$BC=BE+EC=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)\cos\omega.$$

$$\therefore\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{CA}{BC}=\frac{(y_1-y_2)\sin\omega}{(x_1-x_2)+(y_1-y_2)\cos\omega}.$$

106. 两坐标轴夹角为 ω 的斜坐标系中，点 A、B 的斜坐标为 $(x_A,\ y_A)$、$(x_B,\ y_B)$，且 AB 连线上的点 $P(x,\ y)$ 满足 $\lambda=\dfrac{AP}{PB}$. 试证：(1) $x=\dfrac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}$，$y=\dfrac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}$ $(\lambda\neq-1)$；(2) 若 P 为 AB 中点，则 $x=\dfrac{x_A+x_B}{2}$，$y=\dfrac{y_A+y_B}{2}$.



［证］ (1) 作 AM、PQ、BN 平行 y 轴分别交 x 轴于 M、Q、N，则 $OM=x_A$，$MA=y_A$；$OQ=x$，$QP=y$；$ON=x_B$，$NB=y_B$. 作 AC、PD 平行 x 轴，分别交 QP、NB 于 C、D，则 $AC=MQ=OQ-OM=x-x_A$，$PD=QN=ON-OQ=x_B-x$；$CP=QP-QC=y-y_A$，$DB=NB-ND=y_B-y$. $\because$ $\triangle ACP\backsim\triangle PDB$，$\therefore\lambda=\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{AC}{PD}=\dfrac{x-x_A}{x_B-x}$，解得 $x=\dfrac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}$. 类似地，$\lambda=\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{CP}{DB}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y}$，解得 $y=\dfrac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}$.

(2) 若 P 为 AB 中点，则 $\lambda=\dfrac{AP}{PB}=1$，由 (1) 即得

$$x=\frac{x_A+x_B}{2},\quad y=\frac{y_A+y_B}{2}.$$

107. 两坐标轴夹角为 ω 的斜坐标系中，三角形 ABC 的三顶点的斜坐标分别为：$A(x_A,\ y_A)$、$B(x_B,\ y_B)$、$C(x_C,\ y_C)$. 试证：

$$\triangle ABC\text{ 的面积 }S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}\sin\omega\text{ 的绝对值}.$$

〔证〕 如第103题建立直角坐标系，设 A、B、C 三点的直角坐标分别为 (x'_A, y'_A)、(x'_B, y'_B)、(x'_C, y'_C)，则有

$$\begin{cases} x'_A = x_A + y_A\cos\omega \\ y'_A = y_A\sin\omega, \end{cases} \quad \begin{cases} x'_B = x_B + y_B\cos\omega \\ y'_B = y_B\sin\omega, \end{cases} \quad \begin{cases} x'_C = x_C + y_C\cos\omega \\ y'_C = y_C\sin\omega. \end{cases}$$

$$\because \begin{vmatrix} x'_A & y'_A & 1 \\ x'_B & y'_B & 1 \\ x'_C & y'_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_A + y_A\cos\omega & y_A\sin\omega & 1 \\ x_B + y_B\cos\omega & y_B\sin\omega & 1 \\ x_C + y_C\cos\omega & y_C\sin\omega & 1 \end{vmatrix}$$

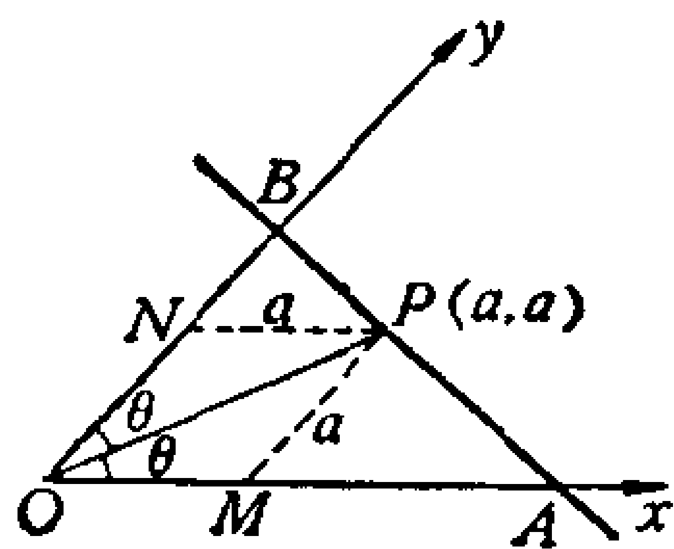
$$= \begin{vmatrix} x_A & y_A\sin\omega & 1 \\ x_B & y_B\sin\omega & 1 \\ x_C & y_C\sin\omega & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_A\cos\omega & y_A\sin\omega & 1 \\ y_B\cos\omega & y_B\sin\omega & 1 \\ y_C\cos\omega & y_C\sin\omega & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \sin\omega.$$

$$\therefore \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x'_A & y'_A & 1 \\ x'_B & y'_B & 1 \\ x'_C & y'_C & 1 \end{vmatrix} \text{的绝对值}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \sin\omega \text{的绝对值}.$$

108. 过一已知角 xOy 的平分线上任意一点 P 的直线交此角的两边于 A、B 两点，以角的两边为坐标轴，建立斜坐标系，点 P 的斜坐标为 (a, a)，则 A、B 两点到角顶 O 的距离的倒数和为定值 $\dfrac{1}{a}$.



〔证一〕 设 $OA=x$, $OB=y$，则 A、B 两点斜坐标分别为 $(x, 0)$、$(0, y)$. ∵ A、P、B 三点共线，

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ a & a & 1 \\ 0 & y & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{即} \quad ax + ay - xy = 0,$$

故 $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{a}$.

[证二] 取O为极点，Ox为极轴，建立极坐标系. 设A、P、B三点的极坐标分别为：$(\rho_1, 0)$、(ρ, θ)、$(\rho_2, 2\theta)$. 作$MP \parallel Oy$，交Ox于M，则$|PM|=a$.

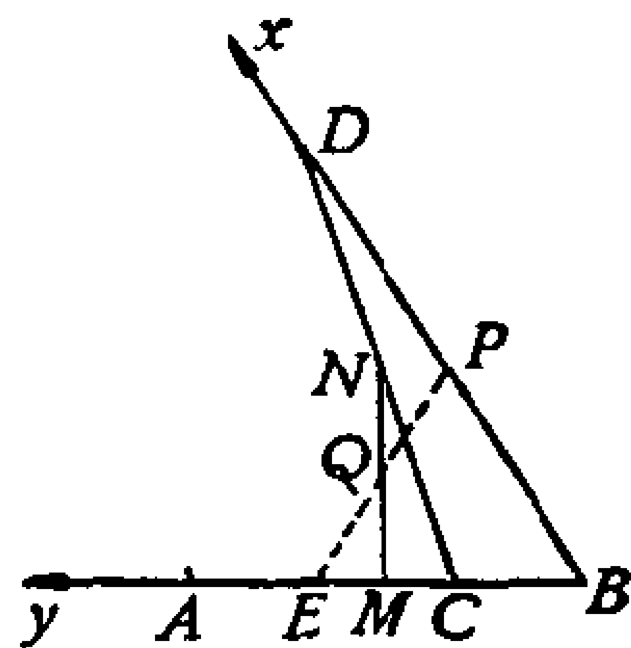
在$\triangle OPM$中，$\dfrac{a}{\sin\theta}=\dfrac{\rho}{\sin(\pi-2\theta)}$， $\therefore$ $a=\dfrac{\rho\sin\theta}{\sin 2\theta}$.

$$\because \quad S_{\triangle OAP}+S_{\triangle OPB}=S_{\triangle OAB},$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\rho_1\rho\sin\theta+\frac{1}{2}\rho\rho_2\sin\theta=\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin 2\theta.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{\sin 2\theta}{\rho\sin\theta}=\frac{1}{a}, \quad 即 \quad \frac{1}{|OA|}+\frac{1}{|OB|}=\frac{1}{a}.$$

109. 如图，设线段AB的中点为M，从AB上另一点C向直线AB的一侧引线段CD；令CD的中点为N，BD的中点为P，MN的中点为Q. 求证直线PQ平分线段AC.



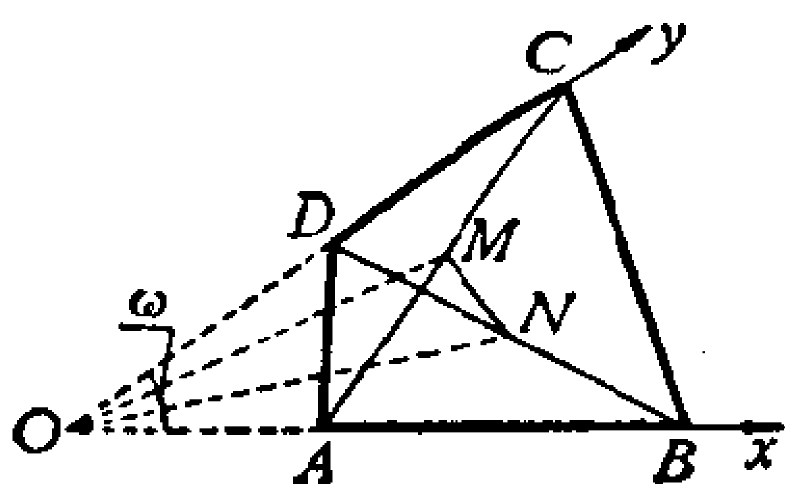
[分析] 因线段中点由其端点决定，故以直线BD、BA为坐标轴建立斜坐标系后，设定A、C、D的坐标，则诸中点P、M、N、Q以及AC的中点E就容易求得，然后证P、Q、E共线即可.

[证] 取B为原点，直线BD、BA为坐标轴建立斜坐标系如图. 设$A(0, a)$、$C(0, c)$、$D(d, 0)$，则$P\left(\dfrac{d}{2}, 0\right)$、$M\left(0, \dfrac{a}{2}\right)$、$N\left(\dfrac{d}{2}, \dfrac{c}{2}\right)$、$Q\left(\dfrac{d}{4}, \dfrac{a+c}{4}\right)$，$AC$的中点$E$的坐标为$\left(0, \dfrac{a+c}{2}\right)$. $\because$ PE的中点坐标为$x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d}{2}+0\right)=\dfrac{d}{4}$，$y=\dfrac{1}{2}\left(0+\dfrac{a+c}{2}\right)=\dfrac{a+c}{4}$. $\therefore$ 点Q的坐标与线段PE中点的坐标相同. 故P、Q、E三点共线，即直线PQ平分线段AC.

110. 任意四边形$ABCD$的对角线AC、BD的中点分别为M、N；BA、CD的延长线相交于点O. 求证：$\triangle OMN$的面积是四边形$ABCD$的面积的$\dfrac{1}{4}$.

[证] 取AB、CD所在直线为坐标轴建立斜坐标系. 设四边形四顶点的坐标为$A(2a, 0)$、$B(2b, 0)$、$C(0, 2c)$、$D(0, 2d)$，$\angle BOC=\omega\left(0<\omega<\dfrac{\pi}{2}\right)$，

则 M、N 的坐标分别为(a, c)、(b, d).



∴ $\triangle OMN$ 的面积

$$S_1=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} b & d \\ a & c \end{vmatrix}\sin\omega \text{ 的绝对值}$$

$$=\frac{1}{2}|bc-ad|\sin\omega.$$

而四边形 $ABCD$ 的面积

$$S=S_{\triangle OBC}-S_{\triangle OAD}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2b & 0 \\ 0 & 2c \end{vmatrix}\sin\omega-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2d \end{vmatrix}\sin\omega$$

$$=2|bc-ad|\sin\omega.$$

∴ $S_1=\frac{1}{4}S$.

§5. 坐标变换

111. 求证：方程 $Ax+By+C=0$ $(A^2+B^2\neq 0)$经过坐标变换一定能化为 $y''=0$.

[证] ∵ $A^2+B^2\neq 0$, ∴ A、B 中至少有一个不为 0, 设 $B\neq 0$. 先作平移变换 $\begin{cases} x=x' \\ y=y'-\dfrac{C}{B} \end{cases}$ …①, 将①代入方程 $Ax+By+C=0$, 得 $Ax'+By'=0$…②. 再作旋转变换

$$\begin{cases} x'=\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}(Bx''+Ay'') \\ y'=\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}(-Ax''+By'') \end{cases} \cdots ③.$$

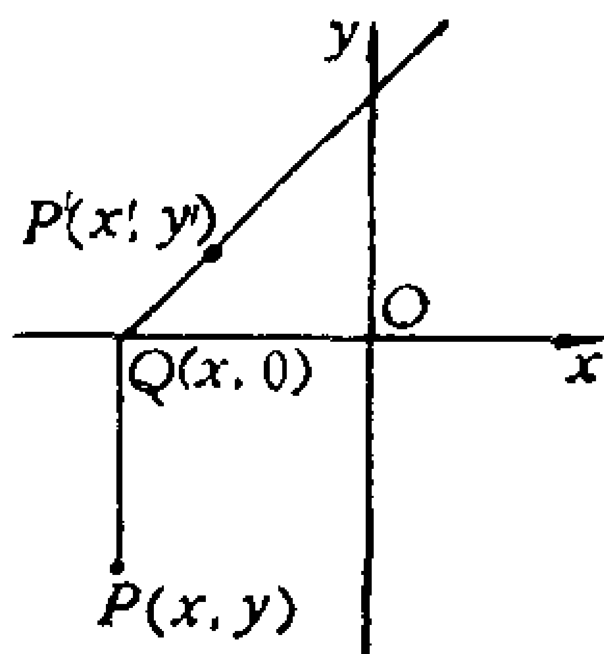
将③代入②, 得$\sqrt{A^2+B^2}\,y''=0$. ∵ $A^2+B^2\neq 0$, ∴ $y''=0$.

若 $B=0$,则 $A\neq 0$. 先作平移变换$\begin{cases} x=x'-\dfrac{C}{A} \\ y=y' \end{cases}$, 代入方程 $Ax+By+C=0$, 得 $Ax'=0$, 即 $x'=0$. 再作旋转变换

$$\begin{cases} x'=x''\cos\dfrac{\pi}{2}-y''\sin\dfrac{\pi}{2}=-y'' \\ y'=x''\sin\dfrac{\pi}{2}+y''\cos\dfrac{\pi}{2}=x'', \end{cases}$$

代入 $x'=0$，得 $y''=0$.

112. 把平面内一点 P 作如下变换：经过此点在 x 轴上的射影 Q，作与 x 轴正方向成 $\frac{\pi}{4}$ 角的射线，然后在此射线上取 $|QP'|=\frac{1}{2}|QP|$，得到 P'. 试求点 P' 与点 P 的坐标之间的关系式.



［分析］ 由题意可知，点 Q 的坐标取决于点 P 的横坐标，而 $|QP'|$ 取决于点 P 的纵坐标. 根据提要(1.21)可知，点 Q、P' 的坐标和 $|QP'|$ 三者又应具有关系 $\begin{cases} x_{P'}-x_Q=|QP'|\cos(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{QP'}) \\ y_{P'}-y_Q=|QP'|\sin(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{QP'}). \end{cases}$
由此即可得到点 P' 与点 P 的坐标之间的关系式.

［解］ 设点 P 的坐标为 (x, y)，点 P' 的坐标为 (x', y')，则点 Q 的坐标为 $(x, 0)$，且 $|QP'|=\frac{1}{2}|y|$. $\therefore$ 点 $P'(x', y')$ 与点 $P(x, y)$ 的坐标之间的关系式为

$$\begin{cases} x'=x+\frac{1}{2}|y|\cos\frac{\pi}{4} \\ y'=\frac{1}{2}|y|\sin\frac{\pi}{4}, \end{cases} \text{即} \begin{cases} x'=x+\frac{\sqrt{2}}{4}|y| \\ y'=\frac{\sqrt{2}}{4}|y|. \end{cases}$$

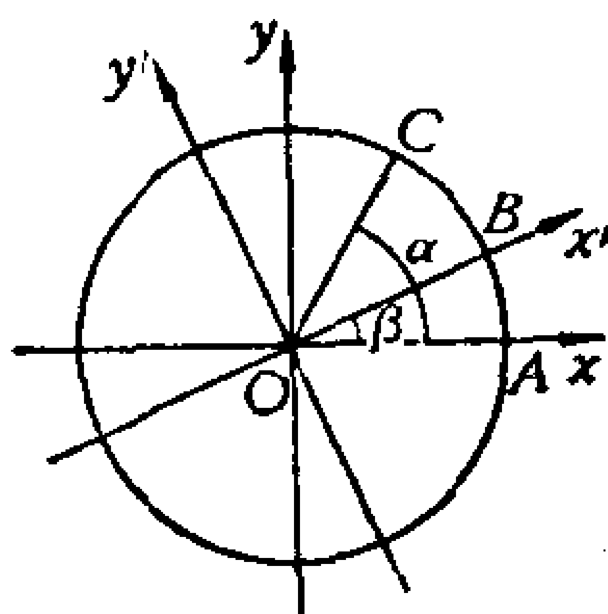
［说明］ 欲求两个动点的坐标之间的关系，一般可如上将其中一点的坐标当作已知量，随后根据条件去求另一点的坐标.

113. 坐标轴经平移再旋转后，点 $A(0, 1)$ 和点 $B(1, 0)$ 变换成 $A''(0, 0)$ 和 $B''(0, -\sqrt{2})$. 求平移公式和旋转公式.

［解］ 先平移再旋转的坐标变换公式为 $\begin{cases} x=x''\cos\theta-y''\sin\theta+h \\ y=x''\sin\theta+y''\cos\theta+k. \end{cases}$ 用点 $A(0, 1)$ 和点 $A''(0, 0)$ 的坐标代入，得 $\begin{cases} h=0 \\ k=1, \end{cases}$ 用点 $B(1, 0)$ 和点 $B''(0, -\sqrt{2})$ 代入，得 $\begin{cases} 1=\sqrt{2}\sin\theta \\ 0=-\sqrt{2}\cos\theta+1, \end{cases}$ 故 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore$ 平移公式为 $\begin{cases} x=x' \\ y=y'+1, \end{cases}$ 旋转公式为 $\begin{cases} x'=\dfrac{x''-y''}{\sqrt{2}} \\ y'=\dfrac{x''+y''}{\sqrt{2}}. \end{cases}$

114. 用解析法证明 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.



［证明］ 在直角坐标系 xOy 内，作单位圆 O，设 α 角的始边为 Ox，终边交圆 O 于 C；β 角的始边为 Ox，终边交圆 O 于 B. 这时 C、B 两点坐标分别是 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 和 $(\cos\beta, \sin\beta)$. 由两点距离公式得

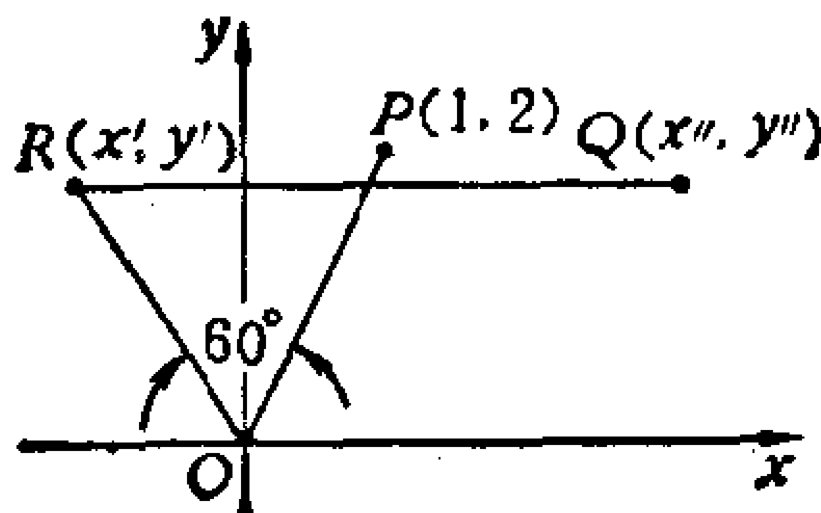
$$|BC|^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$$
$$=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta).$$

再以 OB 所在直线为 x' 轴建立直角坐标系 $x'Oy'$，使其单位长与直角坐标系 xOy 相同. 在新坐标系 $x'Oy'$ 中，点 B、C 坐标分别为 $(1, 0)$ 和 $(\cos(\alpha-\beta), \sin(\alpha-\beta))$. 由两点距离公式得

$$|BC|^2=[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+\sin^2(\alpha-\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta).$$

$\therefore\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$

115. 已知点 $P(1, 2)$，将点 P 绕原点按逆时针方向旋转 $60°$ 后，再将此点沿 x 轴正向平移 5 个单位到达 Q. 求点 Q 的坐标.



［解一］ 设点 $P(1, 2)$ 绕原点逆时针旋转 $60°$ 到达点 R，则点 R 的坐标

$$\begin{cases} x'=x\cos 60°-y\sin 60°=\dfrac{1}{2}-\sqrt{3} \\ y'=x\sin 60°+y\cos 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1. \end{cases}$$

$\therefore$ 点 R 的坐标为 $\left(\dfrac{1}{2}-\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\right)$.

再将点 R 沿 x 轴正向平移 5 个单位到达点 Q，则点 Q 的坐标

$$\begin{cases} x''=x'+5=\dfrac{11}{2}-\sqrt{3} \\ y''=y'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1. \end{cases}$$

∴　点 Q 的坐标为 $\left(\frac{11}{2}-\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)$.

［解二］　设点 Q 的坐标为 (x'', y'')，则

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 60° & -\sin 60° \\ \sin 60° & \cos 60° \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}+1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{11}{2}-\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}+1 \end{pmatrix}.$$

∴　点 Q 的坐标为 $\left(\frac{11}{2}-\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)$.

116. **求证：任意两点 (x_1, y_1)、(x_2, y_2) 经坐标轴平移、旋转后，距离公式 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 不变.**

［证］　将原坐标系原点移到点 (x_0, y_0)，并且将坐标轴旋转 θ 角，两点的新坐标为 (x_1', y_1')、(x_2', y_2')，新旧坐标变换方程为

$$\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta+x_0 \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta+y_0. \end{cases}$$

$$\therefore\quad \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$
$$=\sqrt{(x_1'\cos\theta-y_1'\sin\theta+x_0-x_2'\cos\theta+y_2'\sin\theta-x_0)^2+(x_1'\sin\theta+y_1'\cos\theta+y_0-x_2'\sin\theta-y_2'\cos\theta-y_0)^2}$$
$$=\sqrt{(x_1'-x_2')^2+(y_1'-y_2')^2}.$$

［说明］　由此题可知：图形经过坐标轴平移、旋转后，形状、大小不变.

117. **设 $P(x, y)$ 和 $P_0(x_0, y_0)$ 为平面上任意两点，求证：经过坐标轴旋转变换后，y_0x-x_0y 的形式不变.**

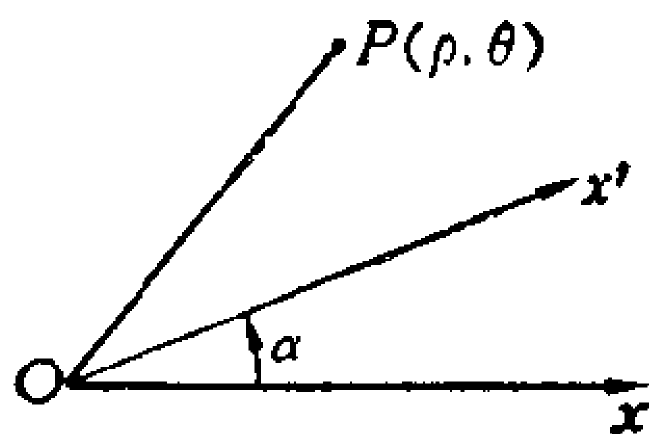
［证一］　坐标轴旋转 θ 角后，(x, y)、(x_0, y_0) 变换为 (x', y')、(x_0', y_0')，新旧坐标之间满足：

$$\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta, \end{cases}\qquad \begin{cases} x_0=x_0'\cos\theta-y_0'\sin\theta \\ y_0=x_0'\sin\theta+y_0'\cos\theta. \end{cases}$$

$$\therefore\quad y_0x-x_0y=(x'\cos\theta-y'\sin\theta)(x_0'\sin\theta+y_0'\cos\theta)$$
$$-(x_0'\cos\theta-y_0'\sin\theta)(x'\sin\theta+y'\cos\theta)$$
$$=y_0'x'(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-x_0'y'(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=y_0'x'-x_0'y'.$$

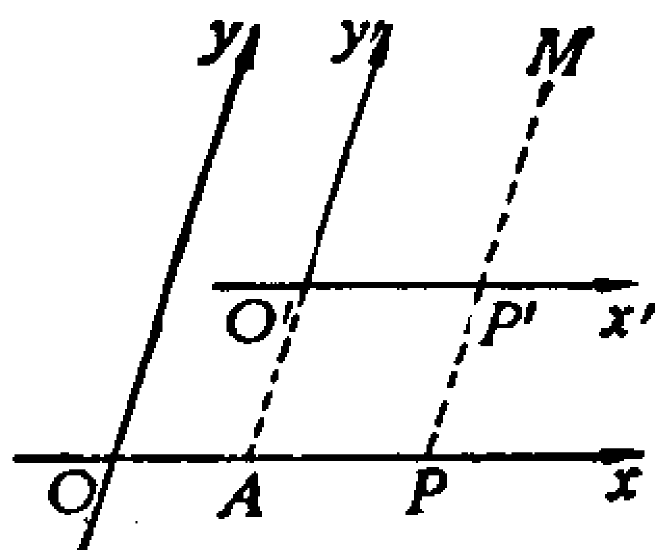
［证二］ 因$|y_0x-x_0y|$是$\triangle POP_0$面积的两倍，$|y'_0x'-x'_0y'|$也是$\triangle POP_0$面积的两倍，而三角形的面积和O、P、P_0的相对位置均不随坐标系的变化而改变，故$y_0x-x_0y=y'_0x'-x'_0y'$.

118. **试推求极坐标系中的转轴公式.**



［解］ 原极坐标系中极轴转过α得新坐标系的极轴. 设平面上一点P的原坐标为$P(\rho, \theta)$，新坐标为$P(\rho', \theta')$. 根据极坐标定义即得极坐标的转轴公式: $\begin{cases}\rho'=\rho\\ \theta'=\theta-\alpha.\end{cases}$

119. **试推求斜坐标系中的平移公式.**

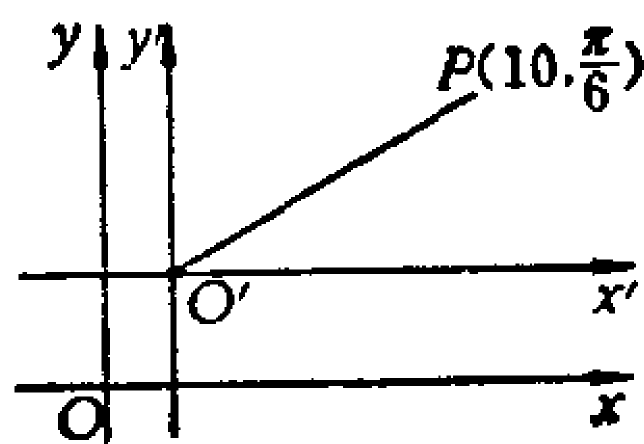


［解］ 设xOy为原坐标系，$x'O'y'$为新坐标系，点M在原坐标系中的坐标为(x, y)，在新坐标系中的坐标为(x', y'). 又新坐标系的原点O'在原坐标系中的坐标为(a, b). 由图所示

$$OP=OA+AP=OA+O'P',\ PM=PP'+P'M=AO'+P'M.$$

于是得平移公式: $\begin{cases}x=x'+a\\ y=y'+b.\end{cases}$

120. **已知点P的极坐标是$\left(10, \frac{\pi}{6}\right)$，如果极点$O'$在直角坐标系中的坐标是$(2, 3)$，而极轴$O'x'$平行于$x$轴正向，求点$P$在直角坐标系$xOy$中的直角坐标.**



［分析］ 先建立直角坐标系$x'O'y'$，求出点P在此坐标系中的直角坐标，再用平移公式求出点P在直角坐标系xOy中的直角坐标.

［解］ 建立直角坐标系$x'O'y'$，设点P的坐标为(x', y')，

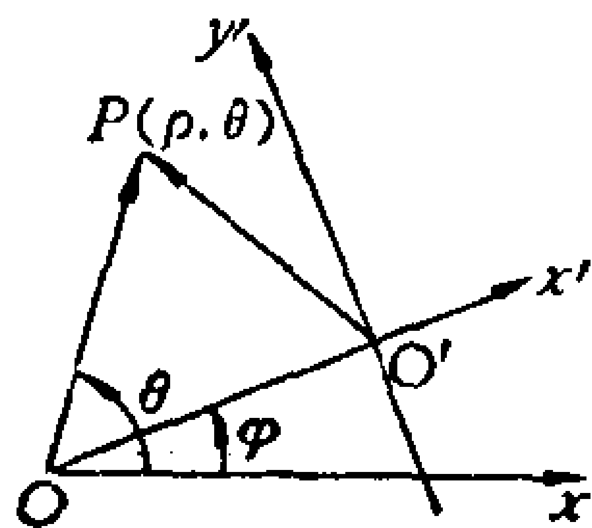
$$x'=10\cos\frac{\pi}{6}=5\sqrt{3},\ y'=10\sin\frac{\pi}{6}=5.$$

点P在坐标系xOy中坐标为(x, y)，则

$$x=x'+2=5\sqrt{3}+2,\ y=y'+3=8.$$

即点 P 在 xOy 中的直角坐标为 $(5\sqrt{3}+2,\ 8)$.

121. 已知点 P 的极坐标为 $(\rho,\ \theta)$. 如果直角坐标系的原点 O' 的极坐标为 $(a,\ \varphi)$, 横轴 $O'x'$ 与 OO' 同向, 求点 P 在 $x'O'y'$ 坐标系中的直角坐标.



[解] 设点 P 的直角坐标是 $(x',\ y')$, 根据向量射影定理(见第8、9题),

$$x'=(\overrightarrow{O'P})_{O'x'}=(\overrightarrow{O'O})_{O'x'}+(\overrightarrow{OP})_{O'x'}$$
$$=a\cos\pi+\rho\cos(\theta-\varphi)=-a+\rho\cos(\theta-\varphi).$$
$$y'=(\overrightarrow{O'P})_{O'y'}=(\overrightarrow{O'O})_{O'y'}+(\overrightarrow{OP})_{O'y'}$$
$$=a\sin\pi+\rho\sin(\theta-\varphi)=\rho\sin(\theta-\varphi).$$

∴ 点 P 在 $x'O'y'$ 中的直角坐标是 $(-a+\rho\cos(\theta-\varphi),\ \rho\sin(\theta-\varphi))$.

122. 若两轴夹角为 ω 的斜坐标系的原点与极坐标系的极点相重合, x 轴正半轴与极轴重合, 一点的斜坐标为 $(x,\ y)$, 极坐标为 $(\rho,\ \theta)$. 试证: $\begin{cases}x=\rho\cos\theta-\rho\sin\theta\cdot\operatorname{ctg}\omega\\ y=\rho\sin\theta\cdot\csc\omega.\end{cases}$

[证] 设这点的直角坐标为 $(x',\ y')$, 则据第103题有

$$\begin{cases}x'=x+y\cos\omega\\ y'=y\sin\omega,\end{cases}\quad 即\begin{cases}x=x'-y'\operatorname{ctg}\omega\\ y=y'\csc\omega.\end{cases}$$

又 $\because\ \begin{cases}x'=\rho\cos\theta\\ y'=\rho\sin\theta,\end{cases}\quad \therefore\ \begin{cases}x=\rho\cos\theta-\rho\sin\theta\operatorname{ctg}\omega\\ y=\rho\sin\theta\csc\omega.\end{cases}$

第二章　曲线与方程

1．曲线与方程

在给定的平面直角坐标系下，如果曲线 C 上任一点的坐标 (x, y) 都满足方程 $F(x, y)=0$；并且所有适合方程的 (x, y) 所对应的点都在曲线 C 上，则称 $F(x, y)=0$ 是曲线 C 的方程，而称曲线 C 是方程 $F(x, y)=0$ 的曲线（图象）.

在给定的极坐标系中，如果点 $P(\rho, \theta)$ 位于曲线 C 上的充要条件是点 P 坐标 (ρ, θ) 中至少有一组满足方程 $F(\rho, \theta)=0$，则称方程 $F(\rho, \theta)=0$ 是曲线 C 的方程，而称曲线 C 是方程 $F(\rho, \theta)=0$ 的曲线（图象）.

在给定的平面直角坐标系中，将 x、y 表示成参变量 t 的函数表达式 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ …①. 如果对于 t 的每一允许值，①式所确定的点 $M(x, y)$ 都在曲线 C 上；而且曲线 C 上任一点 $M_0(x_0, y_0)$ 都可由 t 的某个值 t_0 通过①式得到，则称①式为曲线 C 的参数方程.

(1) 两曲线 $f(x, y)=0$、$g(x, y)=0$ 的交点坐标必为方程组 $\begin{cases} f(x, y)=0 \\ g(x, y)=0 \end{cases}$ 的实数解.

(2) 方程 $F(x, y)=f_1(x, y)f_2(x, y)\cdots f_n(x, y)=0$ 的曲线是在其 (x, y) 的共同取值范围内的 $f_1(x, y)=0, f_2(x, y)=0, \cdots,$

$f_n(x, y)=0$ 的曲线的全体.

2. 求曲线的方程

(1) 基本方法:

① 建立坐标系,设 $P(x, y)$ [或 $P(\rho, \theta)$] 为轨迹上任意一点.

② 写下轨迹条件,有时还应写下从轨迹条件导出的条件.

③ 将轨迹条件转化为对应的含 x、y 的解析式,并将所得结果化简,即得轨迹的方程.

④ 证明满足方程的任意一组实数解 (x, y) 的对应点,必在轨迹上.

(2) 参数方法:

① 建立坐标系,设 $P(x, y)$ [或 $P(\rho, \theta)$] 为轨迹上任意一点.

② 根据题意选择与动点 P 有直接联系的若干参变量.

③ 根据轨迹条件建立若干方程,方程个数比选用的参数个数多一.

④ 从③所得的方程组消去所有的参数,即得轨迹的普通方程;如从方程组中解出 $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t), \end{cases}$ 即为轨迹的参数方程.

3. 描方程的曲线

先讨论方程的存在范围、对称性和截距,然后编制 (x, y) 或 (ρ, θ) 的对应值表,顺次描点连成光滑曲线.

§1. 曲线的方程

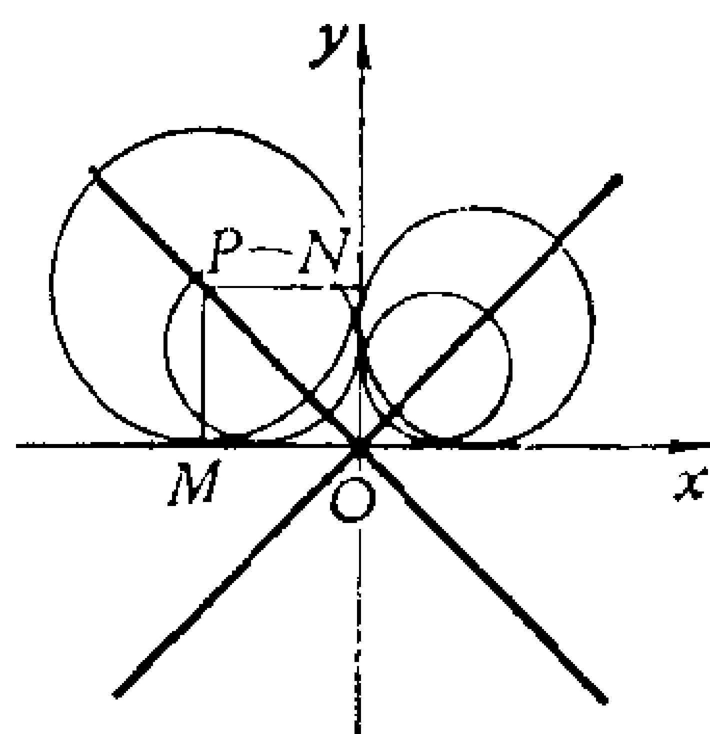
123. 求与两坐标轴相切的动圆中心的轨迹.

[分析] 与坐标轴相切的圆,圆心到坐标轴的距离相等.

[解] 设 $P(x, y)$ 为轨迹上任意一点,点 P 在 x、y 轴上的射影分别为

M、N.

$\because P$ 为与坐标轴相切的圆的中心，$\therefore |MP|=|NP|$. 且 $|MP|=|y|$, $|NP|=|x|$. $\therefore |y|=|x|$, 即 $x^2-y^2=0$, 亦即 $x-y=0$, $x+y=0$. 所以轨迹为第一、三象限和第二、四象限的平分线.

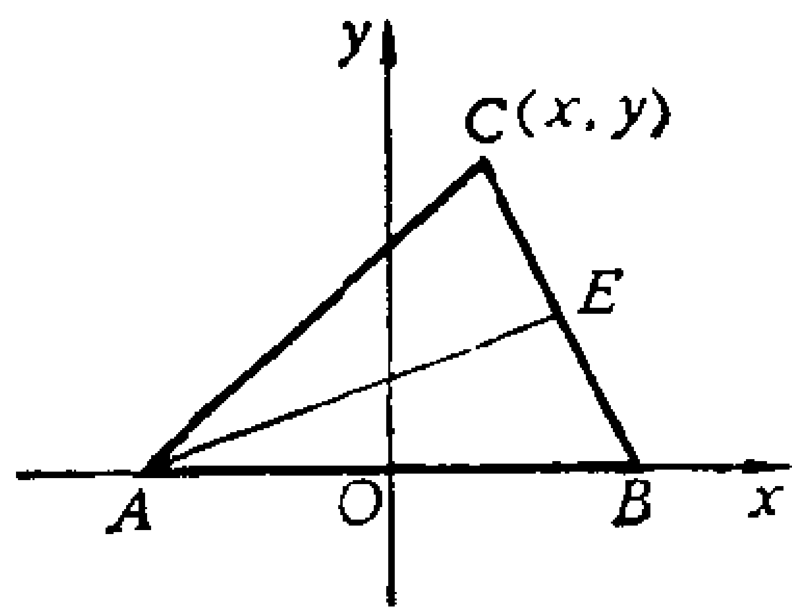


若把位于原点的点圆看作与坐标轴相切的极限情况，则原点为轨迹上的极限点. 否则应除去.

［说明］ 求曲线（轨迹）方程的关键是选择适当的坐标系和轨迹条件的解析化.

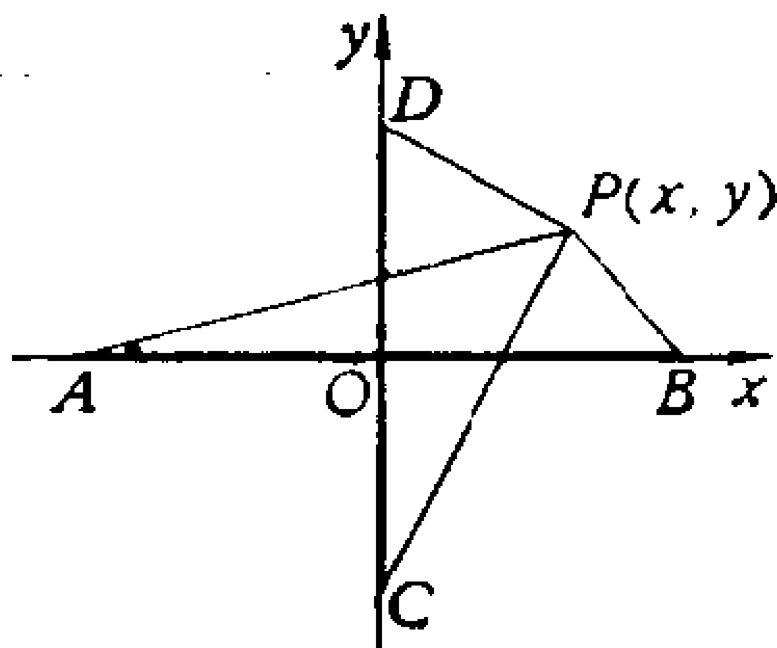
124. $\triangle ABC$ **的边** AB **为定长** c**，若边** BC **的中线为定长** r**. 试求顶点** C **的轨迹.**

［解］ 取 AB 中点 O 为原点，AB 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系如图. 则 $A\left(-\frac{c}{2},0\right)$、$B\left(\frac{c}{2},0\right)$. 设点 C 坐标为 (x, y)，则 BC 中点 $E\left(\frac{x+\frac{c}{2}}{2}, \frac{y}{2}\right)$. 由已知 $|AE|=r$，得 $\left(\frac{x+\frac{c}{2}}{2}+\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=r^2$，



即 $\left(x+\frac{3c}{2}\right)^2+y^2=4r^2$. $\therefore$ 点 C 的轨迹是以 $\left(-\frac{3c}{2},0\right)$ 为圆心，以 $2r$ 为半径的圆.

125. **一动点** P **到互相垂直平分的两线段** AB、CD **的端点的连线满足** $|PA|\cdot|PB|=|PC|\cdot|PD|$**. 求点** P **的轨迹方程.**



［解］ 以 AB、CD 所在直线为 x 轴与 y 轴建立直角坐标系. 设各点坐标为: $A(-a,0)$、$B(a, 0)$、$C(0, -b)$、$D(0, b)$.

又 $P(x,y)$ 为轨迹上任意一点，则

$$\sqrt{(x+a)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-a)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y+b)^2}\cdot\sqrt{x^2+(y-b)^2}.$$

$$\therefore\quad (x^2+y^2+a^2)^2-4a^2x^2=(x^2+y^2+b^2)^2-4b^2y^2.$$

化简得 $$x^2-y^2=\frac{a^2-b^2}{2}.$$

126. 一动点到 y 轴的距离的四倍与它至 $A(1,\ -3)$ 的距离平方的数值相等. 求此动点的轨迹.

[解] 设动点 P 的坐标为 $(x,\ y)$, 则 $4|x|=(x-1)^2+(y+3)^2$.

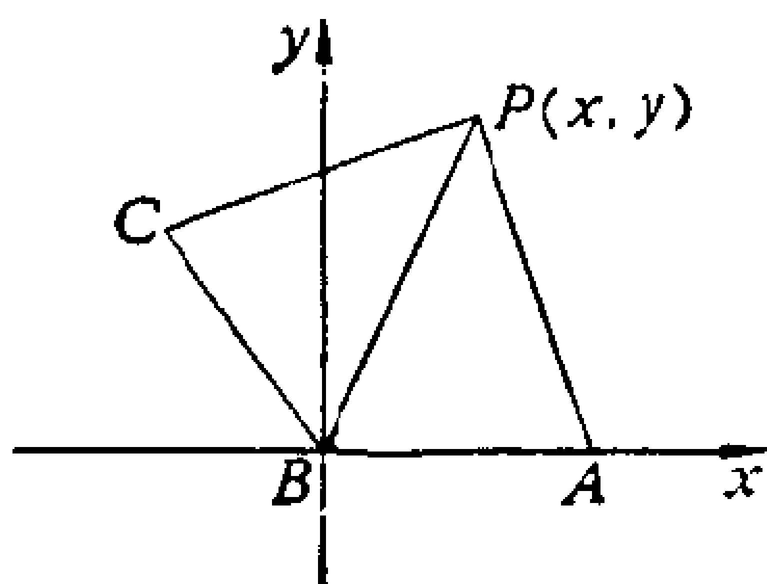
当 $x\geqslant 0$时, 方程可化为 $(x-3)^2+(y+3)^2=8$;

当 $x<0$ 时, 方程可化为 $(x+1)^2+(y+3)^2=0$.

$\therefore$ 动点轨迹是以 $(3,\ -3)$ 为圆心、以 $2\sqrt{2}$ 为半径的圆, 与点 $Q(-1,-3)$所组成.

[说明] 注意 $P(x,\ y)$到 y 轴距离为 $|x|$. 当 $x\geqslant 0$ 时, $|x|=x$; 当 $x<0$ 时, $|x|=-x$. 故点 $Q(-1,\ -3)$也是轨迹上的点, 不能遗漏.

127. 已知三点 A、B、C. 求使 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PBC$ 的面积相等的点 P 的轨迹.

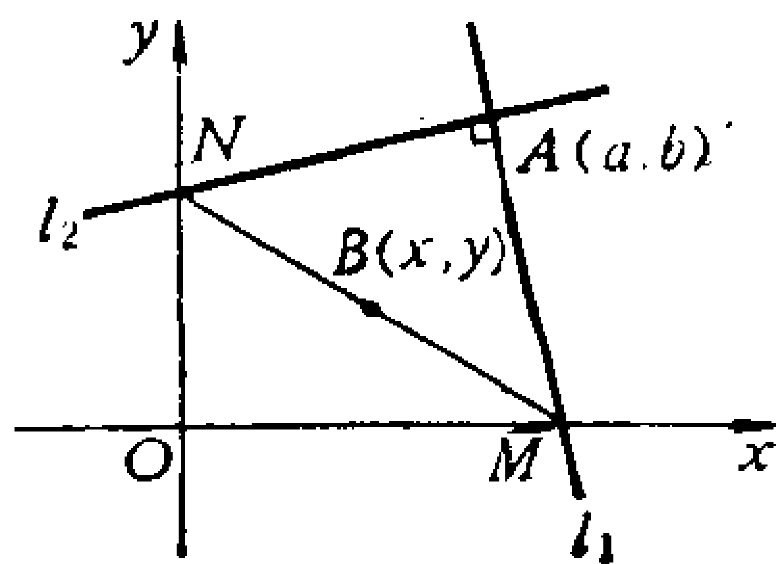


[解] 以 B 为原点, BA 所在直线为 x 轴, 建立直角坐标系如图. 设 $A(a,\ 0)$、$C(b,\ c)$, $P(x,\ y)$为轨迹上任意一点. 根据题意,

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ b & c & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{的绝对值}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{的绝对值},$$

即 $\begin{vmatrix} x & y \\ b & c \end{vmatrix}=\pm\begin{vmatrix} x & y \\ a & 0 \end{vmatrix}$, 亦即 $cx-by=\pm ay$. $\therefore$ $cx=(b\pm a)y$. 所求轨迹为过原点的两条直线.

128. 过定点 $A(a,\ b)$任作互相垂直的两条直线 l_1 和 l_2, 分别与 x 轴、y 轴交于 M、N 两点. 求线段 MN 中点 B 的轨迹方程.

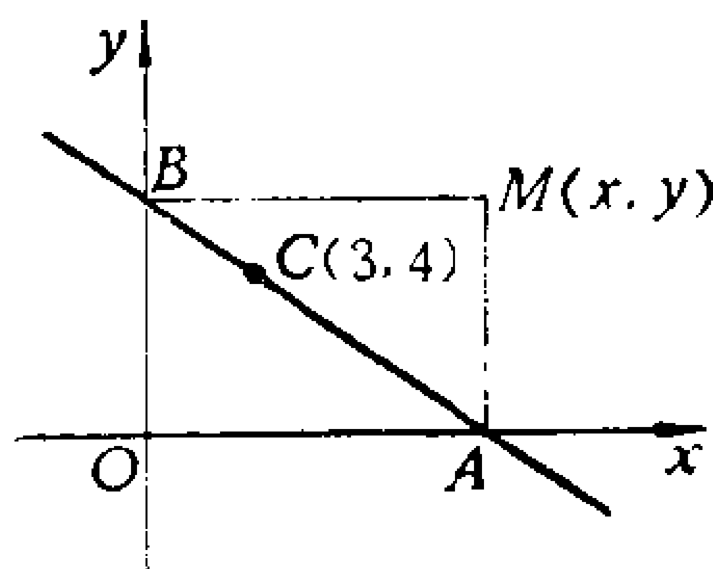


[分析] 线段 MN 的中点 B 取决于 M、N 两点的坐标. M、N 是过点 $A(a,b)$且互相垂直的两动直线与 x、y 轴的交点. $\because$ $AM\perp AN$, 故可利用 AM、AN 的斜率之积等于 -1, 求得轨

迹方程.

［解］ 设线段 MN 的中点 B 的坐标为 (x, y)，则点 M、N 的坐标分别为 $(2x, 0)$ 和 $(0, 2y)$. AM 的斜率 $k_{AM}=\frac{b}{a-2x}$, AN 的斜率 $k_{AN}=\frac{b-2y}{a}$.
$\because AM\perp AN$, $\therefore k_{AM}\cdot k_{AN}=-1$. 代入即得 $\frac{b(b-2y)}{a(a-2x)}=-1$. 化简得 $2ax+2by-a^2-b^2=0$. 此即所求的轨迹方程.

129. 过点 $C(3, 4)$ 的一条动直线与两坐标轴的交点为 A、B, 过 A、B 分别作 x 轴和 y 轴的垂线交于点 M. 求点 M 的轨迹方程.

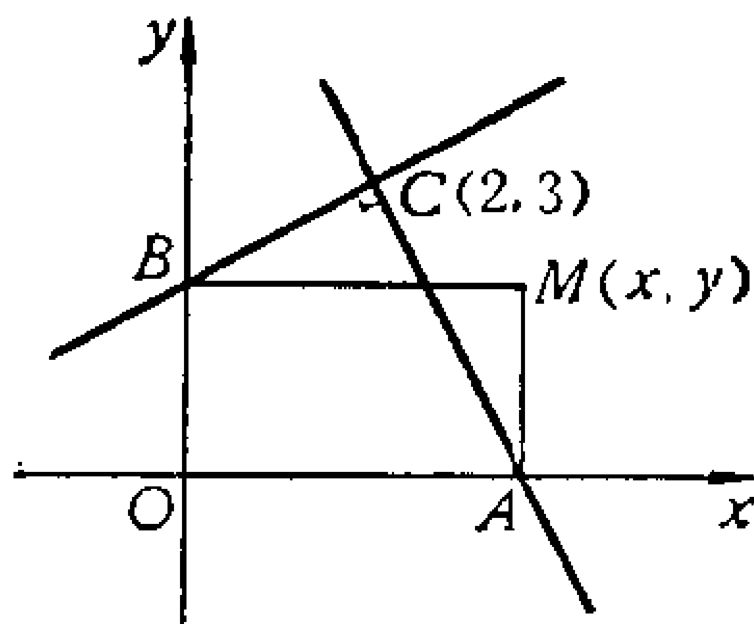


［解］ 如图，设点 M 的坐标为 (x, y)，则点 A、B的坐标分别为 $(x, 0)$ 和 $(0, y)$. $\because A$、C、B 三点共线，$\therefore$ $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & y & 1 \end{vmatrix}=0$,

即 $xy-4x-3y=0$. 此即所求的轨迹方程.

130. A 是 x 轴上一动点，一条直线过点 $C(2,3)$ 且垂直于 AC, 交 y 轴于点 B. 过 A、B 分别作 x 轴和 y 轴的垂线交于点 M. 求点 M 的轨迹方程.

［分析］ 轨迹条件是 $AC\perp BC$，如果能求出 AC、BC 的斜率，则可由其斜率之积等于 -1 得轨迹方程.



［解］ 如图，设点 M 的坐标为 (x, y)，则点 A、B 的坐标分别为 $(x, 0)$ 和 $(0, y)$. $\therefore$ 直线 AC 的斜率 $k_{AC}=\frac{3}{2-x}$, 直线 BC 的斜率 $k_{BC}=\frac{y-3}{-2}$.

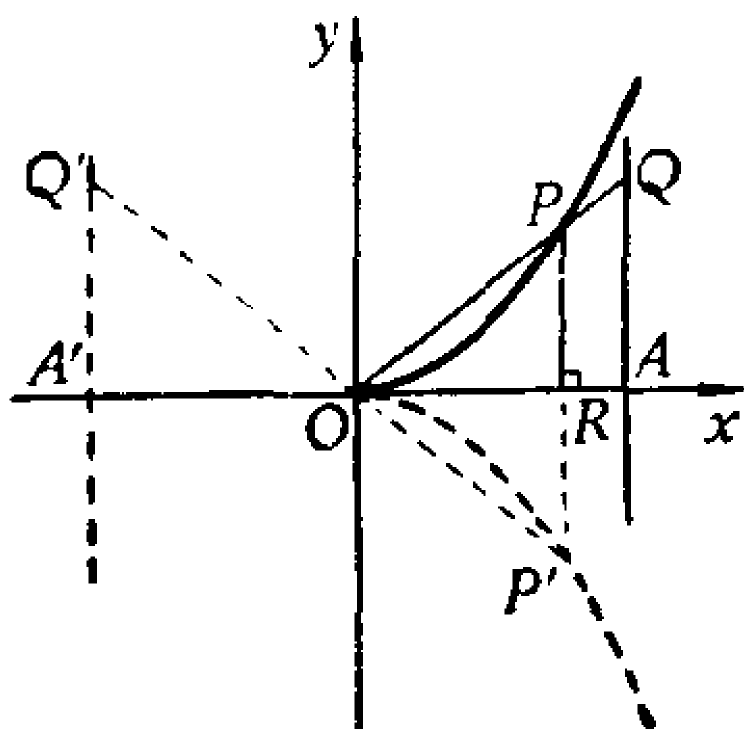
$\because AC\perp BC$, $\therefore \frac{y-3}{-2}\cdot\frac{3}{2-x}=-1$, 即 $2x+3y-13=0$. 当 $x=2$ 时，点 M 重合于点 C，其坐标仍适合方程.

$\therefore$ 点 M 的轨迹方程为 $2x+3y-13=0$.

131. 已知 x 轴上的动点 R, 定直线 $x=a$ $(a\neq 0)$ 上的动点 Q,

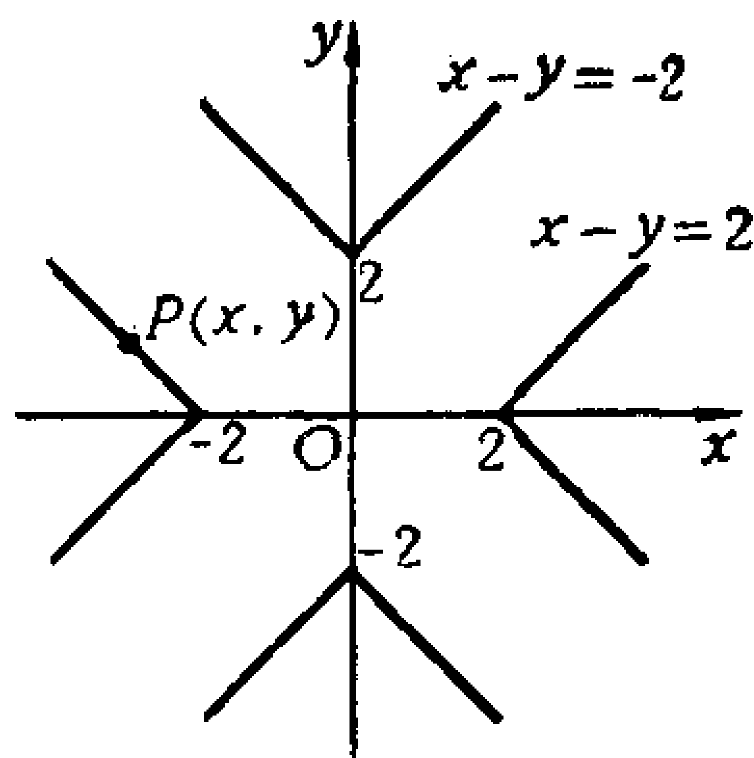
甲

R、Q 起始位置分别在 $O(0, 0)$ 和 $A(a, 0)$. R 向右, Q 向上分别作速度相等的匀速运动. 过 R 且垂直于 x 轴的直线交 OQ 于 P. 求点 P 的轨迹.



[解] 因为点 R 和点 Q 的运动速度相等, 故 $|OR|=|AQ|$. 设点 P 的坐标为 (x,y), 则 $x=|OR|$, $y=|RP|$. 又 $\because$ $PR\parallel QA$, $\therefore$ $\frac{|OR|}{|OA|}=\frac{|PR|}{|AQ|}$, 即 $\frac{x}{a}=\frac{y}{x}$. 故点 P 的轨迹方程为 $x^2=ay$. 当 $a>0$ 时, 点 P 的轨迹为抛物线 $x^2=ay\,(x\geqslant0,\ y\geqslant0)$, 即右半支; 当 $a<0$ 时, 点 P 的轨迹为抛物线 $x^2=ay(x\geqslant0, y\leqslant0)$, 即右半支.

132. 试求到两坐标轴距离之差恒为 2 的点的轨迹.



[解] 设 $P(x, y)$ 为轨迹上任意一点. 则 $||x|-|y||=2$, 该方程所表示的曲线关于 x、y 轴及原点 O 都成对称. 若令 $x\geqslant0$、$y\geqslant0$, 则曲线方程为 $x-y=\pm2(x\geqslant0,\ y\geqslant0)$, 再根据对称性得轨迹如图.

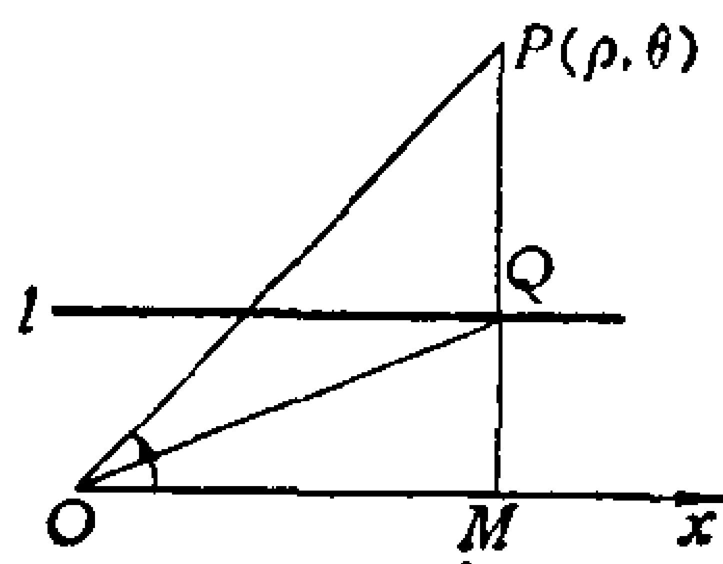
[说明] 若对方程 $||x|-|y||=2$ 两边平方, 得 $x^2+y^2-4=2|xy|\cdots$①, 再平方, 得

$$(x^2+y^2-4)^2=4x^2y^2\cdots②,$$

因式分解后, 可得 $(x-y-2)(x-y+2)(x+y-2)(x+y+2)=0$.

不能误认为轨迹是四条直线, 因为由 ① 到 ② 不是同解变形, ① 式要求 $x^2+y^2-4\geqslant0$, 而 ② 式把区域 $x^2+y^2-4<0$ 的一些点也包括在内了.

133. 在极坐标系中, 直线 l: $a=\rho\sin\theta$ 上有一动点 Q, 过 Q 作极轴的垂线 QM, M 为垂足. 过极点 O 引直线 OP 交直线 MQ 于点 P, 使 OQ 为 $\angle MOP$ 的平分线. 求点 P 的轨迹方程.

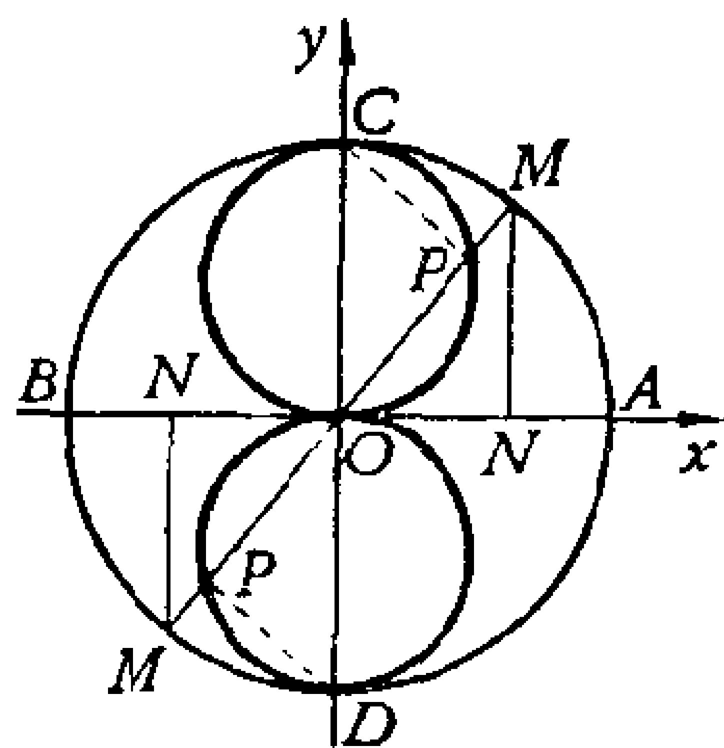


[解] 如图, $a=\rho\sin\theta$ 是与极轴 Ox 平行、

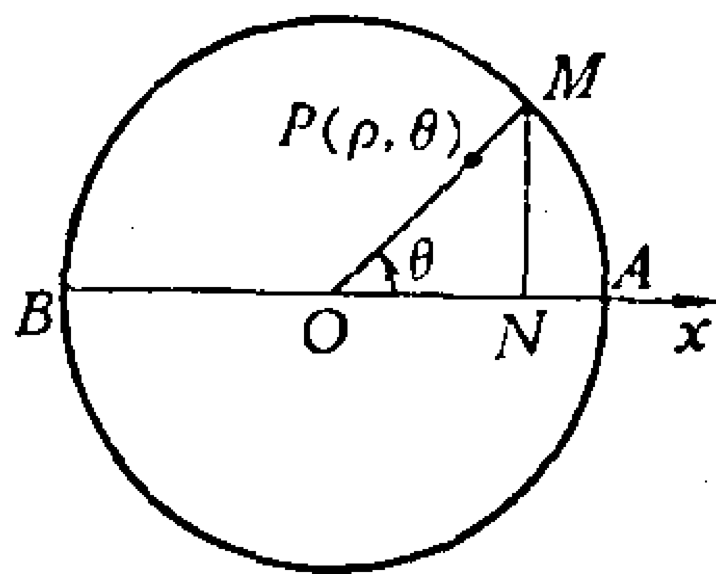
且距离为$|a|$的直线．设点P的坐标为$(\rho,\ \theta)$，则$\angle MOQ=\frac{\theta}{2}$．而$MQ=a$，$\therefore\ OM=a\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$．又$OM=\rho\cos\theta$，$\therefore\ \rho\cos\theta=a\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$即所求的轨迹方程．

134．AB是圆O的直径，且$|AB|=2a$．M为圆上一动点，作$MN\perp AB$，垂足为N．在OM上取点P，使$|OP|=|MN|$．求点P的轨迹．

［分析］设圆O的与AB垂直的直径为CD，从已知条件$|OP|=|MN|$和$|OC|=|OM|$容易看出$CP\perp OP$，由此即可得出点P的横坐标和纵坐标之间的关系．



［解一］建立坐标系如右图．使圆O的方程为$x^2+y^2=a^2$．当点M在上半圆上运动时，$\because\ |OP|=|MN|$、$|OC|=|OM|$，且$\angle POC=\angle OMN$，$\therefore\ \triangle POC\cong\triangle NOM$，$\therefore\ \angle CPO=\angle ONM=90^\circ$，即$CP\perp OM$．设点$P$的坐标为$(x,\ y)$，则$k_{OM}=\frac{y}{x}$．又点$C$的坐标为$(0,\ a)$，$\therefore\ k_{CP}=\frac{y-a}{x}$．故有$\frac{y-a}{x}\cdot\frac{y}{x}=-1$，即$x^2+y^2-ay=0$．同理，当点$M$在下半圆上运动时则有$DP\perp OM$．$\therefore\ \frac{y+a}{x}\cdot\frac{y}{x}=-1$，即$x^2+y^2+ay=0$．$\therefore$当点$M$在圆$O$上运动时，点$P$的坐标满足方程$x^2+y^2\pm ay=0$，其轨迹为两个圆．

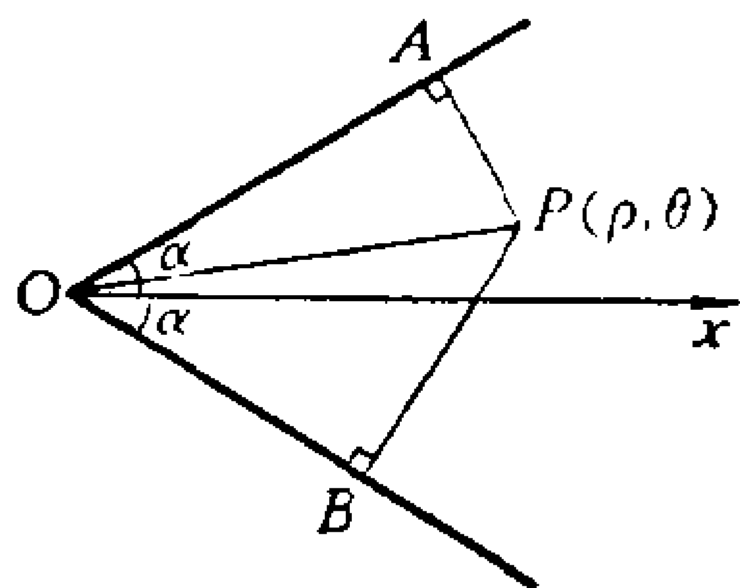


［解二］以圆心O为极点，半径OA所在的射线为极轴建立极坐标系如右图．设点P的坐标为$(\rho,\ \theta)$，则$|OP|=\rho$，$|MN|=|a\sin\theta|$，$\therefore\ \rho=\pm a\sin\theta$．其轨迹仍为两个圆．

［说明］求动点的轨迹方程，关键在于寻找动点的两个坐标之间的等量关系．在这点上它与列方程解应用题有相似之处．轨迹问题中设动点坐标犹如列方程解应用题中的假设未知数，而前者的求轨迹方程实即后者的列方程．因此，求轨迹问题的基本方法是使轨迹条件解析化．

135．一定角$\angle AOB$内有一动点P，引$PA\perp OA$，$PB\perp OB$，

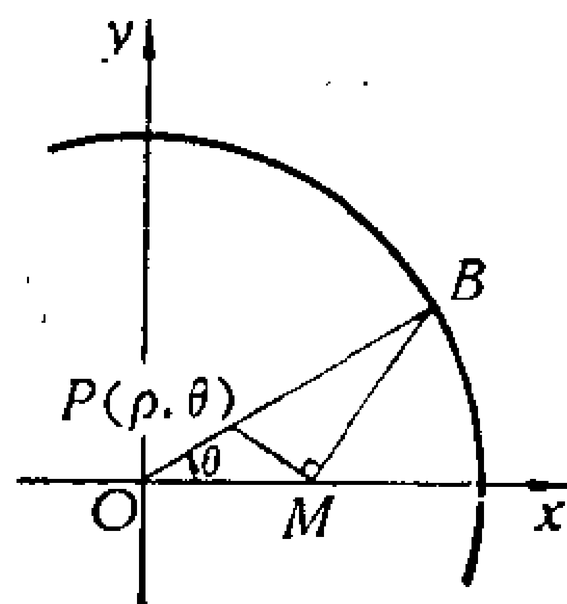
使四边形 $AOBP$ 的面积为定值. 求动点 P 的轨迹方程.



[解] 取 O 为极点, $\angle AOB$ 的平分线为极轴, 建立极坐标系如图. 设 $\angle AOB=2\alpha$, 动点 P 的极坐标为 (ρ, θ). 四边形 $AOBP$ 的面积等于 $\triangle OPA$ 与 $\triangle OBP$ 的面积之和, 因此有 $\frac{1}{2}\rho\cos(\alpha-\theta)\cdot\rho\sin(\alpha-\theta)+\frac{1}{2}\rho\cos(\alpha+\theta)\cdot\rho\sin(\alpha+\theta)=a^2$. 其中 a^2 为定值, $-\alpha<\theta<\alpha$. 利用三角变换得 $\rho^2\cos 2\theta=\frac{2a^2}{\sin 2\alpha}$. 此即点 P 轨迹的极坐标方程.

136. 设 O 为定圆的圆心, M 为圆内一定点. 作任一半径 OB, 连接 MB, 并自 M 作 MB 的垂线 MP 交 OB 于 P. 试求点 P 的轨迹方程.

[分析] 极坐标系与直角坐标系相结合, 抓住 $PM\perp BM$ 时斜率满足的条件, 或用余弦定理与 $|MP|^2+|MB|^2=|PB|^2$, 都可列式得解.



[解一] 建立直角坐标系如图, 并以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系. 设 $P(\rho, \theta)$ 为轨迹上任意一点, 定圆 O 的半径为 a, $OM=b$. 则点 B、P、M 的直角坐标分别为 $(a\cos\theta, a\sin\theta)$、$(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ 和 $(b, 0)$. $\because PM\perp BM$,

$$\therefore \quad \frac{\rho\sin\theta}{\rho\cos\theta-b}\cdot\frac{a\sin\theta}{a\cos\theta-b}=-1,$$

即 $$a\rho(1-\cos^2\theta)+a\rho\cos^2\theta-b(\rho+a)\cos\theta+b^2=0.$$

故点 P 的轨迹方程为

$$\rho=\frac{b(b-a\cos\theta)}{b\cos\theta-a}.$$

[解二] 建立坐标系同前. $\because |MP|^2+|MB|^2=|PB|^2$, 而 $|MP|^2=\rho^2+b^2-2\rho b\cos\theta$, $|MB|^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$, $|PB|=|a-\rho|=a-\rho$,

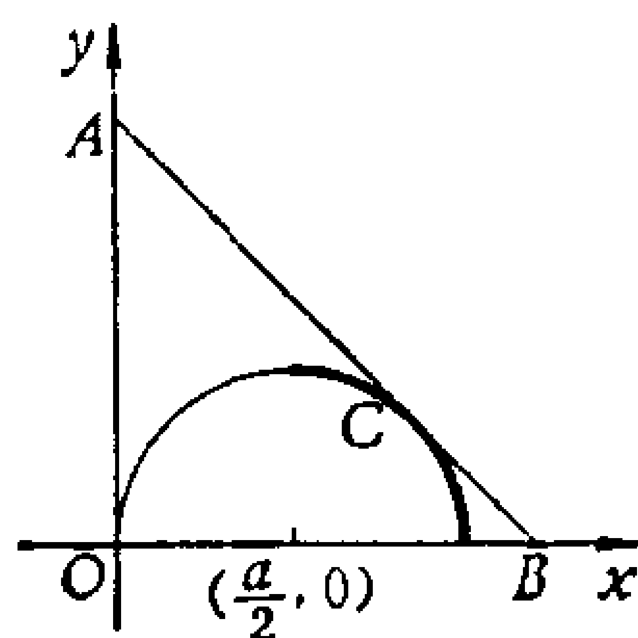
$$\therefore \quad \rho^2+b^2-2\rho b\cos\theta+a^2+b^2-2ab\cos\theta=(a-\rho)^2.$$

化简即得轨迹方程

$$\rho=\frac{b(b-a\cos\theta)}{b\cos\theta-a}.$$

137. 平面上一动点 P 自原点出发，向 x 轴正向前进路程 a $(a>0)$，再向左转 $90°$ 前进路程 $ar(r>0)$，复向左转 $90°$ 前进路程 ar^2，循此方式继续下去，(1)若 r 满足 $0<r<1$，试求点 P 的极限位置 Q；(2)若 r 在 $0<r<1$ 的范围内变动，试求点 Q 的轨迹 C；(3)要使 C 含在以点 $O(0, 0)$、$A(0, 1)$、$B(1, 0)$ 为顶点的三角形(包括边界)之内，试求 a 应满足的条件.

［分析］ 用等比数列求和公式可得 (1) 的解；从点 Q 的坐标表达式中消去 r 即得点 Q 的轨迹；从 (2) 的结论和 (3) 的图形位置关系中可以确定 a 应满足的条件.



［解］ 设点 Q 的坐标为 (x, y)，显然有

$$x=a-ar^2+ar^4-ar^6+\cdots,$$
$$y=ar-ar^3+ar^5-ar^7+\cdots.$$

它们各自构成一个公比为$-r^2$ 的无穷等比级数.

(1) $\because$ $0<r<1,\ 0<|-r^2|<1.$ $\therefore$ $x=\dfrac{a}{1+r^2},\ y=\dfrac{ar}{1+r^2}.$

$$\therefore\ 点\ Q\ 的坐标为\left(\frac{a}{1+r^2},\ \frac{ar}{1+r^2}\right).$$

(2) 从 $x=\dfrac{a}{1+r^2}, y=\dfrac{ar}{1+r^2}$ 中消去 r，得 $x^2+y^2=ax.$

$$\because\ 0<r<1,\ \therefore\ \frac{a}{2}<x<a,\ 0<y<\frac{a}{2}.$$

$\therefore$ 点 Q 的轨迹是上半圆的右半弧(见图).

(3) $\triangle OAB$ 是等腰直角三角形，而腰长为 1. 要使 C 在这个三角形内，必须要求圆心$\left(\dfrac{a}{2},0\right)$到斜边 $x+y=1$ 的距离不小于圆的半径. 即

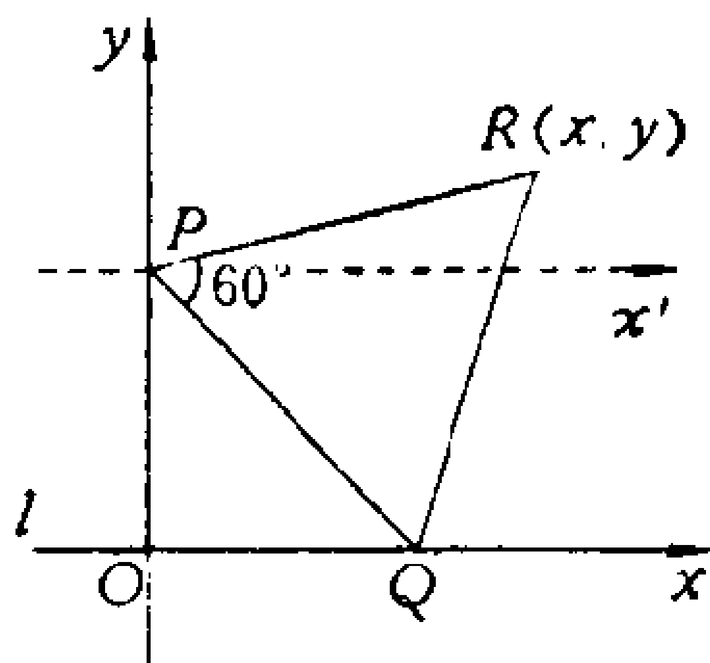
$$\frac{1-\frac{a}{2}}{\sqrt{2}}\geqslant\frac{a}{2},\quad 2-a\geqslant\sqrt{2}a,\quad a\leqslant\frac{2}{\sqrt{2}+1}=2(\sqrt{2}-1).$$

故只有当 $0<a\leqslant2(\sqrt{2}-1)$时，才能使 C 在 $\triangle OAB$ 之内.

138. 已知定点 P 与定直线 l，在 l 上任取一点 Q，连结 PQ，以 PQ 为一边作正三角形 PQR(P、Q、R 的顺序呈逆时针方

向）．求当点Q沿直线l移动时，点R的轨迹．

［分析］ 点R的位置依赖于点Q，而点Q限定在定直线l上运动，若以l为x轴，设Q的横坐标为t，选t为参数，则R的运动就依赖于参数t，不论用坐标变换还是复数，都容易用t的函数表达点R的坐标(x,y)，最后消去t即得解．



［解一］ 取定直线l为x轴，定点P在x轴上射影O为原点，建立直角坐标系如图．设$P(0, p)$，p为定值；$Q(t, 0)$，t为参数；$R(x, y)$为轨迹上任意一点．

经坐标轴平移$\begin{cases} x=x' \\ y=y'+p \end{cases}$后，在$x'Py$坐标系中，$Q(t, -p)$，$R(x, y-p)$．

∵ 经转轴 60° 后，点Q将转到点R，

$$\therefore\quad x=t\cos 60°-(-p)\sin 60°=\frac{t}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}p\cdots①,$$

$$y-p=t\sin 60°+(-p)\cos 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{p}{2}\cdots②.$$

由①、②消去参数t，得$y=\sqrt{3}\,x-p$．故点R的轨迹是一直线．

［解二］ 设P、Q、R三点对应的复数分别为pi、t、$x+yi$，则$\overrightarrow{PQ}$: $t-pi$，$\overrightarrow{PR}$: $x+(y-p)i$．∵ $\overrightarrow{PQ}$按逆时针方向旋转 60° 后得$\overrightarrow{PR}$，

$$\therefore (t-pi)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=x+(y-p)i,$$

即
$$\left(\frac{t}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}p\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{p}{2}\right)i=x+(y-p)i.$$

得
$$\begin{cases} x=\dfrac{t}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}p \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+\dfrac{p}{2}. \end{cases}$$

消去参数t，得
$$y=\sqrt{3}x-p.$$

［说明］ (1)用参数法则求曲线(轨迹)方程，关键是选择适当的参数，利用轨迹条件建立含轨迹上任意点的坐标x、y与参数的方程．选参数时应注意：①应与动点坐标x、y有直接联系；②要利于计算轨迹条件中的几何

量；③要便于最后消去参数．建立参数方程，要善于分析轨迹条件中的等量关系，并将其中的量解析化．(2)本题如果取 $\overrightarrow{PQ}$ 的幅角 θ 为参数．利用旋转变换：

$$\begin{pmatrix} x \\ y-p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -p\operatorname{ctg}\theta \\ -p \end{pmatrix}$$

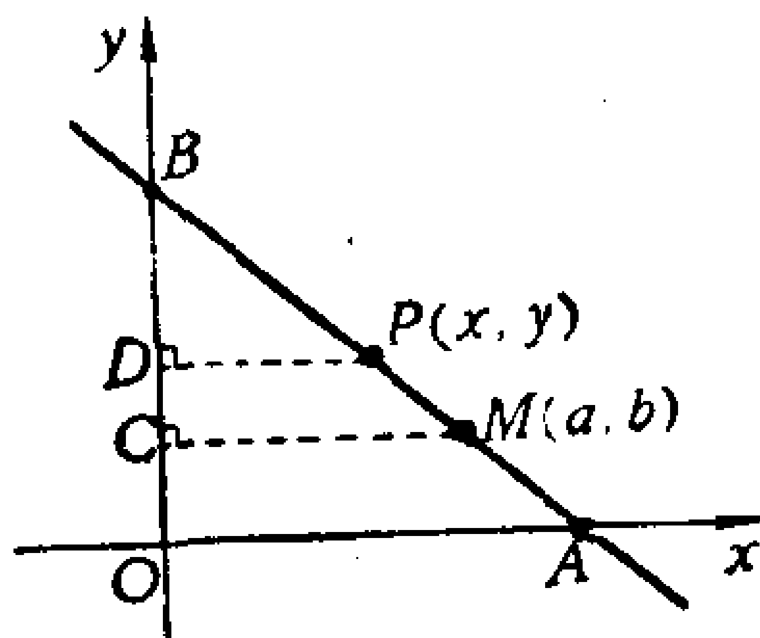
$$=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}p\operatorname{ctg}\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}p \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}p\operatorname{ctg}\theta-\frac{p}{2} \end{pmatrix},$$

即得
$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2}p\operatorname{ctg}\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}p \\ y=\frac{1}{2}p-\frac{\sqrt{3}}{2}p\operatorname{ctg}\theta. \end{cases}$$

消去 θ，即得轨迹方程 $y=\sqrt{3}x-p$.

139．过不在坐标轴上的定点 $M(a,\ b)$ 任作一直线，分别交 x 轴、y 轴于 A、B．求线段 AB 中点 P 的轨迹方程．

［分析一］ 如图，根据相似三角形判定定理易知 $\triangle MBC\backsim\triangle PBD$，由此即可推得 x、y 之间的关系．



［解一］ 设线段 AB 的中点为 $P(x,\ y)$．作 $MC\perp y$ 轴，$PD\perp y$ 轴，垂足分别为 C、D．则 $CM=a$，$OC=b$，$DP=x$，$OD=DB=y$．

$\because$ $MC\parallel PD$，　$\therefore$ $\triangle MBC\backsim\triangle PBD$．

故 $\frac{CM}{DP}=\frac{CB}{DB}$，即 $\frac{a}{x}=\frac{2y-b}{y}(x\neq 0、y\neq 0)$．故所求的轨迹方程为

$$2xy-bx-ay=0.$$

［分析二］ 线段 AB 的中点取决于它的两个端点 A、B，故可取这两个端点的坐标为参数去求解．

［解二］ 设点 A 和 B 的坐标分别为$(p,\ 0)$和$(0,\ q)$，则线段 AB 的中点 $P(x,\ y)$ 的坐标满足 $x=\frac{p}{2}\cdots$①；$y=\frac{q}{2}\cdots$②．$\because$ B、M、A 三点共线，

$$\therefore\quad \begin{vmatrix} 0 & q & 1 \\ a & b & 1 \\ p & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,\quad \text{即}\quad pq-bp-aq=0.$$

由①、②得 $p=2x$, $q=2y$. 代入上式, 即得所求的轨迹方程

$$2xy-bx-ay=0.$$

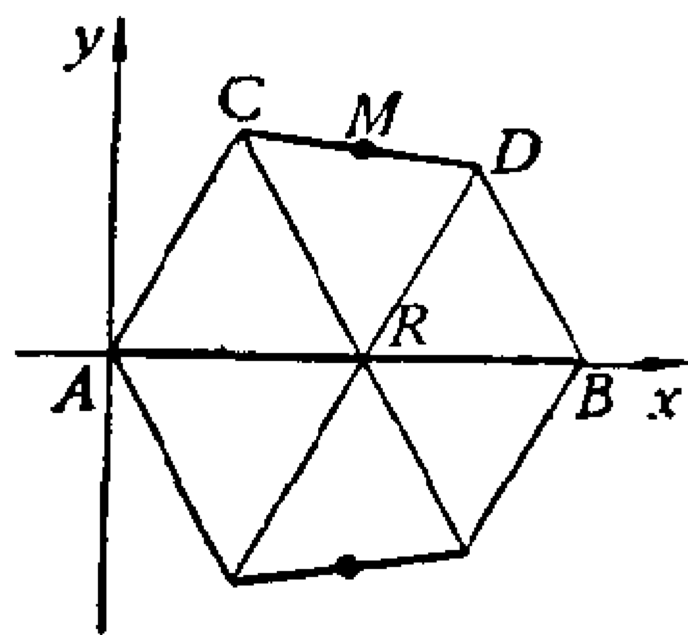
[分析三] 也可取直线 AB 的斜率 k 为参数求解.

[解三] 设线段 AB 的中点为 $P(x, y)$, 且过点 $M(a, b)$ 的直线方程为 $y-b=k(x-a)$, $k\neq0$, 则点 A、B 的坐标为 $\left(a-\frac{b}{k}, 0\right)$、$(0, b-ak)$. 故中点 P 的坐标为: $x=\frac{a-\frac{b}{k}}{2}$, $y=\frac{b-ak}{2}$. 从此两式中消去 k, 得所求的轨迹方程为 $2xy-bx-ay=0$.

[说明] 求线段的中点轨迹都可从探究其端点出发求解.

140. 在长为 a 的线段 AB 上有一动点 R. 在 AB 的同侧以 AR、RB 为边分别作等边三角形 ARC、RBD. 求线段 CD 的中点 M 的轨迹方程.

[分析] CD 的中点 M 取决于 C、D 两点的坐标, 而 $\triangle ARC$ 和 $\triangle RBD$ 都是正三角形; 故设定动点 R 的坐标后, 即可求出 C、D 的坐标.



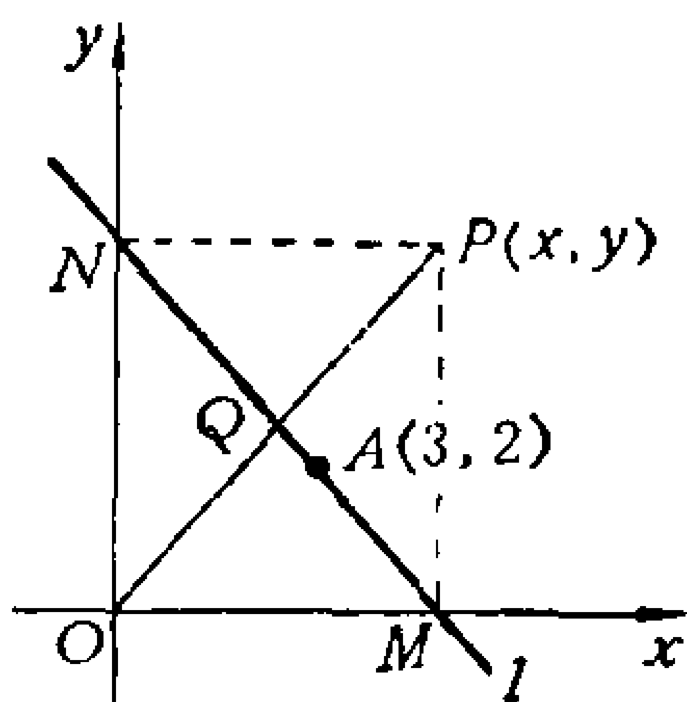
[解] 如图建立坐标系, 使点 A、B 的坐标分别为 $(0, 0)$、$(a, 0)$. 设线段 AB 上的动点 R 的坐标为 $(t, 0)$, 点 M 的坐标为 (x, y), 则 $0\leqslant t\leqslant a$. $\because$ $\triangle ARC$ 和 $\triangle RBD$ 都是等边三角形,

$\therefore$ 当点 C、D 在 x 轴上方时, 它们的坐标分别为 $\left(\frac{t}{2}, \frac{\sqrt{3}t}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{a+t}{2}, \frac{\sqrt{3}(a-t)}{2}\right)$. 故 $x=\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}+\frac{a+t}{2}\right)=\frac{a+2t}{4}$, $y=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}t}{2}+\frac{\sqrt{3}(a-t)}{2}\right]=\frac{\sqrt{3}a}{4}$. 同理, 当点 C、D 在 x 轴下方时, 有 $y=-\frac{\sqrt{3}a}{4}$.

又 $\because$ $0\leqslant t\leqslant a$, $\therefore$ $\frac{a}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3a}{4}$. 故所求的轨迹方程为

$$y=\pm\frac{\sqrt{3}a}{4}\quad\left(\frac{a}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3a}{4}\right).$$

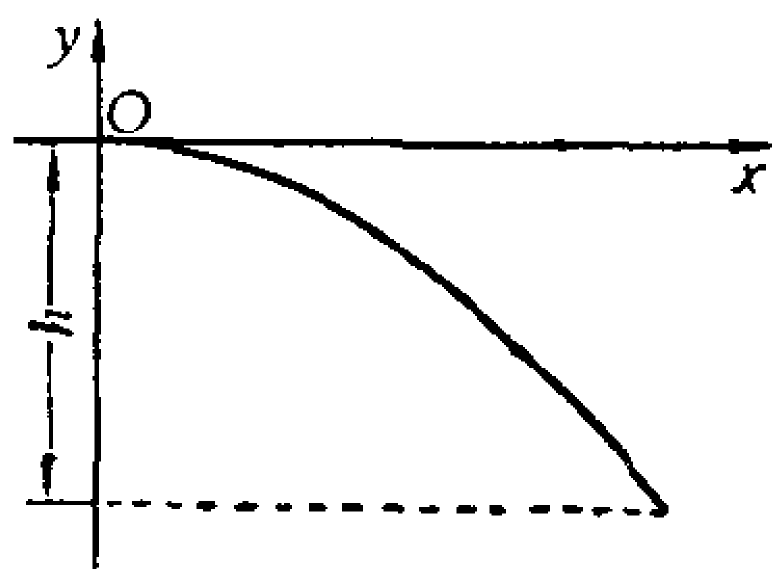
141. 过定点 $A(3, 2)$ 的一条动直线 l 分别交 x 轴、y 轴于 M、N, Q 为线段 MN 的中点, 连 OQ, 并延长至 P, 使 $|OQ|=|QP|$. 求点 P 的轨迹方程.



[解一] 如图. $\because |OQ|=|QP|$, $|MQ|=|QN|$, 且 $OM\perp ON$, 故四边形 $OMPN$ 是一矩形. 设点 M、N、P 的坐标分别为 $(p, 0)$、$(0, q)$、(x, y), 则 $x=p$, $y=q$. 又 $\because$ N、A、M 三点共线, $\therefore \begin{vmatrix}0 & q & 1\\ 3 & 2 & 1\\ p & 0 & 1\end{vmatrix}=0$. 即 $pq-2p-3q=0$, 亦即所求轨迹方程为 $xy-2x-3y=0$.

[解二] 设动直线 l 的斜率为 k, 则其方程为 $y-2=k(x-3)$. 显然 $k\neq 0$, 由此可求得点 M 的坐标为 $\left(3-\frac{2}{k},\ 0\right)$, 点 N 的坐标为 $(0, 2-3k)$. $\because$ 点 Q 是线段 MN 的中点, $\therefore$ 其坐标为 $\left(\frac{3k-2}{2k},\ \frac{2-3k}{2}\right)$. 设点 P 的坐标是 (x, y), $\because |OQ|=|QP|$, 且 P 是 OQ 延长线上的点, $\therefore x=\frac{3k-2}{k}$, $y=2-3k$. 从以上两式中消去 k, 即得所求的轨迹方程 $xy-2x-3y=0$.

142. **飞机作水平投弹时, 飞行的速度是 v (米/秒). 求炸弹下落所经过路线的参数方程. 如果飞机投弹时距地面高度为 h (米), 求炸弹着地点和投弹点的水平距离.**



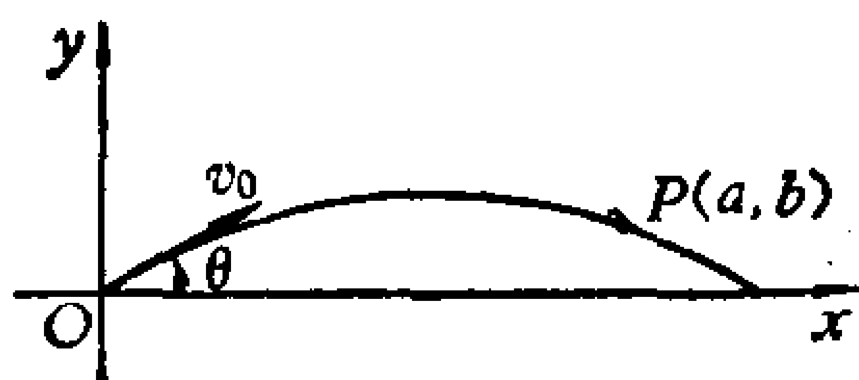
[解] 以飞机投弹点为原点, 水平方向为 x 轴, 单位长度为 1 米建立坐标系. 设投弹 t 秒后炸弹的位置为 (x, y), 则 $\begin{cases}x=vt\\ y=-\frac{1}{2}gt^2.\end{cases}$ 这就是炸弹下落所经过路线的参数方程. 其中 g 为重力加速度, t 为参数. 若炸弹着地所需时间为 T 秒, 则 $0\leqslant t\leqslant T$,

如果飞机投弹时距地面高度为h(米)，则有$-\frac{1}{2}gt^2=-h$，$\therefore t=\frac{1}{g}\sqrt{2gh}$，$x=\frac{v}{g}\sqrt{2gh}$. 故炸弹着地点和投弹点的水平距离是$\frac{v}{g}\sqrt{2gh}$米.

143. 在直角坐标系内，炮口在原点处，射击的目标$P(a, b)$在第一象限内，炮弹的初速为v_0，不计空气阻力. 求发射角θ，并求经过多少时间击中目标.

[解] 炮弹质量中心的轨迹方程为$\begin{cases} x=v_0t\cos\theta\cdots① \\ y=v_0t\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2\cdots②. \end{cases}$ 设经过时间t(秒)击中目标$P(a, b)$，则

$$\begin{cases} a=v_0t\cos\theta, \\ b=v_0t\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2. \end{cases}$$



解此方程组求t与θ. 先消去t，得

$$b=a\,\mathrm{tg}\,\theta-\frac{ga^2}{2v_0^2}\sec^2\theta,$$

即

$$\frac{ga^2}{2v_0^2}\mathrm{tg}^2\theta-a\,\mathrm{tg}\,\theta+b+\frac{ga^2}{2v_0^2}=0.$$

$$\mathrm{tg}\,\theta=\frac{a\pm\sqrt{a^2-\frac{ga^2}{v_0^4}(2v_0^2b+ga^2)}}{\frac{ga^2}{v_0^2}}=\frac{v_0^2\pm\sqrt{v_0^4-g(2v_0^2b+ga^2)}}{ga}.$$

$$\therefore\quad \theta=\mathrm{arc\,tg}\frac{v_0^2\pm\sqrt{v_0^4-g(2bv_0^2+ga^2)}}{ga}.$$

消去θ，得$a^2+\left(b+\frac{1}{2}gt^2\right)^2=v_0^2t^2$，即$g^2t^4-4(v_0^2-gb)t^2+4(a^2+b^2)=0$.

$$\therefore\quad t^2=\frac{2(v_0^2-gb)\pm2\sqrt{(v_0^2-gb)^2-g^2(a^2+b^2)}}{g^2},$$

即

$$t=\frac{1}{g}\sqrt{2(v_0^2-gb)\pm2\sqrt{v_0^4-2gbv_0^2-a^2g^2}}.$$

$$\therefore\quad \begin{cases} \theta_1=\mathrm{arc\,tg}\,\frac{v_0^2+\sqrt{v_0^4-g(2bv_0^2+ga^2)}}{ga} \\ t_1=\frac{1}{g}\sqrt{2(v_0^2-gb)+2\sqrt{v_0^4-2gbv_0^2-a^2g^2}}; \end{cases}$$

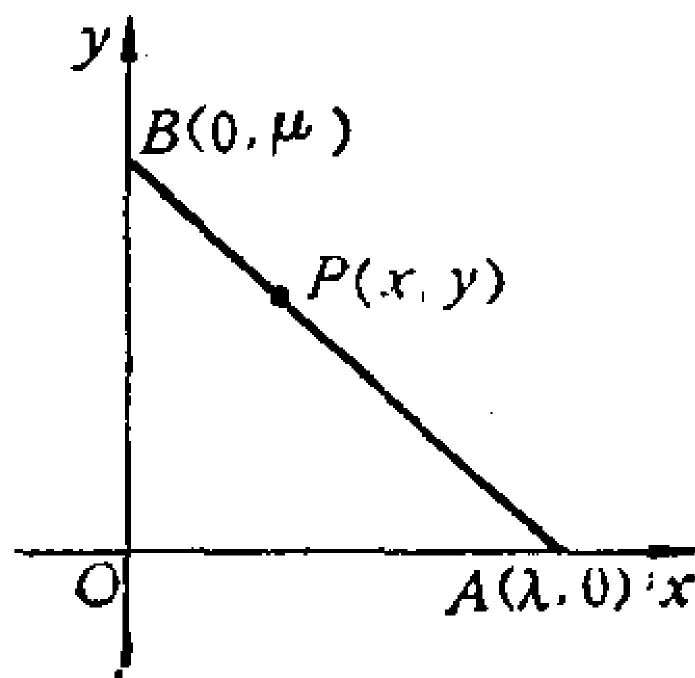
$$\begin{cases}\theta_2=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{v_0^2-\sqrt{v_0^4-g(2bv_0^2+ga^2)}}{ga}\\ t_2=\dfrac{1}{g}\sqrt{2(v_0^2-gb)-2\sqrt{v_0^4-2gbv_0^2-a^2g^2}}.\end{cases}$$

144. 两点的直角坐标为 $P(1-2t,\ t+a)$ 和 $Q(t+a,\ t^2)$，其中 t 为参数. 当 t 变动时，求(1)点 P 的轨迹；(2)点 Q 的轨迹.

［解］ (1) 设点 P 的坐标为 (x,y)，则 $\begin{cases}x=1-2t\\ y=t+a.\end{cases}$ 消去 t，得 $x=1-2y+2a$，即 $x+2y=1+2a$. 故所求的轨迹为一直线.

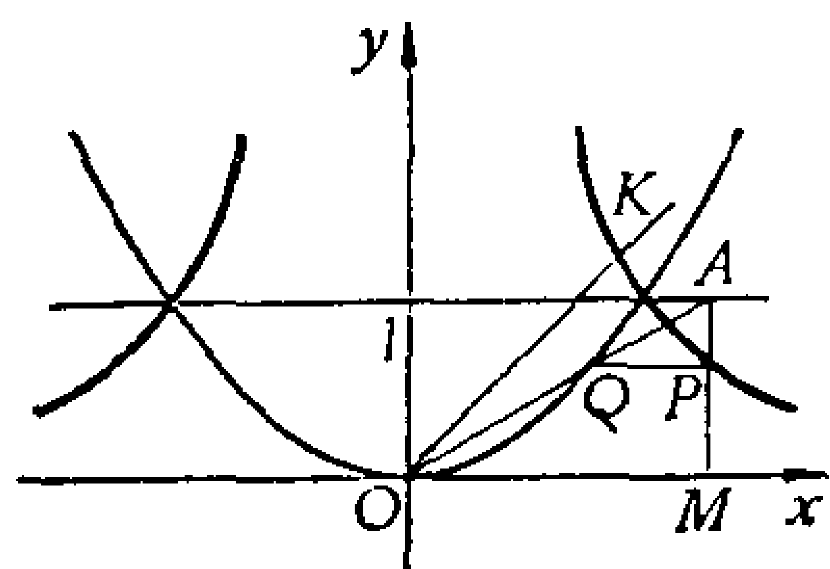
(2) 设点 Q 的坐标为 $(x,\ y)$，则 $\begin{cases}x=t+a\\ y=t^2.\end{cases}$ 由此得 $y=(x-a)^2$. 故所求的轨迹为一抛物线.

145. 线段 AB 长为 $(a+b)$，其两端点 A、B 分别在 x 轴、y 轴上. P 为其上一定点，且 $|BP|=a$. 求当 A、B 分别在两轴上滑动时，点 P 的轨迹.



［解］ 设点 A 的坐标为 $(\lambda,\ 0)$，点 B 的坐标为 $(0,\ \mu)$. $\because\ |BP|=a$，$\therefore\ |PA|=b$. 又点 P 在线段 AB 上，故 $\dfrac{BP}{PA}=\dfrac{a}{b}$. 设点 P 的坐标为 $(x,\ y)$，则 $x=\dfrac{\frac{a}{b}\lambda}{1+\frac{a}{b}}=\dfrac{a\lambda}{a+b}$，即 $\lambda=\dfrac{(a+b)x}{a}\cdots$①；$y=\dfrac{\mu}{1+\frac{a}{b}}=\dfrac{b\mu}{a+b}$，即 $\mu=\dfrac{(a+b)y}{b}\cdots$②. $\because\ \lambda^2+\mu^2=(a+b)^2$，以①、②代入化简，得 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. $\therefore$ 点 P 的轨迹为一椭圆.

146. 自抛物线 $y=\dfrac{1}{2l}x^2$ 的顶点 O 任作一直线 OA，交直线 $y=l$ 于点 A，交抛物线于点 Q. 过 Q 与 A 分别作 x 轴和 y 轴的平行线，两直线相交于点 P. 求点 P 的轨迹方程.



［分析］ 点$P(x, y)$由点Q确定. 取抛物线$y=\frac{1}{2l}x^2$上动点Q的坐标(x_1, y_1)为参数. 根据轨迹条件: O、Q、A共线, 点Q在抛物线上, 可以列出含x、y、x_1、y_1的方程.

［解］ 设$P(x, y)$为轨迹上任意一点, 取点Q的坐标(x_1, y_1)为参数. ∵ 点O、Q、A在一直线上, 且Q不在O上, 故$x_1\neq0$, $y_1\neq0$. ∴ $\frac{y_1}{x_1}=\frac{l}{x}$…①, $y_1=y$…②; ∵ 点Q在已知抛物线上, ∴ $y_1=\frac{1}{2l}x_1^2$…③. 从①、②得$x_1=\frac{xy}{l}$, $y_1=y$; 代入③消去x_1、y_1, 即得轨迹方程$x^2y=2l^3$, 亦即$y=2l^3x^{-2}$.

［说明］ (1) 如果取点Q的坐标为$(2lt, 2lt^2)$, 以t为参数, 只用一个参数, 也可得解.

(2) 若轨迹上的动点是由已知曲线$F(x, y)=0$上的动点Q确定, 常可取点Q的坐标(x_1, y_1)为参数. 根据轨迹条件列出x、y、x_1、y_1的方程, 消去参数, 即得轨迹的方程.

(3) 设已知正方体的棱长为l, 按本题的方法, 作曲线$y=2l^3x^{-2}$的图形, 过原点作第一象限的平分线, 交此曲线于点K, 则以点K的横坐标(或纵坐标)为棱所作的正方体, 体积为已知正方体的两倍. (∵ $y_K=2l^3x_K^{-2}$, 而$y_K=x_K$, ∴ $x_K^3=2l^3$.) 故应用此曲线可以解决古希腊所谓几何三大问题之一的“倍立方”问题.

147. 求曲线C: $F(x, y)=0$关于直线$x-y-2=0$对称的曲线C'的方程.

［分析］ 取曲线C上动点$Q(x_1, y_1)$的坐标为参数. 根据Q关于直线的对称点P所满足的条件, 列出三个方程, 消去x_1、y_1即得.

［解］ 设点$Q(x_1, y_1)$为曲线C上任意一点, 点$P(x, y)$为它关于直线$x-y-2=0$的对称点. ∵ PQ与已知直线垂直, ∴ $\frac{y_1-y}{x_1-x}=-1$, 即$x_1+y_1=x+y$…①; ∵ PQ的中点在已知直线上, ∴ $\frac{1}{2}(x_1+x)-\frac{1}{2}(y_1+y)-2=0$…②; ∵ $Q(x_1, y_1)$在已知曲线C上, ∴ $F(x_1, y_1)=0$…③. 从

①、② 得 $\begin{cases} x_1 = y+2 \\ y_1 = x-2. \end{cases}$ 代入③，得曲线 C' 的方程 $F(y+2,\ x-2)=0$.

148. 设点 $Q(x_1,\ y_1)$ 是单位圆 $x^2+y^2=1$ 上一动点，求动点 $P(x_1^2-y_1^2,\ x_1y_1)$ 的轨迹方程.

[分析] 动点 P 的运动是由点 Q 的运动控制的，而点 Q 在单位圆上运动，可取点 Q 的坐标 $(x_1,\ y_1)$ 为参数来解.

[解一] 设点 P 的坐标为 $(x,\ y)$. 则 $x=x_1^2-y_1^2\cdots①$, $y=x_1y_1\cdots②$, 又 $x_1^2+y_1^2=1\cdots③$. ①+③: $2x_1^2=x+1\cdots④$, ③−①: $2y_1^2=1-x\cdots⑤$. ④×⑤: $4x_1^2y_1^2=1-x^2$, 由②得 $x_1^2y_1^2=y^2$. 代入前式，得

$$x^2+4y^2=1,$$

此即动点 P 的轨迹方程.

[解二] 设点 Q 的坐标为 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$，以 θ 为参数. 据题意有：

$$x=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta,\ y=\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta.$$

消去 θ，即得 $$x^2+4y^2=1.$$

149. 设一动直线与两相交定直线所围成的三角形面积为定值 S，求此三角形重心的轨迹方程.

[解] 取两相交定直线的两条角平分线为坐标轴建立直角坐标系. 设两直线的方程为 $y=\pm kx\ (k>0)$，动直线与它们的交点为 $A(x_1,\ kx_1)$、$B(x_2,\ -kx_2)$，$P(x,\ y)$ 为轨迹上任意一点.

$$\therefore x=\frac{x_1+x_2}{3}\cdots①,\ y=\frac{kx_1-kx_2}{3}\cdots②.$$

又 $$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & kx_1 & 1 \\ x_2 & -kx_2 & 1 \end{vmatrix} \text{的绝对值}=S\cdots③.$$

由③得 $|x_1x_2|=\dfrac{S}{k}\cdots④$. 从①、②解得 $x_1=\dfrac{3x}{2}+\dfrac{3y}{2k}$ 与 $x_2=\dfrac{3x}{2}-\dfrac{3y}{2k}$.

代入④，消去参数 x_1、x_2，得轨迹方程 $\dfrac{9kx^2}{4S}-\dfrac{9y^2}{4Sk}=\pm 1$.

150. 设 $\begin{cases} x=a\cos\theta+b\cos 2\theta\cdots① \\ y=a\sin\theta+b\sin 2\theta\cdots② \end{cases}$ (θ 为参数)，求点 $(x,\ y)$

的轨迹方程.

[分析] 此类轨迹均可看作两曲线系交点的轨迹，从两曲线系方程消去参数即得轨迹方程. 即把 $x=a\cos\theta+b\cos 2\theta$ 与 $y=a\sin\theta+b\sin 2\theta$ 看作两曲线系方程，然后消去参数 θ 即得点 (x, y) 的轨迹方程.

[解一] ①^2+②^2，得 $x^2+y^2=a^2+b^2+2ab\cos\theta$. 当 a、b 都不为零时，$\cos\theta=\dfrac{x^2+y^2-a^2-b^2}{2ab}$…③. 由①得

$$x=a\cos\theta+2b\cos^2\theta-b=\frac{x^2+y^2-a^2-b^2}{2b}+\frac{(x^2+y^2-a^2-b^2)^2}{2a^2b}-b.$$

即
$$\begin{aligned}2a^2bx+2a^2b^2&=a^2(x^2+y^2-a^2-b^2)+(x^2+y^2-a^2-b^2)^2\\&=(x^2+y^2-a^2-b^2)(x^2+y^2-b^2)\\&=(x^2+y^2-b^2)^2-a^2(x^2+y^2-b^2).\end{aligned}$$

$$\therefore\quad a^2(x^2+2bx+b^2+y^2)=(x^2+y^2-b^2)^2,$$

即
$$a^2[(x+b)^2+y^2]=(x^2+y^2-b^2)^2\cdots\cdots④.$$

当 a、b 中有一个为零或全为零时，仍得相应的方程，故方程④就是所求的轨迹方程.

[解二] ①^2+②^2，得 $x^2+y^2=a^2+b^2+2ab\cos\theta$，即 $x^2+y^2-b^2=a(a+2b\cos\theta)$…③. 从①得 $x=a\cos\theta+2b\cos^2\theta-b$，即

$x+b=\cos\theta(a+2b\cos\theta)$…④. 从②得 $y=\sin\theta(a+2b\cos\theta)$…⑤.

④^2+⑤^2，得 $$(x+b)^2+y^2=(a+2b\cos\theta)^2.$$

当 $a\neq 0$ 时， $$a^2[(x+b)^2+y^2]=a^2(a+2b\cos\theta)^2.$$

以③代入即得 $(x^2+y^2-b^2)^2=a^2[(x+b)^2+y^2]$. 如果 $a=0$，则从③得 $x^2+y^2=b^2$，这与上式在 $a=0$ 时所得结果一致. ∴ 轨迹方程为

$$(x^2+y^2-b^2)^2=a^2[(x+b)^2+y^2].$$

[说明] 消去参数的方法，一般有两种：(1) 代入消去法. 先从两个方程解出参数，代入另一个方程；或经过方程变形获得含参数的一个解析式，再用其他变形获得同一参数的另一个解析式，两者相等即可消去参数. (2) 利用 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\sec^2\theta-\mathrm{tg}^2\theta=1$，$\csc^2\theta-\mathrm{ctg}^2\theta=1$ 等三角恒等式消去参数. 比较复杂的问题，需要两种方法综合运用.

本题轨迹还可以另一种形式出现：两个同心圆 $x^2+y^2=a^2$ 和 $x^2+y^2=b^2$ 上各有一动点 A 和 B，且 $2\angle xOA=\angle xOB$，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}$，则动点 P 的

轨迹参数方程为 $\begin{cases} x=a\cos\theta+b\cos 2\theta \\ y=a\sin\theta+b\sin 2\theta. \end{cases}$

151. 设 a、b 为常数，且 $b\neq 0$. $x=a+b\sin 2\theta$, $y=u=b\cos 2\theta$, $v=a-b\sin 2\theta$ $\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$. 求 $x^2+y^2+u^2+v^2$ 的值，以及当 θ 变化时，点 (x, y) 的轨迹.

［解］ $x^2+y^2+u^2+v^2=(a+b\sin 2\theta)^2+2b^2\cos^2 2\theta+(a-b\sin 2\theta)^2$
$=2a^2+2b^2\sin^2 2\theta+2b^2\cos^2 2\theta=2(a^2+b^2)$.

由 $x=a+b\sin 2\theta$ 得 $x-a=b\sin 2\theta\cdots$①，又 $y=b\cos 2\theta\cdots$②. ①^2+②^2，得 $(x-a)^2+y^2=b^2$. $\because 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，$\therefore$ 当 $b>0$ 时，$a\leqslant x\leqslant a+b$；$b<0$ 时，$a+b\leqslant x\leqslant a$. 故所求的轨迹为以 $(a, 0)$ 为圆心，半径为 $|b|$ 的圆的右半部分 $(b>0)$，或左半部分 $(b<0)$.

152. 设 θ 为参数，且 $x=a\cos(\theta-\alpha)$, $y=b\cos(\theta-\beta)$. 求点 (x, y) 的轨迹方程（a、b 均不为零）.

［解一］ 由 $x=a\cos(\theta-\alpha)$，得 $\frac{x}{a}=\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha\cdots$①，
由 $y=b\cos(\theta-\beta)$，得 $\frac{y}{b}=\cos\theta\cos\beta+\sin\theta\sin\beta\cdots$②.

①$\cdot\cos\beta-$②$\cdot\cos\alpha$，得 $\frac{x}{a}\cos\beta-\frac{y}{b}\cos\alpha=\sin\theta\sin(\alpha-\beta)\cdots$③.

①$\cdot\sin\beta-$②$\cdot\sin\alpha$，得 $\frac{x}{a}\sin\beta-\frac{y}{b}\sin\alpha=\cos\theta\sin(\beta-\alpha)\cdots$④.

③^2+④^2，得 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos(\alpha-\beta)=\sin^2(\alpha-\beta)$. 此即所求的轨迹方程.

［解二］ 由 $x=a\cos(\theta-\alpha)$，得 $\sin\theta\sin\alpha+\cos\theta\cos\alpha=\frac{x}{a}\cdots$①，
由 $y=b\cos(\theta-\beta)$，得 $\sin\theta\sin\beta+\cos\theta\cos\beta=\frac{y}{b}\cdots$②.

解方程①与②，得 $$\sin\theta=\frac{\frac{x}{a}\cos\beta-\frac{y}{b}\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)},$$

$$\cos\theta=\frac{-\frac{x}{a}\sin\beta+\frac{y}{b}\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

$$\therefore\quad \left(\frac{x}{a}\cos\beta-\frac{y}{b}\cos\alpha\right)^2+\left(-\frac{x}{a}\sin\beta+\frac{y}{b}\sin\alpha\right)^2=\sin^2(\alpha-\beta).$$

化简得 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos(\alpha-\beta)=\sin^2(\alpha-\beta).$$

153. 求两动曲线 C_1: $\frac{ax}{\cos\theta}-\frac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2$ 与 C_2: $\frac{ax\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{by\cos\theta}{\sin^2\theta}=0$ 的交点的轨迹方程(θ 为参数).

[解] 由曲线 C_2 的方程得 $\frac{ax}{\cos\theta}=\frac{-by}{\sin\theta}\cdot\text{ctg}^2\theta$. 代入曲线 C_1 的方程得 $-\frac{by}{\sin\theta}(\text{ctg}^2\theta+1)=a^2-b^2$, 即 $-\frac{by}{\sin^3\theta}=a^2-b^2$. $\therefore -by=(a^2-b^2)\sin^3\theta$. 两边开三次方后再平方,得 $(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}\sin^2\theta\cdots$①.
同理可得: $(ax)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}\cos^2\theta\cdots$②. ①+②, 得

$$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

此即所求的轨迹方程.

[说明] 本题轨迹是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的法线 $\frac{ax}{\cos\theta}-\frac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2$ 的包络.

154. 设 $x=\csc\theta-\sin\theta$, $y=\sec\theta-\cos\theta$ (θ 为参数). 求点 (x, y) 的轨迹方程.

[解] $\because x=\csc\theta-\sin\theta=\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}=\text{ctg}\,\theta\cdot\cos\theta$, $\therefore x\cdot\text{tg}\,\theta=\cos\theta\cdots$①.
又 $y=\sec\theta-\cos\theta=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}=\text{tg}\,\theta\cdot\sin\theta$, $\therefore y\,\text{ctg}\,\theta=\sin\theta\cdots$②.
①÷②, 得 $\frac{x}{y}\text{tg}^2\theta=\text{ctg}\,\theta$, $\therefore$ $\text{ctg}^3\theta=\frac{x}{y}\cdots$③.
①^2+②^2, 得 $x^2\text{tg}^2\theta+y^2\text{ctg}^2\theta=1$, 即 $x^2(\text{tg}^3\theta)^{\frac{2}{3}}+y^2(\text{ctg}^3\theta)^{\frac{2}{3}}=1\cdots$④.
③代入④, 得 $x^2\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}+y^2\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{3}}=1$, 即 $x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})=1$.

155. 求两曲线系 C_1: $x+y=3-\cos 4\theta$ 和 C_2: $x-y=4\sin 2\theta$ 交点的轨迹方程(θ 为参数).

[解] 由 C_1 得 $x+y=3-(1-2\sin^2 2\theta)=2(1+\sin^2 2\theta)\cdots$①,

又 C_2 为 $x-y=4\sin 2\theta\cdots$②. ①+②: $x=(1+\sin 2\theta)^2$, 即 $x^{\frac{1}{2}}=1+\sin 2\theta$.

①－②: $y=(1-\sin 2\theta)^2$, 即 $y^{\frac{1}{2}}=1-\sin 2\theta$. $\therefore$ $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=2$.

156. 求两动曲线 C_1: $\dfrac{x\cos\theta}{a}+\dfrac{y\sin\theta}{b}=1$ 和 C_2: $x\sin\theta-y\cos\theta=\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$ 的交点的轨迹方程, 其中 a、b 均为正数, θ 为参数.

[解] 由 C_1 得 $b^2x^2\cos^2\theta+a^2y^2\sin^2\theta+2abxy\sin\theta\cos\theta=a^2b^2\cdots$①,

由 C_2 得 $(x^2-a^2)\sin^2\theta+(y^2-b^2)\cos^2\theta-2xy\sin\theta\cos\theta=0\cdots$②.

①+②$\times ab$, 得 $b\cos^2\theta(bx^2+ay^2-ab^2)+a\sin^2\theta(ay^2+bx^2-a^2b)=a^2b^2$.

$\therefore$ $b\cos^2\theta(bx^2+ay^2-a^2b-ab^2)+a\sin^2\theta(bx^2+ay^2-a^2b-ab^2)=0$,

即 $(b\cos^2\theta+a\sin^2\theta)(bx^2+ay^2-a^2b-ab^2)=0$. $\because$ $a>0$、$b>0$,

$\therefore$ $b\cos^2\theta+a\sin^2\theta\neq 0$, 故 $bx^2+ay^2-ab(a+b)=0$, 即 $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}=a+b$.

157. 求两曲线系 C_1: $y\cos\theta-x\sin\theta=a\cos 2\theta$ 和 C_2: $y\sin\theta+x\cos\theta=2a\sin 2\theta$ 交点的轨迹方程.

[分析] 因 C_1、C_2 的方程都是 x、y 的线性方程, 故可从解出 x、y 着手.

[解] $\because$ $x\sin\theta-y\cos\theta=-2a\left(\dfrac{1}{2}\cos 2\theta\right)\cdots$①,

$x\cos\theta+y\sin\theta=2a\sin 2\theta\cdots$②.

$$\therefore\quad \frac{x}{\begin{vmatrix}-\cos\theta & \frac{1}{2}\cos 2\theta\\ \sin\theta & -\sin 2\theta\end{vmatrix}}=\frac{y}{\begin{vmatrix}\frac{1}{2}\cos 2\theta & \sin\theta\\ -\sin 2\theta & \cos\theta\end{vmatrix}}=\frac{2a}{\begin{vmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{vmatrix}}=2a.$$

即 $$\frac{x}{\sin 2\theta\cos\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta\sin\theta}=\frac{y}{\frac{1}{2}\cos 2\theta\cos\theta+\sin\theta\sin 2\theta}=2a.$$

$\therefore$ $x+y=a(\sin\theta+\cos\theta)^3$, $x-y=a(\sin\theta-\cos\theta)^3$.

故所求轨迹方程为 $(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$.

158. 设 $x=\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\varphi$, $y=\operatorname{ctg}\theta+\operatorname{ctg}\varphi$, 其中 θ 为参数, φ 满足条件: $\theta+\varphi=\alpha\left(\alpha \text{ 为常量, 且 } \alpha\neq\dfrac{n\pi}{2},\ n\in J\right)$. 求点 (x, y) 的

轨迹方程.

［分析］ 由于$\theta+\varphi=\alpha$，故用两角和的正弦、余弦公式可消去θ、φ.

［解一］ $\because$ $x=\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\varphi$, $y=\operatorname{ctg}\theta+\operatorname{ctg}\varphi$,

$\therefore$ $xy=1+\operatorname{tg}\theta\operatorname{ctg}\varphi+1+\operatorname{tg}\varphi\operatorname{ctg}\theta$

$$=\frac{\operatorname{tg}\theta-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}{\operatorname{tg}\left(\theta-\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}+\frac{\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\operatorname{tg}\left(\varphi-\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\theta-\operatorname{ctg}\varphi+\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{ctg}\theta}{\operatorname{tg}\left[(\theta+\varphi)-\frac{\pi}{2}\right]}$$

$$=[(\operatorname{ctg}\theta+\operatorname{ctg}\varphi)-(\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\varphi)]\operatorname{tg}(\theta+\varphi).$$

以已知条件代入，即得所求的轨迹方程$xy=(y-x)\operatorname{tg}\alpha$.

［解二］ $\because$ $x=\frac{\sin(\theta+\varphi)}{\cos\theta\cos\varphi}$, $\therefore$ $x\cos\theta\cos\varphi=\sin\alpha\cdots$①.

$\because$ $y=\frac{\sin(\theta+\varphi)}{\sin\theta\sin\varphi}$, $\therefore$ $y\sin\theta\sin\varphi=\sin\alpha\cdots$②.

$y\times$①$-x\times$②: $xy(\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi)=(y-x)\sin\alpha$，即得所求的轨迹方程$xy\cos\alpha=(y-x)\sin\alpha$.

159. **求两曲线系：$x\cos\theta+y\sin\theta=a$，$x\cos\varphi+y\sin\varphi=a$ 交点的轨迹方程，其参数θ、φ满足条件：$\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi=m$（$m$为常数）.**

［分析］ $\because$ $\operatorname{tg}\theta\cdot\operatorname{tg}\varphi=m$，$\therefore$ θ、φ均不等于$(2n+1)\frac{\pi}{2}$ $(n\in J)$，且$\cos\theta\neq0$，$\cos\varphi\neq0$. 而曲线系的方程均可转化为$\operatorname{tg}\theta$、$\operatorname{tg}\varphi$的二次方程，利用韦达定理即可得解.

［解］ $\because$ $\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi=m$，$\therefore$ θ、φ均不等于$(2n+1)\frac{\pi}{2}$ $(n\in J)$，故$\cos\theta\neq0$，$\cos\varphi\neq0$. 在$x\cos\theta+y\sin\theta=a$两边同除以$\cos\theta$，得$x+y\operatorname{tg}\theta=a\sec\theta$. 两边平方，化简得 $(y^2-a^2)\operatorname{tg}^2\theta+2xy\operatorname{tg}\theta+x^2-a^2=0$.

同理可得 $(y^2-a^2)\operatorname{tg}^2\varphi+2xy\operatorname{tg}\varphi+x^2-a^2=0$.

$\therefore$ $\operatorname{tg}\theta$、$\operatorname{tg}\varphi$是方程$(y^2-a^2)\lambda^2+2xy\lambda+x^2-a^2=0$的两根.

据韦达定理，

$$\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi=\frac{x^2-a^2}{y^2-a^2}=m,\quad \text{即}\quad x^2-my^2=a^2(1-m).$$

160. 求两曲线系 C_1: $\frac{x}{a}\cos\alpha+\frac{y}{b}\sin\alpha=1$ 和 C_2: $\frac{x}{a}\cos\beta+\frac{y}{b}\sin\beta=1$ 交点的轨迹方程，其中参数 α、β 满足条件:

$$a^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+b^2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=c^2.$$

［分析］ C_1、C_2 的方程是 $\frac{x}{a}$、$\frac{y}{b}$ 的线性方程，故可从此解出 $\frac{x}{a}$、$\frac{y}{b}$，进而求出 $\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$、$\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$，再求出 $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$、$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$. 代入 α、β 满足的条件即得.

［解］ 从 C_1、C_2 的方程可解出:

$$\frac{x}{a}=\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}\cdots①,\qquad \frac{y}{b}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}\cdots②.$$

从①、②得

$$\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}\cdots③,$$

$$\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}\cdots④.$$

从条件

$$a^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+b^2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=c^2$$

得

$$a^2\left[\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)-\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]+b^2\left[\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]=2c^2\cdots⑤.$$

以③、④代入⑤，得

$$a^2\left(1-\frac{x}{a}\right)+b^2\left(1+\frac{x}{a}\right)=2c^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}},$$

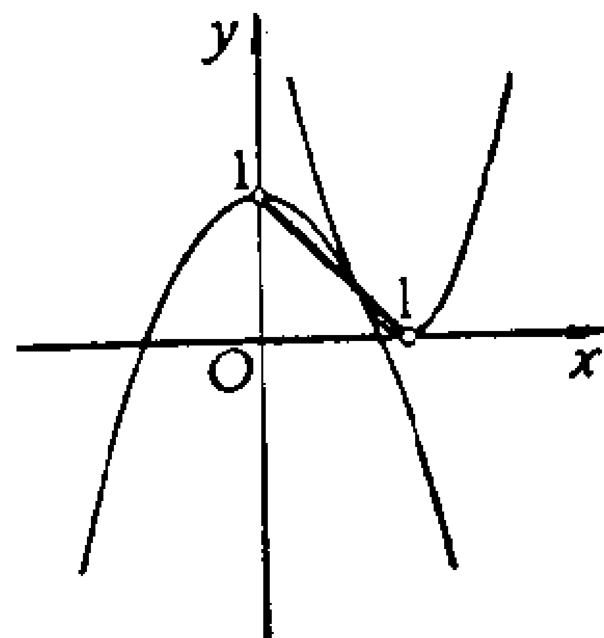
即

$$\left[a^2+b^2-(a^2-b^2)\frac{x}{a}\right]^2=4c^4\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right).$$

［说明］ 本题是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上两动点 Q、R 的离心角 α、β 满足条件：$a^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+b^2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=c^2$ 时，过 Q、R 的两切线的交点的轨迹方程.

161. 曲线 $y=a(x-1)^2$ $(a>0)$ 和 $y=-bx^2+1$ $(b>0)$ 仅有一个公共点. 求公共点 (x, y) 的轨迹.

［分析］ 联立两抛物线的方程可得公共点 (x, y)，它依赖于双参数 a、b 的两个方程，再从有且仅有一个公共点这个条件可得参数 a、b 间的一个关系式，从三个方程消去参数 a、b 即可得解.



［解］ 由方程组 $\begin{cases}y=a(x-1)^2\\y=-bx^2+1\end{cases}$ 消去 y，得 $a(x-1)^2=-bx^2+1$，即 $(a+b)x^2-2ax+a-1=0$，$\because a>0,\ b>0$，$\therefore a+b>0$. 故两曲线仅有一个公共点的条件是 $\Delta=4a^2-4(a+b)(a-1)=0\cdots$①. 这时，$x=\frac{a}{a+b}\cdots$②；

$$y=-b\cdot\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+1\cdots③.$$

由①得 $a^2=(a+b)(a-1)$，代入③，得

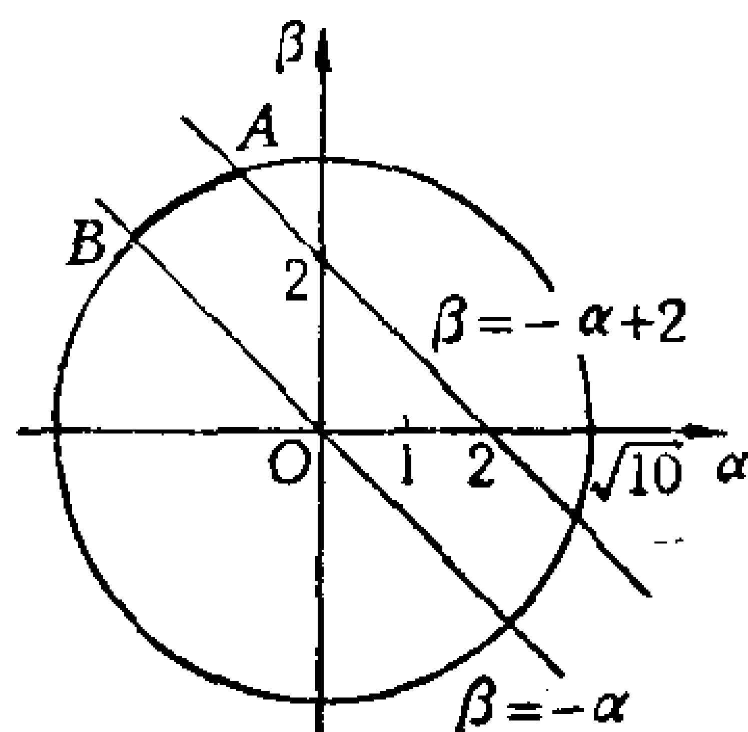
$$y=\frac{-b(a-1)}{a+b}+1=\frac{b}{a+b}.\qquad\therefore\quad x+y=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=1,$$

此即公共点的轨迹方程. $\because a>0,\ b>0$，$\therefore x>0,\ y>0$. 故公共点的轨迹实际上是直线 $x+y=1$ 在第一象限内的一段(不包括端点).

［说明］ 由二次方程实根对或二次方程系数对构成的点的轨迹问题，常利用二次方程的判别式或韦达定理列出轨迹上点所满足的参数方程，消去参数即得解. 但应注意，所求轨迹必须在实根存在的区域内.

162. 已知二次方程 $x^2-2x\sin\theta-(2\cos^2\theta+3)=0\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$. (1) 求证：此二次方程有两个不同的实根；(2) 若两实根为 α、$\beta(\alpha<\beta)$，求点 (α, β) 的轨迹.

［分析］ 由根与系数的关系可得点$(\alpha,\ \beta)$的坐标α、β应满足的两个方程，消去其中的参数θ，即得轨迹方程，但应注意$\sin\theta$、$\cos\theta$的取值范围．



［解］ (1) $\because \Delta=4\sin^2\theta+4(2\cos^2\theta+3)>0$，$\therefore$ 方程有两个不同的实根．

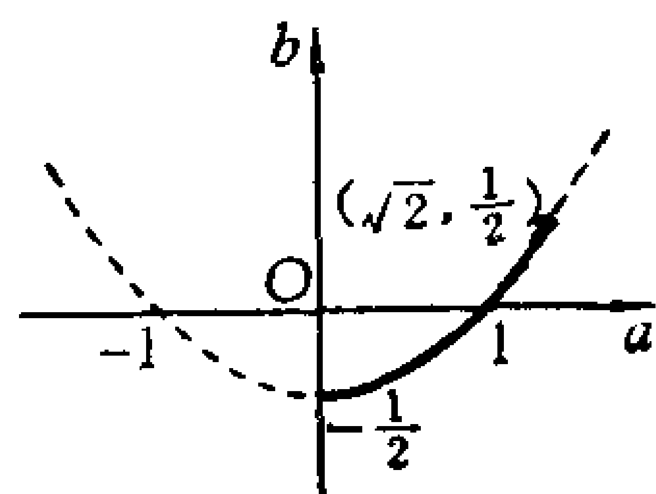
(2) 由韦达定理，得

$$\begin{cases}\alpha+\beta=2\sin\theta\geqslant 0\cdots① \\ \alpha\beta=-(2\cos^2\theta+3)<0\cdots②.\end{cases}$$

由②得　$-2(\alpha\beta+3)=4\cos^2\theta\cdots③$.

$①^2+③$，得$\alpha^2+\beta^2=10$．但$\because \alpha<\beta$，根据①与②知$\alpha<0<\beta$，且$|\beta|\geqslant|\alpha|$．又由①得$2\geqslant\alpha+\beta\geqslant 0$．故所求点$(\alpha,\beta)$的轨迹是以原点为圆心、$\sqrt{10}$为半径的圆上的一段圆弧$\widehat{AB}$，包括点$A(-1,\ 3)$和点$B(-\sqrt{5},\ \sqrt{5})$．

163．二次方程$x^2-ax+b=0$的两根为$\sin\theta$、$\cos\theta$，求点$P(a,\ b)$的轨迹方程$\left(\text{其中}|\theta|\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right)$．



［解］ 由韦达定理知

$$\begin{cases}a=\sin\theta+\cos\theta\cdots① \\ b=\sin\theta\cos\theta\cdots②.\end{cases}$$

$①^2-2\times②$，消去θ得$a^2-2b=1$，即$a^2=2\left(b+\dfrac{1}{2}\right)$．$\because |\theta|\leqslant\dfrac{\pi}{4}$，$\therefore$ 由$a=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$知$0\leqslant a\leqslant\sqrt{2}$；由$b=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$知$-\dfrac{1}{2}\leqslant b\leqslant\dfrac{1}{2}$．故点$P(a,\ b)$的轨迹是抛物线$a^2=2\left(b+\dfrac{1}{2}\right)$上满足$0\leqslant a\leqslant\sqrt{2}$的一段弧（如图）．

164．二次方程$ax^2+bx+c=0$（a、b、c是实数，$a\neq 0$）的判别式等于1，两根之积等于常数k．试求点(b,c)的轨迹．

［解］ 由已知$b^2-4ac=1\cdots①$，由韦达定理得$\dfrac{c}{a}=k\cdots②$．若$k\neq 0$，即可得$a=\dfrac{c}{k}$，代入①消去a，得$b^2-\dfrac{c^2}{\frac{k}{4}}=1$．当$k>0$时，动点$(b,\ c)$的轨迹

是双曲线；当 $k<0$ 时，动点 (b, c) 的轨迹是椭圆. 若 $k=0$，由②知 $c=0$，再由①得 $b=\pm1$，这时轨迹为两点 $(1, 0)$、$(-1, 0)$.

165. **设抛物线 $x=ay^2+by+c$ 在 x 轴上的截距与在 y 轴上的截距互为相反数，且过点 $(2, 1)$. 试求点 (b, c) 的轨迹方程.**

[解] 在 $x=ay^2+by+c$ 中，令 $y=0$，即得在 x 轴上截距为 c，$\therefore$ 在 y 轴上与之成相反数的截距为 $-c$. 代入原方程，得 $a(-c)^2+b(-c)+c=0\cdots$①；又 $\because$ 抛物线过点 $(2, 1)$，$\therefore 2=a+b+c\cdots$②. 由①、②消去参数 a，得 $c(c^2+bc+b-2c-1)=0$. 此即所求的轨迹方程.

166. **设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ (a、b、c 为实数) 过点 $(1, 2)$，且在 x 轴上截得线段之长为 2. 求点 (a, c) 的轨迹方程.**

[解] $\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点 $(1, 2)$，$\therefore 2=a+b+c\cdots$①. 设 $ax^2+bx+c=0$ 的两实根为 x_1、x_2，$\because$ 在 x 轴上截得的线段之长为 2，

$$\therefore\quad |x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-4\cdot\frac{c}{a}}$$

$$=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}=2\cdots②.$$

由①得 $b=2-(a+c)$，代入②消去 b，得 $[2-(a+c)]^2-4ac=4a^2$，即所求轨迹方程为 $3a^2+2ac-c^2+4a+4c-4=0\ (a\neq0)$.

167. **两抛物线系：$y=x^2+2cx+b^2$，$y=x^2+2ax-b^2$ 与 x 轴交于同一点（非原点），且 a、$b+1$、c 成等差数列. 求点 (a, b) 的轨迹方程，其中 a、b、c 均为实数.**

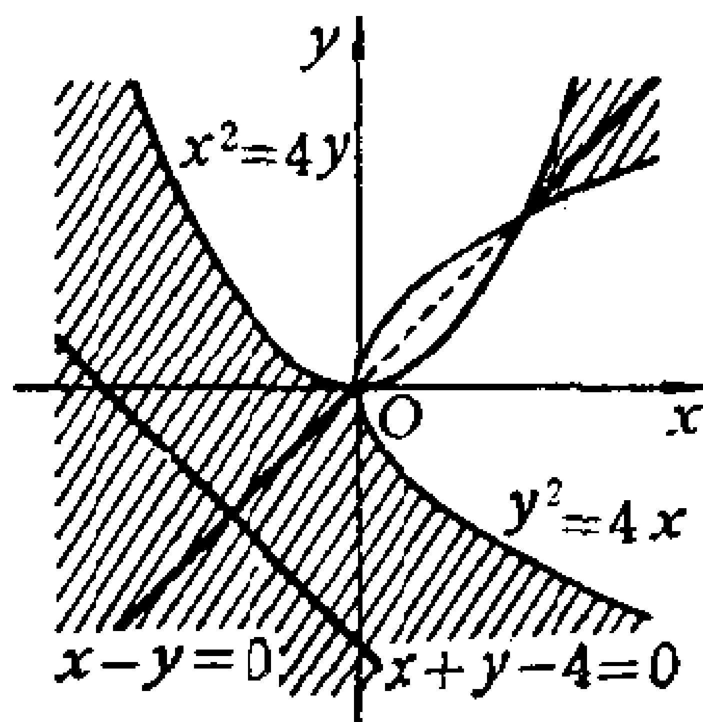
[分析] $\because a$、b、c 是实数，要求点 (a, b) 的轨迹方程，则 c 为参变数. 而抛物线系与 x 轴交于同一点 $(x_0, 0)$，且 $x_0\neq0$，即方程 $x^2+2cx+b^2=0$ 和 $x^2+2ax-b^2=0$ 有一个相同实根 x_0. 按轨迹条件列出方程，消去参数 c 即得.

[解] $\because a$、$b+1$、c 成等差数列，$\therefore c+a=2(b+1)\cdots$①. $\because y=x^2+2cx+b^2$，$y=x^2+2ax-b^2$ 都过点 $(x_0, 0)$，且 $x_0\neq0$，$\therefore x_0^2+2cx_0+b^2=0$，$x_0^2+2ax_0-b^2=0$. 两式相加得 $2x_0^2+2(a+c)x_0=0$；$\therefore x_0=-(a+c)$. 两式相减得 $2(c-a)x_0+2b^2=0$，即 $(c-a)x_0+b^2=0$. 以 $x_0=-(a+c)$ 代入即得 $-(c-a)(c+a)+b^2=0$，即 $a^2+b^2=c^2\cdots$②. 从①、②消去参数 c，

得轨迹方程 $a^2+b^2=(2b-a+2)^2$，即 $3b^2-4ab-4a+8b+4=0$.

168. **已知关于 λ、μ 的一元二次方程 $\lambda^2+x\lambda+y=0$ 与 $\mu^2+y\mu+x=0$ 的两实根之差的绝对值相等，求点 (x, y) 的轨迹.**

[分析] 求 (x, y) 的轨迹方程，只要在两方程实根存在的公共区域中，利用根与系数的关系和已知两实根之差的绝对值相等的条件，便可列式求解.



[解] 要使两方程的实根存在，必须满足：

$$\begin{cases} x^2-4y\geqslant 0\cdots① \\ y^2-4x\geqslant 0\cdots② \end{cases}$$ 即图中阴影部分.

$$\because\quad |\lambda_1-\lambda_2|=\sqrt{(\lambda_1+\lambda_2)^2-4\lambda_1\lambda_2}=\sqrt{x^2-4y};$$
$$|\mu_1-\mu_2|=\sqrt{(\mu_1+\mu_2)^2-4\mu_1\mu_2}=\sqrt{y^2-4x}.$$

$\therefore$ $\sqrt{x^2-4y}=\sqrt{y^2-4x}$，即 $(x-y)(x+y+4)=0$. 得 $x-y=0$，或 $x+y+4=0$. 故所求点的轨迹是直线 $x+y+4=0$，以及直线 $x-y=0$ 在阴影部分内的两条射线.

169. **一定长 $2a$ 的线段 AB，其两端分别在 x、y 轴上滑动，过 AB 的中点 M 作 AB 的垂线，在此垂线上取一点 P，使点 P 与原点 O 在 AB 的异侧，且 $|MP|=a$. 求点 P 的轨迹方程.**

[分析] 由于线段 AB 所在象限不同，Ox 与 MP 的夹角以及 Ox 与 AB 的夹角之间的关系不同，应分别讨论. $\because$ $AB\perp MP$，故可用向量射影公式来解.

[解] 取 $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB})=\varphi$ 为参数. 当 AB 在第一、三象限时(图 1)，$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{MP})=\varphi-\frac{\pi}{2}$，$A$、$B$ 两点的坐标分别为：$x_A=OA=-AO=-2a\cos\varphi$，$y_A=0$；$x_B=0$，$y_B=OB=2a\sin\varphi$. $\therefore$ 点 M 的坐标为 $(-a\cos\varphi, a\sin\varphi)$. 设点 P 坐标为 (x, y)，

$$\therefore x-(-a\cos\varphi)=a\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)，即 x=-a\cos\varphi+a\sin\varphi;$$

$$y-a\sin\varphi=a\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)，即\quad y=a\sin\varphi-a\cos\varphi.\quad \therefore\quad x-y=0.$$

又由 $x=-a\cos\varphi+a\sin\varphi$，得 $x=\sqrt{2}a\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$. 当线段 AB 在第

一象限时，$\because\ \frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\pi,\ \frac{\pi}{4}\leqslant\varphi-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{4},\ \therefore\ a\leqslant x\leqslant\sqrt{2}a$. 当线段 AB 在第三象限时，$\because\ \frac{3\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\ \frac{5\pi}{4}\leqslant\varphi-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{7\pi}{4},\ \therefore\ -\sqrt{2}a\leqslant x\leqslant-a$. 所以此时轨迹为第一、三象限的平分线上的两线段(见图1).

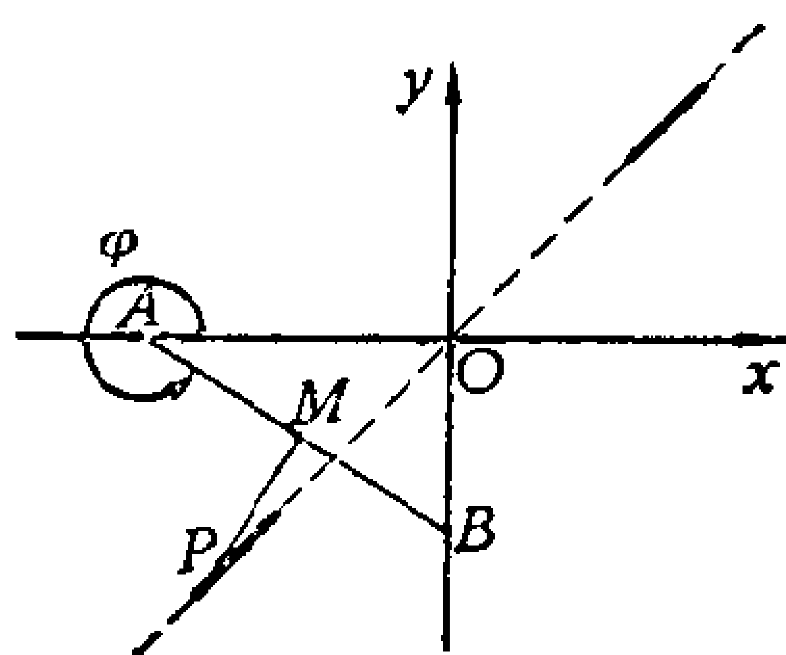


图 1

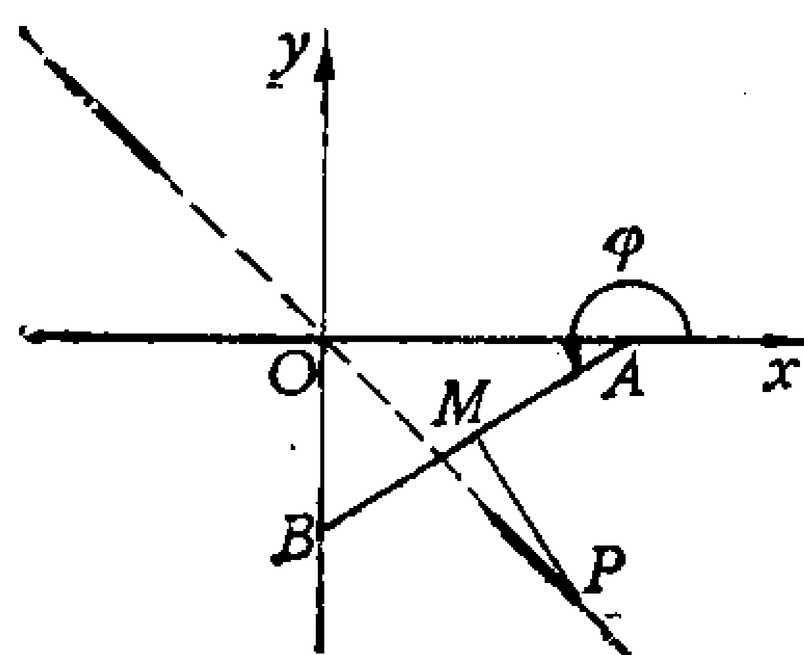


图 2

当 AB 在第二、四象限时(图2)，$(\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{MP})=\varphi+\frac{\pi}{2}$，$x_A=-2a\cos\varphi$，$y_A=0$；$x_B=0$，$y_B=2a\sin\varphi$；$M(-a\cos\varphi,\ a\sin\varphi)$.

$$\therefore\quad x-(-a\cos\varphi)=a\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right),\ \text{即}\quad x=-a\cos\varphi-a\sin\varphi;$$

$$y-a\sin\varphi=a\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right),\ \text{即}\quad y=a\sin\varphi+a\cos\varphi.$$

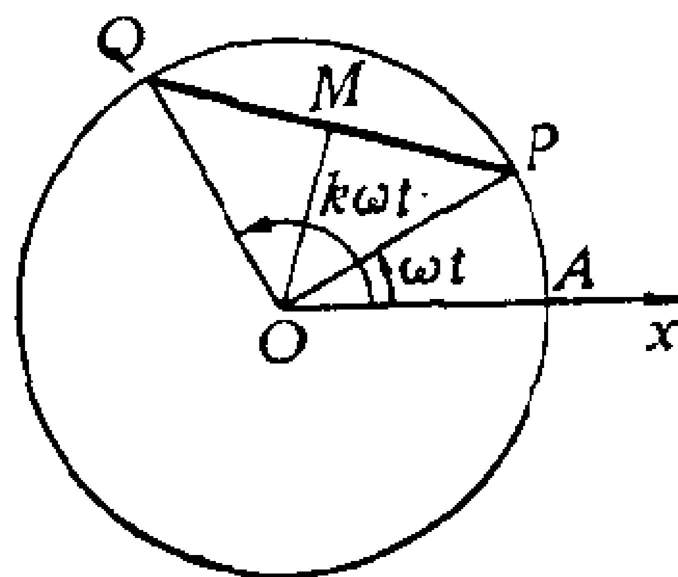
$$\therefore\quad x+y=0.$$

对上式 $x=-a\cos\varphi-a\sin\varphi$ 而言，当线段 AB 在第二象限时，$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$；当线段 AB 在第四象限时，$\pi\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{2}$. 仿第一、三象限的情况，可推得此时轨迹为第二、四象限的平分线上的两线段(见图2).

〔说明〕 运用参数方法求出轨迹的方程以后，还应根据参数的取值范围，求出动点坐标的取值范围，才能确定其轨迹. 否则，不能保证轨迹的纯粹性.

170. 半径为 a 的定圆上有两个动点 P、Q，同时自圆上定点 A 出发按逆时针方向作匀角速度运动，点 P 的角速度为 ω，点 Q 的角速度是点 P 的 k 倍(k 为定值). 试求线段 PQ 中点 M 的轨迹极坐标方程.

［分析］ 点 P、Q 的位置由运动时间确定，取运动时间 t 为参数，点 P、Q 的极坐标即可确定．从而点 M 也可确定．



［解］ 如图，取圆心 O 为极，射线 OA 为极轴，建立极坐标系．取点 P、Q 自点 A 出发运动的时间 t(秒)为参数，点 P、Q 的角速度分别为 ω、$k\omega$．故点 P、Q 的极坐标分别为 $(a,\ \omega t)$ 和 $(a,\ k\omega t)$．设 $M(\rho,\ \theta)$ 为轨迹上任意一点，则

$$\rho=OP\cos(\overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{OM})=a\cos\frac{k\omega t-\omega t}{2}=a\cos\frac{k-1}{2}\omega t\cdots①,$$

$$\theta=\frac{1}{2}(k\omega t+\omega t)=\frac{k+1}{2}\omega t\cdots②.$$

从①与②消去参数 t，即得轨迹的极坐标方程 $\rho=a\cos\frac{k-1}{k+1}\theta$．

171．化下列直角坐标方程为极坐标方程：

$$(1)\ x^2+y^2-2ay=0;\quad (2)\ y^2=\frac{x^3}{2a-x};$$

$$(3)\ x\cos\alpha+y\sin\alpha=p;\quad (4)\ (1-e^2)x^2+y^2-2epx-p^2=0.$$

［解］ 设直角坐标系原点与极点重合，x 轴正半轴与极轴重合，则

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta.\end{cases}$$

分别代入直角坐标方程：

(1) $\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta-2a\rho\sin\theta=0$，即 $\rho=2a\sin\theta$．

(2) $\rho^2\sin^2\theta=\frac{\rho^3\cos^3\theta}{2a-\rho\cos\theta}$，即 $2a-\rho\cos\theta=\rho\cos\theta\,\mathrm{ctg}^2\theta$．

$$\therefore\quad \rho\cos\theta\csc^2\theta=2a,\ \rho=\frac{2a\sin^2\theta}{\cos\theta}=2a\sin\theta\,\mathrm{tg}\,\theta.$$

(3) $\rho\cos\theta\cos\alpha+\rho\sin\theta\sin\alpha=p$，即 $\rho\cos(\theta-\alpha)=p$．

(4) $(1-e^2)\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta-2ep\rho\cos\theta-p^2=0$，$\rho^2=(e\rho\cos\theta+p)^2$，

$$\therefore\quad \rho=\frac{p}{1-e\cos\theta},\quad 即\quad \frac{p}{\rho}=1-e\cos\theta.$$

172．化下列极坐标方程为直角坐标方程：

$$(1)\ \rho=a\sin^2\frac{\theta}{2};\qquad (2)\ \rho^2\sin 2\theta=2a^2;\qquad (3)\ \rho\cos^2\frac{\theta}{2}=a;$$

(4) $\rho(\cos 3\theta+\sin 3\theta)=5k\sin\theta\cos\theta$.

［解］ 设坐标系与上题相同，则 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, $x^2+y^2=\rho^2$.

(1) 由原方程 $\rho=a\sin^2\dfrac{\theta}{2}$，得 $\rho=\dfrac{a}{2}(1-\cos\theta)$，$2\rho+a\cos\theta=a$，两边同乘以 ρ，得 $2\rho^2+a\rho\cos\theta=a\rho$. $\therefore [2(x^2+y^2)+ax]^2=a^2(x^2+y^2)$.

(2) 原方程化为 $\rho^2 2\sin\theta\cos\theta=2a^2$，$\therefore xy=a^2$.

(3) 由原方程 $\rho\cos^2\dfrac{\theta}{2}=a$，得 $\rho\cdot\dfrac{1+\cos\theta}{2}=a$，即 $\rho=2a-x$，再平方，得 $\rho^2=(2a-x)^2$，即 $x^2+y^2=x^2-4ax+4a^2$，$y^2=-4a(x-a)$.

(4) 利用三倍角公式，得

$$\rho(4\cos^3\theta-3\cos\theta+3\sin\theta-4\sin^3\theta)=5k\sin\theta\cos\theta,$$

即 $$\rho(\sin\theta-\cos\theta)[3-4(1+\sin\theta\cos\theta)]=5k\sin\theta\cos\theta,$$

亦即 $$(x-y)(1+4\sin\theta\cos\theta)=5k\sin\theta\cos\theta.$$

两边同乘以 ρ^2，得 $(x^2+y^2)(x-y)+4xy(x-y)=5kxy$.

§2. 方程的曲线

173. 讨论方程 $x^2y=4a^2(2a-y)$，并描其曲线 $(a>0)$.

［解］ (1) 截距：设 $F(x,y)=x^2y-4a^2(2a-y)=(x^2+4a^2)y-8a^3=0$.

$\because$ $F(x,0)=-8a^3\neq0$，$\therefore$ 曲线 $F(x,y)=0$ 在 x 轴上无截距.

$\because$ $F(0,y)=4a^2y-8a^3=0$, $y=2a$,

$\therefore$ 曲线 $F(x,y)=0$ 在 y 轴上截距为 $2a$.

(2) 对称性：$\because$ $F(-x,y)=(x^2+4a^2)y-8a^3=F(x,y)$,

$\therefore$ 曲线 $F(x,y)=0$ 关于 y 轴成对称.

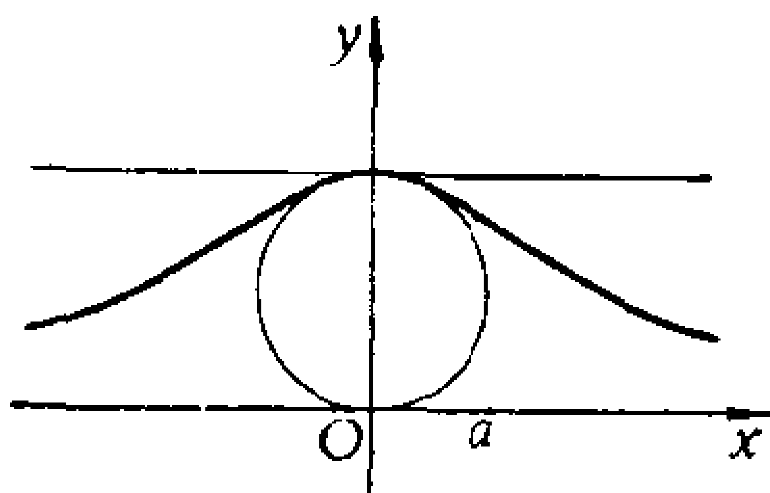
(3) 范围：$\because F(x,y)=(x^2+4a^2)y-8a^3=0$，$\therefore y=\dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}$. x 为一切实数时 y 都存在，$\therefore x\in(-\infty,+\infty)$. $\because x^2\geqslant0$，$\therefore x^2+4a^2\geqslant4a^2>0$.

$$0<\frac{1}{x^2+4a^2}\leqslant\frac{1}{4a^2},\quad 0<\frac{8a^3}{x^2+4a^2}\leqslant\frac{8a^3}{4a^2}=2a.$$

$\therefore$ 当 $x=0$ 时，$y_{\max}=2a$，$\therefore y\in(0,2a]$. 故曲线 $F(x,y)=0$ 在 x 轴与 $y=2a$ 之间. 设 $f(x)=8a^3/(x^2+4a^2)$,

$$k=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{8a^3/(x_1^2+4a^2)-8a^3/(x_2^2+4a^2)}{x_1-x_2}$$
$$=\frac{-8a^3(x_1+x_2)}{(x_1^2+4a^2)(x_2^2+4a^2)}.$$

当 x_1、$x_2\in(0,+\infty)$时,$k<0$, 故 $(0,+\infty)$ 是函数 $y=\dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}$ 的递减区间.



当 x_1、$x_2\in(-\infty,0)$时,$k>0$, 故 $(-\infty,0)$ 是函数 $y=\dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}$ 的递增区间.

x	…	$-8a$	$-6a$	$-4a$	$-3a$	$-2a$	$-a$	0	a	$2a$	$3a$	$4a$	$6a$	$8a$	…
y	…	$\frac{2}{17}a$	$\frac{1}{5}a$	$\frac{2}{5}a$	$\frac{8}{13}a$	a	$\frac{8}{5}a$	$2a$	$\frac{8}{5}a$	a	$\frac{8}{13}a$	$\frac{2}{5}a$	$\frac{1}{5}a$	$\frac{2}{17}a$	…

描点,其曲线如图.

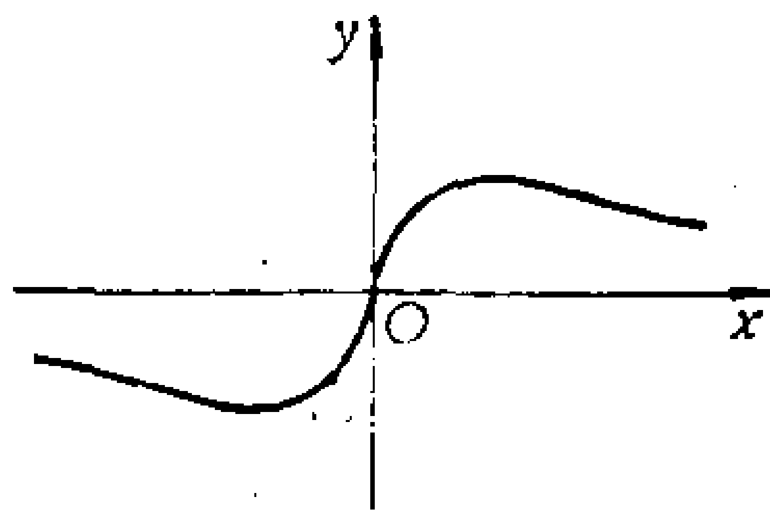
[说明] 这一曲线称为箕舌线,参见第1168题.

174. 讨论方程 $x^2y+y-2x=0$,并描其曲线.

[解] (1) 截距: 设 $F(x,y)=x^2y+y-2x$, $y=\dfrac{2x}{1+x^2}=f(x)$.

∵ $F(x,0)=-2x=0$,

∴ 曲线过原点(0,0).



(2) 对称性:

∵ $F(-x,-y)=-(x^2y+y-2x)=-F(x,y)$,

∴ 曲线关于原点对称.

(3) 范围: ∵ x 是一切实数, ∴ $\Delta\geqslant0$, 即 $y^2\leqslant1$, ∴ $-1\leqslant y\leqslant1$. ∴ 当 $x=1$ 时, $y_{max}=1$; 当 $x=-1$ 时, $y_{min}=-1$. ∴ 曲线在两直线 $y=-1$ 与 $y=1$ 之间. 设

$$k=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\dfrac{2x_1}{1+x_1^2}-\dfrac{2x_2}{1+x_2^2}}{x_1-x_2}=\frac{2(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)},$$

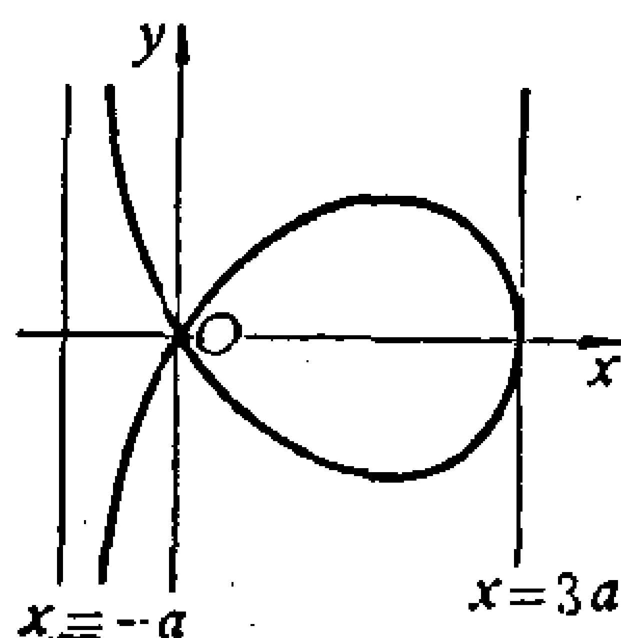
在 x_1、$x_2\in(-\infty,-1]$或$[1,+\infty)$时,$k<0$, ∴ y 递减; 在 x_1、$x_2\in[-1,1]$ 时, $k>0$, ∴ y 递增. 当 $x\in(-\infty,0)$ 时, $y<0$; 当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $y>0$.

x	…	-4	-3	-2	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	2	3	4	…
y	…	$-\frac{8}{17}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	-1	$-\frac{24}{25}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{8}{17}$	0	$\frac{8}{17}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{24}{25}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{17}$	…

描点，其曲线如图.

175. 讨论方程 $y^2=x^2\dfrac{3a-x}{a+x}$，并作其图象$(a>0)$.

［解］ (1) 截距：设 $F(x, y)=y^2-x^2\dfrac{3a-x}{a+x}=0$. $\because F(x, 0)=-x^2\cdot\dfrac{3a-x}{a+x}=0$, $\therefore x=0$, $x=3a$. 即曲线在 x 轴上的截距为 0、$3a$. 又 $F(0, y)=y^2=0$, $\therefore y=0$. 即曲线在 y 轴上的截距为 0.



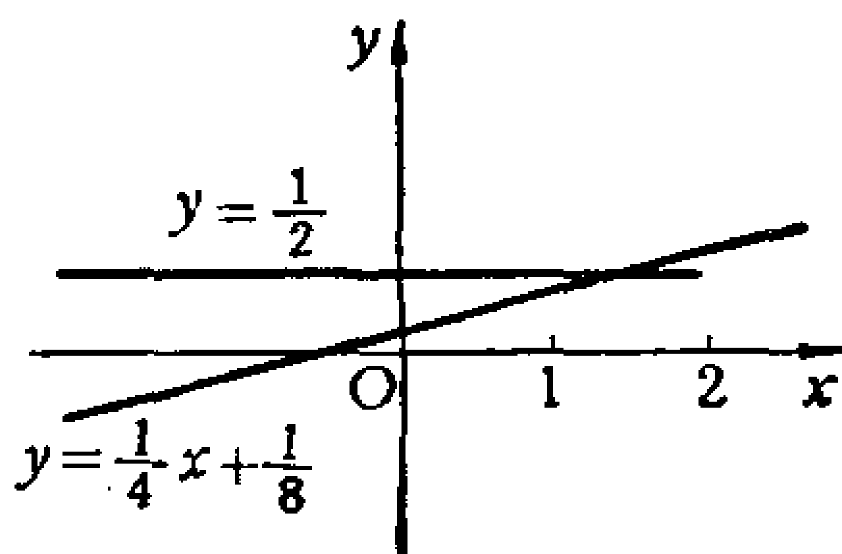
(2) 对称性：$\because F(x,-y)=(-y)^2-x^2\cdot\dfrac{3a-x}{a+x}=y^2-x^2\cdot\dfrac{3a-x}{a+x}=F(x, y)$, $\therefore$ 曲线关于 x 轴对称.

(3) 范围：$\because$ $y^2\geqslant 0$, $\therefore$ $x^2\dfrac{3a-x}{a+x}\geqslant 0$, $\therefore -a\leqslant x\leqslant 3a$. 又当 $x\to -a$ 时，$y\to\pm\infty$, $\therefore$ 曲线在直线 $x=-a$ 与 $x=3a$ 之间，且 $x=-a$ 是曲线的渐近线.

x	$-\frac{2a}{3}$	$-\frac{a}{3}$	0	$\frac{3a}{5}$	$\frac{6a}{5}$	$\frac{9a}{5}$	$\frac{12a}{5}$	$3a$
y	$\pm 2.21a$	$\pm 0.75a$	0	$\pm 0.73a$	$\pm 1.09a$	$\pm 1.18a$	$\pm 1.01a$	0

描点，其曲线如图.

176. 求由方程 $4y-x=\sqrt{x^2-4xy-2x+10y-1}$ 确定的函数 $y=f(x)$ 的定义域，并作其图象.



［解］ $\because$ $\sqrt{x^2-4xy-2x+10y-1}=4y-x\geqslant 0$, $\therefore x^2-4xy-2x+10y-1=16y^2-8xy+x^2$, 即 $16y^2-(4x+10)y+2x+1=0$. 分解因式，得 $(8y-2x-1)(2y-1)=0$. 故由

原方程确定的函数 $y=f(x)$ 有两支曲线：(1) $y=\frac{1}{2}$. 但 $4y-x\geqslant 0$，即 $2-x\geqslant 0$，$\therefore x\leqslant 2$. 其定义域为 $(-\infty, 2]$. (2) $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}$. 因 $4y-x=x+\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}\geqslant 0$，故其定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 其图象如图所示.

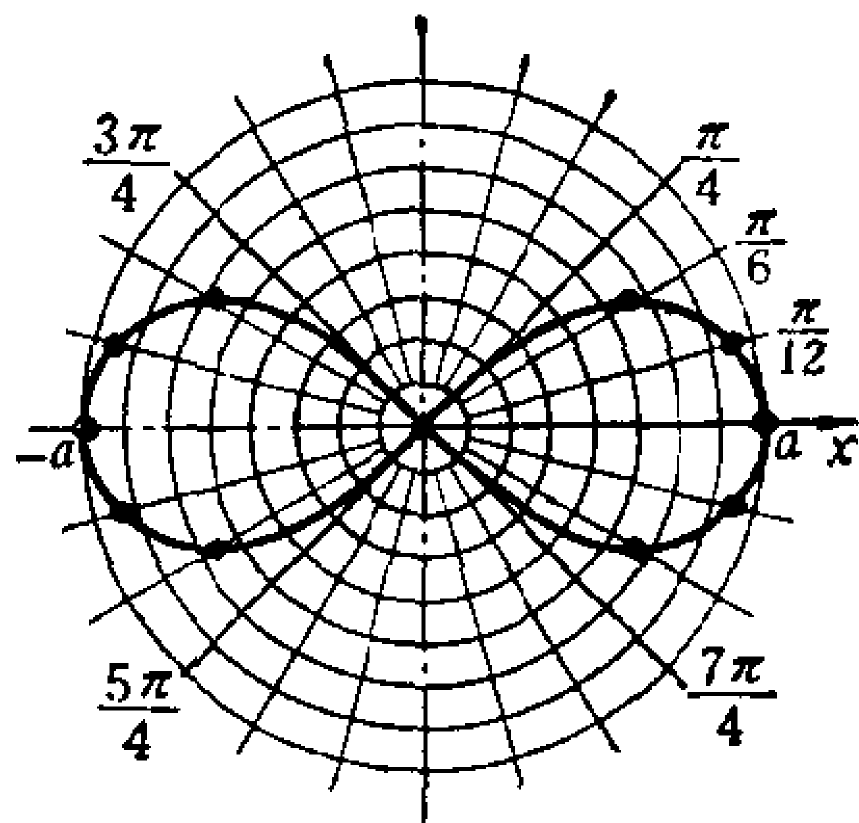
177. 讨论方程 $\rho^2=a^2\cos 2\theta$，并作其图象.

[解] (1) 对称性：设 $f(\rho, \theta)=\rho^2-a^2\cos 2\theta=0$. $\because f(-\rho,\theta)=(-\rho)^2-a^2\cos 2\theta=\rho^2-a^2\cos 2\theta=f(\rho, \theta)$,

$\therefore$ 曲线关于极对称.

又 $\because f(\rho, -\theta)=\rho^2-a^2\cos 2(-\theta)=\rho^2-a^2\cos 2\theta=f(\rho, \theta)$,

$\therefore$ 曲线关于极轴对称.



(2) 范围：

$\because \rho^2=a^2\cos 2\theta\leqslant a^2$ ($\because \cos 2\theta\leqslant 1$)，$\therefore |\rho|\leqslant a\,(a>0)$，即 $\rho\in[-a, a]$.

$$\because \cos 2\theta=\frac{\rho^2}{a^2}\geqslant 0, \qquad \therefore 2n\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2\theta\leqslant 2n\pi+\frac{\pi}{2}.$$

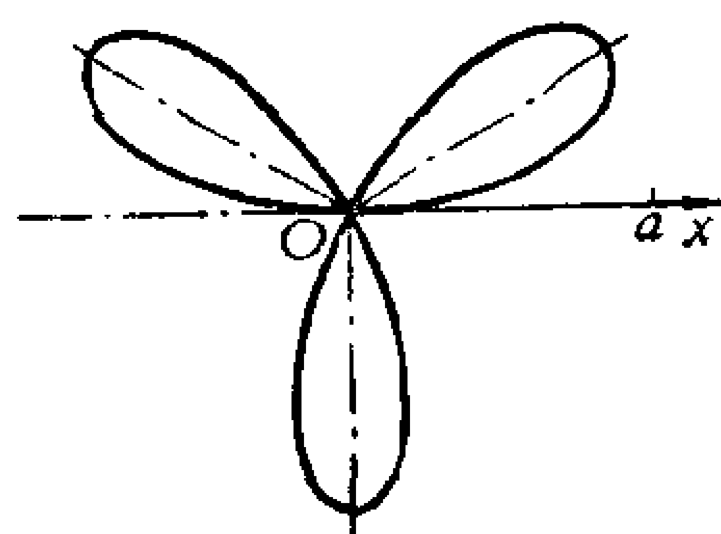
$$\therefore n\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant n\pi+\frac{\pi}{4} \quad (n\in J).$$

故曲线在 $\theta=-\frac{\pi}{4}$、$\theta=\frac{\pi}{4}$ 两射线之间和 $\theta=\frac{3\pi}{4}$、$\theta=\frac{5\pi}{4}$ 两射线之间，如图所示.

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
2θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos 2\theta$	1	0.866	0.500	0
ρ	$\pm a$	$\pm 0.93a$	$\pm 0.7a$	0

根据对称性可作出其余诸点.

178. 讨论方程 $\rho=a\sin 3\theta$，并作其图象.



[解] (1) 对称性: 设 $f(\rho,\theta)=\rho-a\sin 3\theta=0$. $\because f(\rho,\pi-\theta)=\rho-a\sin 3(\pi-\theta)=\rho-a\sin 3\theta=0$, $\therefore$ 曲线关于过极且与极轴垂直的直线对称.

(2) 范围: $\because \rho=a\sin 3\theta\leqslant a$, 且 $\rho\geqslant -a$, $\therefore$ 曲线存在的范围在圆 $\rho=a$ 内或圆上.

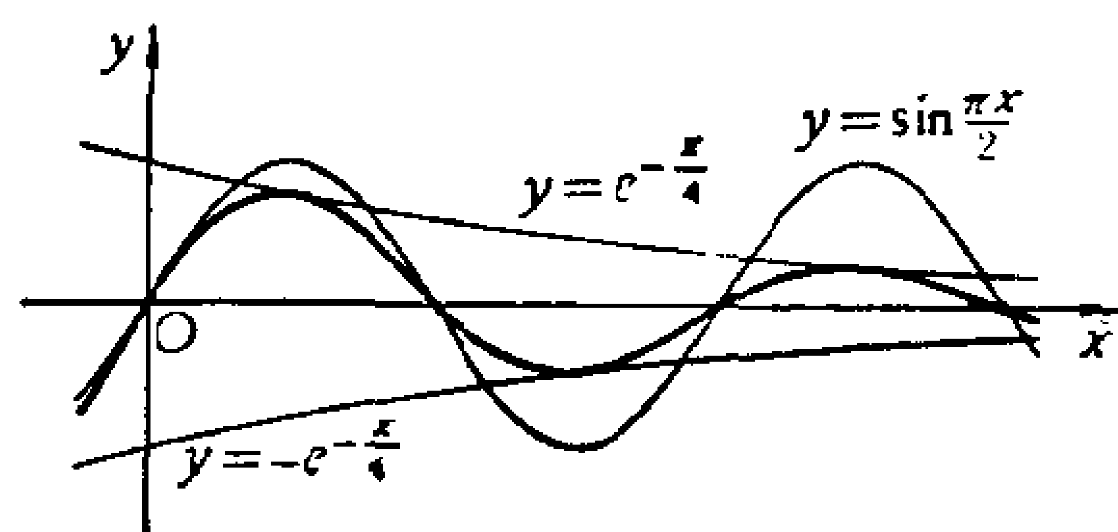
θ	$-90°\to-60°$	$-60°\to-30°$	$-30°\to0°$
3θ	$-270°\to-180°$	$-180°\to-90°$	$-90°\to0°$
ρ	$a\to0$	$0\to-a$	$-a\to0$
θ	$0°\to30°$	$30°\to60°$	$60°\to90°$
3θ	$0°\to90°$	$90°\to180°$	$180°\to270°$
ρ	$0\to a$	$a\to0$	$0\to-a$

描点,其曲线如图.

[说明] 此曲线称为三叶玫瑰线.

179. 作出 $y=e^{-\frac{1}{4}x}\sin\frac{\pi x}{2}$ 的图象.

[解] (1) $\because \left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|\leqslant1$, $\therefore |y|\leqslant e^{-\frac{1}{4}x}$, 即 $-e^{-\frac{1}{4}x}\leqslant y\leqslant e^{-\frac{1}{4}x}$. 由此知所求作的图象在 $y=e^{-\frac{1}{4}x}$ 与 $y=-e^{-\frac{1}{4}x}$ 所对应的两曲线之间, 称此两曲线为界限曲线.



(2) 当 $\sin\frac{\pi x}{2}=0$ 时, $y=0$; 即当 $y=0$ 时, $e^{-\frac{1}{4}x}\sin\frac{\pi x}{2}=\sin\frac{\pi x}{2}$. 由此知 $y=e^{-\frac{1}{4}x}\sin\frac{\pi x}{2}$ 与 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$ 在 x 轴上交于相同点.

(3) 当 $\sin\frac{\pi x}{2}=\pm1$ 时, 即当 $\sin\frac{\pi x}{2}$ 取最大(小)值时, 所求曲线与界限曲线相切.

列表、描点，即得所求曲线(如图).

180. **依据下列条件确定点 $M(x, y)$ 的位置:**

(1) $x^2+y^2=0$; (2) $x^2-y^2=0$; (3) $x=|y|$; (4) $y=\frac{|x|}{x}$.

[解] 由(1)得 $x=0$ 且 $y=0$, 点 M 即原点(0, 0).

由(2)得 $(x+y)(x-y)=0$, 即 $x+y=0$ 或 $x-y=0$. 或由 $x^2-y^2=0$ 得 $|x|=|y|$. 点 M 在两坐标轴夹角的平分线上.

由(3)得 $x=|y|$ 且 $x\geqslant0$, 点 M 在第一、四象限的平分线上.

由(4)得 $y=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1 & (x>0)\\ -1 & (x<0).\end{cases}$ 点 M 的位置如图(4).

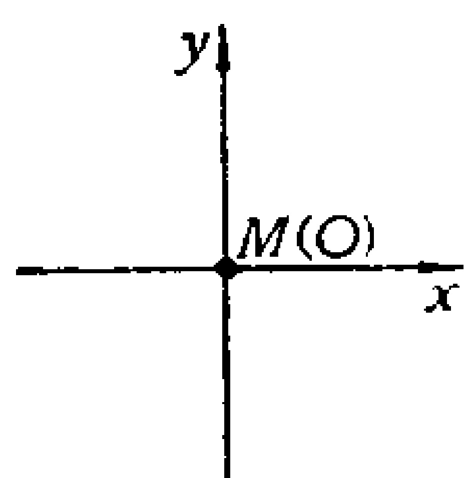


图 (1)

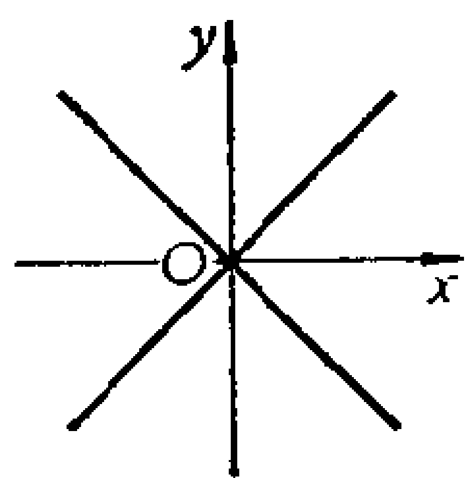


图 (2)

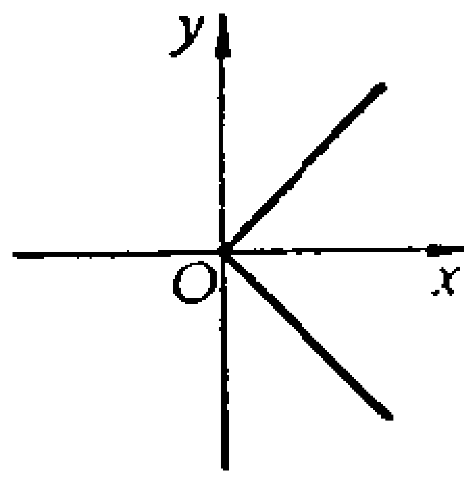


图 (3)

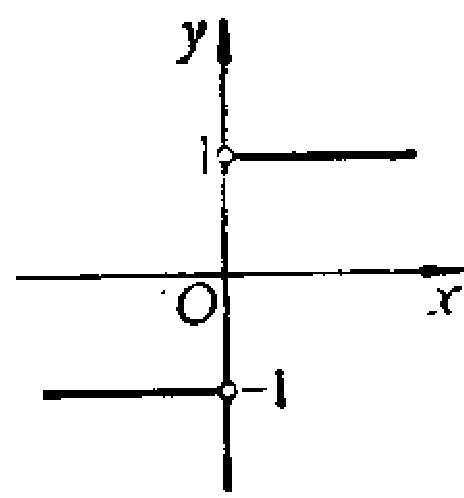


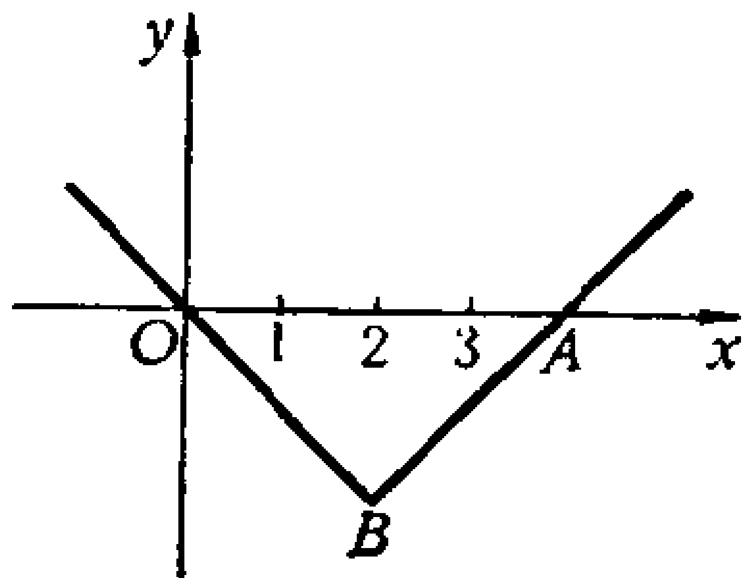
图 (4)

181. **作出 $y=|x-2|-2$ 的图象，并求它与 x 轴所围成的三角形面积.**

[解]
$$y=|x-2|-2=\begin{cases}x-2-2 & (x\geqslant2)\\ 2-x-2 & (x<2),\end{cases}$$

即
$$y=|x-2|-2=\begin{cases}x-4 & (x\geqslant2)\\ -x & (x<2).\end{cases}$$

x	2	3	1	…
y	−2	−1	−1	…



列表作图. 由图可知:

$y=|x-2|-2$ 的图象为一折线. 易得它的顶点为 $B(2, -2)$, 与 $y=0$ 有两个交点 $O(0, 0)$ 与 $A(4, 0)$.

$\therefore y=|x-2|-2$ 的图象与 x 轴所围成的三角形面积

$$S_{\triangle OBA}=\frac{1}{2}OA|y_B|=4(\text{面积单位}).$$

182. 作方程 $x^2+y^2-9+|x^2+y^2-9|=0$ 的图象.

[解] 设 $x^2+y^2-9=\alpha$ (实数), 原方程即 $\alpha+|\alpha|=0$,

$|\alpha|=-\alpha$, $\therefore$ $\alpha\leqslant 0$, 即 $x^2+y^2-9\leqslant 0$, 亦即 $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 3$.

$\therefore$ 点 $P(x, y)$ 到原点的距离不大于 3.

图象为以原点为圆心、半径为 3 的圆内部分(包括边界).

183. 描下列方程的图象: (1) $|\sin\pi x|+|\mathrm{tg}\,\pi y|=0$;

(2) $|y|=-x+2$; (3) $|y|=\sin x$; (4) $y=||x|-1|$;

$$(5)\ y=\frac{|1-x^2|}{1+|x|}.$$

[解] (1) $\because$ $|\sin\pi x|\geqslant 0$, $|\mathrm{tg}\,\pi y|\geqslant 0$, 而 $|\sin\pi x|+|\mathrm{tg}\,\pi y|=0$

$\therefore \begin{cases}\sin\pi x=0\\ \mathrm{tg}\,\pi y=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\pi x=m\pi\\ \pi y=n\pi,\end{cases}$ 亦即 $\begin{cases}x=m\\ y=n\end{cases}$ $(m、n\in J)$.

$\therefore$ 方程 $|\sin\pi x|+|\mathrm{tg}\,\pi y|=0$ 的图象为直角坐标平面内格点(坐标为整数的点)的全体.

(2) $|y|=-x+2\geqslant 0$, $\therefore x\leqslant 2$, $y=\begin{cases}-x+2\\ x-2,\end{cases}$ $x\in(-\infty, 2]$.

(3) $|y|=\sin x\geqslant 0$, $\therefore x\in[2n\pi, (2n+1)\pi]$ $(n\in J)$,

$$y=\begin{cases}\sin x\\ -\sin x\end{cases}\quad x\in[2n\pi, (2n+1)\pi].$$

$$(4)\ y=||x|-1|=\begin{cases}-x-1 & x\in(-\infty, -1]\\ x+1 & x\in[-1, 0]\\ 1-x & x\in[0, 1]\\ x-1 & x\in[1, +\infty).\end{cases}$$

(5) $y=\dfrac{|1-x^2|}{1+|x|}$, 当 $x\in(-\infty, -1]$ 时, $y=\dfrac{x^2-1}{1-x}=-x-1$;

当 $x\in[-1, 0]$ 时, $y=\dfrac{1-x^2}{1-x}=1+x$; 当 $x\in[0, 1]$ 时, $y=\dfrac{1-x^2}{1+x}=1-x$;

当 $x\in[1, +\infty)$ 时, $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}=x-1$.

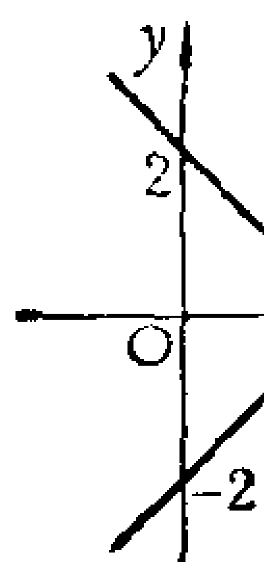
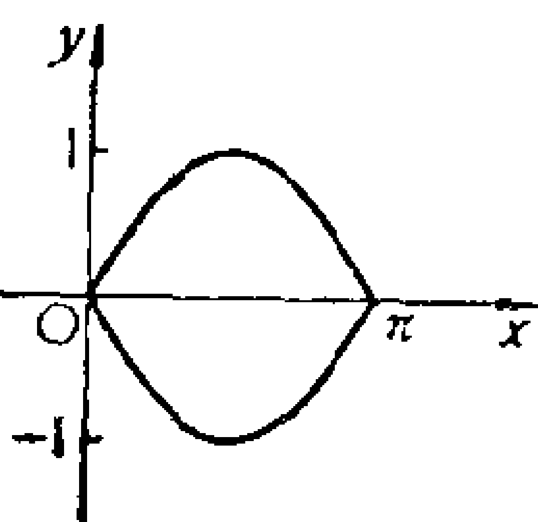


图 (2)



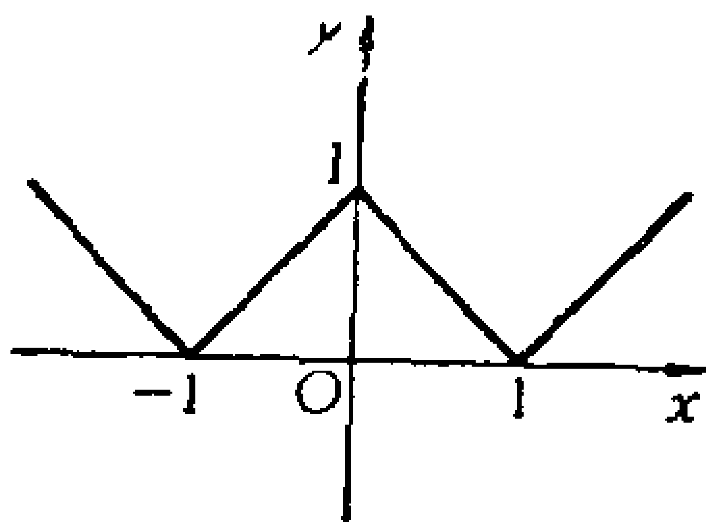


图 (3)

图 (4)　图 (5)

184. 作出下列方程的图象：(1)$y=[x]$；(2) $y=x-[x]$，其中$[x]$表示不超过x的最大整数.

[解]　(1) 当$n\leqslant x<n+1(n\in J)$时，$[x]=n$. ∴当 $x\in[-2, -1)$时，$y=-2$; $x\in[-1, 0)$时，$y=-1$; $x\in[0, 1)$时，$y=0$; $x\in[1, 2)$时，$y=1$; $x\in[2, 3)$时，$y=2$, …….

(2) 当$n\leqslant x<n+1(n\in J)$时，$y=x-[x]=x-n$. 故图象为斜率为1的一组平行线段，见图(2).

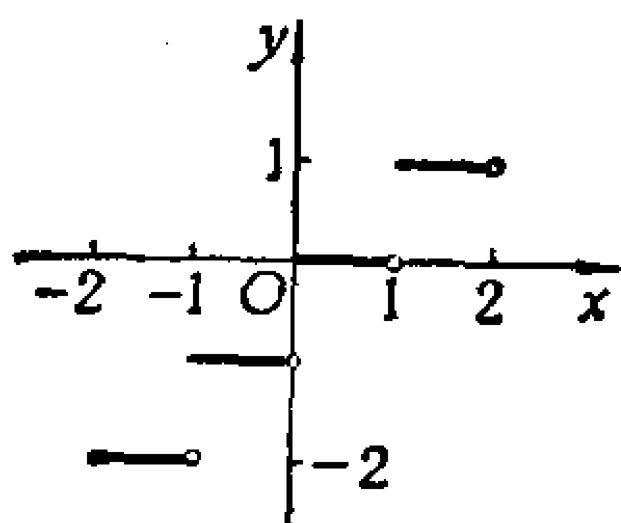


图 (1)

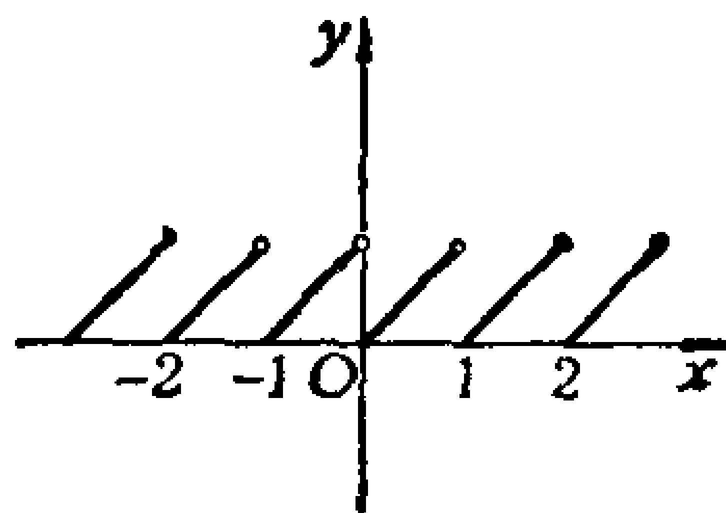


图 (2)

§3. 两曲线的交点与曲线系

185. 求下列两曲线的交点坐标：

(1) $\begin{cases}\dfrac{x}{a}\cos\alpha+\dfrac{y}{b}\sin\alpha=1\\ \dfrac{x}{a}\cos\beta+\dfrac{y}{b}\sin\beta=1\end{cases}$ $(\alpha-\beta\neq n\pi,\ n\in J)$；

(2) $\begin{cases}x-2t_1y+2pt_1^2=0\\ x-2t_2y+2pt_2^2=0\end{cases}$ $(t_1\neq t_2)$；

(3) $\begin{cases} t_1t_2x-y=ct_1t_2t_3-\dfrac{c}{t_3} \\ t_2t_3x-y=ct_1t_2t_3-\dfrac{c}{t_1}; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 2x^2-xy+3y^2=9 \\ 3x^2+2xy+2y^2=18. \end{cases}$

[解] (1) 解方程组得:

$$\frac{x}{a}=\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}, \quad \frac{y}{b}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

$\therefore$ 交点坐标为$\left(\dfrac{a\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}, \dfrac{b\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}\right)$.

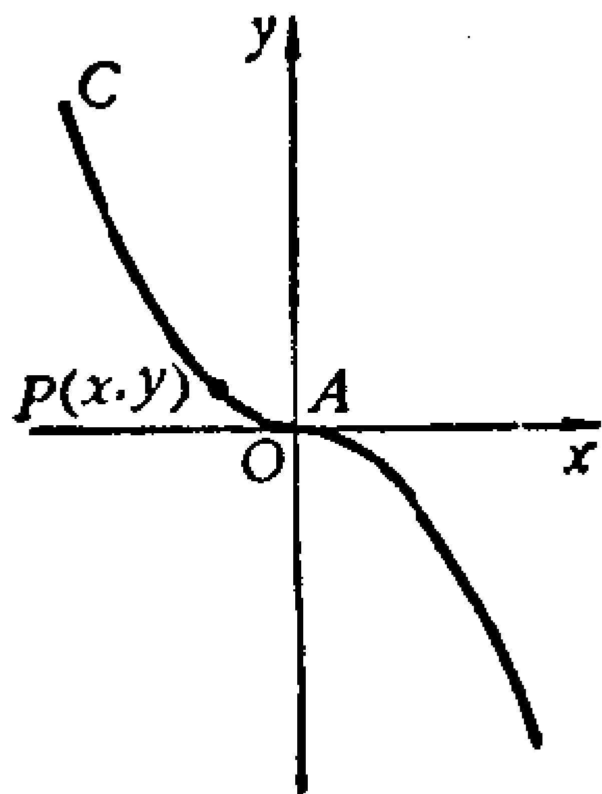
(2) 解方程组得交点坐标为$(2pt_1t_2, p(t_1+t_2))$.

(3) 从两曲线方程可得 $t_1t_2\left(x+\dfrac{c}{t_1t_2t_3}\right)=y+ct_1t_2t_3$ 和 $t_2t_3\left(x+\dfrac{c}{t_1t_2t_3}\right)=y+ct_1t_2t_3$. $\therefore$ 交点坐标为$\left(-\dfrac{c}{t_1t_2t_3}, -ct_1t_2t_3\right)$.

(4) 解方程组: $2(2x^2-xy+3y^2)-(3x^2+2xy+2y^2)=0$, $x^2-4xy+4y^2=0$, $\therefore (x-2y)^2=0$, $x=2y$. 代入第一个方程: $8y^2-2y^2+3y^2=9$, 即 $y^2=1$, $\therefore y=\pm1$. $\therefore$ 交点坐标为$(2, 1)$和$(-2, -1)$, 另两个交点分别与此两点重合.

186. 若以原点O、定点$A\left(0, \dfrac{3}{8}\right)$及曲线$C$: $y=-x|x|$上的点P为顶点的三角形是等腰三角形,求点P的坐标.

[分析] 等腰三角形OAP的一边OA固定后,点P满足的条件有三种可能: (1) $|PA|=|AO|$; (2) $|PO|=|AO|$; (3) $|PA|=|PO|$.



[解] 设点P坐标为(x, y), 显然$x\neq0$.

(1) 以PO为等腰三角形的底.

$$\because \quad |AP|=|AO|,$$

$$\therefore \quad x^2+\left(y-\frac{3}{8}\right)^2=\left(\frac{3}{8}\right)^2 \cdots ①.$$

又点P在曲线C上, $\therefore y=-x|x| \cdots ②$.

由②得$\begin{cases}x>0\\y=-x^2\end{cases}$及$\begin{cases}x<0\\y=x^2,\end{cases}$ 由①得$x^2+y^2-\frac{3}{4}y=0$…③. 将③式和前两式分别联立，得

$$\begin{cases}x>0\\y=-x^2\\x^2+y^2-\frac{3}{4}y=0\end{cases}\cdots④ \text{ 和 } \begin{cases}x<0\\y=x^2\\x^2+y^2-\frac{3}{4}y=0\end{cases}\cdots⑤.$$

④式和⑤式均无解.

(2) 以PA为等腰三角形的底. ∵ $|PO|=|AO|$, ∴ $x^2+y^2=\frac{9}{64}$…⑥. 又点P在曲线C上，将由②式得出的两方程组分别和⑥式联立，得

$$\begin{cases}x^2+y^2=\frac{9}{64}\\y=-x^2\\x>0\end{cases}\cdots⑦ \text{ 和 } \begin{cases}x^2+y^2=\frac{9}{64}\\y=x^2\\x<0\end{cases}\cdots⑧.$$

解⑦得$x=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $y=-\frac{1}{8}$；解⑧得$x=-\frac{\sqrt{2}}{4}$, $y=\frac{1}{8}$. ∴点P的坐标为$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{8}\right)$和$\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{8}\right)$.

(3) 以AO为等腰三角形的底. ∵ $|AP|=|OP|$, ∴ $x^2+y^2=x^2+\left(y-\frac{3}{8}\right)^2$. 由此得$y=\frac{3}{16}$. 又点$P$在曲线$C$上，将$y=\frac{3}{16}$代入②，得$x=-\frac{\sqrt{3}}{4}$. ∴点$P$的坐标为$\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{16}\right)$.

187. 设两曲线C_1: $Ax+By+C=0$, C_2: $\begin{cases}x=\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$ $\theta\in[0, \pi)$的两交点为P、Q，原点为O. 如果$\angle xOP=\alpha$, $\angle xOQ=\beta$, 求$\sin(\alpha+\beta)$与$\cos(\alpha+\beta)$的值$\left(\alpha\neq\beta, \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\neq\frac{\pi}{2}\right)$.

[分析] ∵ 两交点P、Q在曲线C_2上，而曲线C_2上的点到原点的距离平方为$x^2+y^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$, ∴ $|OQ|=|OP|=1$. 而$\angle xOP=\alpha$, $\angle xOQ=\beta$, 因此可得P、Q的坐标. 利用P、Q在曲线C_1上的条件，可求$\sin(\alpha+\beta)$、$\cos(\alpha+\beta)$的值.

〔解一〕 $\because \angle xOP=\alpha$, $\angle xOQ=\beta$, P、Q 在曲线 C_2 上，且 C_2 上的点到原点 O 的距离为 $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=1$. $\therefore P$、Q 的坐标分别为 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$、$(\cos\beta, \sin\beta)$. $\because P$、Q 也在曲线 C_1 上，$\therefore A\cos\alpha+B\sin\alpha+C=0\cdots$①，$A\cos\beta+B\sin\beta+C=0\cdots$②. ①－②，并变形得

$$2A\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)+2B\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=0.$$

$$\because \alpha、\beta\in[0, \pi), \text{且 } \alpha\neq\beta, \quad \therefore A\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=B\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

$$\because \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\neq\frac{\pi}{2}, \quad \therefore \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{B}{A}.$$

$$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}=\frac{2AB}{A^2+B^2}.$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}=\frac{A^2-B^2}{A^2+B^2}.$$

〔解二〕 从〔解一〕可知 $A\cos\alpha+B\sin\alpha+C=0$, $A\cos\beta+B\sin\beta+C=0$. $\therefore \alpha$、β 是方程 $A\cos\theta+B\sin\theta+C=0$ 的根. 因而 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$、$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ 是方程 $A\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}+B\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}+C=0$ 的两根，

即
$$(C-A)\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}+2B\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+C+A=0.$$

$$\therefore \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=-\frac{2B}{C-A}, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{C+A}{C-A},$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}=\frac{-\frac{2B}{C-A}}{1-\frac{C+A}{C-A}}=\frac{B}{A}.$$

余同〔解一〕.

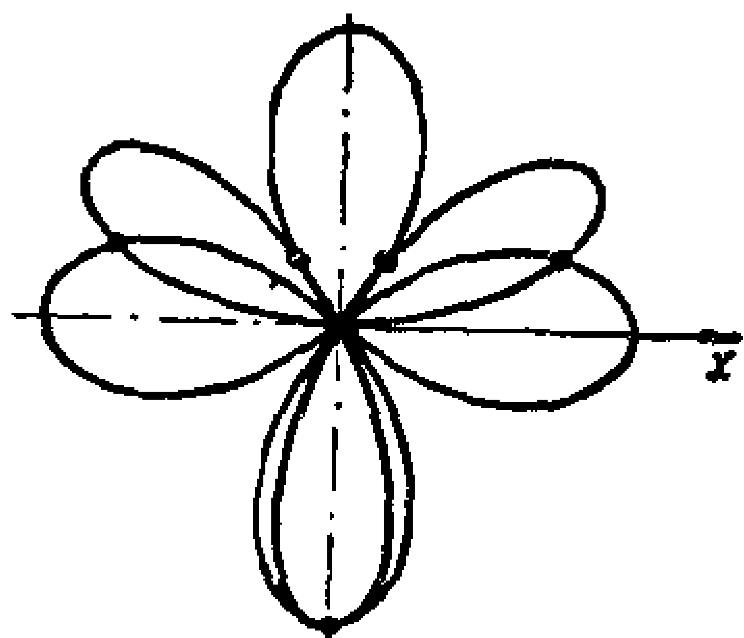
188. 求两曲线 $\rho=3\cos\theta$, $\rho=1+\cos\theta$ 的交点坐标.

［解］ 由$\begin{cases}\rho=3\cos\theta\cdots①\\ \rho=1+\cos\theta\cdots②\end{cases}$ 消去ρ，得$3\cos\theta=1+\cos\theta$，

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{1}{2}.\quad\therefore\quad \theta_1=\frac{\pi}{3},\ \theta_2=\frac{5\pi}{3}.$$

把θ的值代回方程组，得$\rho_1=\frac{3}{2}$，$\rho_2=\frac{3}{2}$. $\therefore$交点的极坐标是$\left(\frac{3}{2},\ \frac{\pi}{3}\right)$，$\left(\frac{3}{2},\ \frac{5\pi}{3}\right)$. 又以$\theta=\frac{\pi}{2}$代入①：$\rho=0$；以$\theta=\pi$代入②：$\rho=0$. 而点$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$、$(0,\ \pi)$都表示极点，故极点也是此两曲线的交点.

189. 已知两曲线的极坐标方程为$\rho=\sin 3\theta$，$\rho=\cos 2\theta$. 求它们交点的极坐标$(0\leqslant\theta<2\pi)$.



［解］ 解方程组$\begin{cases}\rho=\sin 3\theta\cdots①\\ \rho=\cos 2\theta\cdots②.\end{cases}$ 从①、②式中消去ρ，得$\sin 3\theta=\cos 2\theta$，$\cos\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right)=\cos 2\theta$.

$\therefore 2\theta=2k\pi+\frac{\pi}{2}-3\theta$ 和 $2\theta=2k\pi-\frac{\pi}{2}+3\theta$

$(k\in J)$. 即$\theta=\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{10}$和$\theta=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in J)$. $\because 0\leqslant\theta<2\pi$，

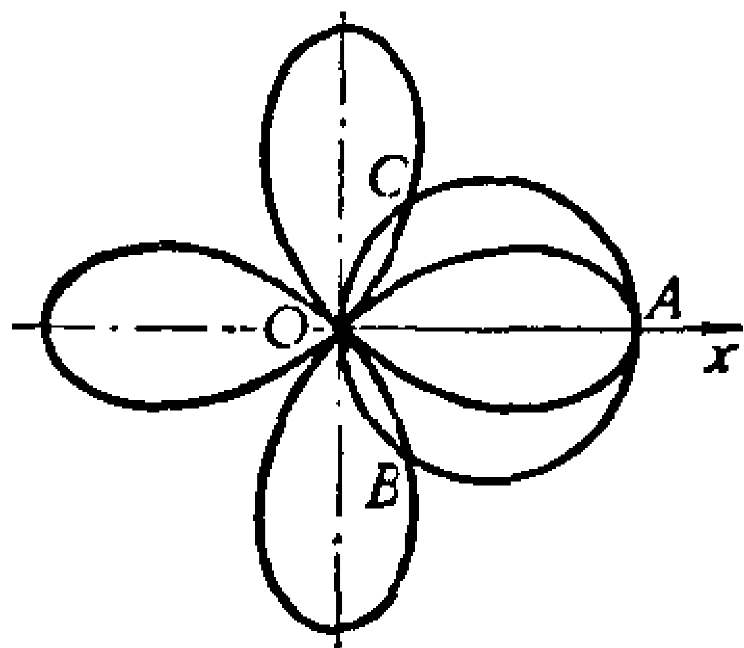
$$\therefore\quad 0\leqslant\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{10}<2\pi,\ -\frac{\pi}{10}\leqslant\frac{2k\pi}{5}<\frac{19}{10}\pi,\ -\frac{1}{4}\leqslant k<\frac{19}{4}.$$

当k取0, 1, 2, 3, 4时，θ分别为$\theta_1=\frac{\pi}{10}$，$\theta_2=\frac{\pi}{2}$，$\theta_3=\frac{9}{10}\pi$，$\theta_4=\frac{13\pi}{10}$，$\theta_5=\frac{17}{10}\pi$. 同理，$0\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}<2\pi$，$-\frac{\pi}{2}\leqslant 2k\pi<\frac{3\pi}{2}$，$-\frac{1}{4}\leqslant k<\frac{3}{4}$. $\therefore k=0$，$\theta=\frac{\pi}{2}$，包括在上面的解中. 把θ的值代入原方程组求出相应的ρ值：$\rho_1=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$，$\rho_2=-1$，$\rho_3=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$，$\rho_4=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$，$\rho_5=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$.

$\therefore$交点坐标为$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4},\ \frac{\pi}{10}\right)$、$\left(-1,\ \frac{\pi}{2}\right)$、$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4},\ \frac{9\pi}{10}\right)$、$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4},\ \frac{13\pi}{10}\right)$、$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4},\ \frac{17\pi}{10}\right)$. 另外，由于$\left(0,\ \frac{k\pi}{3}\right)$与$\left(0,\ \frac{2k+1}{4}\pi\right)$分别满足方程①与②，且它们都表示极点. $\therefore$极点$(0,\ \theta)$也是此两曲线的交点.

[说明] 由于点的极坐标不是唯一的,所以通过解极坐标方程组来求两曲线的交点时,要注意有无重复和遗漏. 在极点的交点往往不能求得,需根据极点表示的特殊性,即$(0, \theta_1)$与$(0, \theta_2)$都表示同一极点来补足.

190. 试求曲线 $\rho=6\cos 2\theta$ 与 $\rho=6\cos\theta$ 的交点.



[解] 由 $\begin{cases}\rho=6\cos 2\theta\\ \rho=6\cos\theta\end{cases}$ 得 $\cos 2\theta=\cos\theta$,

$\therefore 2\theta=2n\pi\pm\theta\ (n\in J)$. 解得 $\theta=\frac{2n\pi}{3}$. 若 $k\in J$, 当 $n=3k$ 时, $\theta=2k\pi$, $\rho=6\cos 2k\pi=6$, 得交点 $A(6, 2k\pi)$; 当 $n=3k+1$ 时, $\theta=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$, $\rho=6\cos\left(2k\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=-3$, 得交点 $B\left(-3, 2k\pi+\frac{2\pi}{3}\right)$; 当 $n=3k+2$ 时, $\theta=2k\pi+\frac{4\pi}{3}$, $\rho=6\cos\left(2k\pi+\frac{4\pi}{3}\right)=-3$, 得交点 $C\left(-3, 2k\pi+\frac{4\pi}{3}\right)$. $\because \left(0, \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ 在四叶玫瑰线上, $\left(0, n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 在圆上,而 $\left(0, \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ 与 $\left(0, n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 均表示极点, $\therefore$ 极点 O 也是交点.

191. 求两曲线 $\rho=1+\cos\theta$, $\rho=\frac{1}{2(1-\cos\theta)}$ 的交点坐标.

[解] 由 $\begin{cases}\rho=1+\cos\theta\\ \rho=\frac{1}{2(1-\cos\theta)}\end{cases}$ 得

$1+\cos\theta=\frac{1}{2(1-\cos\theta)}$, $2(1-\cos^2\theta)=1$, $\sin^2\theta=\frac{1}{2}$, $\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\therefore\quad \theta_1=\frac{\pi}{4},\ \theta_2=\frac{3\pi}{4},\ \theta_3=\frac{5\pi}{4},\ \theta_4=\frac{7\pi}{4}.$$

分别代回原方程组求出相应的 ρ:

$$\rho_1=1+\frac{\sqrt{2}}{2},\ \rho_2=1-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \rho_3=1-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \rho_4=1+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\therefore$ 交点坐标为 $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}、\frac{\pi}{4}\right)$、$\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$、$\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$、

$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{7\pi}{4}\right)$.

［说明］ 因为点与其极坐标并非一一对应，故通过极坐标方程求两曲线的交点比较麻烦．第188—191题的解法只适用于类似的问题．

192．$P_1(\rho_1,\ \theta_1)$、$P_2(\rho_2,\ \theta_2)$为曲线

$$\ln\rho=a\theta\quad(2k\pi\leqslant\theta<(2k+2)\pi,\ k\in J)$$

上任意两点，直线$\theta=\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)$与曲线的交点$P$的极径是$\rho$．求证：$\rho^2=\rho_1\cdot\rho_2$．

［证］ ∵ 点P_1、P_2在曲线$\ln\rho=a\theta$上，∴ $\ln\rho_1=a\theta_1$，即$\rho_1=e^{a\theta_1}$；$\ln\rho_2=a\theta_2$，即$\rho_2=e^{a\theta_2}$． ∴ $\rho_1\cdot\rho_2=e^{a(\theta_1+\theta_2)}$．点$P$是直线$\theta=\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)$与曲线$\ln\rho=a\theta$的交点． ∴ $\ln\rho=\frac{a}{2}(\theta_1+\theta_2)$，即$\rho=e^{\frac{a}{2}(\theta_1+\theta_2)}$， $\rho^2=e^{a(\theta_1+\theta_2)}$．

$$\therefore\quad \rho^2=\rho_1\cdot\rho_2.$$

193．求证：无论m取何值，曲线$mx^2+2x-(m-1)y-m-2=0$总通过定点．

［分析］ 由于曲线方程含有参数，且参数的次数不超过一次，故可化为过两定曲线交点的曲线系方程，两定曲线的交点即原曲线系所过的定点．如果将原方程看作关于参数的多项式，利用多项式恒等定理，也可得解．

［解一］ 将原方程整理成过两曲线交点的曲线系方程，即$2x+y-2+m(x^2-y-1)=0$．由$\begin{cases}2x+y-2=0\\x^2-y-1=0\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1\\y=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3\\y=8.\end{cases}$ ∴ 曲线总通过定点$(1,\ 0)$和$(-3,\ 8)$．

［解二］ 设有定点坐标$(x_0,\ y_0)$总满足方程，则$mx_0^2+2x_0-(m-1)y_0-m-2=0$恒成立，即$(2x_0+y_0-2)+m(x_0^2-y_0-1)=0$． 此式是关于$m$的恒等式，故多项式系数为零，即$\begin{cases}2x_0+y_0-2=0\\x_0^2-y_0-1=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x_0=1\\y_0=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x_0=-3\\y_0=8.\end{cases}$

［说明］ 关于恒过定点的曲线系问题都可用上述两种方法解，其中利用多项式恒等定理的方法可广泛应用于定值问题．

194．设a为非零实数． (1) 试证曲线$y=ax^2+(3a-1)x-$

$(10a+3)$ 恒与 x 轴相交于两个不同的点；(2) 证明上述抛物线恒过另外两定点，并求定点的坐标.

[分析] (1) 要证曲线恒与 x 轴相交于两个不同的点，只要证 $ax^2+(3a-1)x-(10a+3)=0$ 恒有两不同实数根；(2) 同上题.

[证] (1) 方程 $ax^2+(3a-1)x-(10a+3)=0$ 的判别式

$$\Delta=(3a-1)^2+4a(10a+3)=(3a+1)^2+40a^2>0,$$

故方程恒有两不等实数根，即曲线与 x 轴交于不同的两点.

(2) 将方程按字母 a 整理得 $(x^2+3x-10)a-(x+y+3)=0$，对于任意非零实数 a 恒成立，$\therefore \begin{cases} x^2+3x-10=0 \\ x+y+3=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=-5 \\ y=2 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=2 \\ y=-5. \end{cases}$

$\therefore$ 抛物线恒过 $(-5, 2)$ 和 $(2, -5)$ 两个定点.

195. 求证：两曲线 $x^2-y^2=a^2$ 和 $x^2+3y^2=b^2+1$ 若有四个交点，则四个交点共圆.

[证] $\because x^2-y^2=a^2$, $x^2+3y^2=b^2+1$, $\therefore 4y^2=b^2+1-a^2$. 当 $b^2+1>a^2$ 时必有四个交点，$x^2-y^2-a^2+\lambda(x^2+3y^2-b^2-1)=0$ 是过两曲线的四个交点的二次曲线系. 令 $\lambda=1$，有 $x^2+y^2=\left(\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+1}{2}}\right)^2$，即表示曲线上的点到原点等距离，故这四个交点共圆.

196. 已知曲线 C：$y=(3-k)\sin x-\dfrac{k}{2}\cos 2x-\dfrac{3k}{2}+6$，$x\in[0, 2\pi)$. (1) 如果曲线 C 与 x 轴有四个不同的交点，求 k 的取值范围；(2) 求证：当 x 在上述范围内变化时，曲线 C 必过一定点.

[分析] 若曲线 C 和 x 轴有四个不同的交点，则曲线 C 的方程在 $y=0$ 时应有四个不同的解. 为此可将方程的右端化成关于 $\sin x$ 的二次式，再求对应的二次方程有绝对值小于 1 的两不等实根的条件.

[解] (1) 令 $y=(3-k)\sin x-\dfrac{k}{2}\cos 2x-\dfrac{3}{2}k+6=k\sin^2 x-(k-3)\cdot\sin x-2k+6=f(\sin x)$，$x\in[0, 2\pi)$. $\because$ 曲线 C 与 x 轴有四个不同的交点，$\therefore$ 在 $(-1, 1)$ 内，$\sin x$ 的二次方程 $f(\sin x)=0$ 有两个不同的实根.

$$\therefore \begin{cases} \Delta=(k-3)^2-4k(-2k+6)>0 & \cdots① \\ kf(1)>0 & \cdots② \\ kf(-1)>0 & \cdots③ \\ \left|\dfrac{k-3}{2k}\right|<1 & \cdots④. \end{cases}$$

由①得 $9k^2-30k+9>0$, $\therefore k\in\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)\cup(3,+\infty)$. 由②与③:

$\because$ $f(-1)=3>0$, $\therefore$ $k>0$; $f(1)=-2k+9>0$, $\therefore$ $k\in\left(0,\ \dfrac{9}{2}\right)$.

由④得 $k\in(-\infty,\ -3)\cup(1,\ +\infty)$. 故此不等式组的解为 $k\in\left(3,\ \dfrac{9}{2}\right)$.

(2) 由曲线 C 的方程得 $(3\sin x+6-y)+k(\sin^2 x-\sin x-2)=0$, 故曲线 C 过曲线: $y=3\sin x+6\cdots①$和曲线: $\sin^2 x-\sin x-2=0\cdots②$ 的交点. 由②得 $(\sin x-2)(\sin x+1)=0$. $\therefore \sin x=2$(无解), 或 $\sin x=-1\cdots③$. $\because x\in[0,\ 2\pi)$, $\therefore x=\dfrac{3}{2}\pi$. ③代入①, 得 $y=3$. 故在 $x\in[0,\ 2\pi)$时, 曲线 C 必过一定点, 其坐标为$\left(\dfrac{3}{2}\pi,\ 3\right)$.

[说明] 本题(1)的解法依据是: 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的两个相异零点均在区间$(d_1,\ d_2)$内的充要条件为下列不等式:

$$\Delta=b^2-4ac>0,\quad af(d_1)>0,\quad af(d_2)>0,\quad d_1<-\frac{b}{2a}<d_2$$

同时成立. 证明从略.

第三章　直　　线

1．定理：直线的方程为一次方程

$$Ax+By+C=0 \quad (A^2+B^2\neq 0).$$

逆定理：一次方程 $Ax+By+C=0$ $(A^2+B^2\neq 0)$ 的图象为直线．当 $B\neq 0$ 时，此直线的斜率为 $-\dfrac{A}{B}$．当 $B=0$ 时，$Ax+C=0$ 为平行于 y 轴的直线．

2．直线方程

设 a、b 分别为直线在 x 轴、y 轴上的截距；k 为直线的斜率，θ 为直线的倾角，直线的法线（过原点 O 的）为 $\overrightarrow{ON}$，$\alpha=(\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{ON})$；$p$ 为原点 O 到直线的距离；$P_1(x_1,\ y_1)$、$P_2(x_2,\ y_2)$ 为已知点；t 为参数，其意义为直线上已知点 P_1 到直线上任意一点 P 的有向线段 P_1P 的数量（规定直线向上或向右的方向为它的正方向）．

(1) 斜截式：
$$y=kx+b. \tag{3.21}$$

(2) 点斜式：
$$y-y_1=k(x-x_1). \tag{3.22}$$

(3) 两点式：
$$(y_2-y_1)(x-x_1)=(x_2-x_1)(y-y_1). \tag{3.23}$$

(4) 截距式：
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \quad (ab\neq 0). \tag{3.24}$$

(5) 法线式：
$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p. \tag{3.25}$$

(6) 参数式：
$$\begin{cases} x=x_1+t\cos\theta \\ y=y_1+t\sin\theta, \end{cases} \quad t\in(-\infty,\ +\infty). \tag{3.26}$$

3. 直线一般式 $Ax+By+C=0$ $(A^2+B^2\neq 0)$ 的法线式:

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0.$$

根号前正负号的取法:当 $C\neq 0$ 时,与 C 异号;当 $C=0$, $B\neq 0$ 时,与 B 同号;当 $B=C=0$ 时,与 A 同号.

4. 直线 $Ax+By+C=0$ 关于点 (x_1, y_1) 的离差:

$\delta=\dfrac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$(根号前正负号的取法与法线式相同).

离差正负的判定法则:

(1) 当 $C\neq 0$ 时,点 (x_1, y_1) 与原点在直线同侧,则 $\delta<0$;异侧,则 $\delta>0$.

(2) 当 $C=0$ 时,点 (x_1, y_1) 与点 $(0, -1)$ 在直线同侧,则 $\delta<0$;异侧,则 $\delta>0$.

(3) 当 $B=C=0$,点 (x_1, y_1) 在直线右侧,则 $\delta>0$;左侧,则 $\delta<0$.

5. 点 (x_1, y_1) 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离:

$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|. \tag{3.50}$$

6. 直线系

(1) 过定点 (x_1, y_1) 的直线系:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0 \quad (A^2+B^2\neq 0). \tag{3.61}$$

(2) 平行于直线 $Ax+By+C=0$ 的直线系(以下 λ 均为任意常数):

$$Ax+By=\lambda. \tag{3.62}$$

(3) 垂直于直线 $Ax+By+C=0$ 的直线系:

$$Bx-Ay=\lambda. \tag{3.63}$$

(4) 过两已知直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ 的交点的直线系:

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0. \tag{3.64}$$

(其中不包括直线 $A_2x+B_2y+C_2=0$)

7. 两直线 l_1: $A_1x+B_1y+C_1=0$, l_2: $A_2x+B_2y+C_2=0$ 的位置关系

(1) 平行的充要条件:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2} \quad 或 \quad A_1B_2-A_2B_1=0,\ A_1C_2-A_2C_1\neq0. \tag{3.71}$$

(2) 垂直的充要条件: $A_1A_2+B_1B_2=0.$ (3.72)

(3) 重合的充要条件:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \quad 或 \quad A_1=\lambda A_2,\ B_1=\lambda B_2,\ C_1=\lambda C_2(\lambda\neq0). \tag{3.73}$$

(4) 交角:

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}\ (A_1A_2+B_1B_2\neq0). \tag{3.74}$$

两直线交角的三种定义: ① 直线 l_1 绕它和直线 l_2 的交点按逆时针方向旋转到与 l_2 重合, 所转过的最小角称为 l_1 和(到) l_2 的交角(夹角). ② 平面内相交两直线有互补的两个夹角, 都称为两直线的交角(夹角). ③ 规定定义 ② 中不大于直角的那一个角为两直线的交角. 本书采用第一种定义.

8. 互不平行的三直线 $A_ix+B_iy+C_i=0(i=1, 2, 3)$ 共点的充要条件:

(1)
$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0. \tag{3.81}$$

(2) 存在不全为零的实数 l、m、n, 使得

$$l(A_1x+B_1y+C_1)+m(A_2x+B_2y+C_2)$$

$$+n(A_3x+B_3y+C_3)\equiv 0. \quad (3.82)$$

9. 直线的极坐标方程

设 α 为过极点的直线与极轴的夹角，ω 为极轴与直线的法线的夹角；p 为极点到直线的距离；A、B 两已知点的坐标分别为 $A(\rho_1, \theta_1)$、$B(\rho_2, \theta_2)$.

(1) 过极点的直线： $\theta=\alpha$. (3.91)

(2) 法线式： $\rho\cos(\theta-\omega)=p$. (3.92)

(3) 过 A、B 两点的直线：

$$\frac{\sin(\theta_2-\theta_1)}{\rho}=\frac{\sin(\theta_2-\theta)}{\rho_1}+\frac{\sin(\theta-\theta_1)}{\rho_2}. \quad (3.93)$$

***10. 直线的斜坐标方程**

直线的两点式、截距式与直角坐标方程相同.

***11. 用二元二次齐次方程表示的直线**

(1) $Ax^2+Bxy+Cy^2=0 \quad (\Delta=B^2-4AC)$.

当 $\Delta>0$ 时，为过原点的两条直线；当 $\Delta=0$ 时，为过原点的两重合直线；当 $\Delta<0$ 时，轨迹为原点，或看作过原点的两虚直线(见第 254 题).

(2) 两直线 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ 的夹角(见第 255 题)：

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{B^2-4AC}}{A+C} \quad \text{或} \quad -\frac{\sqrt{B^2-4AC}}{A+C} \quad (A+C\neq 0). \quad (3.112)$$

(3) 两直线 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ 垂直的充要条件(见第 255 题)：

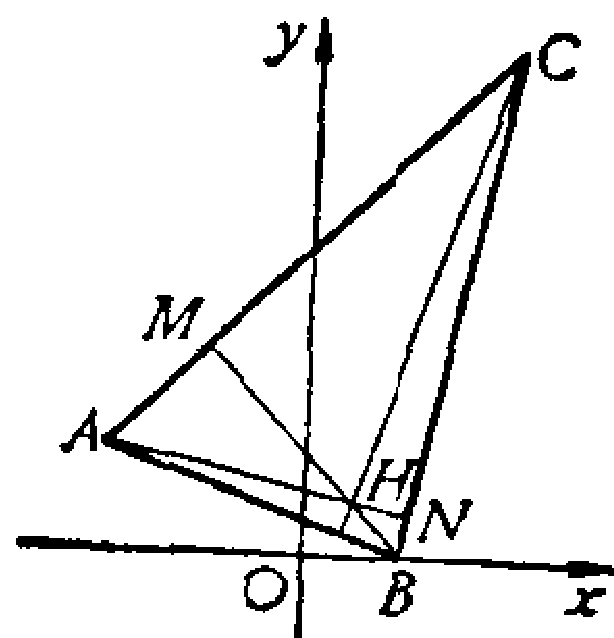
$$A+C=0. \quad (3.113)$$

***12.** 过原点以及直线 $lx+my+n=0\,(n\neq 0)$ 和曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 两交点的两直线方程(见第 257 题)：

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+(Dx+Ey)\left(-\frac{lx+my}{n}\right)$$
$$+F\left(-\frac{lx+my}{n}\right)^2=0. \qquad (3.120)$$

§1. 直线的方程

197. 在$\triangle ABC$中, 已知高AN和BM所在的直线方程分别为$x+5y-3=0$和$x+y-1=0$, 边AB所在的直线方程为$x+3y-1=0$. 求直线BC、CA以及AB边上的高所在的直线方程.



[分析] 直线BC的斜率可由AN的方程而得, 而点B又是两已知直线AB和BM的交点, 故直线BC的方程可用点斜式求出. 同理可得AC和AB边上高所在的直线方程.

[解] $\because BC\perp AN$, 且直线AN的斜率为$-\frac{1}{5}$, $\therefore BC$的斜率$k_{BC}=5$. 又解方程组$\begin{cases}x+y-1=0\\x+3y-1=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=1\\y=0.\end{cases}$ 故直线BC的方程为$y=5(x-1)$, 即$5x-y-5=0$. 同理, CA的斜率$k_{CA}=1$, AB边上的高所在的直线CH的斜率$k_{CH}=3$. 又解方程组$\begin{cases}x+5y-3=0\\x+3y-1=0\end{cases}$ 和$\begin{cases}x+5y-3=0\\x+y-1=0,\end{cases}$ 分别得点A的坐标为$(-2, 1)$、垂心H的坐标为$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. 故直线$CA$及$AB$边上的高所在的直线分别为$y-1=(x+2)$和$y-\frac{1}{2}=3\left(x-\frac{1}{2}\right)$,即$x-y+3=0$和$3x-y-1=0$.

[说明] 欲求一直线方程, 一般可先考虑能否从已知条件中求得该直线上某两点的坐标, 或一点与此直线的斜率, 或直线的两截距等两个互相独

立的条件．至于在解具体问题时，需视题意决定应求哪两个条件，如在本题中，则以求直线上的点和直线的斜率较易．

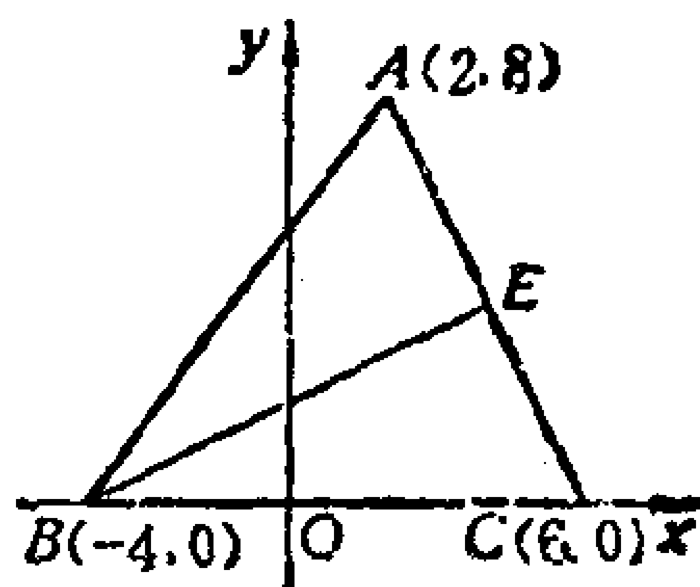
198．自原点向直线引垂线，垂足为 $A(a, b)$．试求此直线的方程（a、b 不全为零）．

［分析］ 所求直线过一已知点，且其斜率由过点 A 的垂线 OA 决定．由此即可得直线方程．

［解］ 当 $b\neq0$ 时，所求直线的斜率 $k=-\frac{a}{b}$，则其方程为 $y-b=-\frac{a}{b}(x-a)$，即 $ax+by-a^2-b^2=0$．当 $b=0$ 时，此直线垂直于 x 轴，其方程为 $x=a$，即上述方程的特例．

199．求顺次以 l_1: $x+y-2=0$, l_2: $x-y+6=0$, l_3: $x-3y+2=0$, l_4: $2x-y+3=0$ 为四边的四边形的对角线所在直线的方程．

［解］ 由 $\begin{cases}x+y-2=0\\x-y+6=0\end{cases}$ 解得直线 l_1、l_2 的交点为 $A(-2, 4)$．同理可得直线 l_2、l_3 的交点为 $B(-8, -2)$，直线 l_3、l_4 的交点为 $C\left(-\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$，直线 l_4、l_1 的交点为 $D\left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$．故对角线 AC 所在直线的方程为 $\frac{y-4}{4-\frac{1}{5}}=\frac{x+2}{-2+\frac{7}{5}}$，即 $19x+3y+26=0$；对角线 BD 所在直线的方程为 $\frac{y+2}{\frac{7}{3}+2}=\frac{x+8}{-\frac{1}{3}+8}$，即 $13x-23y+58=0$．



200．$\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A(2, 8)$、$B(-4, 0)$、$C(6, 0)$．求过 B 将 $\triangle ABC$ 的面积平分的直线方程．

［解］ 过 B 将 $\triangle ABC$ 的面积平分的直线即为 AC 边上的中线，$\because$ AC 的中点 E 的坐标为 $(4, 4)$，$\therefore$ 所求直线方程为

$$\frac{y-0}{4-0}=\frac{x+4}{4+4},$$

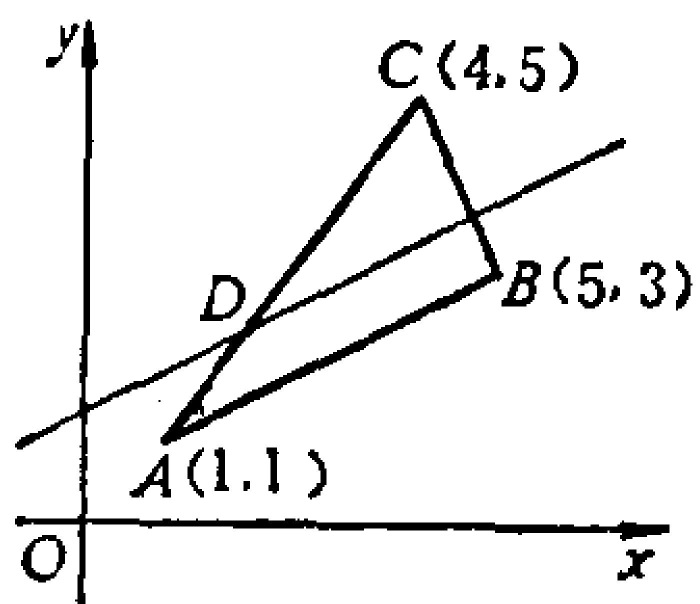
即 $$x-2y+4=0.$$

201. 已知平行四边形两边所在直线的方程为 $x+y+1=0$ 和 $3x-y+4=0$，对角线的交点为(3, 0)．求其它两边所在直线的方程．

[分析] 所求的直线为平行四边形其它两边所在直线，故其斜率可从已知直线的方程中求得．又平行四边形两对角线的交点即为对角线的中点，由此即可求得所求两边的交点坐标．

[解] 由$\begin{cases}x+y+1=0\\3x-y+4=0\end{cases}$解得平行四边形一顶点为$\left(-\frac{5}{4},\ \frac{1}{4}\right)$．设过这顶点的对角线另一端顶点坐标为$(x, y)$，利用中点公式：$\begin{cases}3=\dfrac{-\frac{5}{4}+x}{2}\\0=\dfrac{\frac{1}{4}+y}{2}\end{cases}$解得这顶点为$\left(\frac{29}{4},\ -\frac{1}{4}\right)$．故平行四边形另两边所在直线的方程为 $y+\frac{1}{4}=-1\cdot\left(x-\frac{29}{4}\right)$ 和 $y+\frac{1}{4}=3\left(x-\frac{29}{4}\right)$，即 $x+y-7=0$ 和 $3x-y-22=0$．

202. 已知三点：$A(1,\ 1)$、$B(5,\ 3)$、$C(4,\ 5)$，又直线 $l\parallel AB$，且 l 平分 $\triangle ABC$ 的面积．求直线 l 的方程．



[分析] 因所求直线与 AB 平行，且平分 $\triangle ABC$ 的面积，故截得的小三角形与原三角形相似，且对应边平方之比为 1:2．所以此直线与 AC 交点的坐标及斜率均可由三顶点的坐标求得．

[解] 设 l 交 AC 于 D，$\because \left(\frac{CD}{CA}\right)^2=\frac{1}{2}$，即 $\frac{CD}{CA}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\therefore \lambda=\frac{CD}{DA}=\frac{CD}{CA-CD}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$．由定比分点公式得

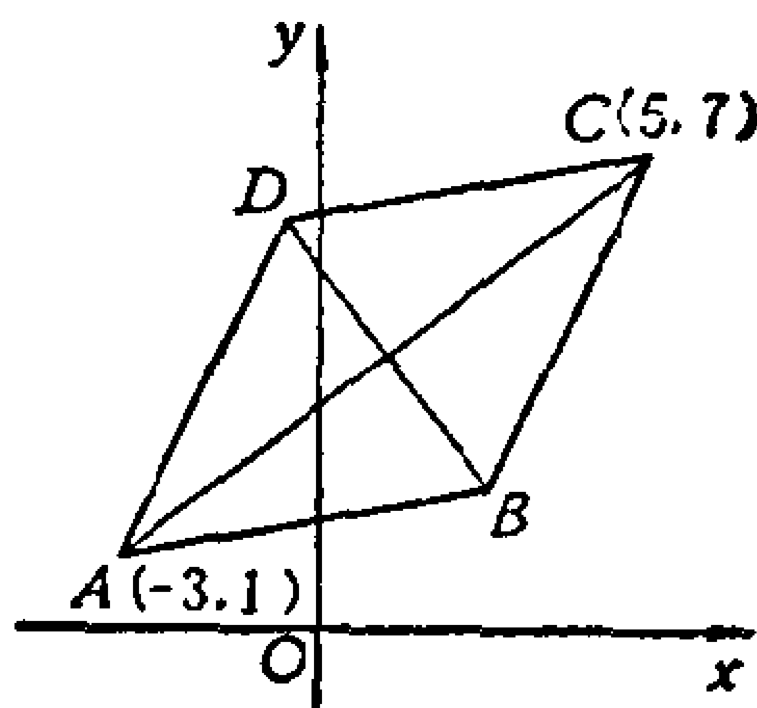
$$x_D=\frac{4+(\sqrt{2}+1)\times 1}{1+(\sqrt{2}+1)}=\frac{8-3\sqrt{2}}{2};$$

$$y_D=\frac{5+(\sqrt{2}+1)\times 1}{1+(\sqrt{2}+1)}=5-2\sqrt{2}.$$

又 $k_{AB}=\frac{3-1}{5-1}=\frac{1}{2}$，$\therefore l$ 的方程为 $y-(5-2\sqrt{2})=\frac{1}{2}\left(x-\frac{8-3\sqrt{2}}{2}\right)$，

即 $x-2y+6-\frac{5\sqrt{2}}{2}=0$.

203. 菱形 $ABCD$ 的相对两顶点为 $A(-3,1)$、$C(5,7)$，面积为 25. 求它四边所在的直线方程.



[分析] 点 A、C 的坐标已知，故欲求四边所在的直线，只需求出 B、D 两点的坐标. 而从四边形 $ABCD$ 为菱形可知，对角线 BD、AC 应互相垂直平分，即 $BD\perp AC$，且 $\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|=25$. 由此即可求得 B、D 两点的坐标.

[解] 菱形对角线 AC 中点 E 的坐标为(1, 4). 直线 AC 的斜率为 $\frac{3}{4}$，$BD\perp AC$，故 BD 的斜率为 $-\frac{4}{3}$. 设直线 BD 的参数方程为：$\begin{cases}x=1+t\cos\theta\\ y=4+t\sin\theta,\end{cases}$

而 $\operatorname{tg}\theta=-\frac{4}{3}$，$\cos\theta=-\frac{3}{5}$，$\sin\theta=\frac{4}{5}$. 故 $\begin{cases}x=1-\frac{3}{5}t\\ y=4+\frac{4}{5}t.\end{cases}$

$\because$ 菱形的面积为 25，$|AC|=\sqrt{(5+3)^2+(7-1)^2}=10$，$\therefore$ $|t|\cdot 10=25$，$t_B=-\frac{5}{2}$，$t_D=\frac{5}{2}$. 代入上式，得 B、D 两点坐标为 $\left(\frac{5}{2}, 2\right)$、$\left(-\frac{1}{2}, 6\right)$. 由此可得直线 AB 的方程为 $2x-11y+17=0$，直线 CD 的方程为 $2x-11y+67=0$，直线 AD 的方程为 $2x-y+7=0$，直线 BC 的方程为 $2x-y-3=0$.

204. 求与两直线 $3x-4y-7=0$，$12x-5y+6=0$ 夹等角，且过点(4, 5)的直线方程.

[分析一] 所求直线过一已知点，又和两已知直线交角相等，故它的斜率应由这两条直线的斜率确定.

[解一] 设所求直线的斜率为 k. ∵ 此直线和已知直线 $3x-4y-7=0$, $12x-5y+6=0$ 夹等角, ∴ $\left|\dfrac{k-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}k}\right|=\left|\dfrac{k-\frac{12}{5}}{1+\frac{12}{5}k}\right|$, 即$(4k-3)(12k+5)=\pm(3k+4)(5k-12)$. 当取"+"号时, 得 $33k^2=-33$, 此方程无实根; 当取"-"号时, 得 $63k^2-32k-63=0$, 即$(7k-9)(9k+7)=0$. ∴ $k=\frac{9}{7}$, 或 $k=-\frac{7}{9}$. 又因所求直线过点(4, 5), 故其方程为 $y-5=\frac{9}{7}(x-4)$或 $y-5=-\frac{7}{9}(x-4)$, 即 $9x-7y-1=0$ 或 $7x+9y-73=0$.

[分析二] 因为所求直线 l 和两已知直线 l_1、l_2 的交角相等, 所以三直线必可构成一等腰三角形. 亦即 l 垂直于 l_1、l_2 的交角平分线之一, 且平行于另一角平分线.

[解二] 因两已知直线的交角平分线方程为

$$\frac{3x-4y-7}{5}=\pm\frac{12x-5y+6}{13}\cdots①,$$

又所求的直线与直线 ① 平行, 故可设其方程为

$$\frac{3x-4y-7}{5}\mp\frac{12x-5y+6}{13}=c\cdots②.$$

以 $x=4$, $y=5$ 代入, 当取"-"号时, 得 $c=-\frac{68}{13}$; 当取"+"号时, 得 $c=-\frac{10}{13}$. 分别代入②式, 即得所求的直线方程:

$$7x+9y-73=0 \quad 和 \quad 9x-7y-1=0.$$

[说明] 在求直线方程的问题中, 如果已知事项中涉及到倾角、交角等条件, 常可通过求直线的斜率来确定直线的方程, 如[解一].

205. **设平行四边形 $ABCD$ 的三顶点 A、B、C 的坐标分别为 $(-5, 12)$、$(0, 0)$、$(3, 4)$. 直线 l 与直线 BA、BC 分别交于 E、F, $\triangle BEF$ 为以 EF 为底边的等腰三角形. 如果直线 l 平分平行四边形 $ABCD$ 的面积, 试求直线 l 的方程.**

[分析] 因 $\triangle BEF$ 是等腰三角形, 故 l 平行 $\angle ABC$ 的外角平分线; 又 l 平分平行四边形 $ABCD$ 的面积, 故 l 必过平行四边形 $ABCD$ 对角线的

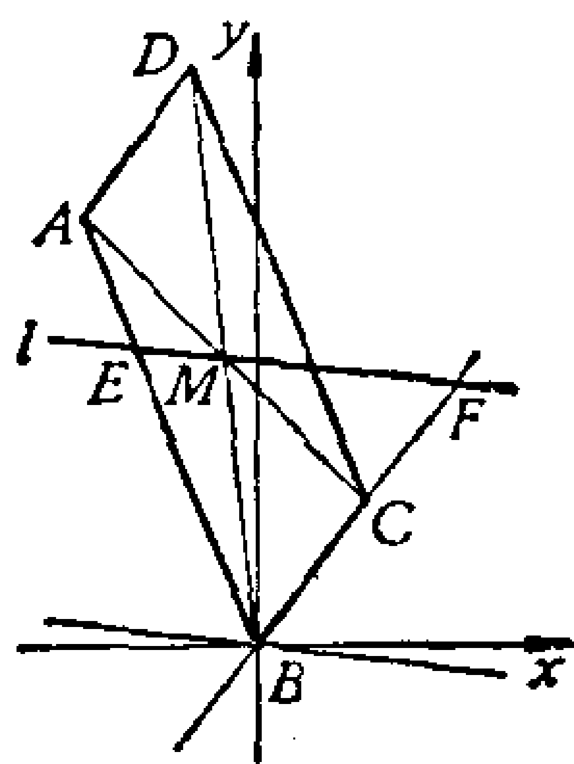
交点．利用点斜式即得解．

［解］　直线 BA、BC 的方程分别为 $12x+5y=0$，$4x-3y=0$．$\angle ABC$ 的外角平分线方程为

$$\frac{12x+5y}{13}=-\frac{4x-3y}{-5},$$

即 $x+8y=0$．AC 中点 M 的坐标为 $(-1,\ 8)$，故直线 l 的方程为 $(x+1)+8(y-8)=0$，即

$$x+8y=63.$$



206．求过已知点 $P_1(x_1,\ y_1)$，且与已知直线 $y=mx+b$ 夹已知角 α 的直线方程．

［解］　设所求直线的斜率为 k，由题设 $\left|\frac{k-m}{1+km}\right|=\operatorname{tg}\alpha$，得 $(1\mp m\operatorname{tg}\alpha)k=\pm\operatorname{tg}\alpha+m$．当 $\operatorname{tg}\alpha\neq\pm\frac{1}{m}$ 时，$k=\frac{\pm\operatorname{tg}\alpha+m}{1\mp m\operatorname{tg}\alpha}$．$\therefore$ 过 $P_1(x_1,\ y_1)$ 的直线为 $(1\mp m\operatorname{tg}\alpha)(y-y_1)=(\pm\operatorname{tg}\alpha+m)(x-x_1)$．当 $\operatorname{tg}\alpha=\pm\frac{1}{m}$ 时，k 不存在，直线过 $P_1(x_1,\ y_1)$ 与 y 轴平行，即 $x=x_1$．故所求直线方程为

$$(1\mp m\operatorname{tg}\alpha)(y-y_1)=(\pm\operatorname{tg}\alpha+m)(x-x_1).$$

207．已知通过定点 $A(8,\ 6)$ 的四条直线，其倾角的比是 $1:2:3:4$，第二条直线的方程是 $3x-4y=0$，求其余三条直线的方程．

［分析］　所求直线过一已知点，又一条直线的斜率可知，根据四直线倾角之间的关系就可求得其它直线的斜率．

［解］　设四条直线的倾角依次为 α、2α、3α、4α，$\because 0°\leqslant 4\alpha<180°$，$\therefore 0°\leqslant\alpha<45°$．由已知 $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{3}{4}$，即 $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{3}{4}$．整理得 $3\operatorname{tg}^2\alpha+8\operatorname{tg}\alpha-3=0$，解得 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$；$\operatorname{tg}\alpha=-3$（舍去）．$\therefore$ 第一条直线方程为 $y-6=\frac{1}{3}(x-8)$，即 $x-3y+10=0$．$\because \operatorname{tg}3\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{13}{9}$．$\therefore$ 第三条直线方程为 $y-6=\frac{13}{9}(x-8)$，即 $13x-9y-50=0$．$\because \operatorname{tg}4\alpha=$

$\frac{2\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{24}{7}$. ∴第四条直线方程为 $y-6=\frac{24}{7}(x-8)$，即 $24x-7y-150=0$.

208. **求方向一定，且被两坐标轴截得线段为定长的直线方程.**

［分析］ 所求直线方向已定，如能求得其 y 轴截距即可求得方程，而截距一定，则此直线与坐标轴所构成的直角三角形也随之而定. 因此可根据此直角三角形的斜边为定长，运用勾股定理求出截距.

［解］ 设所求直线的斜率为 k(定值)，被两坐标轴截得线段长为 a，y 轴截距为 b，则其方程为 $y=kx+b$. 令 $y=0$，得 x 轴截距为 $-\frac{b}{k}$. ∵$\left(-\frac{b}{k}\right)^2+b^2=a^2$，得 $b=\frac{\pm ak}{\sqrt{1+k^2}}$. ∴所求直线方程为 $y=kx\pm\frac{ak}{\sqrt{1+k^2}}$.

［说明］ 要求一直线方程，常可先设其方程，再由条件确定其系数而得. 在假设直线方程时，应根据题意选取适当的形式. 一般以待定系数较少为宜，同时也应考虑到系数易定. 如本题，已知直线的方向，故选用斜截式.

209. **一直线过点$(-3, 4)$，且在两轴上的截距之和为12. 求此直线方程.**

［解］ 设直线在 x 轴上截距为 a，则在 y 轴上截距为 $12-a$，直线方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{12-a}=1$. ∵它经过$(-3, 4)$，∴$\frac{-3}{a}+\frac{4}{12-a}=1$，即 $a^2-5a-36=0$，解得 $a=-4$ 或 $a=9$. 故所求直线方程为 $\frac{x}{-4}+\frac{y}{16}=1$，$\frac{x}{9}+\frac{y}{3}=1$. 亦即 $4x-y+16=0$，$x+3y-9=0$.

210. **已知一直线与两轴构成的三角形面积为2平方单位，且两截距之差的绝对值为3. 求此直线的方程.**

［分析］ 因为直线与两轴构成的三角形面积等于两截距积的绝对值之半，又已知两截距差的绝对值，解此方程组可得直线两截距，即得直线方程.

〔解〕 设所求直线的 x 轴截距与 y 轴截距分别为 a 与 b. 由题意得

$$\begin{cases}\frac{1}{2}|ab|=2\\|a-b|=3.\end{cases}$$

分四种情况讨论: (I) $\begin{cases}ab=4\\a-b=3;\end{cases}$ (II) $\begin{cases}ab=4\\a-b=-3;\end{cases}$ (III) $\begin{cases}ab=-4\\a-b=3;\end{cases}$ (IV) $\begin{cases}ab=-4\\a-b=-3.\end{cases}$ 由(I)解得: $\begin{cases}a=-1\\b=-4,\end{cases}$ $\begin{cases}a=4\\b=1.\end{cases}$ 由(II)解得: $\begin{cases}a=1\\b=4,\end{cases}$ $\begin{cases}a=-4\\b=-1.\end{cases}$ 而(III)、(IV)均无实数解. ∴ 所求直线方程为:

$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{-4}=1,\ \frac{x}{4}+y=1,\ x+\frac{y}{4}=1,\ \frac{x}{-4}+\frac{y}{-1}=1.$$

即 $4x+y+4=0$, $x+4y-4=0$, $4x+y-4=0$, $x+4y+4=0$.

〔说明〕 截距与距离不同，可以为正、为零，也可为负，故这类问题要注意可能会出现多解.

211. **求过 $(a, 0)$、$(0, b)$ 和 $(1, 3)$ 三点，且 a、b 均为正整数的直线方程.**

〔分析〕 已知条件实际上给出了所求直线的两截距，故宜用截距式.

〔解〕 过 $(a, 0)$、$(0, b)$ 的直线方程是 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. ∵ 它过点 $(1, 3)$, ∴ $\frac{1}{a}+\frac{3}{b}=1$, 即 $b+3a=ab$. $(a-1)(b-3)=3$. ∵ a、b 均为正整数, ∴ $a-1>0$, $b-3>0$. ∴ $\begin{cases}a-1=1\\b-3=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-1=3\\b-3=1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=2\\b=6\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=4\\b=4.\end{cases}$ 故所求直线方程是 $y=-3x+6$ 和 $y=-x+4$.

212. **已知一直线经过点 $(1, 2)$, 并且与点 $(2, 3)$ 和 $(4, -5)$ 的距离相等. 求此直线的方程.**

〔解一〕 假设所求直线的斜率存在，则可设其方程为 $y-2=k(x-1)$, 即 $kx-y-k+2=0$. 由题设条件得 $\frac{|2k-3-k+2|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|4k+5-k+2|}{\sqrt{1+k^2}}$, 即 $|k-1|=|3k+7|$. 由 $k-1=3k+7$ 得 $k=-4$; 由 $k-1=-(3k+7)$ 得 $k=-\frac{3}{2}$. 又因 $x=1$ 不合题意，故所求直线的方程为

$$4x+y-6=0 \text{ 和 } 3x+2y-7=0.$$

[解二] 当点(2, 3)和(4, −5)在所求直线的同侧时，所求直线与这两点连线平行，而这两点连线的斜率 $k=\frac{3+5}{2-4}=-4$. 又所求直线过点(1, 2). 故其方程为 $y-2=-4(x-1)$，即 $4x+y-6=0$. 当点(2, 3)和(4, −5)在所求直线的异侧时，所求直线为两点连线的垂直平分线，而这两点连线的中点为(3, −1)，故所求直线方程为 $\frac{x-3}{3-1}=\frac{y+1}{-1-2}$，即

$$3x+2y-7=0.$$

213. **求经过点(−5, 5)，且和原点距离是1的直线方程.**

[解一] 假设所求直线的斜率存在，则可设其方程为 $y-5=k(x+5)$. 即 $kx-y+5(k+1)=0$. ∵ 它与原点的距离等于1，∴ $\frac{|5(k+1)|}{\sqrt{k^2+1}}=1$. 整理得 $(3k+4)(4k+3)=0$. 解得 $k_1=-\frac{4}{3}$, $k_2=-\frac{3}{4}$. 又，$x=-5$ 不合题意，故所求直线方程为 $4x+3y+5=0$ 和 $3x+4y-5=0$.

[解二] 设所求直线方程为 $x\cos\theta+y\sin\theta-1=0$。以 $x=-5$, $y=5$ 代入，得 $-\cos\theta+\sin\theta-\frac{1}{5}=0$，即 $\sin\theta=\cos\theta+\frac{1}{5}$. 两边平方，并化为 $\cos\theta$ 的二次方程，得 $2\cos^2\theta+\frac{2}{5}\cos\theta-\frac{24}{25}=0$. ∴ $\cos\theta=\frac{3}{5}$，或 $\cos\theta=\frac{-4}{5}$，从而 $\sin\theta=\frac{4}{5}$，或 $\sin\theta=-\frac{3}{5}$. 故所求的直线方程为 $-\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-1=0$，或 $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-1=0$. 即 $4x+3y+5=0$，或 $3x+4y-5=0$.

214. **已知正方形的中心为 $G(-1, 0)$，一边所在直线的方程为 $x+3y-5=0$，求其它三边所在直线的方程.**

[分析] 所求的直线和已知直线或平行，或垂直，故可采用和已知直线平行或垂直的直线系方程. 又由于正方形中心到四边的距离相等，由此可分别决定各直线系方程中的任意常数.

[解] 正方形中心 $G(-1, 0)$ 到四边距离均为 $\frac{|-1-5|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{6}{\sqrt{10}}$. 设正方形与已知直线平行的一边所在直线方程为 $x+3y-p_1=0$，则 $\frac{|-1-p_1|}{\sqrt{10}}=\frac{6}{\sqrt{10}}$，$|p_1+1|=6$. 解得 $p_1=5$(即为已知直线)，或 $p_1=-7$. 故与已

知边平行的正方形一边所在直线方程为 $x+3y+7=0$. 设正方形另一组对边所在直线方程为 $3x-y-p_2=0$, 则 $\frac{|3\cdot(-1)-p_2|}{\sqrt{10}}=\frac{6}{\sqrt{10}}$, $|p_2+3|=6$, 解得 $p_2=3$, 或 $p_2=-9$. 故正方形另两边所在直线的方程为

$$3x-y-3=0 \quad 和 \quad 3x-y+9=0.$$

215. 求过点 $A(0, a)\ (a>0)$, 且和点 $B(2a, 2a)$ 的距离为 a 的两条直线的方程; 并求过点 B 向此两直线所作垂线的垂足连线方程.

[解] 当斜率存在时,设所求直线 l 的斜率为 k,方程为 $y-a=kx$. 根据题意, $\frac{|k\cdot 2a-2a+a|}{\sqrt{k^2+1}}=a$, 即 $(2k-1)^2=k^2+1$. 解得 $k_1=0$, $k_2=\frac{4}{3}$. 故所求直线 l 的方程为 $y-a=0$ 和 $y-a=\frac{4}{3}x$. 又 ∵ 点 $B(2a, 2a)$ 到 y 轴的距离是 $2a\neq a$(∵ $a\neq 0$), ∴ $x=0$ 不是所求的直线方程.

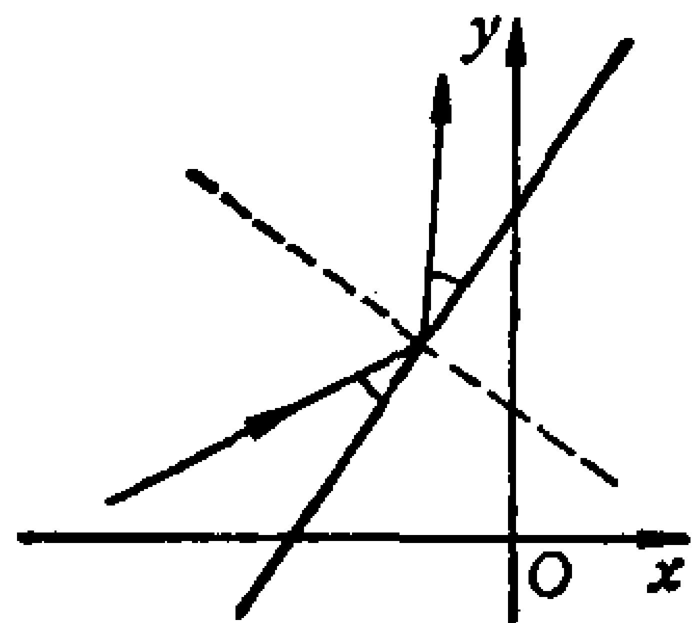
过 $B(2a, 2a)$, 且与上述两直线垂直的直线分别为 $x-2a=0$ 和 $y-2a=-\frac{3}{4}(x-2a)$. 从而解得两垂足分别为 $(2a, a)$ 和 $\left(\frac{6a}{5}, \frac{13a}{5}\right)$. 它们的连线方程为 $\frac{y-a}{\frac{13a}{5}-a}=\frac{x-2a}{\frac{6a}{5}-2a}$, 化简得 $2x+y-5a=0$.

216. 求倾角是 45°, 且和原点的距离是 5 的直线方程.

[解一] $k=\operatorname{tg}45°=1$, 设所求的直线方程为 $y=x+b$, 则 $\frac{|b|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=5$, 解得 $b=\pm 5\sqrt{2}$. 故所求的直线方程为 $y=x\pm 5\sqrt{2}$.

[解二] 设所求直线的法线为 $\overrightarrow{OP}$, 则 $(\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP}})=135°$ 或 $315°$. 故所求的直线方程为 $x\cos 135°+y\sin 135°=5$ 和 $x\cos 315°+y\sin 315°=5$, 即 $-x+y=5\sqrt{2}$ 和 $x-y=5\sqrt{2}$.

217. 光线沿着直线 $x-2y+5=0$ 射入, 遇到直线 $3x-2y+7=0$ 即行反射, 求反射光线所在直线的方程.



[分析] 根据光学性质,入射角=反射角,且入射光线、反射光线在法线两旁,由此可得所求直线的斜率.

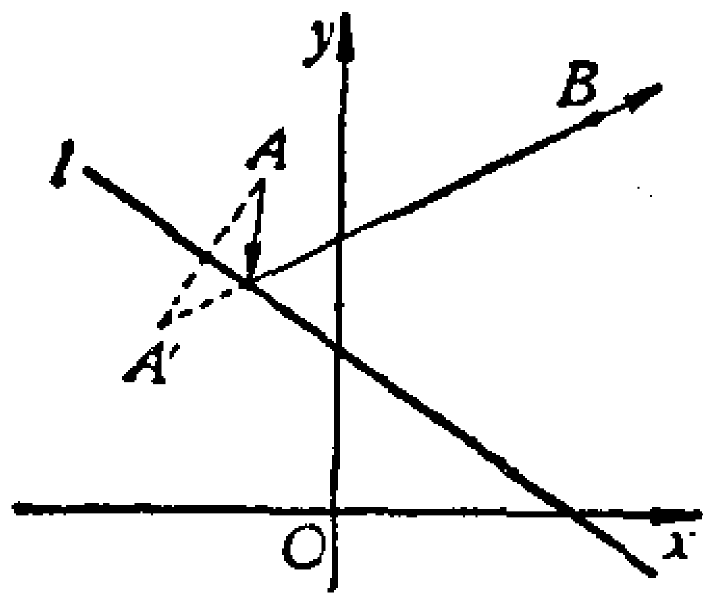
［解］ 入射光线斜率 $k_1=\frac{1}{2}$, 直线 $3x-2y+7=0$ 的斜率为 $\frac{3}{2}$. 设反射光线的斜率为 k_2, ∵ 反射角与入射角相等, 等角的余角相等,

$$\therefore\quad \frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}=\frac{\frac{3}{2}-k}{1+\frac{3}{2}k},$$

解得 $k=\frac{29}{2}$. 又反射光线应过已知两直线的交点 $(-1, 2)$, 故所求的直线方程为 $y-2=\frac{29}{2}(x+1)$, 即 $2y-29x-33=0$.

［说明］ 实际上, 入射光线所在的直线 $x-2y+5=0$ 以直线 $3x-2y+7=0$ 为轴的对称直线 $2y-29x-33=0$, 即是反射光线所在的直线.

218. 光线由点 $A(-1, 4)$ 射出, 遇直线 l: $2x+3y-6=0$ 即行反射. 已知其反射光线过点 $B\left(3, \frac{62}{13}\right)$, 求反射光线所在的直线方程.



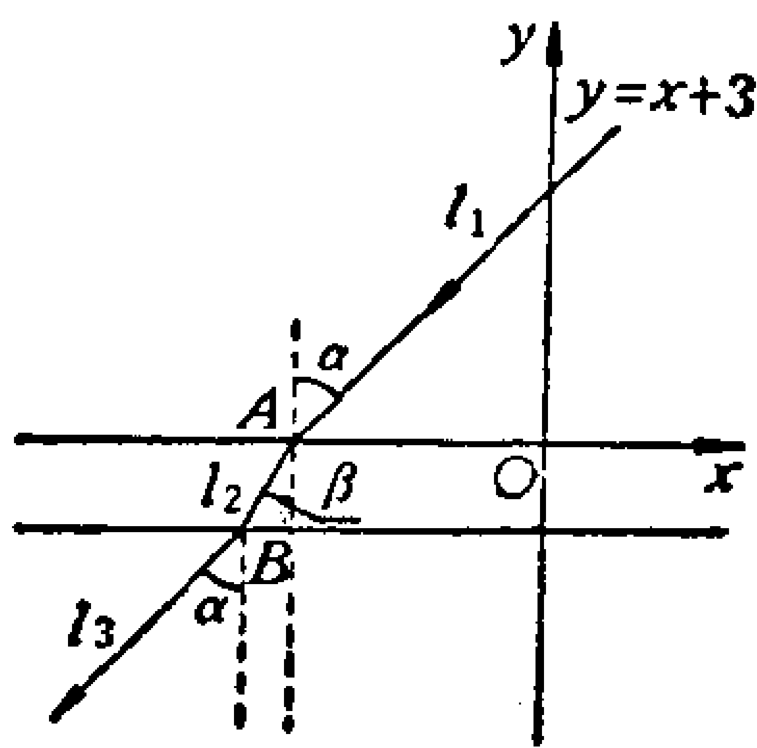
［分析］ 根据光学性质可知, 反射光所在直线通过光源的像, 故可先求点 A 关于已知直线的对称点坐标, 然后利用两点式写出方程.

［解］ 设点 A 关于直线 $2x+3y-6=0$ 的对称点为 $A'(x_0, y_0)$, 则 $\frac{y_0-4}{x_0+1}=\frac{3}{2}$, 即 $3x_0-2y_0=-11$…①; 且 $2\cdot\frac{x_0-1}{2}+3\cdot\frac{y_0+4}{2}=6$, 即 $2x_0+3y_0=2$…②. 解①、②, 得 $x_0=-\frac{29}{13}$, $y_0=\frac{28}{13}$.

故所求的直线方程为 $y-\frac{62}{13}=\frac{\frac{62}{13}-\frac{28}{13}}{3+\frac{29}{13}}(x-3)$, 即 $13x-26y+85=0$.

219. 设横轴位于厚 1 厘米的玻璃片的表面上, 而纵轴垂直玻璃片, 坐标系的单位长度为厘米, 光线 l_1: $y=x+3$ 穿过玻璃片, 已知玻璃的折射率为 1.5. 试求在此玻璃片内光线 l_2 和出玻璃片后光线 l_3 的方程, 以及光线在玻璃片内的行程 $|AB|$.

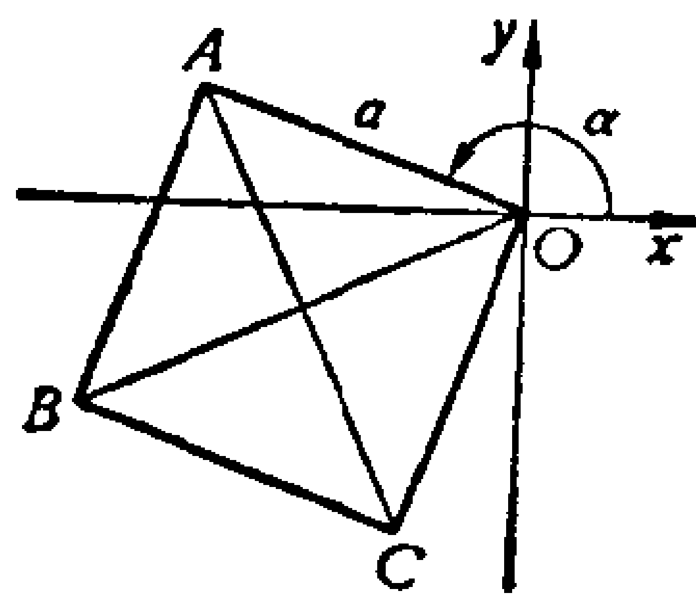
［分析］ 根据光学性质有：入射角的正弦:折射角的正弦＝折射率．因此要求折射光线所在直线的方程，可据其倾角及其上一点的坐标得出．



［解］ 如图，l_1：$y=x+3$ 与 x 轴的交点为 $A(-3,\ 0)$．∵ 折射率 $n=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=1.5$，而 $k_1=\operatorname{tg}(90°-\alpha)=1$，∴ $\alpha=45°$，∴ $\sin\beta=\frac{\sin 45°}{1.5}=\frac{\sqrt{2}}{3}$．$l_2$ 的斜率 $k_2=\operatorname{tg}(90°-\beta)=\operatorname{ctg}\beta=\sqrt{\frac{1}{\sin^2\beta}-1}=\frac{\sqrt{14}}{2}$，∴ l_2 的方程为 $y=\frac{\sqrt{14}}{2}(x+3)$．∵ 玻璃片厚1厘米，∴ B 点纵坐标 $y=-1$，代入 l_2 的方程，得横坐标 $x=-\frac{\sqrt{14}}{7}-3$，即 $B\left(-\frac{\sqrt{14}}{7}-3,\ -1\right)$．设 l_3 的方程为 $y=x+b$，以 B 点坐标代入得 $b=2+\frac{\sqrt{14}}{7}$．∴ l_3 的方程为 $y=x+2+\frac{\sqrt{14}}{7}$．

$$|AB|=\sec\beta=\frac{3}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{7}\text{(厘米)}.$$

220．正方形 $OABC$ 的一顶点 O 在原点上，O、A、B、C 为逆时针序．边长为 a，$\angle xOA=\alpha$ $(0<\alpha<\pi)$．试求两对角线 OB、AC 所在直线的方程．



［分析］ ∵ $OB\perp AC$，$\angle AOB=\frac{\pi}{4}$，

∴ $\angle xOB=\alpha+\frac{\pi}{4}$．

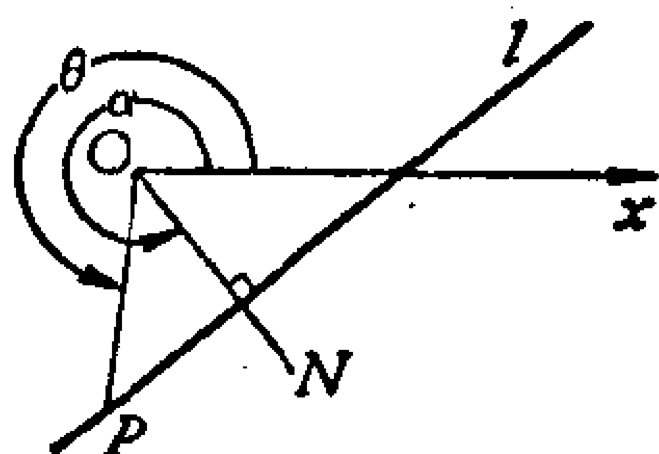
原点到 AC 的距离为对角线长的一半，利用法线式，即得 AC 的方程．∵ OB 过原点且与 AC 垂直，用点斜式即得 OB 的方程．

［解］ ∵ $\angle AOB=\frac{\pi}{4}$，$\angle xOA=\alpha$，∴ $\angle xOB=\alpha+\frac{\pi}{4}$．原点 O 到 AC 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$，∴ AC 所在直线方程为 $x\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+y\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，即 $x(\cos\alpha-\sin\alpha)+y(\cos\alpha+\sin\alpha)=a$．∵ $OB\perp AC$，∴ OB 所在直线方程为 $x(\cos\alpha+\sin\alpha)-y(\cos\alpha-\sin\alpha)=0$．

221. 求经过极点 O，且与极轴夹角为 α 的直线的极坐标方程.

［解］ 设直线上任意一点 P 的极坐标为$(\rho,\ \theta)$. $\because (\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{OP})=\alpha$, $\therefore \theta=\alpha$. 此即所求直线的极坐标方程.

222. 已知极点 O 到直线 l 的距离为 p, ON 垂直于 l, 极轴为 Ox, 且 $(\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{ON})=\alpha$. 求直线 l 的极坐标方程.



［解］ 设 $P(\rho,\ \theta)$为直线 l 上任意一点.

$\because\ (\overrightarrow{OP})_{ON}=p,\quad \therefore\ |OP|\cos(\overrightarrow{ON},\ \overrightarrow{OP})=p$,

即 $\rho\cos(\theta-\alpha)=p$.

223. 求过两已知点 $Q(\rho_1,\ \theta_1)$、$R(\rho_2,\ \theta_2)$的直线的极坐标方程.

［解］ 设 $P(\rho,\ \theta)$为所求直线上任意一点. $\because P$、Q、R三点共线, $\therefore \triangle PQR$的面积为零，即

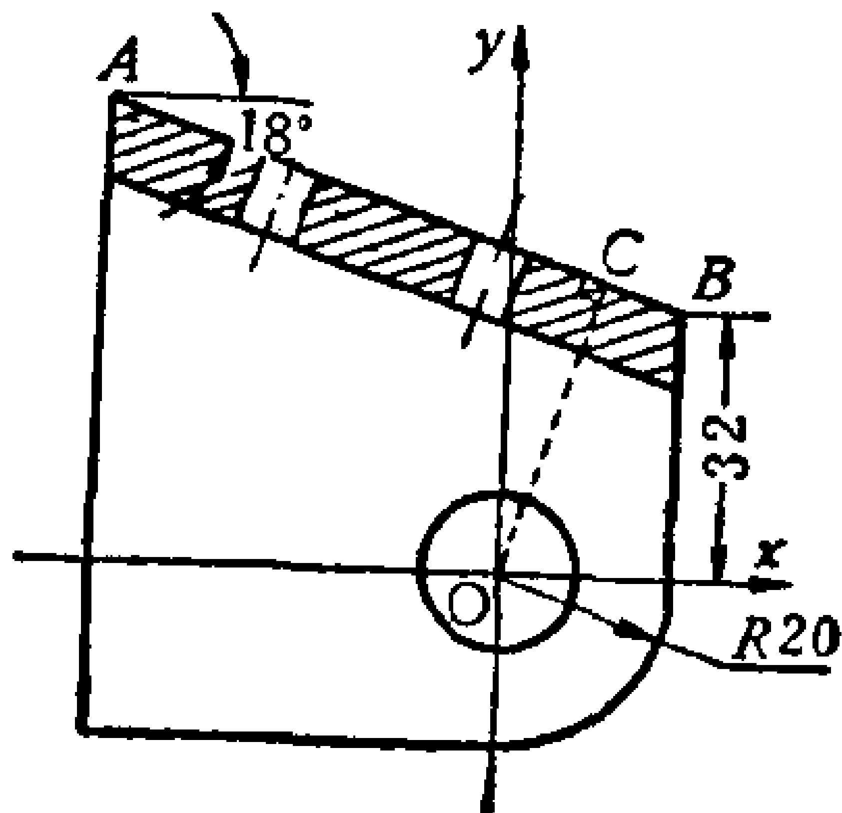
$$S_{\triangle PQR}=\left|\frac{1}{2}\rho\rho_1\sin(\theta-\theta_1)+\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin(\theta_1-\theta_2)+\frac{1}{2}\rho_2\rho\sin(\theta_2-\theta)\right|=0.$$

$$\therefore\ \rho\rho_1\sin(\theta-\theta_1)+\rho_1\rho_2\sin(\theta_1-\theta_2)+\rho_2\rho\sin(\theta_2-\theta)=0.$$

如果 $\rho\rho_1\rho_2\neq0$, 也可写成: $\dfrac{\sin(\theta_2-\theta_1)}{\rho}=\dfrac{\sin(\theta_2-\theta)}{\rho_1}+\dfrac{\sin(\theta-\theta_1)}{\rho_2}$.

§ 2. 点线间的距离和离差

224. 如图是拖拉机的支承架平面图，检验时要算出孔心到直线 AB 的距离 OC. 试根据图中尺寸求之.



［解］ 由图示尺寸可知，点 B 的坐标为 $(20,32)$, 直线 AB 的斜率 $k=\operatorname{tg}(180^\circ-18^\circ)=-\operatorname{tg}18^\circ$. $\therefore$ 直线 AB 的方程是

$$y-32=-\operatorname{tg}18^\circ(x-20).$$

它在轴 y 上的截距 $b=32+20\operatorname{tg}18^\circ$.

$\therefore\quad |OC|=b\cos 18°=32\cos 18°+20\sin 18°\approx 36.61.$

225. 在直线 $5x-3y+15=0$ 上求一点 P，使点 P 到 x 轴距离是到 y 轴距离的三分之二.

［解］ 设点 P 的坐标为 $P(x_0, y_0)$. 根据题意有 $\begin{cases} 5x_0-3y_0+15=0 \\ \left|\dfrac{y_0}{x_0}\right|=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

解方程组得 $\begin{cases} x_0=-5 \\ y_0=-\dfrac{10}{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_0=-\dfrac{15}{7} \\ y_0=\dfrac{10}{7}. \end{cases}$ ∴点 P 的坐标为 $\left(-5, -\dfrac{10}{3}\right)$ 或 $\left(-\dfrac{15}{7}, \dfrac{10}{7}\right)$.

［说明］ 一点到 x 轴或 y 轴的距离与这一点的纵坐标或横坐标是两个不同的概念. 若此点的坐标为 (x, y)，则它到 x 轴、y 轴的距离分别为 $|y|$ 和 $|x|$，不应误认为是 y 和 x.

226. 求平行直线 l_1: $2x+3y-8=0$ 和 l_2: $2x+3y-10=0$ 之间的距离 d.

［分析一］ 根据两平行线之间距离的定义，可在任一直线上取一特殊点，求它和另一直线的距离.

［解一］ 在 l_1 上取一点 $(4, 0)$. 根据两平行线之间距离的定义即可得 $d=\dfrac{|2\times 4+3\times 0-10|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}.$

［分析二］ 由于已知一直线方程，能很快求得原点到此直线的距离，故只需判别出原点在两平行线之间或之外，即可据此求得两平行线之间的距离.

［解二］ 因原点到 l_1 的距离 $d_1=\dfrac{8}{\sqrt{13}}$，原点到 l_2 的距离 $d_2=\dfrac{10}{\sqrt{13}}$. 又因直线 l_1、l_2 的纵截距同号，故原点在这两平行线之外，$\therefore d=d_2-d_1=\dfrac{2}{\sqrt{13}}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}.$

227. 在直线 $x+3y=0$ 上找一点，使它到原点和直线 $x+3y-2=0$ 的距离相等.

［解］ 设所求点的坐标为 (x_0, y_0)，则 $x_0+3y_0=0\cdots$①. 且

$\sqrt{x_0^2+y_0^2}=\frac{|x_0+3y_0-2|}{\sqrt{10}}$…②. 由①得 $x_0=-3y_0$, 代入②, 得 $y_0=\pm\frac{1}{5}$. 从而得 $x_0=\mp\frac{3}{5}$. 故所求的点为 $\left(-\frac{3}{5},\ \frac{1}{5}\right)$ 和 $\left(\frac{3}{5},\ -\frac{1}{5}\right)$.

228. 设直线 $Ax+By+C=0$ 到原点的距离为1. 求 A、B、C 之间的关系.

[解] 直线 $Ax+By+C=0$ 到原点的距离为 $\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

$$\because\ \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=1,\quad \therefore\ A^2+B^2=C^2.$$

229. 如果 $P_1(x_1,\ y_1)$、$P_2(x_2,\ y_2)$ 分居直线 $Ax+By+C=0$ 的两侧, 则 Ax_1+By_1+C 与 Ax_2+By_2+C 异号; 如果 P_1、P_2 在直线 $Ax+By+C=0$ 的同侧, 则 Ax_1+By_1+C 与 Ax_2+By_2+C 同号.

[分析] 由于 P_1、P_2 在直线异侧时, 线段 P_1P_2 被此直线内分; 在同侧时, 则或被此直线外分或平行于此直线. 因此, 可根据线段 P_1P_2 和此直线的交点分 P_1P_2 的比 λ 的正负来证明.

[证] 设 P_1P_2 的连线交直线于 $P(x,\ y)$, 且 $P_1P:PP_2=\lambda$,

$$\therefore\quad x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

$$\because\quad A\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\right)+B\left(\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)+C=0,$$

$$\therefore\quad \lambda=-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}.$$

如果 P_1、P_2 分居直线的两侧, 则 P 为 P_1P_2 的内分点, $\lambda>0$, $\therefore\ Ax_1+By_1+C$ 和 Ax_2+By_2+C 异号.

如果 P_1、P_2 在直线的同侧, 当 P_1P_2 与直线相交时, P 为 P_1P_2 的外分点, $\lambda<0$, $\therefore\ Ax_1+By_1+C$ 与 Ax_2+By_2+C 同号; 当 P_1P_2 与直线平行时, $A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)=0$, $\therefore\ Ax_1+By_1=Ax_2+By_2$, $Ax_1+By_1+C=Ax_2+By_2+C$, 因此必同号.

§3. 两直线的交角

230. 已知直线 l_1、l_2 的斜率是方程 $6x^2+x-1=0$ 的两根. 求 l_1 和 l_2 的夹角.

[分析] 由于两直线交角正切的绝对值是这两条直线斜率的对称式，故可用韦达定理解之.

[解] $\because$ 方程 $6x^2+x-1=0$ 的判别式 $\Delta=1+24>0$, $\therefore$ 直线 l_1、l_2 的斜率存在. 分别设其为 k_1、k_2, 则 $k_1+k_2=-\frac{1}{6}$, $k_1\cdot k_2=-\frac{1}{6}$. 又设直线 l_1、l_2 的夹角为 α, 则 $|\operatorname{tg}\alpha|=\frac{|k_1-k_2|}{|1+k_1k_2|}=\frac{\sqrt{(k_1+k_2)^2-4k_1k_2}}{|1+k_1k_2|}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1$,

即 $\operatorname{tg}\alpha=\pm1$, 故 l_1、l_2 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$.

[说明] 一般两直线的夹角总认为是 0 到 π 间的角，故由 $\operatorname{tg}\alpha=\pm1$ 仅得 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 和 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ 两个值.

231. 已知直线 l_1 的方程是 $\begin{cases}x=\frac{2\sqrt{5}}{5}t-1\\ y=\frac{\sqrt{5}}{5}t+1\end{cases}$ (t 为参数)，直线 l_2 在以原点为极点、x 轴的正半轴为极轴所建立的极坐标系中的方程为 $\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=2$. 求直线 l_1、l_2 所夹的锐角 φ.

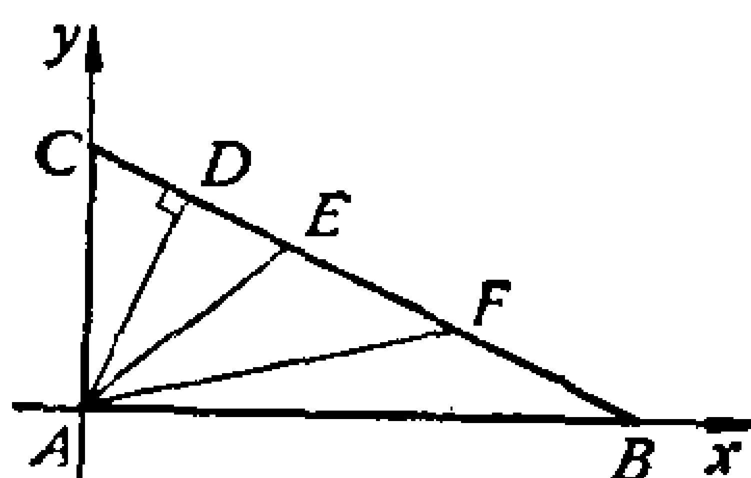
[分析] 两直线的夹角可由这两直线的斜率求得，但由于 l_1、l_2 的方程一为参数方程，一为极坐标方程，不易看出其斜率，故可先将它们化成直角坐标系中的一般方程，然后求其夹角.

[解] 由 l_1 的方程 $\begin{cases}x=\frac{2\sqrt{5}}{5}t-1\\ y=\frac{\sqrt{5}}{5}t+1\end{cases}$ 消去参数 t, 得 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

$\therefore$ l_1 的斜率 $k_1=\frac{1}{2}$. 又由 l_2 的方程 $\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=2$, 得 $\rho\sin\theta-\rho\cos\theta=2\sqrt{2}$. 以 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ 代入, 得 $y=x+2\sqrt{2}$. $\therefore$ l_2 的斜率 $k_2=1$. $\because$ φ 为锐角, $\therefore$ $\operatorname{tg}\varphi=\frac{|k_1-k_2|}{|1+k_1k_2|}=\frac{1}{3}$, 故 $\varphi=\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{3}$.

232. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=90°$, $\angle B<\angle C$, 高 $|AD|=h$, $|BC|=a$. E、F 为 BC 上的三等分点. 求证 $\operatorname{tg}\angle EAF=\frac{3h}{2a}$.

［分析］ $\angle EAF$ 的正切取决于直线 AE、AF 的位置位系. 由于 $AB\perp AC$, 故可以 AB、AC 所在直线为坐标轴建立坐标系, 然后利用 E、F 为 BC 的三等分点这一条件求出 AE、AF 的斜率, 再利用直角三角形的性质证之.



［证］ 分别以 AB、AC 两边所在直线为 x 轴、y 轴建立坐标系, 并设点 B 的坐标为 $(b, 0)$, 点 C 的坐标为 $(0, c)$ $(b>0, c>0)$. 由于 E、F 为 BC 边上的三等分点, 故点 E、F 的坐标分别为 $\left(\frac{b}{3}, \frac{2c}{3}\right)$ 和 $\left(\frac{2b}{3}, \frac{c}{3}\right)$. $\therefore$ $k_{AE}=\frac{2c}{b}$, $k_{AF}=\frac{c}{2b}$. 显然, $k_{AE}>k_{AF}$. 又 $\angle EAF$ 为一锐角, 故 $\operatorname{tg}\angle EAF=\frac{k_{AE}-k_{AF}}{1+k_{AE}k_{AF}}=\frac{3bc}{2(b^2+c^2)}$ …①. 又 $|BC|=a$, 根据直角三角形性质, 可得 $b^2+c^2=a^2$, $bc=ah$. 代入 ①, 即得 $\operatorname{tg}\angle EAF=\frac{3h}{2a}$.

§ 4. 两直线的位置关系

233. 已知 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 且 a、b、c、d 均为正数. 求证直线 $(a+b)x+(c+d)y-p=0$ 和 $\sqrt{a^2+b^2}x+\sqrt{c^2+d^2}y+q=0$ 互相平行, $\left(\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}\neq-\frac{p}{q}\right)$.

［证］ $\because$ a、b、c、d 均为正数, $\therefore$ $c+d\neq0$, $\sqrt{c^2+d^2}\neq0$. 故两直线的

斜率分别为$k_1=-\frac{a+b}{c+d}$, $k_2=-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$. $\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\therefore \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$, 即$\frac{a+b}{c+d}=\frac{b}{d}$. 且有$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, 故$\frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, $\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}=\frac{a^2}{c^2}=\frac{b^2}{d^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$. 从而可得$\frac{a+b}{c+d}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$, 即$k_1=k_2$. $\therefore$ 直线$(a+b)x+(c+d)y-p=0$和$\sqrt{a^2+b^2}x+\sqrt{c^2+d^2}y+q=0$互相平行.

234. 有两直线l_1: $ax+by+4=0$和l_2: $(a-1)x+y+b=0$. 求满足下列条件的a、b的值: (1) 直线l_1与l_2互相垂直, 且l_1过点$(-1, 1)$; (2) 直线l_1与l_2同时平行于直线$x+2y+3=0$.

[解] (1) $\because l_1\perp l_2$, $\therefore a(a-1)+b=0$…①. 又$\because l_1$过点$(-1, 1)$, $\therefore -a+b+4=0$, 即$b=a-4$…②. 解①、②联立方程,得

$$\begin{cases}a=2\\b=-2\end{cases} \text{或} \begin{cases}a=-2\\b=-6.\end{cases}$$

(2) $\because$ 直线$x+2y+3=0$的斜率为$-\frac{1}{2}$, 根据条件可得$-\frac{a}{b}=-\frac{1}{2}$和$-(a-1)=-\frac{1}{2}$. 解之即得$a=\frac{3}{2}$, $b=3$.

235. 求证: 以$A(3, 6)$、$B(0, 4)$、$C(-1, -3)$、$D\left(5\frac{12}{13}, 1\frac{8}{13}\right)$为顶点的四边形是直角梯形.

[分析] 由于四点的横坐标各不相同,可断定此四边形四边所在直线的斜率均存在. 只要分别算出四边的斜率, 即可根据直角梯形的定义得证.

[证] 根据各点坐标算出:

$$k_{AB}=\frac{6-4}{3}=\frac{2}{3};\quad k_{BC}=\frac{4-(-3)}{0-(-1)}=7;$$

$$k_{CD}=\frac{1\frac{8}{13}+3}{5\frac{12}{13}+1}=\frac{2}{3};\quad k_{AD}=\frac{6-1\frac{8}{13}}{3-5\frac{12}{13}}=-\frac{3}{2}.$$

$\because k_{AB}=k_{CD}$, 且$k_{BC}\neq k_{AD}$, $\therefore AB\parallel CD$, 而$BC\not\parallel AD$. 又$\because k_{AB}\cdot k_{AD}=-1$, $\therefore AD\perp AB$. 故四边形$ABCD$为直角梯形.

236. 求证：直线 $x\sin\theta-y\,\mathrm{tg}\,\theta+1=0$ 和 $x\sec\theta+y-5=0$ 互相垂直.

[证] 据两直线互相垂直的充要条件(3.72)，$\because \sin\theta\cdot\sec\theta-\mathrm{tg}\,\theta=0$，$\therefore$ 直线 $x\sin\theta-y\,\mathrm{tg}\,\theta+1=0$ 和 $x\sec\theta+y-5=0$ 互相垂直.

[说明] 证明两直线垂直一般均用斜率乘积为 -1，但有的直线斜率不一定存在，尤其方程中 y 的系数带参数时还需讨论，为避免这些麻烦，故证明以一般式方程出现的两直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 互相垂直时，可根据 $A_1A_2+B_1B_2=0$ 这一充要条件.

237. 当 θ 为第三象限角时，试判定两直线

$$x\sin\theta+y\sqrt{1+\cos\theta}-a=0 \quad 和 \quad x+y\sqrt{1-\cos\theta}+b=0$$

的位置关系.

[解] $\because \theta$ 为第三象限角，$\therefore \sin\theta<0$.

又 $$\sin\theta+\sqrt{1+\cos\theta}\cdot\sqrt{1-\cos\theta}=\sin\theta+\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$=\sin\theta+(-\sin\theta)=0.$$

故直线 $x\sin\theta+y\sqrt{1+\cos\theta}-a=0$ 和 $x+y\sqrt{1-\cos\theta}+b=0$ 互相垂直.

238. 设互不相等的 α、β、γ 成等差数列. 求证：直线

$$x\,\mathrm{tg}\,\beta+y(\sin\alpha+\sin\gamma)+\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)=0$$

和 $$x\,\mathrm{tg}\,(\beta-\gamma)+y(\sin\alpha-\sin\gamma)+\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)=0$$

重合.

[分析] 要证明两直线重合，只需证明其方程的对应项系数成比例，但从形式上看，它们之间并无此关系，故应从已知条件 α、β、γ 成等差数列出发去考虑.

[证] $\because \alpha$、β、γ 成等差数列，$\therefore \alpha+\gamma=2\beta\cdots$①，或 $\beta-\gamma=\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)\cdots$②. 当 $\mathrm{tg}\,\beta=0$ 时，$\beta=k\pi\ (k\in J)$. 由①得 $\alpha+\gamma=2k\pi$，即 $\alpha=2k\pi-\gamma$，$\therefore \sin\alpha+\sin\gamma=\sin(2k\pi-\gamma)+\sin\gamma=0$. 这和 $x\,\mathrm{tg}\,\beta+y(\sin\alpha+\sin\gamma)+\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)=0$ 为一直线方程矛盾，故 $\mathrm{tg}\,\beta\neq0\cdots$③. 当 $\sin\alpha+\sin\gamma=0$

时，$\sin\alpha=\sin(-\gamma)$，$\therefore \alpha=2k\pi-\gamma\cdots④$，或 $\alpha=(2k+1)\pi+\gamma\cdots⑤$．显然④式不能成立，否则 $\operatorname{tg}\beta=0$；若⑤式成立，则 $\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)=k\pi+\frac{\pi}{2}$，此时 $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)$ 无意义，这和 $x\operatorname{tg}(\beta-\gamma)+y(\sin\alpha-\sin\gamma)+\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)=0$ 为一直线方程矛盾，故 $\sin\alpha+\sin\gamma\neq0\cdots⑥$．由①、②、③、⑥可得

$$\frac{\operatorname{tg}(\beta-\gamma)}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}=\frac{\sin\alpha-\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\gamma},$$

故所给的两直线重合．

［说明］　运用两方程的对应项系数成比例来判断两直线重合时，必须保证比例的后项不等于零．

239．设两直线 $x\operatorname{tg}\theta+y\sin\theta=1$ 和 $x\operatorname{tg}^3\varphi+y\cos2\varphi=1$ 重合．求 θ、φ 的值．

［解］　显然 $\theta\neq n\pi(n\in J)$，否则方程 $x\operatorname{tg}\theta+y\sin\theta=1$ 不成立．$\because$ 两直线重合，$\therefore \frac{\operatorname{tg}^3\varphi}{\operatorname{tg}\theta}=\frac{\cos2\varphi}{\sin\theta}=\frac{1}{1}$．由此得方程组

$$\begin{cases}\operatorname{tg}^3\varphi=\operatorname{tg}\theta\quad\cdots①\\ \cos2\varphi=\sin\theta\cdots②.\end{cases}$$

由②得 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\varphi\right)=\sin\theta$，　$\therefore$　$\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}-2\varphi\cdots③$，

$$\theta=2n\pi+\pi-\left(\frac{\pi}{2}-2\varphi\right)=2n\pi+\frac{\pi}{2}+2\varphi\cdots④.$$

$\because \theta\neq n\pi$，　$\therefore \frac{\pi}{2}\pm2\varphi\neq n\pi$．④代入①，得

$$\operatorname{tg}^3\varphi=\operatorname{tg}\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}+2\varphi\right)=-\operatorname{ctg}2\varphi=\frac{\operatorname{tg}^2\varphi-1}{2\operatorname{tg}\varphi},$$

即 $2\operatorname{tg}^4\varphi-\operatorname{tg}^2\varphi+1=0$，此方程无实根．③代入①，得

$$\operatorname{tg}^3\varphi=\operatorname{tg}\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}-2\varphi\right)=\operatorname{ctg}2\varphi=\frac{1-\operatorname{tg}^2\varphi}{2\operatorname{tg}\varphi},$$

即 $2\operatorname{tg}^4\varphi+\operatorname{tg}^2\varphi-1=0$，$(2\operatorname{tg}^2\varphi-1)(\operatorname{tg}^2\varphi+1)=0$．

$$\therefore\ \operatorname{tg}\varphi=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}，即\ \varphi=k\pi\pm\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}\ (k\in J).$$

$$\therefore \theta=2m\pi+\frac{\pi}{2}\mp 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (m\in J).$$

[说明] 两直线 $a_1x+b_1y+c_1=0$ 和 $a_2x+b_2y+c_2=0$ 重合时，不能认为 $a_1=a_2$, $b_1=b_2$, $c_1=c_2$. 而应是 $a_1=\lambda a_2$, $b_1=\lambda b_2$, $c_1=\lambda c_2$, 其中 λ 为不等于零的常数.

240. 在 $\triangle ABC$ 中，三边 a、b、c 为三内角 A、B、C 的对边，且 $\lg\sin A$、$\lg\sin B$、$\lg\sin C$ 成等差数列. 求证：直线 $x\sin^2 A+y\sin A=a$ 和 $x\sin^2 B+y\sin C=c$ 重合.

[证] $\because$ $\lg\sin A$、$\lg\sin B$、$\lg\sin C$ 成等差数列，$\therefore$ $2\lg\sin B=\lg\sin A+\lg\sin C$. 故 $\sin^2 B=\sin A\sin C$, 且 $\sin A$、$\sin B$、$\sin C$ 均为正数，

$$\therefore \quad \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}=\frac{\sin^2 A}{\sin A\sin C}=\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{a}{c},$$

故题设的两直线重合.

§5. 直 线 系

241. 设 λ、μ 是不全为零的两任意常数，求证：

(1) $\lambda(A_1x+B_1y+C_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2)=0$ 为过直线 l_1: $A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 l_2: $A_2x+B_2y+C_2=0$ 交点的直线方程；

(2) 过 l_1、l_2 交点的任一直线的方程都可表示为

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2)=0.$$

[分析] (1) 欲证所给的等式为过两已知直线 l_1、l_2 交点的直线，只需证明它是一次方程，且直线 l_1、l_2 的交点坐标适合此方程即可.

(2) 欲证过 l_1、l_2 交点的任一直线都可用这样的形式表示，可以先写出直线方程，然后证明它确能化成这样的形式.

[证] (1) 当 λ、μ 中有一为零时，$\lambda(A_1x+B_1y+C_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2)=0\cdots$① 即为 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 或 $A_2x+B_2y+C_2=0$, 结论显然成立. 当 $\lambda\mu\neq 0$ 时，由 ① 得 $(\lambda A_1+\mu A_2)x+(\lambda B_1+\mu B_2)y+\lambda C_1+\mu C_2=0\cdots$②. 若 ② 中 x、y 的系数都为 0, 即 $\lambda A_1=-\mu A_2$, $\mu B_2=-\lambda B_1$, 则两式相乘可得 $\lambda\mu A_1B_2=\lambda\mu A_2B_1$, 即 $A_1B_2=A_2B_1$. 这和直线 l_1、l_2 相交推得的 A_1B_2

$\neq A_2B_1$ 矛盾，故 ② 式中 x、y 的系数不全为零，从而 ① 式为一直线方程. 又设(x_0, y_0)是直线 l_1、l_2 的交点，则 $A_1x_0+B_1y_0+C_1=0$, $A_2x_0+B_2x_0+C_2=0$, 于是 $\lambda(A_1x_0+B_1y_0+C_1)+\mu(A_2x_0+B_2y_0+C_2)=0$. ∴ ① 式为过直线 l_1、l_2 交点的直线方程.

(2) 仍设(x_0, y_0)是直线 l_1、l_2 的交点，l 为过点(x_0, y_0)的任一直线. 在 l 上任取异于(x_0, y_0)的一点(x_1, y_1), 则 $A_1x_1+B_1y_1+C_1$ 和 $A_2x_1+B_2y_1+C_2$ 至少有一不等于零，且 l 的方程可表示为$(y-y_0)(x_0-x_1)=(x-x_0)\cdot(y_0-y_1)$, 即$(y_0-y_1)x-(x_0-x_1)y+(x_0y_1-x_1y_0)=0\cdots$③. ∵ (x_0, y_0) 是直线 l_1、l_2 的交点，∴ $x_0=\dfrac{B_1C_2-C_1B_2}{A_1B_2-B_1A_2}$, $y_0=\dfrac{C_1A_2-A_1C_2}{A_1B_2-B_1A_2}$. 代入 ③，得

$$[(C_1A_2-A_1C_2)-(A_1B_2-B_1A_2)y_1]x-[(B_1C_2-C_1B_2)$$
$$-(A_1B_2-B_1A_2)x_1]y+[(B_1C_2-C_1B_2)y_1-(C_1A_2-A_1C_2)x_1]=0.$$

即 $$[A_2(B_1y_1+C_1)-A_1(B_2y_1+C_2)]x+[B_2(A_1x_1+C_1)$$
$$-B_1(A_2x_1+C_2)]y+[C_2(A_1x_1+B_1y_1)-C_1(A_2x_1+B_2y_1)]=0,$$

亦即 $$[A_2(A_1x_1+B_1y_1+C_1)-A_1(A_2x_1+B_2y_1+C_2)]x$$
$$+[B_2(A_1x_1+B_1y_1+C_1)-B_1(A_2x_1+B_2y_1+C_2)]y$$
$$+C_2(A_1x_1+B_1y_1+C_1)-C_1(A_2x_1+B_2y_1+C_2)=0.$$

化简得
$$-(A_2x_1+B_2y_1+C_2)(A_1x+B_1y+C_1)$$
$$+(A_1x_1+B_1y_1+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)=0\cdots④.$$

取 $\lambda=-(A_2x_1+B_2y_1+C_2)$, $\mu=A_1x_1+B_1y_1+C_1$, 则 λ、μ 不全为零. 于是过 l_1、l_2 交点的任一直线 l 的方程都可表示为

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2)=0.$$

242. **求过两直线 $2x-3y=1$、$3x+2y=2$ 的交点，且平行于直线 $y+3x=0$ 的直线方程.**

［解］ 设所求直线方程为 $2x-3y-1+\lambda(3x+2y-2)=0$, 即$(2+3\lambda)x+(2\lambda-3)y-1-2\lambda=0\cdots$①. ∵ 此直线和直线 $y+3x=0$ 平行，∴ $-\dfrac{2+3\lambda}{2\lambda-3}=-3$, 由此求得 $\lambda=\dfrac{11}{3}$. 代入 ①，即得所求的方程 $39x+13y-25=0$.

［说明］ 要求过两直线交点的某一直线方程，可先写出过该交点的直线系方程，再根据其它条件确定常数 λ.

243. 求过两直线 $3x-2y+5=0$ 和 $5x+4y-3=0$ 的交点，且过定点 $P(1, 3)$ 的直线方程.

［解］ 经过两直线交点的直线系方程为 $3x-2y+5+\lambda(5x+4y-3)=0$.
$\because$ 所求直线过 $P(1, 3)$， $\therefore$ $3-6+5+\lambda(5+12-3)=0$, 解得 $\lambda=-\frac{1}{7}$.
故所求直线方程为 $8x-9y+19=0$.

244. 已知一直线通过$(-2, 2)$，且与两轴构成单位面积的三角形. 求此直线的方程.

［分析］ 所求直线过一已知点，如能求得其斜率即能确定其方程. 而斜率一定时，此直线与两坐标轴所构成的直角三角形的两直角边的长度随之而定，从而面积也被确定，故可根据此直角三角形的面积求出所求直线的斜率.

［解］ 过$(-2, 2)$的直线系方程为 $y-2=k(x+2)$. 它与 x 轴、y 轴交点为$\left(\frac{-2k-2}{k}, 0\right)$与$(0, 2k+2)$. 由已知，$\frac{1}{2}\left|\left(\frac{-2k-2}{k}\right)(2k+2)\right|=1$，即 $2k^2+4k+2=|k|$. 当 $k>0$ 时，方程 $2k^2+3k+2=0$ 无实数解；当 $k<0$ 时，由方程 $2k^2+5k+2=0$ 解得 $k=-2$ 或 $k=-\frac{1}{2}$. 故所求直线方程为 $2x+y+2=0$ 和 $x+2y-2=0$.

［说明］ 若过点$(-2, 2)$的直线与两轴构成面积为 S 的三角形，则 $2k^2+4k+2=|k|\cdot S$. 当 $k>0$ 时，$2k^2+(4-S)k+2=0$. $\Delta=(4-S)^2-16\geqslant 0$. 当 $S=8$ 时，k 有一解；当 $S>8$ 时，k 有两解；当 $S<8$ 时，$\Delta<0$，无解. 当 $k<0$ 时，$2k^2+(4+S)k+2=0$，$\Delta=(4+S)^2-16>0$，k 总有两解. 故若构成的三角形面积 $S=8$，则所求直线有三条；若 $S>8$，则所求直线有四条；若 $S<8$，则所求直线只有两条.

245. 过直线 $x-2y-3=0$ 和 $2x-3y-2=0$ 的交点作一直线，使它与两坐标轴相交所成三角形的面积为 5 平方单位. 求此直线方程.

［分析］ 所求的直线过两已知直线的交点，故可利用过两直线交点的直线系方程. 方程中的参量一定时，题中所述的直角三角形的两直角边长及

面积也随之而定，由此可决定参数.

［解］ 设所求直线为$(x-2y-3)+\lambda(2x-3y-2)=0\cdots$①，即$(1+2\lambda)x-(2+3\lambda)y=3+2\lambda$. 它在$x$轴、$y$轴上截距分别为$\frac{3+2\lambda}{1+2\lambda}$、$-\frac{3+2\lambda}{2+3\lambda}$. 由题意，$\frac{1}{2}\left|\frac{3+2\lambda}{1+2\lambda}\cdot\left(-\frac{3+2\lambda}{2+3\lambda}\right)\right|=5$，即$4\lambda^2+12\lambda+9=\pm(60\lambda^2+70\lambda+20)$，得$56\lambda^2+58\lambda+11=0\cdots$② 与$64\lambda^2+82\lambda+29=0$（无实数解），由②得$\lambda=-\frac{11}{14}$，$\lambda=-\frac{1}{4}$. 分别代入①，即得所求直线方程：

$$8x-5y+20=0,\quad 2x-5y-10=0.$$

246. 求垂直于$3x-4y=7$，且适合下列条件的直线方程：(1) 与两轴构成的三角形周长为10单位长度；(2) 与原点的距离为4单位长度；(3) 被两轴截得的线段的中点为(3, 4).

［分析］ (1)中所求直线垂直于已知直线，故它一定可表示为$4x+3y=m$的形式，其中参数m的值可利用与两轴构成的三角形周长为10的条件确定. (2)、(3)同理可解.

［解］ (1) 与$3x-4y=7$垂直的直线系方程为$4x+3y=m$，它与x轴、y轴的交点分别为$\left(\frac{m}{4},0\right)$和$\left(0,\frac{m}{3}\right)$. ∵所求直线与两轴构成的三角形周长为10，∴$\sqrt{\left(\frac{m}{4}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^2}+\frac{|m|}{4}+\frac{|m|}{3}=10$，即$\frac{5|m|}{12}+\frac{|m|}{4}+\frac{|m|}{3}=10$. ∴$|m|=10$，$m=\pm10$. 故所求直线的方程为

$$4x+3y\pm10=0.$$

(2) ∵直线$4x+3y=m$与原点的距离：$\frac{|m|}{\sqrt{4^2+3^2}}=4$，∴$m=\pm20$. 故所求直线的方程为$4x+3y\pm20=0$.

(3) 两点$\left(\frac{m}{4},0\right)$、$\left(0,\frac{m}{3}\right)$的中点为$\left(\frac{m}{8},\frac{m}{6}\right)$，由$\frac{m}{8}=3$与$\frac{m}{6}=4$，得$m=24$. 故所求直线的方程为$4x+3y=24$.

247. 求过点$P(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$，且与直线$\frac{x}{a}\cos\varphi+\frac{y}{b}\sin\varphi=1$垂直的直线方程.

［分析］ 先写出与已知直线垂直的直线系方程，然后利用过点P的条件确定该直线.

［解］ 设与直线$\frac{x}{a}\cos\varphi+\frac{y}{b}\sin\varphi=1$垂直的直线系方程为$\frac{x}{b}\sin\varphi-\frac{y}{a}\cos\varphi=\lambda$. ∵ 过点$P(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$，∴ $\lambda=\frac{a^2-b^2}{ab}\sin\varphi\cos\varphi$. 故所求直线方程为$ax\sin\varphi-by\cos\varphi=(a^2-b^2)\sin\varphi\cos\varphi$. 如果$\varphi\neq\frac{n\pi}{2}(n\in J)$，又可化为$\frac{ax}{\cos\varphi}-\frac{by}{\sin\varphi}=a^2-b^2$.

248. 求过点$P(a\sec\varphi,\ b\operatorname{tg}\varphi)$，且与直线$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\sin\varphi=\cos\varphi$垂直的直线方程.

［解］ 设与直线$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\sin\varphi=\cos\varphi$垂直的直线系方程为$ax\sin\varphi+by=\lambda$. ∵ 过点$P(a\sec\varphi,\ b\operatorname{tg}\varphi)$，∴ $\lambda=(a^2+b^2)\operatorname{tg}\varphi$. 故所求直线方程为$ax\sin\varphi+by=(a^2+b^2)\operatorname{tg}\varphi$.

249. 求过点$P(at^2,\ 2at)$，且与直线$x-ty+at^2=0$垂直的直线方程.

［解］ 设与直线$x-ty+at^2=0$垂直的直线系方程为$tx+y=\lambda$（λ为任意常数）. ∵ 所求直线过点$P(at^2,\ 2at)$，∴ $\lambda=at^3+2at$. 故所求直线方程为$tx+y=at^3+2at$.

250. 过直线$2x+y+8=0$和$x+y+3=0$的交点作一条直线，使它夹在两直线$x-y-5=0$和$x-y-2=0$之间的线段长等于3. 求此直线的方程.

［分析一］ 所求直线过两已知直线的交点，故可求出交点后用直线的点斜式解之. 再由题设条件求出其斜率即得解.

［解一］ 解$\begin{cases}2x+y+8=0\\x+y+3=0,\end{cases}$得交点$(-5,\ 2)$. 设过交点的直线系方程为$y-2=k(x+5)$或$x=-5$. 从$\begin{cases}y-2=k(x+5)\\x-y-5=0\end{cases}$得交点$\left(\frac{5k+7}{1-k},\ \frac{10k+2}{1-k}\right)$，从$\begin{cases}y-2=k(x+5)\\x-y-2=0\end{cases}$得交点$\left(\frac{5k+4}{1-k},\ \frac{7k+2}{1-k}\right)$. 由已知

$$\sqrt{\left(\frac{3}{1-k}\right)^2+\left(\frac{3k}{1-k}\right)^2}=3,$$

解得 $k=0$. 又从 $\begin{cases}x=-5\\x-y-5=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=-5\\x-y-2=0\end{cases}$ 分别得交点 $(-5,\ -10)$ 和 $(-5,\ -7)$. $\because \sqrt{(-5+5)^2+(-7+10)^2}=3$, 故所求的直线为

$$y-2=0 \text{ 或 } x=-5.$$

［分析二］ 因所求的直线过两已知直线的交点，故也可考虑用直线的参数式解之.

［解二］ 解 $\begin{cases}2x+y+8=0\\x+y+3=0,\end{cases}$ 得交点 $(-5,\ 2)$. 设所求直线方程为

$$\begin{cases}x=-5+t\cos\alpha\\y=2+t\sin\alpha\end{cases}\ (t \text{ 为参数})\cdots①.$$

以①式代入方程 $(x-y-5)(x-y-2)=0$, 并整理成 t 的二次方程 $(\cos\alpha-\sin\alpha)^2t^2-21(\cos\alpha-\sin\alpha)t+108=0$. 由于所求直线和直线 $x-y-5=0$, $x-y-2=0$ 都相交，故上述方程有两解 t_1、t_2, 且 $t_1+t_2=\dfrac{21}{\cos\alpha-\sin\alpha}$, $t_1\cdot t_2=\dfrac{108}{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}$. 又从已知条件，得 $(t_1-t_2)^2=9$,

即
$$\frac{21^2}{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}-4\cdot\frac{108}{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}=9,$$

化简得 $\sin 2\alpha=0$. $\because \alpha\in[0,\ \pi)$, $\therefore \alpha=0$ 或 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$. 故所求的直线方程为 $\begin{cases}x=-5+t\\y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-5\\y=2+t.\end{cases}$ 即 $y-2=0$ 或 $x+5=0$.

［说明］ (1) 在利用直线的点斜式求直线方程时，要注意斜率不存在的情况. 如本题中的 $x+5=0$ 就是一例.

(2) 利用直线的参数式时，不必考虑直线的斜率是否存在. 事实上，任何一条直线方程都可用参数式表示. 问题中如牵涉到共线的点的距离时，用直线的参数式往往比较方便.

251. 一直线经过点 $(1,\ 2)$, 且被两平行直线 $4x+3y+1=0$ 和 $4x+3y+6=0$ 截得的线段长为 $\sqrt{2}$, 求这直线的方程.

［解一］ 设所求直线的方程为 $y-2=k(x-1)$, 分别与两已知直线方程

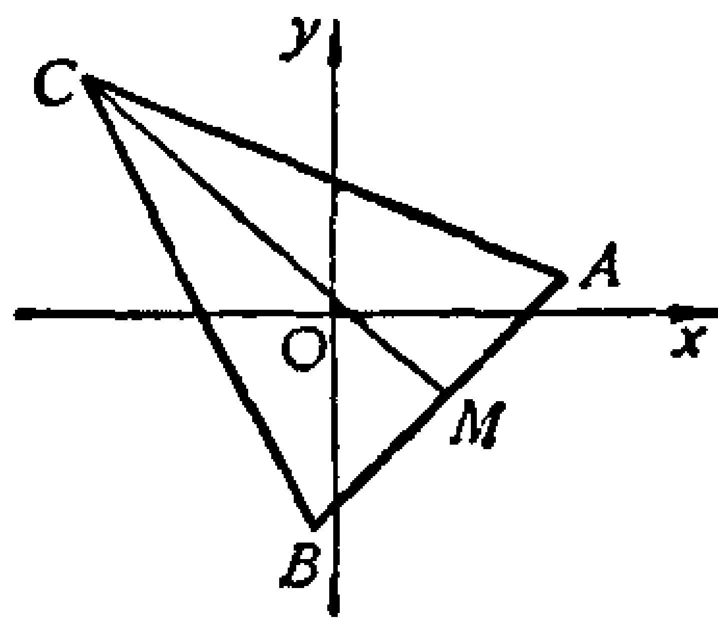
联立，求出它与两平行线的交点 A、B 的坐标为 $\left(\frac{3k-7}{3k+4}, \frac{-5k+8}{3k+4}\right)$ 和 $\left(\frac{3k-12}{3k+4}, \frac{8-10k}{3k+4}\right)$. 而 $|AB|=\sqrt{\left(\frac{5}{3k+4}\right)^2+\left(\frac{5k}{3k+4}\right)^2}=\sqrt{2}$，即 $\frac{5\sqrt{1+k^2}}{|3k+4|}=\sqrt{2}$，整理得 $(7k+1)(k-7)=0$. 解得 $k=-\frac{1}{7}$ 或 7. 故所求直线的方程为 $x+7y-15=0$ 或 $7x-y-5=0$.

［解二］ 设所求直线的倾角为 θ，方程为 $\begin{cases}x=1+t\cos\theta\\ y=2+t\sin\theta,\end{cases}$ 代入两已知直线方程，分别求出 $t_1=\frac{-11}{4\cos\theta+3\sin\theta}$，$t_2=\frac{-16}{4\cos\theta+3\sin\theta}$. $\because |t_1-t_2|=\sqrt{2}$，$\therefore \sqrt{2}\,|4\cos\theta+3\sin\theta|=5$，$\sqrt{2}\,|4+3\operatorname{tg}\theta|=5|\sec\theta|$. 两边平方，得 $2(16+24\operatorname{tg}\theta+9\operatorname{tg}^2\theta)=25(1+\operatorname{tg}^2\theta)$，$7\operatorname{tg}^2\theta-48\operatorname{tg}\theta-7=0$. 解得 $\operatorname{tg}\theta=-\frac{1}{7}$ 或 7. 故所求直线的方程为 $x+7y-15=0$ 或 $7x-y-5=0$.

252. **某直线在两已知直线 $3x-5y=6$，$4x+y+6=0$ 之间的线段的中点，适为坐标原点. 求这直线的方程.**

［分析］ 欲求过原点的直线方程只需求该直线的倾角，利用直线参数方程中 t 的几何意义即可得解.

［解］ 设过原点的直线参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数，α 为倾角）. 代入两已知直线的方程，得 $[(3\cos\alpha-5\sin\alpha)t-6][(4\cos\alpha+\sin\alpha)t+6]=0$. $\because$ 原点平分在此两直线间的线段，$\therefore$ 方程的两根 t_1、t_2 应满足 $t_1+t_2=0$，即 $6(3\cos\alpha-5\sin\alpha)-6(4\cos\alpha+\sin\alpha)=0$，化简得 $\cos\alpha+6\sin\alpha=0$. $\because \cos\alpha\neq0$，$\therefore \operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{6}$. 故 $\frac{y}{x}=-\frac{1}{6}$，即 $x+6y=0$. 此即所求直线的方程.



253. **已知 $\triangle ABC$ 的三边的方程为 AB: $x-y-3=0$，BC: $2x+y+4=0$，CA: $2x+5y-10=0$，不通过三顶点的坐标，试求 AB 边上的中线 CM 的方程.**

［分析］ AB 边上的中线，即与边 AB 平行的直线系被边 BC、CA 所截得的线段的中点的轨迹.

［解］ 与 AB 边平行的直线系为 $x-y=\lambda\cdots$①(λ 为参数)；边 BC、CA 的方程为 $(2x+y+4)(2x+5y-10)=0\cdots$②. ① 代入 ②，得 $(2x+x-\lambda+4)\cdot(2x+5x-5\lambda-10)=0$，即 $21x^2-(22\lambda+2)x+(\lambda-4)(5\lambda+10)=0\cdots$③. $\therefore$ 直线系 ① 与边 BC、CA 的两交点 Q_1、Q_2 的横坐标 x_1、x_2 是方程 ③ 的根. 而 Q_1Q_2 的中点 P 的横坐标为 $x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=\frac{11\lambda+1}{21}\cdots$④，从 ①、④ 消去 λ，即得中线 CM 的方程 $10x+11y-1=0$.

§6. 用二次或高次方程表示的直线

254. 证明：若 $B^2-4AC\geqslant 0$，则方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ 表示过原点的两条直线.

［分析］ 根据曲线和方程的关系，只需证明所给出的方程的左端能分解成两个实系数一次齐次式的乘积即可.

［证］ 当 $C=0$ 时，$Ax^2+Bxy+Cy^2=Ax^2+Bxy=x(Ax+By)$，故方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ 可表示两直线：$x=0$ 和 $Ax+By=0$. 显然，这两条直线均过原点. 当 $C\neq 0$ 时，因为 $B^2-4AC\geqslant 0$，故 $Ax^2+Bxy+Cy^2=C(y-k_1x)(y-k_2x)$；而 k_1、k_2 为方程 $Ck^2+Bk+A=0$ 的两实根，这样，方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ 也可表示为两直线 $y-k_1x=0$ 和 $y-k_2x=0$. 显然，这两条直线也均过原点. 由此可见，当 $B^2-4AC\geqslant 0$ 时，方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ 总可表示两条过原点的直线.

255. 方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ 表示不相重合的两直线 l_1、l_2，求：(1) 直线 l_1、l_2 夹角的两条角平分线的方程；(2) 直线 l_1、l_2 夹角的正切.

［分析一］ 因为两直线夹角的平分线方程及其正切都可用这两直线方程中的系数表示，所以可先将所给方程的左端写成两个一次式的乘积. 然后通过求它们系数之间的关系而解之.

［解一］ (1) 设方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ 所表示的两直线 l_1、l_2 的方程

分别为 $mx+ny=0$ 和 $qx+py=0$, 则 $Ax^2+Bxy+Cy^2\equiv(mx+ny)(qx+py)$.

$\therefore\ \begin{cases}A=mq\\ B=mp+nq\cdots①\\ C=np\end{cases}$. 而所求的角平分线方程为 $\dfrac{|qx+py|}{\sqrt{q^2+p^2}}=\dfrac{|mx+ny|}{\sqrt{m^2+n^2}}$, 即 $(m^2+n^2)(qx+py)^2=(q^2+p^2)(mx+ny)^2$, 化简可得

$$(n^2q^2-m^2p^2)x^2+2[pq(m^2+n^2)-mn(q^2+p^2)]xy+(m^2p^2-q^2n^2)y^2=0,$$

亦即 $(nq-mp)[(nq+mp)x^2+2(np-mq)xy-(nq+mp)y^2]=0$. 因方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ 表示两不相重合的直线, 所以

$$B^2-4AC=(mp+nq)^2-4mnqp=(mp-nq)^2>0,\quad \therefore\quad mp-nq\neq 0,$$

故 $$(nq+mp)x^2+2(np-mq)xy-(nq+mp)y^2=0.$$

以 ① 代入, 即可得所求的表示两角平分线的方程为

$$Bx^2+2(C-A)xy-By^2=0.$$

(2) 仍如(1)中所设: $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ 表示的两直线的方程为 $mx+ny=0$ 和 $qx+py=0$. 当且仅当 $mq+np=0$ 时, 即 $A+C=0$ 时, 两直线垂直, 此时夹角的正切不存在; 当 $mq+np\neq 0$ 时, 设两直线的夹角为 θ, 则

$$\operatorname{tg}^2\theta=\left(\frac{mp-nq}{mq+np}\right)^2=\frac{(mp+nq)^2-4mq\cdot np}{(mq+np)^2}=\frac{B^2-4AC}{(A+C)^2}.$$

显然 $B^2-4AC>0$, $\therefore \operatorname{tg}\theta=\pm\dfrac{\sqrt{B^2-4AC}}{A+C}$.

[分析二] 欲求两直线 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ 的夹角平分线方程, 可先将 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ 化为两个一次方程, 再行推求. 当 $C\neq 0$ 时, 可以利用两直线的斜率 k_1、k_2 是方程 $Ck^2+Bk+A=0$ 的根, 进行推求. 当 $C=0$ 时, $\because \varDelta>0$, $\therefore B\neq 0$. 从而可知两直线为 $x=0$, $Ax+By=0$. 由此可求得夹角平分线的方程.

[解二] 当 $C=0$ 时, $\because \varDelta=B^2-4AC>0$, $\therefore B\neq 0$, 可将原方程化为 $x(Ax+By)=0$. 两直线方程为 $x=0$, $Ax+By=0$; 其夹角平分线方程为 $|x|=\dfrac{Ax+By}{\sqrt{A^2+B^2}}$, 即 $x^2-\left(\dfrac{Ax+By}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2=0$, $Bx^2-2Axy-By^2=0$. $\because C=0$, $\therefore Bx^2+2(C-A)xy-By^2=0$. 当 $C\neq 0$ 时, $\because \varDelta=B^2-4AC>0$, $\therefore Ax^2+Bxy+Cy^2=C(y-k_1x)(y-k_2x)=0$. k_1、k_2 是方程 $Ck^2+Bk+A=0$

的两实根，$\therefore k_1+k_2=-\frac{B}{C}\cdots$①，$k_1k_2=\frac{A}{C}\cdots$②. 两直线夹角平分线方程为

$$\frac{y-k_1x}{\sqrt{1+k_1^2}}=\pm\frac{y-k_2x}{\sqrt{1+k_2^2}},\quad 即\quad \left(\frac{y-k_1x}{\sqrt{1+k_1^2}}\right)^2-\left(\frac{y-k_2x}{\sqrt{1+k_2^2}}\right)^2=0,$$

$$(1+k_2^2)(y^2-2k_1xy+k_1^2x^2)-(1+k_1^2)(y^2-2k_2xy+k_2^2x^2)=0,$$

$$(k_1^2-k_2^2)x^2-2[k_1-k_2+k_1k_2(k_2-k_1)]xy-(k_1^2-k_2^2)y^2=0.$$

$\because \Delta>0$，$\therefore k_1\neq k_2$，$\therefore (k_1+k_2)x^2-2[1-k_1k_2]xy-(k_1+k_2)y^2=0$. 以①、②代入得 $Bx^2+2(C-A)xy-By^2=0$.

［说明］ 从本题结论可得两直线 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ 互相垂直的充要条件为 $A+C=0$，它们的角平分线方程为 $Bx^2+2(C-A)xy-By^2=0$. 这两结果，在解题中有不少应用.

256. 求两直线 $2x^2-5xy+y^2=0$ 所夹的角 θ.

［解］ 利用上题结论，$\because$ 所给方程中 x^2 和 y^2 的系数之和 $2+1\neq 0$，

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\theta=\pm\frac{\sqrt{5^2-4\times 2\times 1}}{2+1}=\pm\frac{\sqrt{17}}{3}.$$

故 $\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{17}}{3}$，或 $\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{17}}{3}$.

［说明］ 因为两直线的夹角一般总是指正角，所以对于 $\operatorname{tg}\theta=-\frac{\sqrt{17}}{3}$，不取 $\theta=-\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{17}}{3}$，而取 $\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{17}}{3}$.

257. 设直线 $lx+my+n=0(n\neq 0)$ 与二次曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 交于 P、Q 两点，求证：P、Q 与原点 O 的连线方程为

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+(Dx+Ey)\left(-\frac{lx+my}{n}\right)+F\left(-\frac{lx+my}{n}\right)^2=0\cdots(*).$$

［分析］ 欲得本题结论，只需证明直线 OP、OQ 上的点的坐标都满足方程(*)，而方程(*)的左端又一定能分解成两个一次因式，再说明这两个一次因式等于零所得的方程就是 OP、OQ 的方程即可.

［证］ 设点 P 的坐标为$(x_1,\ y_1)$，则 $lx_1+my_1+n=0$，即

$$-\frac{lx_1+my_1}{n}=1\cdots①;$$

$$Ax_1^2+Bx_1y_1+Cy_1^2+Dx_1+Ey_1+F=0\cdots②.$$

又直线 OP 上的点均可表示为 (tx_1, ty_1)，其中 t 为任意实数. ∵ 当 $x=tx_1$, $y=ty_1$ 时，方程(*)的左端:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+(Dx+Ey)\left(-\frac{lx+my}{n}\right)+F\left(-\frac{lx+my}{n}\right)^2$$

$$=t^2\left[Ax_1^2+Bx_1y_1+Cy_1^2+(Dx_1+Ey_1)\left(-\frac{lx_1+my_1}{n}\right)\right.$$

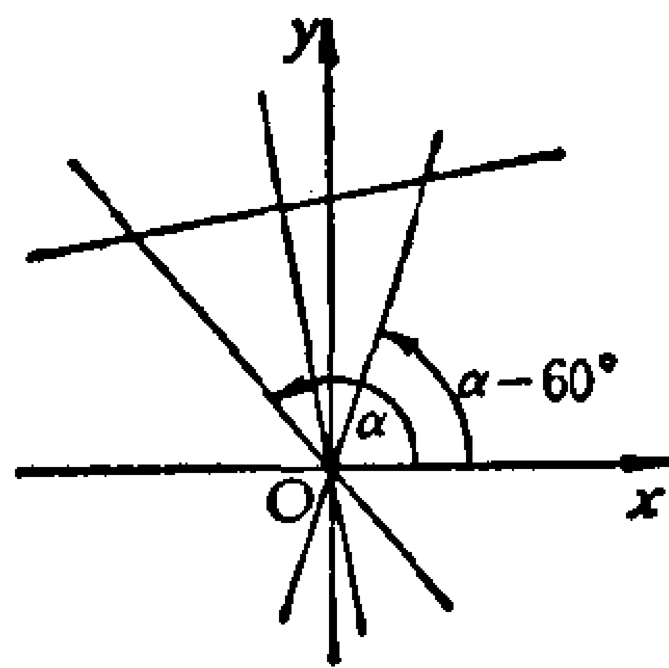
$$\left.+F\left(-\frac{lx_1+my_1}{n}\right)^2\right]=t^2(Ax_1^2+Bx_1y_1+Cy_1^2+Dx_1+Ey_1+F)=0,$$

∴ 直线 OP 上的点都在方程(*)所表示的曲线上. 同理可证，直线 OQ 上的点也都在方程(*)所表示的曲线上.

又设直线 OP、OQ 的方程分别为 $a_1x+b_1y=0$ 和 $a_2x+b_2y=0$，则由上证明可知方程(*)的左端必有因式 a_1x+b_1y 和 a_2x+b_2y. 由于方程(*)的左端为二次式，根据多项式因式分解的唯一性，方程(*)必与 $a_1x+b_1y=0$、$a_2x+b_2y=0$ 两方程同解，∴ P、Q 与原点 O 的连线方程即为方程(*).

[说明] (1) 本题结论即提要(3.120)，在研究二次曲线有关性质时有广泛应用. (2) 事实上，本题在证明了曲线(*)过原点与原点外两点 P、Q 以后，因(*)为二元二次齐次方程，即可判定(*)表示 OP、OQ 两直线.

258. 求证：(1) 两直线 $y^2(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)\cos\alpha-xy(\sin 2\alpha-\sqrt{3}\cos 2\alpha)+x^2(\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha)\sin\alpha=0$ 所夹的锐角为 $60°$；(2) 由上述两直线与直线 $(\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha)y-(\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha)x+a=0$ 组成的三角形为正三角形，面积为 $\frac{\sqrt{3}}{12}a^2$ $(90°<\alpha<180°)$.



[分析] 把两直线方程分解成两个一次式乘积，求出每一条直线的倾角，再证明它们的差为 $60°$.

[证] (1) 方程 $y^2(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)\cos\alpha-xy(\sin 2\alpha-\sqrt{3}\cos 2\alpha)+x^2(\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha)\sin\alpha=0$，即 $y^2\cos(\alpha-60°)\cos\alpha-xy\sin(2\alpha-60°)+$

$x^2\sin(\alpha-60°)\sin\alpha=0$. 分解得

$$[y\cos\alpha-x\sin\alpha][y\cos(\alpha-60°)-x\sin(\alpha-60°)]=0.$$

故两直线为 $y\cos\alpha-x\sin\alpha=0$ 和 $y\cos(\alpha-60°)-x\sin(\alpha-60°)=0$.

∴ 它们的倾角分别为 α 和 $\alpha-60°$. ∴ 两直线所夹的锐角为 60°.

(2) 题设中的三角形的一边在直线

$$(\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha)y-(\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha)x+a=0$$

上，即 $x\cos(\alpha-30°)+y\sin(\alpha-30°)-\frac{a}{2}=0$. 而这边上的高过原点，故其方程即为 $y\cos(\alpha-30°)-x\sin(\alpha-30°)=0$. 其倾角为 $\alpha-30°$，正好是前两直线的夹角平分线. 根据等腰三角形判定定理，三直线围成顶角为 60° 的等腰三角形必为正三角形. 此正三角形的高为 $\frac{|a|}{2}$，底边为 $\frac{|a|}{\sqrt{3}}$，

$$\therefore\quad \text{正三角形面积}=\frac{1}{2}\cdot\frac{|a|}{2}\cdot\frac{|a|}{\sqrt{3}}=\frac{a^2}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2.$$

259. 求点 $P(a, b)$ 到两直线 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ 的距离的乘积.

[解] 设方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ 所表示的两直线的方程为 $lx+my=0$ 和 $px+qy=0$，则 $Ax^2+Bxy+Cy^2=(lx+my)(px+qy)$. 由此可得

$$\begin{cases}A=lp\\ B=lq+mp\cdots①.\\ C=mq\end{cases}$$

点 $P(a, b)$ 到两直线 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ 的距离乘积为

$$\begin{aligned}\frac{|la+mb|}{\sqrt{l^2+m^2}}\cdot\frac{|pa+qb|}{\sqrt{p^2+q^2}}&=\frac{|lpa^2+(lq+mp)ab+mqb^2|}{\sqrt{(l^2+m^2)(p^2+q^2)}}\\&=\frac{|lpa^2+(lq+mp)ab+mqb^2|}{\sqrt{(lp-mq)^2+(lq+mp)^2}}.\end{aligned}$$

以 ① 式代入，即得所求距离的乘积为 $\frac{|Aa^2+Bab+Cb^2|}{\sqrt{(A-C)^2+B^2}}$.

260. 求两直线 $Ax^2+2Hxy+By^2=0$ 和直线 $lx+my+n=0$ $(n\neq0)$ 所交成的三角形面积.

［解］ 设两直线 $Ax^2+2Hxy+By^2=0\cdots$① 和直线 $lx+my+n=0\cdots$② 的交点为 $P(x_1,y_1)$ 和 $Q(x_2,y_2)$. 当 $m\neq0$ 时，由②可得 $y=-\dfrac{lx+n}{m}\cdots$③，故 $y_1=-\dfrac{lx_1+n}{m}$, $y_2=-\dfrac{lx_2+n}{m}$.

$$\therefore\quad 所求的三角形面积\ S_{\triangle POQ}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{x_2(lx_1+n)}{m}-\frac{x_1(lx_2+n)}{m}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{n}{m}(x_2-x_1)\right|\cdots④.$$

③代入①，并整理得 $(Am^2-2Hml+Bl^2)x^2-2n(Hm-Bl)x+Bn^2=0$, x_1、x_2 即为此方程的两根.

$$\therefore\quad x_1+x_2=\frac{2n(Hm-Bl)}{Am^2-2Hml+Bl^2},\qquad x_1\cdot x_2=\frac{Bn^2}{Am^2-2Hml+Bl^2}.$$

故 $$(x_2-x_1)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{4m^2n^2(H^2-AB)}{(Am^2-2Hml+Bl^2)^2}.$$

$$\therefore\quad |x_2-x_1|=\frac{2|mn|\sqrt{H^2-AB}}{|Am^2-2Hml+Bl^2|}.$$

代入④，得 $S_{\triangle POQ}=\dfrac{n^2\sqrt{H^2-AB}}{|Am^2-2Hml+Bl^2|}\cdots$⑤. 当 $m=0$ 时，则 $l\neq0$，由②得 $x=-\dfrac{n}{l}\cdots$⑥，故 $x_1=x_2=-\dfrac{n}{l}$. 此时 $S_{\triangle POQ}=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{n}{l}(y_1-y_2)\right|\cdots$⑦. 以⑥代入①，并整理得 $Bl^2y^2-2Hnly+An^2=0$，则 y_1、y_2 为其两根.

$$\therefore\quad y_1+y_2=\frac{2Hn}{Bl},\qquad y_1\cdot y_2=\frac{An^2}{Bl^2},$$

$$\therefore\quad |y_1-y_2|=\frac{2|n|\sqrt{H^2-AB}}{|Bl|}.$$

代入⑦，得 $S_{\triangle POQ}=\dfrac{n^2\sqrt{H^2-AB}}{|Bl^2|}$. 此式即为⑤式中 $m=0$ 时的情形，故所求的三角形面积为 $\dfrac{n^2\sqrt{H^2-AB}}{|Am^2-2Hml+Bl^2|}$.

261. 求证两直线 $(A^2-3B^2)x^2+8ABxy+(B^2-3A^2)y^2=0$ 与直线 $Ax+By+C=0$ 组成的三角形是正三角形，其面积为 $S=\dfrac{\sqrt{3}C^2}{3(A^2+B^2)}\ (C\neq 0)$.

[分析一] 求出两直线$(A^2-3B^2)x^2+8ABxy+(B^2-3A^2)y^2=0$ 与直线 $Ax+By+C=0$ 的交点，根据距离公式和面积公式证明.

[证一] $(A^2-3B^2)x^2+8ABxy+(B^2-3A^2)y^2=0$ 可以分解成两个一次式乘积:

$$[(A-\sqrt{3}B)x+(B+\sqrt{3}A)y][(A+\sqrt{3}B)x+(B-\sqrt{3}A)y]=0.$$

解方程组 $\begin{cases}(A-\sqrt{3}B)x+(B+\sqrt{3}A)y=0\\ Ax+By+C=0\end{cases}$ …①

和 $\begin{cases}(A+\sqrt{3}B)x+(B-\sqrt{3}A)y=0\\ Ax+By+C=0\end{cases}$ …②,

得 $\begin{cases}x=\dfrac{-BC-\sqrt{3}AC}{\sqrt{3}(A^2+B^2)}\\ y=\dfrac{AC-\sqrt{3}BC}{\sqrt{3}(A^2+B^2)}\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=\dfrac{BC-\sqrt{3}AC}{\sqrt{3}(A^2+B^2)}\\ y=\dfrac{-AC-\sqrt{3}BC}{\sqrt{3}(A^2+B^2)}\end{cases}$.

∴ 三角形三顶点坐标为 $O(0,0)$、$P\left(\dfrac{-C(B+\sqrt{3}A)}{\sqrt{3}(A^2+B^2)},\dfrac{C(A-\sqrt{3}B)}{\sqrt{3}(A^2+B^2)}\right)$、$Q\left(\dfrac{C(B-\sqrt{3}A)}{\sqrt{3}(A^2+B^2)},\dfrac{-C(A+\sqrt{3}B)}{\sqrt{3}(A^2+B^2)}\right)$.

$$|OP|=\sqrt{\frac{C^2(4A^2+4B^2)}{3(A^2+B^2)^2}}=\frac{2|C|}{\sqrt{3(A^2+B^2)}},$$

$$|OQ|=\sqrt{\frac{C^2(4A^2+4B^2)}{3(A^2+B^2)^2}}=\frac{2|C|}{\sqrt{3(A^2+B^2)}},$$

$$|PQ|=\sqrt{\frac{4C^2B^2}{3(A^2+B^2)^2}+\frac{4C^2A^2}{3(A^2+B^2)^2}}=\sqrt{\frac{4C^2(A^2+B^2)}{3(A^2+B^2)^2}}$$

$$=\frac{2|C|}{\sqrt{3(A^2+B^2)}}.$$

$|OP|=|OQ|=|PQ|$, ∴ $\triangle OPQ$ 是正三角形.

$$面积\ S=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{4C^2}{3(A^2+B^2)}=\frac{\sqrt{3}C^2}{3(A^2+B^2)}.$$

[分析二] 设两直线与第三直线的交点为 P、Q, 要证 $\triangle OPQ$ 为正三角形, 必须证 $\angle POQ=\frac{\pi}{3}$, 且 $|OP|=|OQ|$. 先从求 OP、OQ 的倾角入手, 再用第三直线的极坐标方程代入求 $|OP|$、$|OQ|$, 即可得证.

[证二] $\because (A^2-3B^2)x^2+8ABxy+(B^2-3A^2)y^2=[(A-\sqrt{3}B)x+(B+\sqrt{3}A)y][(A+\sqrt{3}B)x+(B-\sqrt{3}A)y]=0$. 如 $A\neq0$, 则两直线方程为 $(A-\sqrt{3}B)x+(B+\sqrt{3}A)y=0$ 和 $(A+\sqrt{3}B)x+(B-\sqrt{3}A)y=0$, 即 $y=\frac{\sqrt{3}B-A}{B+\sqrt{3}A}x=x\,\mathrm{tg}(\alpha-30°)$ 和 $y=\frac{A+\sqrt{3}B}{\sqrt{3}A-B}x=x\,\mathrm{tg}(\alpha+30°)$, 其中 $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{B}{A}$. $\therefore$ 此两直线的极坐标方程为 $\theta=\alpha-30°$ 和 $\theta=\alpha+30°$. $\therefore \angle POQ=60°$. 直线 $Ax+By+C=0$ 的极坐标方程为

$$\rho=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}\cos(\theta-\alpha)},$$

$$\therefore\quad |OP|=|OQ|=\frac{2C}{\sqrt{3(A^2+B^2)}}.$$

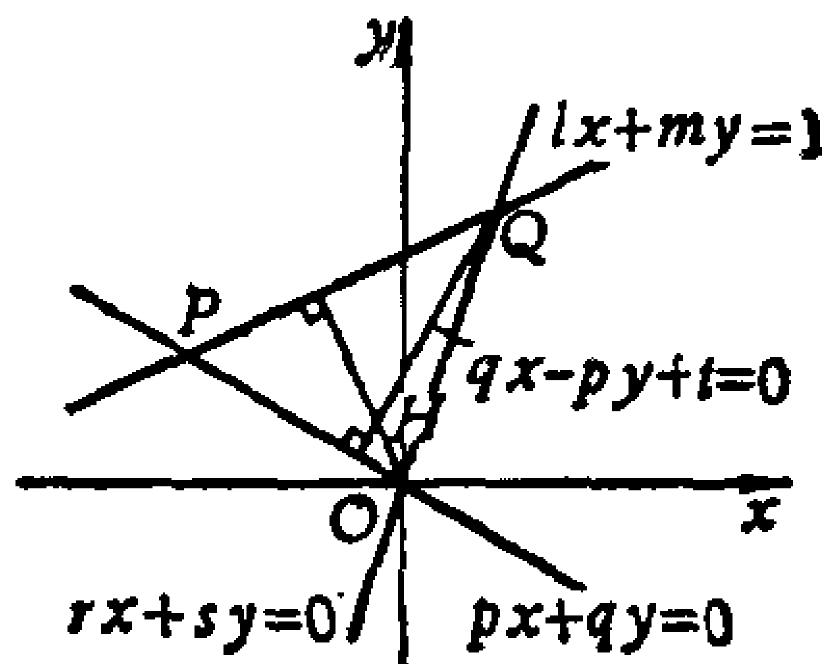
故 $\triangle OPQ$ 是正三角形. 面积为

$$S=\frac{1}{2}|OP|\,|OQ|\sin 60°=\frac{\sqrt{3}C^2}{3(A^2+B^2)}.$$

如 $A=0$, 则 $B\neq0$. 两直线方程为 $-3B^2x^2+B^2y^2=0$, 即 $y=\sqrt{3}x$; $y=-\sqrt{3}x$. 它们的夹角为 60°. 此时直线 $Ax+By+C=0$ 即为与 x 轴平行的直线 $By=-C$, 因此 $\triangle OPQ$ 是正三角形; 面积为 $S=\frac{\sqrt{3}C^2}{3B^2}$, 即 $A=0$ 时 $\frac{\sqrt{3}C^2}{3(A^2+B^2)}$ 的值.

262. 设直线 $ax^2+2hxy+by^2=0$ 与 $lx+my=1(lm\neq0)$ 组成的三角形的垂心为 $H(x', y')$. 求证:

$$\frac{x'}{l}=\frac{y'}{m}=\frac{a+b}{am^2-2hlm+bl^2}.$$



[分析] 由于结论涉及已知直线组成的三角形垂心坐标和直线方程的

系数之间的关系，故可考虑从求垂心坐标出发去证明.

[证] 设方程 $ax^2+2hxy+by^2=0$ 所表示的两条直线与直线 $lx+my=1$ 的交点为 P、Q，并设 OP、OQ 的方程分别为 $px+qy=0$ 和 $rx+sy=0$，则 $ax^2+2hxy+by^2=(px+qy)(rx+sy)$，由此可得 $\begin{cases}a=pr\\2h=ps+qr\\b=qs\end{cases}$ …①. 又 PQ 边上的高所在的直线方程为 $mx-ly=0$. 令 OP 边上的高所在的直线方程为 $qx-py+t=0$，则垂心 H 的坐标 (x', y') 适合方程组 $\begin{cases}mx-ly=0\\qx-py+t=0.\end{cases}$ 故 $x'=\dfrac{-lt}{lq-mp}$，$y'=\dfrac{-mt}{lq-mp}$. $\therefore \dfrac{x'}{l}=\dfrac{y'}{m}=\dfrac{-t}{lq-mp}$ …②. 又 $\because$ 直线 $lx+my=1$，$qx-py+t=0$ 和 $rx+sy=0$ 共点于 Q， $\therefore \begin{vmatrix}l & m & -1\\q & -p & t\\r & s & 0\end{vmatrix}=-(qs+pr)-t(ls-mr)=0$. 显然 $ls-mr\neq0$，否则直线 PQ 和 OQ 不相交，故 $t=-\dfrac{qs+pr}{ls-mr}$. 代入 ② 式，得

$$\frac{x'}{l}=\frac{y'}{m}=\frac{pr+qs}{(mp-lq)(mr-ls)}=\frac{pr+qs}{prm^2-(ps+qr)lm+qsl^2}.$$

以 ① 式代入，即得 $\dfrac{x'}{l}=\dfrac{y'}{m}=\dfrac{a+b}{am^2-2hlm+bl^2}$.

263. 设方程 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ 表示两条平行直线. 求证：$h^2=ab$，$bg^2=af^2$；且两平行线距离为 $2\sqrt{\dfrac{g^2-ac}{a(a+b)}}$.

[解] 设 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ 表示的两条平行直线为 $lx+my+n=0$ 和 $lx+my+p=0$，则

$$(lx+my+n)(lx+my+p)\equiv ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c.$$

根据多项式恒等条件，得 $l^2=a$…①，$2lm=2h$…②，$m^2=b$…③，$l(p+n)=2g$…④，$m(n+p)=2f$…⑤，$np=c$…⑥. $\therefore h^2=l^2m^2=ab$，

$$bg^2=m^2\cdot\frac{l^2(p+n)^2}{4}=\frac{m^2l^2(p+n)^2}{4}=af^2.$$

两平行线距离

$$d=\frac{|p-n|}{\sqrt{l^2+m^2}}=\frac{\sqrt{(p+n)^2-4pn}}{\sqrt{a+b}}=\frac{\sqrt{\frac{4g^2}{a}-4c}}{\sqrt{a+b}}=2\sqrt{\frac{g^2-ac}{a(a+b)}}.$$

264. 求 $A_1x^2+B_1xy+C_1y^2=0$ 和 $A_2x^2+B_2xy+C_2y^2=0$ 各自所表示的一对直线中至少有一条重合的条件.

[分析] 两方程各自所表示的一对直线如至少有一条重合，说明这两方程的左端至少有一个一次公因式，反之也成立. 故只需求出这两方程的左端至少有一个一次公因式的条件即可.

[解] 设 $F_1(x, y)=A_1x^2+B_1xy+C_1y^2$, $F_2(x, y)=A_2x^2+B_2xy+C_2y^2$. 当 A_1、A_2 不全为零时，不妨令 $A_1\neq0$. 如果 $F_1(x, y)$与 $F_2(x, y)$有公因式，则 $F_1(x, y)$和 $A_2F_1(x, y)-A_1F_2(x, y)$也有公因式，而 $A_2F_1(x, y)-A_1F_2(x, y)=(A_2B_1-A_1B_2)xy+(A_2C_1-A_1C_2)y^2=[(A_2B_1-A_1B_2)x+(A_2C_1-A_1C_2)y]y$. $\because A_1\neq0$, 故 $F_1(x, y)$ 中无因式 y. $\therefore$ 当 $A_2B_1-A_1B_2=0$ 时，必有 $A_2C_1-A_1C_2=0$; 当 $A_2B_1-A_1B_2\neq0$ 时，$F_1(x, y)$中必有因式$(A_2B_1-A_1B_2)x+(A_2C_1-A_1C_2)y$, 故

$$F_1\left(-\frac{A_2C_1-A_1C_2}{A_2B_1-A_1B_2}y,\ y\right)=A_1\left(\frac{A_2C_1-A_1C_2}{A_2B_1-A_1B_2}y\right)^2-B_1\left(\frac{A_2C_1-A_1C_2}{A_2B_1-A_1B_2}y\right)y+C_1y^2\equiv0,$$

即
$$A_1(A_2C_1-A_1C_2)^2-B_1(A_2C_1-A_1C_1)(A_2B_1-A_1B_2)+C_1(A_2B_1-A_1B_2)^2=0.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad A_1(A_2C_1-A_1C_2)^2&=(A_2B_1-A_1B_2)[B_1(A_2C_1-A_1C_2)-C_1(A_2B_1-A_1B_2)]\\&=(A_2B_1-A_1B_2)(B_2C_1-B_1C_2)A_1.\end{aligned}$$

$\because A_1\neq0$, $\therefore (A_2C_1-A_1C_2)^2=(A_2B_1-A_1B_2)(B_2C_1-B_1C_2)\cdots$①. 当 $A_2B_1-A_1B_2=0$ 时，必有 $A_2C_1-A_1C_2=0$, 故等式①仍能成立. 此外，当 A_1、A_2 全为零时，$F_1(x, y)$和 $F_2(x, y)$显然有公因式，而①式也显然成立. 由于以上推理过程均可逆，$\therefore A_1x^2+B_1xy+C_1y^2=0$ 和 $A_2x^2+B_2xy+C_2y^2=0$ 各自所表示的一对直线中至少有一条重合的条件为

$$(A_2C_1-A_1C_2)^2=(A_2B_1-A_1B_2)(B_2C_1-B_1C_2).$$

265. 证明：当 $\theta\neq\frac{n\pi}{2}$ $(n\in J)$ 时，方程 $x^2(\operatorname{tg}^2\theta+\cos^2\theta)-$

$2xy\operatorname{tg}\theta+y^2\sin^2\theta=0$ 表示过原点的两直线，且其斜率之差的绝对值为 2.

［分析一］ 只需证明原方程的判别式大于零，从而将其左端分解成两个一次因式，求得原方程所表示的两直线的斜率即可得证.

［证一］ $\because \theta\neq\frac{n\pi}{2}\ (n\in J)$，$\therefore$ 方程 $x^2(\operatorname{tg}^2\theta+\cos^2\theta)-2xy\operatorname{tg}\theta+y^2\sin^2\theta=0$ 的判别式 $\Delta=(2\operatorname{tg}\theta)^2-4\sin^2\theta(\operatorname{tg}^2\theta+\cos^2\theta)=4\sin^2\theta(\sec^2\theta-\operatorname{tg}^2\theta-\cos^2\theta)=4\sin^4\theta>0$. 故原方程表示过原点的两直线.

又 $\because\quad x^2(\operatorname{tg}^2\theta+\cos^2\theta)-2xy\operatorname{tg}\theta+y^2\sin^2\theta$

$$=\sin^2\theta\left(y-\frac{\operatorname{tg}\theta+\sin^2\theta}{\sin^2\theta}x\right)\left(y-\frac{\operatorname{tg}\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}x\right),$$

$\therefore$ 这两直线的斜率分别为 $\frac{\operatorname{tg}\theta+\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$ 和 $\frac{\operatorname{tg}\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$. 它们之差的绝对值为 $\left|\frac{\operatorname{tg}\theta+\sin^2\theta}{\sin^2\theta}-\frac{\operatorname{tg}\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}\right|=2$.

［分析二］ 在证得原方程为两条直线的方程后，只要 x、y 适合原方程，且 $x\neq0$，则 $\frac{y}{x}$ 即为这两直线中某一条的斜率. 由于原方程的两边同除以 x^2 后，所得的方程除了 $(0,\ 0)$ 一组解以外和原方程同解，故这一关于 $\frac{y}{x}$ 的二次方程的两根就是原方程所表示的两条直线的斜率. 由此，利用韦达定理也可得证.

［证二］ 将原方程的两边同除以 x^2，并令 $\frac{y}{x}=k$，得 $k^2\sin^2\theta-2k\operatorname{tg}\theta+(\operatorname{tg}^2\theta+\cos^2\theta)=0$. 此方程的两根 k_1、k_2 即为原方程所表示的两直线的斜率，且 $k_1+k_2=\frac{2\operatorname{tg}\theta}{\sin^2\theta}$，$k_1k_2=\frac{\operatorname{tg}^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$.

$$\because\quad (k_1-k_2)^2=(k_1+k_2)^2-4k_1k_2=4\left(\frac{\operatorname{tg}^2\theta}{\sin^4\theta}-\frac{\operatorname{tg}^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)$$

$$=4\,\frac{(1-\sin^2\theta)\operatorname{tg}^2\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^4\theta}$$

$$=4\,\frac{\sin^2\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^4\theta}=4\,\frac{\sin^2\theta(1-\cos^2\theta)}{\sin^4\theta}=4,$$

$$\therefore\quad |k_1-k_2|=2.$$

［说明］ (1)［证二］中关于结论的前一部分同［证一］，故从略.

(2) 在表示两直线的方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ 的两端同除以 x^2，得一新方程 $Ck^2+Bk+A=0$，从而解决有关这两直线的斜率的一类问题，是一种常用的方法．但由于形如 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ 这类方程所表示的两直线的斜率不一定存在，故仅在 $C\neq 0$ 时才适用．

266．若方程 $ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3=0$ 表示的三条直线中有两条互相垂直，求证 $a^2+ac+bd+d^2=0$．

［分析一］ 若两直线互相垂直，则它们的方程系数之间应满足一定的关系．故先假设已知方程所表示的三条直线的方程，然后求出这些直线方程中的系数与已知方程系数之间的关系，利用垂直的条件证之．

［证一］ 显然，方程 $ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3=0$ 所表示的三直线均过原点，故可设它们的方程分别为 l_1: $p_1x+q_1y=0$, l_2: $p_2x+q_2y=0$, l_3: $p_3x+q_3y=0$．$\because$ l_1、l_2、l_3 三直线中有两条互相垂直，故 $p_1p_2+q_1q_2$, $p_2p_3+q_2q_3$, $p_3p_1+q_3q_1$ 中必有一为零，$\therefore$ $(p_1p_2+q_1q_2)(p_2p_3+q_2q_3)(p_3p_1+q_3q_1)=0$，即

$$(p_1p_2p_3)^2+p_1p_2p_3(p_1q_2q_3+p_2q_1q_3+p_3q_1q_2)$$
$$+q_1q_2q_3(p_1p_2q_3+p_2p_3q_1+p_3p_1q_2)+(q_1q_2q_3)^2=0\cdots①.$$

又 $\because$ $ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3=(p_1x+q_1y)(p_2x+q_2y)(p_3x+q_3y)$，$\therefore$ $a=p_1p_2p_3$, $b=p_1p_2q_3+p_2p_3q_1+p_3p_1q_2$, $c=p_1q_2q_3+p_2q_1q_3+p_3q_1q_2$, $d=q_1q_2q_3$．代入 ①，即得 $a^2+ac+bd+d^2=0$．

［分析二］ 本题若能考虑到表示两互相垂直的直线可利用方程 $Ax^2+Bxy-Ay^2=0$（参见第 255 题），则证明更加简化．

［证二］ 设方程 $ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3=0$ 所表示的三直线的方程为

$$lx^2+mxy-ly^2=0 \quad 和 \quad px+qy=0,$$

则 $ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3=(lx^2+mxy-ly^2)(px+qy)$，由此可得：

$$a=lp,\ b=lq+mp,\ c=mq-lp,\ d=-lq.$$

$$\therefore\quad a^2+ac+bd+d^2=l^2p^2+lp(mq-lp)+(lq+mp)(-lq)+(-lq)^2=0.$$

267．方程 $m(x^3-3xy^2)+y^3-3x^2y=0$ 表示三直线，求证三直线的倾角成等差数列．

［分析］ 由于原方程中 y^3 的系数不为零，可知此方程所表示的三直线的斜率均存在，故只需找到以这三斜率为根的方程，就能利用斜率与倾角之间的关系去证明本题的结论．

［证］ 用x^3除原方程两边，且令$\frac{y}{x}=k$，得$k^3-3mk^2-3k+m=0$. 此方程的三根即三直线的斜率$\operatorname{tg}\alpha_1$、$\operatorname{tg}\alpha_2$、$\operatorname{tg}\alpha_3$，亦即三直线的倾角$\alpha_1$、$\alpha_2$、$\alpha_3$是方程$\operatorname{tg}^3\alpha-3m\operatorname{tg}^2\alpha-3\operatorname{tg}\alpha+m=0\cdots$① 的三个根. 由①得

$$\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}=m,$$

即$\operatorname{tg}3\alpha=m$. $\therefore 3\alpha=n\pi+\operatorname{arctg} m \quad (n\in J)$, $\alpha=\frac{n\pi}{3}+\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} m$.

$\because \alpha\in[0,\pi)$，故当$m\geqslant 0$时，$n$取0、1、2三个值，得$\alpha_1=\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} m$, $\alpha_2=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} m$, $\alpha_3=\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} m$; 当$m<0$时，$n$取1、2、3三个值，得$\alpha_1=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} m$, $\alpha_2=\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} m$, $\alpha_3=\pi+\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} m$. 因此，在任何情况下，三直线的倾角$\alpha_1$、$\alpha_2$、$\alpha_3$均成等差数列，公差为$\frac{\pi}{3}$.

268. 求证：方程$y^3-x^3+3xy(y-x)=0$表示的三直线中相邻两直线的夹角相等.

［分析一］ 欲证三直线相邻两直线的夹角相等，可先将方程$y^3-x^3+3xy(y-x)=0$化为三直线l_1、l_2、l_3的方程，然后证明$\operatorname{tg}(l_1, l_2)=\operatorname{tg}(l_2, l_3)=\operatorname{tg}(l_3, l_1)$即可.

［证一］ 方程$y^3-x^3+3xy(y-x)=0$即$(y-x)[y+(2+\sqrt{3})x][y+(2-\sqrt{3})x]=0$，它表示的三直线是$l_1$: $y+(2-\sqrt{3})x=0$; l_2: $y-x=0$; l_3: $y+(2+\sqrt{3})x=0$. 它们的斜率分别是$k_1=-2+\sqrt{3}$, $k_2=1$, $k_3=-2-\sqrt{3}$. 于是$\operatorname{tg}(l_1, l_2)=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\sqrt{3}$, $\operatorname{tg}(l_2, l_3)=\frac{k_3-k_2}{1+k_2k_3}=\sqrt{3}$, $\operatorname{tg}(l_3, l_1)=\frac{k_1-k_3}{1+k_1k_3}=\sqrt{3}$. $\therefore l_1$、l_2、l_3相邻两直线间的夹角均等于$\frac{\pi}{3}$.

［分析二］ 欲证三直线相邻两直线的夹角相等，就是证三直线的倾角成等差数列(参见上题).

［证二］ 整理方程$y^3-x^3+3xy(y-x)=0$成$y^3+3xy^2-3x^2y-x^3=0$. 用x^3除方程两边并令$\frac{y}{x}=u$，得方程$u^3+3u^2-3u-1=0$. 仿上题可得三直线的倾角α_1、α_2、α_3是方程$\operatorname{tg}^3\alpha+3\operatorname{tg}^2\alpha-3\operatorname{tg}\alpha-1=0\cdots$①的三个

根. 由 ① 得 $\operatorname{tg} 3\alpha=-1$, $\therefore 3\alpha=n\pi-\frac{\pi}{4}(n\in J)$, $\alpha=\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{12}$.
$\because \alpha\in[0,\pi)$, 故 n 分别取1、2、3时, 得 $\alpha_1=\frac{\pi}{4}$, $\alpha_2=\frac{7\pi}{12}$, $\alpha_3=\frac{11\pi}{12}$, 即三直线中每相邻两直线的夹角均为$\frac{\pi}{3}$.

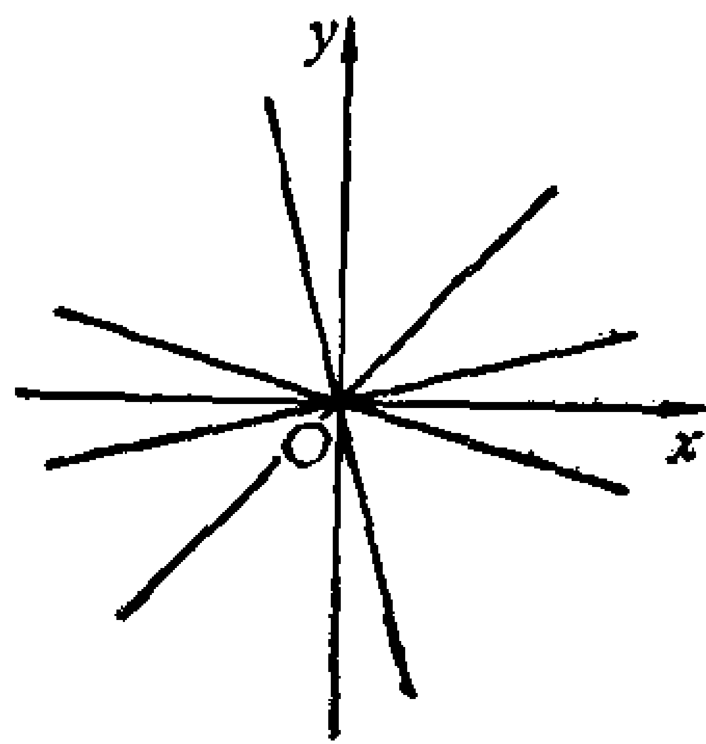
[分析三] 由于原方程所表示的三直线均过原点, 而过原点的直线的极坐标方程为 $\theta=\alpha$ 的形式. 故将原方程化成极坐标方程即可得解.

[证三] 以原点为极、x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系. 则原方程可化为 $\sin^3\theta-\cos^3\theta+3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)=0$, 即 $\sin^3\theta-3\sin\theta\cos^2\theta-\cos^3\theta+3\sin^2\theta\cos\theta=0$, 亦即 $4\sin^3\theta-3\sin\theta-4\cos^3\theta+3\cos\theta=0$, $\sin 3\theta+\cos 3\theta=0$. $\therefore \sin\left(3\theta+\frac{\pi}{4}\right)=0$, $3\theta+\frac{\pi}{4}=n\pi$ $(n\in J)$, 故 $\theta=\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{12}$.
当 n 取任意相邻两整数时, 对应的两 θ 之差均为 $\frac{\pi}{3}$. 故原方程所表示的三直线中, 相邻两直线的夹角相等.

269. 设方程 $ay^4+bxy^3+cx^2y^2+dx^3y+ex^4=0$ 表示的直线中有两条互相垂直. 求证 $(b+d)(ad+be)+(e-a)^2(a+c+e)=0$.

[证] 根据第 255 题可知, 经过原点而又互相垂直的两直线方程可写为 $Ay^2+Bxy-Ax^2=0$, 故可令 $ay^4+bxy^3+cx^2y^2+dx^3y+ex^4\equiv(Ay^2+Bxy-Ax^2)(Dy^2+Exy+Fx^2)$. 展开右式并比较恒等式对应项的系数, 可得:
$a=AD$, $b=BD+AE$, $c=-AD+BE+AF$, $d=-AE+BF$, $e=-AF$.
$\therefore$ $(b+d)(ad+be)+(e-a)^2(a+c+e)=A^2(BD+BF)(-DE-EF)+A^2(D+F)^2\cdot BE=A^2[-BE\cdot(D+F)^2+(D+F)^2\cdot BE]=0$.

270. $ax^4+bx^3y+cx^2y^2+dxy^3+ay^4=0$ **表示的四直线中, 两条是另两条夹角的平分线, 求证: $c+6a=0$, $b+d=0$.**

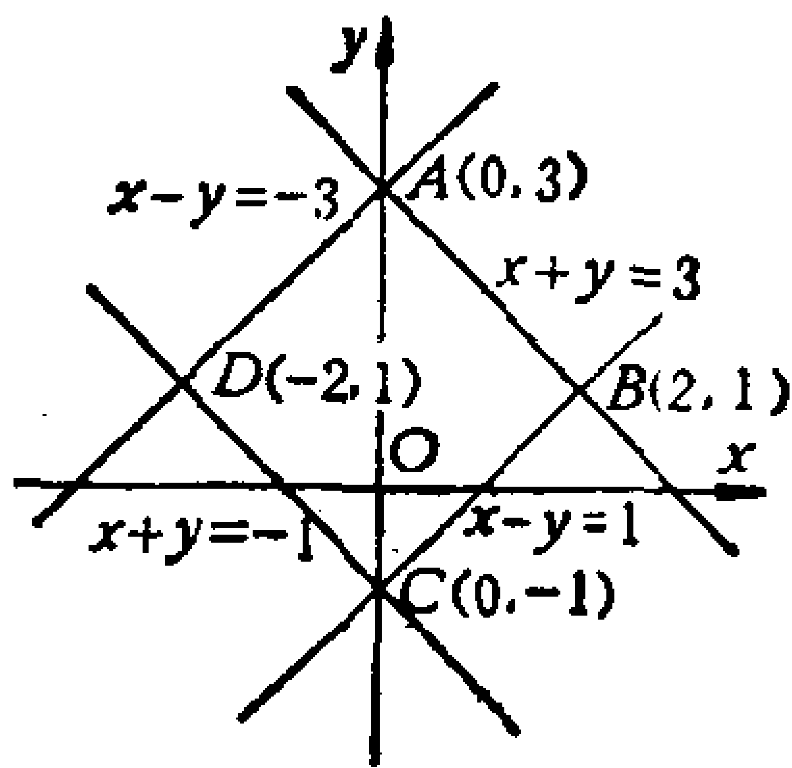


[分析] 显然, 原方程所表示的四直线皆过原点, 由第 255 题可知, 若表示过原点的两直线的二次方程为已知, 则这两直线夹角的两条平分线的方程也可求得. 故可假设原方程表示的四直线中的两条直线的方程, 然后再根据已知条件写出另两条直线的方程, 通过比较系数而得证.

［证］ 设 $ax^4+bx^3y+cx^2y^2+dxy^3+ay^4=0$ 表示的四直线中有两条直线方程为 $lx^2+2mxy+ny^2=0$，则这两条直线的夹角的角平分线方程为 $mx^2-(l-n)xy-my^2=0$（参见第255题），$\therefore ax^4+bx^3y+cx^2y^2+dxy^3+ay^4\equiv k(lx^2+2mxy+ny^2)[mx^2-(l-n)xy-my^2]$，其中 k 为不等于零的常数．由此得 $a=kml$，$b=k(2m^2-l^2+ln)$，$c=3km(n-l)$，$d=k(n^2-2m^2-ln)$，$a=-kmn$． $\therefore kml=-kmn$． $\because k\neq 0$， $\therefore m(l+n)=0$．故 $c+6a=3km(n-l)+6kml=3km(n-l+2l)=3km(n+l)=0$． 如果 $m\neq 0$，则 $b+d=k(2m^2-l^2+ln)+k(n^2-2m^2-ln)=k(n^2-l^2)=k(n-l)(n+l)=0$．如果 $m=0$，则 $a=c=0$．原方程为 $bx^3y+dxy^3=0$，即 $xy(bx^2+dy^2)=0$．当且仅当 $b+d=0$ 时，$xy=0$ 的角平分线为 $bx^2+dy^2=0$．

§7．图象与区域

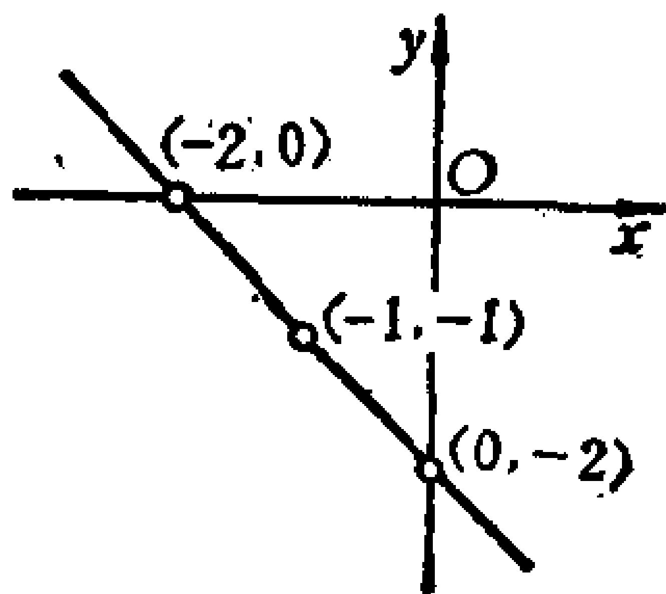
271．作方程 $|x|+|y-1|=2$ 的图象，并求其所围成的图形面积．



［分析］ 先将原方程化成不含绝对值的方程，再研究之．

［解］ 可分四种情况讨论：(1) 当 $x\geqslant 0, y\geqslant 1$ 时，原方程为 $x+y-1=2$； (2) 当 $x\geqslant 0$，$y\leqslant 1$ 时，原方程为 $x-y+1=2$； (3) 当 $x\leqslant 0$，$y\geqslant 1$ 时，原方程为 $-x+y-1=2$； (4) 当 $x\leqslant 0, y\leqslant 1$ 时，原方程为 $-x-y+1=2$．这四个方程所表示的直线围成的四边形 $ABCD$ 如图．在此四边形中，$\because |AB|=|BC|=|CD|=|DA|=2\sqrt{2}$，又 $k_{AB}=-1$，$k_{BC}=1$，$\therefore AB\perp BC$． 故四边形 $ABCD$ 为正方形，它的面积 $S=(2\sqrt{2})^2=8$．

272．作方程 $\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{y}{1+y}=\dfrac{x+y}{1+x+y}$ $(xy\neq 0)$ 的图象．

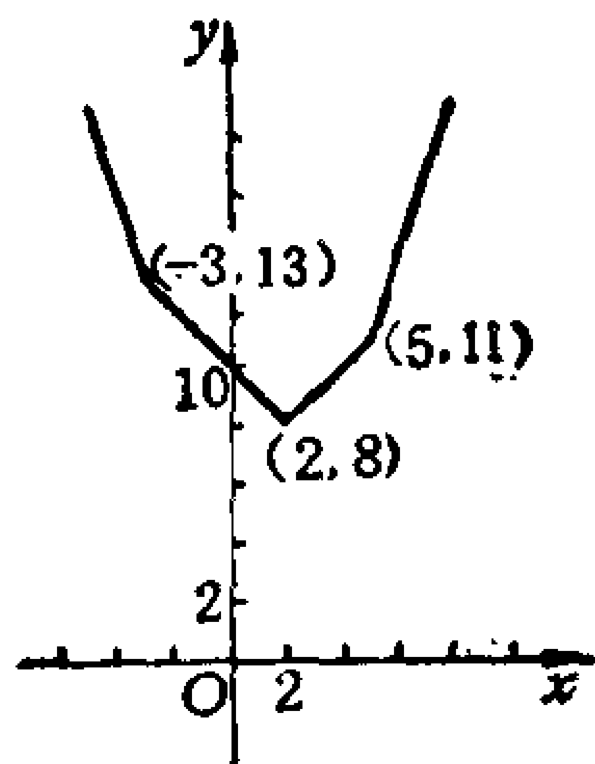


［解］ 设 $x+y=k$，代入原方程得

$$\frac{k+2xy}{1+k+xy}=\frac{k}{1+k}.$$

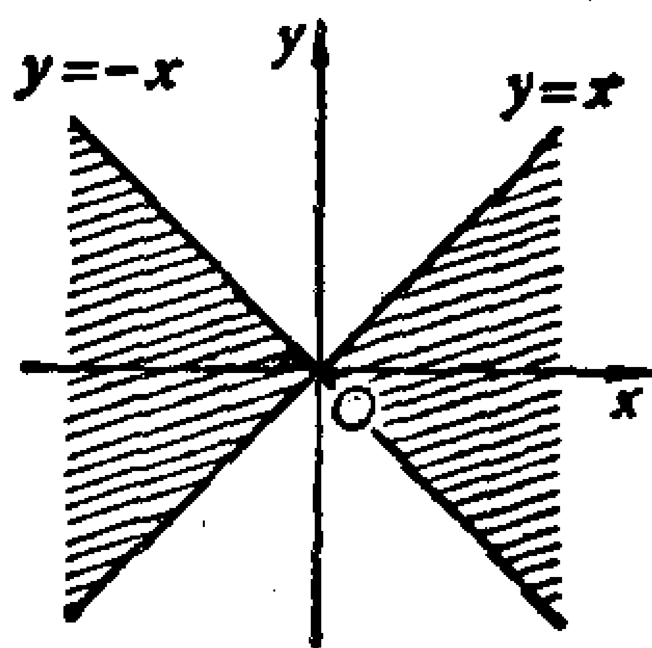
化简得 $xy(k+2)=0$，但 $xy\neq0$，所以 $k=-2$. ∴原方程可化为 $x+y=-2$. 因 $xy(1+x)(1+y)\neq0$，故原方程的图象为直线 $x+y=-2$，但应除去 $(-2, 0)$、$(-1, -1)$、$(0, -2)$ 三点.

273. 作方程 $y=|x+3|+|x-2|+|x-5|$ 的图象，并求当 x 取何值时，y 有最小值.



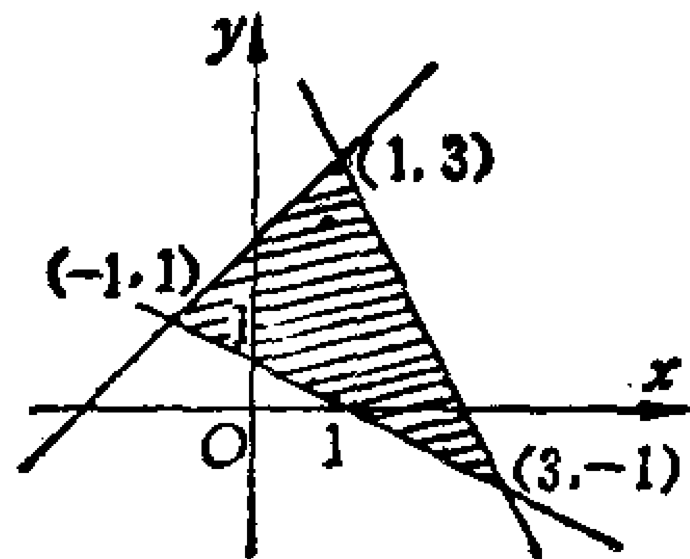
［解］ 当 $x\in(-\infty, -3]$ 时，$y=-x-3-x+2+5-x=4-3x$；当 $x\in(-3, 2]$ 时，$y=x+3+2-x+5-x=10-x$；当 $x\in(2, 5]$ 时，$y=x+3+x-2+5-x=6+x$；当 $x\in(5, +\infty)$ 时，$y=x+3+x-2+x-5=3x-4$. 故方程的图象如图所示. 当 $x=2$ 时，$y_{\min}=8$.

274. 作点集 $D=\{(x, y)\mid(y-x)(y+x)<0\}$ 的图象.



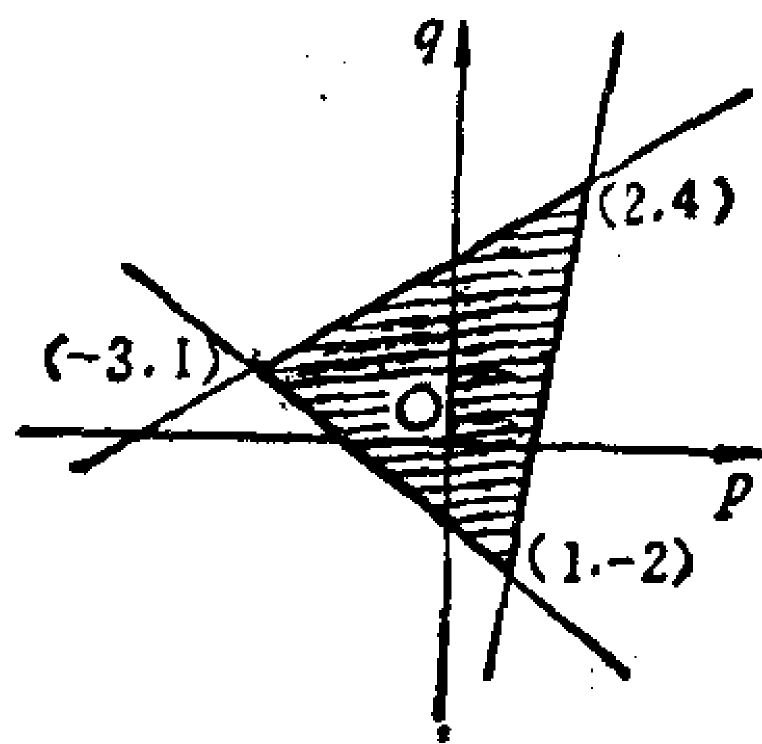
［解］ 平面被 $(y-x)(y+x)=0$，即 $y=x$ 与 $y=-x$ 划分成四个区域，而点集 $D=\{(x, y)\mid y>x, y<-x\}\cup\{(x, y)\mid y<x, y>-x\}$ 即图中阴影部分所示(不包括边界).

275. 作点集 $D=\{(x, y)\mid x+2y-1>0, y<x+2, 2x+y-5<0\}$ 的图象.



［解］ 同时满足条件: $x+2y-1>0\cdots$①, $x-y+2>0\cdots$②, $2x+y-5<0\cdots$③ 的点 (x, y) 如图中阴影部分所示(不包括边界).

276. 设 $x\geqslant0$, $y\geqslant0$, $z\geqslant0$; $p=-3x+y+2z$, $q=x-2y+4z$, $x+y+z=1$. 试求满足上述条件的点 (p, q) 的活动范围.



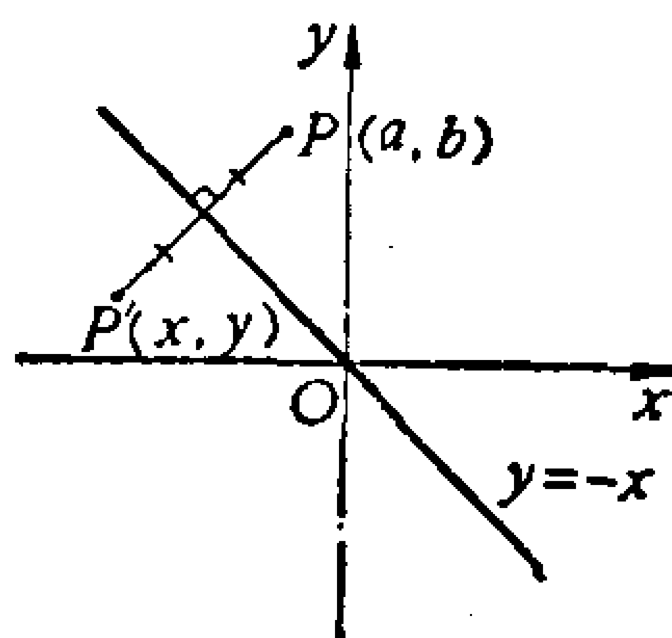
［解］ ∵ $x\geqslant0$, $y\geqslant0$, $z\geqslant0\cdots$①. $-3x+y+2z=p\cdots$②, $x-2y+4z=q\cdots$③, $x+y+z=1\cdots$④. 解方程②、③、④，得

$$x=\frac{1}{27}(q-6p+8),\quad y=\frac{1}{27}(3p-5q+14),\quad z=\frac{1}{27}(3p+4q+5).$$

由①得：$-6p+q+8\geqslant0$，$3p-5q+14\geqslant0$，$3p+4q+5\geqslant0$．同时满足这三个不等式的点$(p,\ q)$的范围如图中阴影部分所示(包括边界在内)．

§8．平移、旋转、对称变换

277．求点$P(a,\ b)$关于直线$y=-x$为对称轴的对称点的坐标．

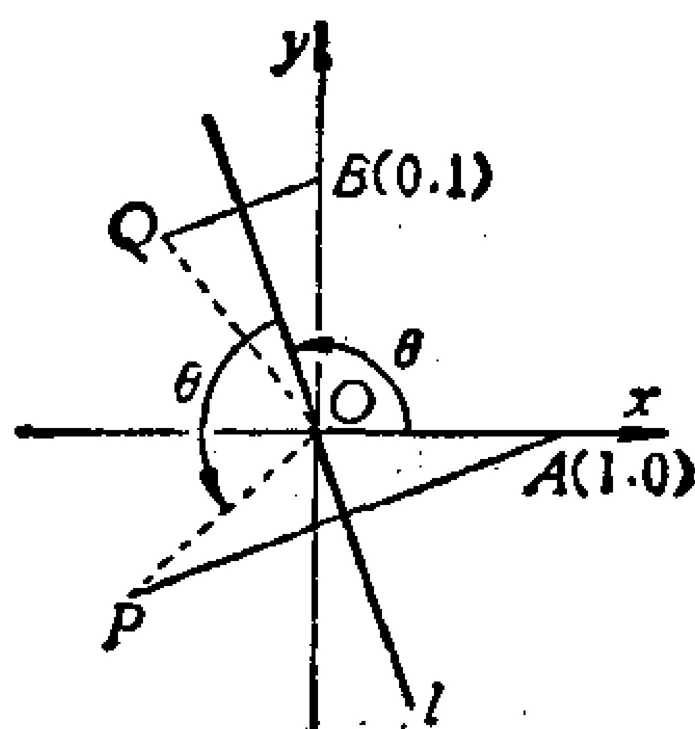


［分析］ 设点P关于直线$y=-x$为对称轴的对称点为P'，则线段PP'的中点在直线$y=-x$上，且直线PP'与直线$y=-x$垂直．根据这两个条件列出对称点P'的坐标满足的方程组，即能解得点P'的坐标．

［解］ 设点P关于直线$y=-x$的对称点P'的坐标为$(x,\ y)$，则$\frac{y+b}{2}=-\frac{x+a}{2}$…①，$\frac{y-b}{x-a}=1$…②．解方程组①、②，得$x=-b$和$y=-a$．∴点$P'$的坐标为$(-b,\ -a)$．

278．设两点$A(1,\ 0)$、$B(0,\ 1)$关于过原点O的某直线的对称点分别为$P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$．求证：

$$\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$



［证］ 设过原点的直线l的倾角为θ．

∵ 点A、P关于直线l对称，∴$x_1=\cos2\theta$，$y_1=\sin2\theta$．∵ B、Q关于直线l对称，

$$\therefore\ x_2=\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin2\theta,$$

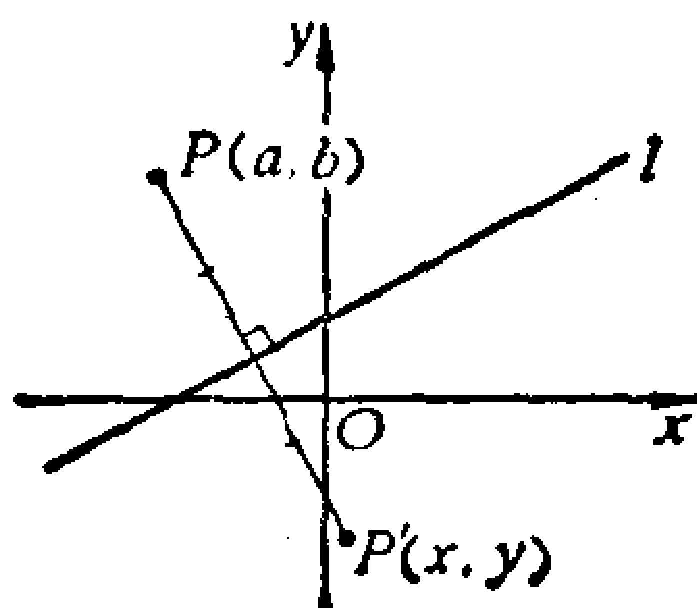
$$y_2=\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos2\theta.$$

$$\therefore\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta & \cos 2\theta\sin 2\theta-\sin 2\theta\cos 2\theta\\ \sin 2\theta\cos 2\theta-\cos 2\theta\sin 2\theta & \sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

279. 求以直线 l: $Ax+By+C=0$ 为对称轴，点 $P(a, b)$ 的对称点 P' 的坐标 $(A^2+B^2\neq 0)$.



［解］ 设对称点的坐标为 $P'(x, y)$. 根据对称点的性质有

$$A\cdot\frac{a+x}{2}+B\cdot\frac{b+y}{2}+C=0\cdots①$$

和 $$\frac{y-b}{x-a}=\frac{B}{A}\cdots②.$$

①、② 联立得 $$\begin{cases}Ax+By=-Aa-Bb-2C\\ Bx-Ay=aB-Ab\end{cases}\cdots③.$$

解 ③ 得 $$x=\frac{B^2a-A^2a-2ABb-2AC}{A^2+B^2},$$

$$y=\frac{A^2b-B^2b-2ABa-2BC}{A^2+B^2}.$$

∴ 点 P' 的坐标为 $\left(\dfrac{B^2a-A^2a-2ABb-2AC}{A^2+B^2}, \dfrac{A^2b-B^2b-2ABa-2BC}{A^2+B^2}\right)$.

280. 平面上有两点 $A(a+2, b+2)$、$B(b-4, a-6)$, 且这两点关于直线 l: $4x+3y=11$ 对称. 求 a、b.

［解］ 根据已知条件可知: $AB\perp l$, 且线段 AB 的中点 $\left(\dfrac{a+b-2}{2}, \dfrac{a+b-4}{2}\right)$ 在直线 l 上,

$$\therefore\ \frac{(a-6)-(b+2)}{(b-4)-(a+2)}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=-1\cdots①,$$

$$4\cdot\frac{a+b-2}{2}+3\cdot\frac{a+b-4}{2}=11\cdots②.$$

①、② 联立化简得 $\begin{cases}a-b=2\\ a+b=6.\end{cases}$ 解之, $a=4$, $b=2$.

281. 求以直线 l: $x+2y+1=0$ 为对称轴，直线 m: $x-y-2=0$ 的对称直线 m' 的方程.

[分析] 所求直线 m' 是直线 m 关于直线 l 的对称图形，故只需求出 m 上任意两个点关于 l 的对称点的坐标即可.

[解] 先求出直线 l 与直线 m 的交点 P，解 l、m 的方程组得：$P(1,-1)$. 在 m 上取一点 $Q(2, 0)$，设 Q 关于直线 l 的对称点 $Q'(x', y')$，则线段 QQ' 的中点 M 的坐标为 $x_1=\frac{x'+2}{2}$, $y_1=\frac{y'}{2}$. ∵ 点 $M(x_1, y_1)$ 在 l 上，∴ $\frac{x'+2}{2}+2\cdot\frac{y'}{2}+1=0$，即 $x'+2y'+4=0$…①；又∵ $QQ'\perp l$，∴ $\frac{y'-0}{x'-2}=2$，即 $y'=2x'-4$…②. 由①、②得 $x'=\frac{4}{5}$, $y'=-\frac{12}{5}$. 从而 m' 的方程为 $y+1=\frac{-1+\frac{12}{5}}{1-\frac{4}{5}}(x-1)$，即 $7x-y=8$.

282. 求以点 $A(2, 3)$ 为对称中心，直线 l: $2x-y+3=0$ 的对称直线 l' 的方程.

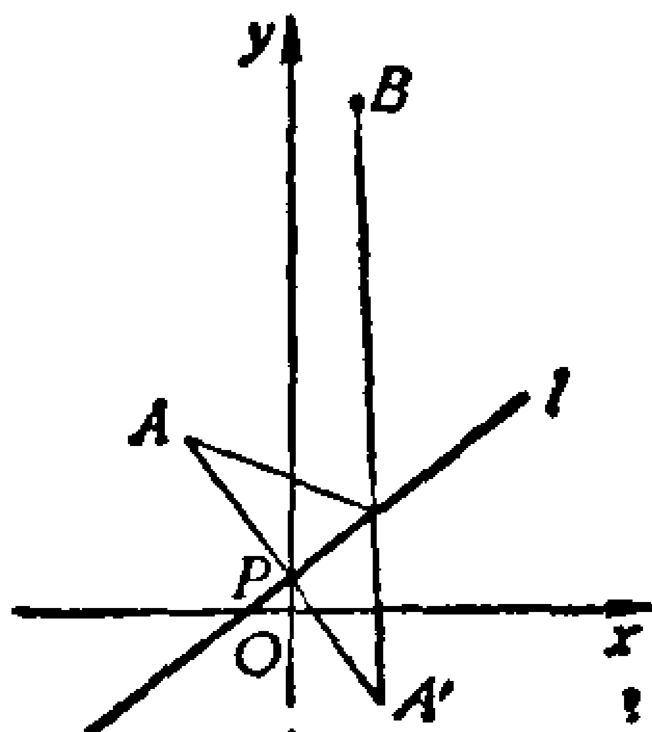
[分析一] 因为直线 l 和 l' 关于点 A 对称，所以 $l'\parallel l$. 故只要求得 l' 上一点的坐标，即可得其方程.

[解一] 在直线 l 上取一点 $P(0, 3)$，设其对称点为 $P'(x', y')$，则 $2=\frac{x'+0}{2}$, $3=\frac{y'+3}{2}$. ∴ $x'=4$, $y'=3$. 又因直线 l' 过点 P' 且与直线 l 平行，故其方程为 $y-3=2(x-4)$，即 $2x-y=5$.

[分析二] 根据中心对称的定义可知：直线 l 上的任一点和它在 l' 上的对称点的连线中点总为 A. 由此也可求得 l' 的方程.

[解二] 设 $P(x, y)$、$P'(x', y')$ 关于点 $A(2, 3)$ 对称，则 $\frac{1}{2}(x+x')=2$, $\frac{1}{2}(y+y')=3$, ∴ $x'=4-x$, $y'=6-y$. 代入直线 l 的方程，化简即得 l' 的方程 $2x-y=5$.

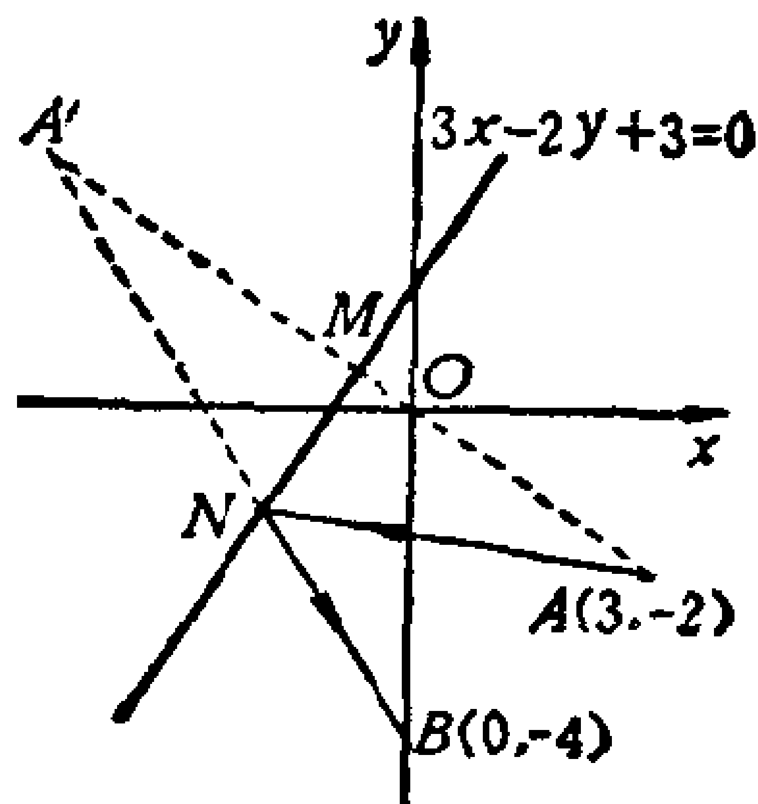
283. 光线从点 $A(-3, 5)$ 射到直线 l: $3x-4y+4=0$ 以后，再反射到点 $B(2, 15)$. 求这条光线从 A 到 B 的长度 d.



［分析］ A 到 B 的长度，实际上就是 A 关于直线 l 的对称点 A' 到 B 的距离，故可先求 A' 的坐标.

［解］ 设点 A 关于直线 l 的对称点 A' 的坐标是 (x', y')，则直线 $AA' \perp l$，且 AA' 与 l 的交点 P 的坐标应为 $\left(\frac{x'-3}{2}, \frac{y'+5}{2}\right)$. 代入 l 的方程得 $3\cdot\frac{x'-3}{2}-4\cdot\frac{y'+5}{2}+4=0\cdots$①；又 $\frac{y'-5}{x'+3}\cdot\frac{3}{4}=-1\cdots$②. 解①、②，得 $x'=3$, $y'=-3$. $\therefore d=|A'B|=\sqrt{(3-2)^2+(-3-15)^2}=5\sqrt{13}$.

284. 光线从点 $(3, -2)$ 射出，若镜面的位置在直线 $3x-2y+3=0$ 上，其反射线经过点 $(0, -4)$. 求：(1) 反射线方程；(2) 入射点 N 的坐标；(3) 入射线方程.



［解］ (1) 先求 $A(3, -2)$ 关于直线 $3x-2y+3=0$ 的对称点 A' 的坐标. 解

$$\begin{cases} y+2=-\frac{2}{3}(x-3) \\ 3x-2y+3=0, \end{cases}$$

求得 AA' 与镜面直线的交点 $M\left(-\frac{9}{13}, \frac{6}{13}\right)$. 再由中点坐标公式，求得 A' 的坐标为 $\left(-\frac{57}{13}, \frac{38}{13}\right)$. 过 A'、B 的直线方程 $30x+19y+76=0$ 即为反射线方程.

(2) 解 $\begin{cases} 30x+19y+76=0 \\ 3x-2y+3=0, \end{cases}$ 得入射点 $N\left(-\frac{209}{117}, -\frac{46}{39}\right)$.

(3) 用两点式即得入射线 AN 的方程 $6x+35y+52=0$.

285. 已知直线 $Ax+By+C=0$，试求：(1) 关于 x 轴对称的直线方程；(2) 关于原点对称的直线方程；(3) 关于直线 $y=x$ 对称的直线方程.

［解］ (1) $\because$ 点 (x, y) 关于 x 轴的对称点为 $(x, -y)$. $\therefore$ 所求直线方程为 $Ax+B(-y)+C=0$，即 $Ax-By+C=0$.

(2) 若(x,y)为所求直线上任意一点,则它关于原点对称的点$(-x,-y)$应满足$Ax+By+C=0$, 即$A(-x)+B(-y)+C=0$. $\therefore Ax+By-C=0$为所求直线方程.

(3) $\because$ 点(x,y)关于$y=x$对称的点为(y,x), $\therefore Ax+By+C=0$关于$y=x$对称的直线方程为$Bx+Ay+C=0$.

286. 将直线l沿x轴正向平移3单位,沿y轴正向平移5单位,得到的直线为l'. 再将l'沿x轴正向平移1单位,沿y轴反向平移2单位,而与原直线l重合. (1) 求直线l与l'之间的距离d; (2) 当l与l'关于点$(2,3)$对称时,求直线l的方程.

[分析] 按题意将直线l沿x轴正向平移3单位,沿y轴正向平移5单位所得的直线l'上的点(u,v)和l上的对应点(x,y)之间应有$u=x+3$, $v=y+5$, 故由此即可从原直线l的方程得到l'的方程. 同样,又可得到由l'平移后所得的直线l方程的又一表达式,然后求其距离.

[解] (1) 设直线l的方程为$ax+by+c=0$,其中a、b不全为零. 则根据分析可知直线l'的方程为$a(x-3)+b(y-5)+c=0$, 即$ax+by-3a-5b+c=0$. 按题意将直线l'平移又可得直线l的方程为$a[(x-3)-1]+b[(y-5)+2]+c=0$, 即$ax+by-4a-3b+c=0$. 比较直线$l$方程的两种形式可得$-4a-3b+c=c$. $\therefore b=-\frac{4}{3}a$. 显然$a\neq 0$, 否则$b=0$, 与$a$、$b$不全为零矛盾. 故直线$l$的方程为$x-\frac{4}{3}y+\frac{c}{a}=0$, l'的方程为$x-\frac{4}{3}y+\frac{c}{a}+\frac{11}{3}=0$. 设$(x_0,y_0)$为$l$上的任一点,则$x_0-\frac{4}{3}y_0+\frac{c}{a}=0$. 故直线$l$与$l'$之间的距离

$$d=\frac{\left|x_0-\frac{4}{3}y_0+\frac{c}{a}+\frac{11}{3}\right|}{\sqrt{1+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}}=\frac{\frac{11}{3}}{\frac{5}{3}}=\frac{11}{5}.$$

(2) 设直线l上任一点(x,y)关于点$(2,3)$的对称点为(x_1,y_1), 则$\frac{x_1+x}{2}=2$, $\frac{y_1+y}{2}=3$; 即 $x=4-x_1$, $y=6-y_1$. 直线l的方程为$x-\frac{4}{3}y+\frac{c}{a}=0$. 故有$4-x_1-\frac{4}{3}(6-y_1)+\frac{c}{a}=0$, 即

$$-x_1+\frac{4}{3}y_1-4+\frac{c}{a}=0\cdots①.$$

又因直线 l 和 l' 关于(2, 3)对称，故点(x_1, y_1)在 l': $x-\frac{4}{3}y+\frac{c}{a}+\frac{11}{3}=0$ 上，$\therefore x_1-\frac{4}{3}y_1+\frac{c}{a}+\frac{11}{3}=0\cdots②$. ①+②，解得 $\frac{c}{a}=\frac{1}{6}$. $\therefore l$ 的方程为 $x-\frac{4}{3}y+\frac{1}{6}=0$，即 $6x-8y+1=0$.

287. 直线 $y=x$ 经转轴变换后，成为 $y'=(2+\sqrt{3})x'$. 试求表示这个变换的转轴公式.

［分析］ 欲求转轴公式，只需知道旋转角. 本题旋转角可通过求直线 l 在两坐标系中的倾角而得.

［解］ 直线 $y=x$ 的倾角 $\alpha=45°$，直线 $y'=(2+\sqrt{3})x'$ 的倾角 $\alpha'=\operatorname{arc\,tg}(2+\sqrt{3})=75°$. $\therefore$ 旋转角 $\theta=\alpha-\alpha'=-30°$. 所求转轴公式为:

$$\begin{cases} x=x'\cos 30°+y'\sin 30° \\ y=-x'\sin 30°+y'\cos 30°, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{3}x'+y'}{2} \\ y=\dfrac{-x'+\sqrt{3}y'}{2}. \end{cases}$$

288. 用直线 $2x-y-3=0$ 和 $x+2y-4=0$ 分别作新坐标系 $x'O'y'$ 的 x' 轴和 y' 轴，求坐标变换公式，并求点 $P(5, -7)$ 关于新坐标系 $x'O'y'$ 的坐标.

［分析］ 只需求出两已知直线的交点(即新坐标系的原点)及旋转角即可.

［解］ 解方程组 $\begin{cases} 2x-y-3=0 \\ x+2y-4=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=2 \\ y=1. \end{cases}$ 且直线 $2x-y-3=0$ 的斜率 $\operatorname{tg}\alpha=2$. 故新坐标系的两坐标轴可看作由原坐标系中的坐标轴平移，使原点重合于点(2, 1)，再旋转 α 角而得. 新老坐标之间的变换公式为

$$\begin{cases} x'=(x-2)\cos\alpha+(y-1)\sin\alpha \\ y'=-(x-2)\sin\alpha+(y-1)\cos\alpha. \end{cases}$$

又取 α 为锐角，则 $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$. 故得变换公式

$$\begin{cases} x'=\frac{x+2y-4}{\sqrt{5}} \\ y'=-\frac{2x-y-3}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

以 $x=5$，$y=-7$ 代入变换公式，即得 $x'=-\frac{13\sqrt{5}}{5}$，$y'=-\frac{14\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore$ 点 $P(5,-7)$ 关于新坐标系 $x'O'y'$ 的坐标为 $\left(-\frac{13\sqrt{5}}{5},\ -\frac{14\sqrt{5}}{5}\right)$.

289. **证明直线 $Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq0)$ 经过坐标轴平移、旋转后，A^2+B^2 为不变量.**

[证] 将原坐标系原点移至 (h, k)，坐标轴旋转 θ 角，则新老坐标满足 $\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta+h \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta+k, \end{cases}$ 其中 (x, y) 为老坐标，(x', y') 为新坐标. 直线 $Ax+By+C=0$ 在新坐标系中的方程为

$$A(x'\cos\theta-y'\sin\theta+h)+B(x'\sin\theta+y'\cos\theta+k)+C=0,$$

整理得 $(A\cos\theta+B\sin\theta)x'+(-A\sin\theta+B\cos\theta)y'+Ah+Bk+C=0$.

$\therefore\ A'^2+B'^2=(A\cos\theta+B\sin\theta)^2+(-A\sin\theta+B\cos\theta)^2=A^2+B^2$.

[说明] $\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ 是直线 $Ax+By+C=0$ 的法化因子. 本题的结论说明：一条直线经坐标轴的平移、旋转后，尽管其方程形式改变，但法化因子不变.

290. **求证：两直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2=0$ $(A_1^2+B_1^2\neq0,\ A_2^2+B_2^2\neq0)$，经过坐标轴旋转后，$A_1B_2-A_2B_1$ 为不变量.**

[证] 设点 (x, y) 经过坐标轴旋转 θ 角后坐标为 (x', y')，则

$$\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta. \end{cases}$$

两直线方程变形为 $(A_1\cos\theta+B_1\sin\theta)x'+(-A_1\sin\theta+B_1\cos\theta)y'+C_1=0$ 和 $(A_2\cos\theta+B_2\sin\theta)x'+(-A_2\sin\theta+B_2\cos\theta)y'+C_2=0$.

$$\therefore\quad A_1'=A_1\cos\theta+B_1\sin\theta,\quad B_1'=-A_1\sin\theta+B_1\cos\theta;$$
$$A_2'=A_2\cos\theta+B_2\sin\theta,\quad B_2'=-A_2\sin\theta+B_2\cos\theta.$$
$$\begin{aligned}\therefore\quad A_1'B_2'-A_2'B_1'&=(A_1\cos\theta+B_1\sin\theta)(-A_2\sin\theta+B_2\cos\theta)\\&\quad-(A_2\cos\theta+B_2\sin\theta)(-A_1\sin\theta+B_1\cos\theta)\\&=A_1B_2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-A_2B_1(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\\&=A_1B_2-A_2B_1.\end{aligned}$$

291. 求证：两直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2=0$ $\left(\frac{A_1}{B_1}\neq-\frac{B_2}{A_2}\right)$，经过坐标轴平移、旋转后，$\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$ 为不变量.

［证］ 经过坐标轴平移、旋转后，新老坐标关系为

$$\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta+h\\y=x'\sin\theta+y'\cos\theta+k,\end{cases}$$

直线方程 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 变换为 $A_1'x'+B_1'y'+C_1'=0$ 和 $A_2'x'+B_2'y'+C_2'=0$，其中 $A_1'=A_1\cos\theta+B_1\sin\theta$，$B_1'=B_1\cos\theta-A_1\sin\theta$；$A_2'=A_2\cos\theta+B_2\sin\theta$，$B_2'=B_2\cos\theta-A_2\sin\theta$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad A_1'B_2'-A_2'B_1'&=(A_1\cos\theta+B_1\sin\theta)(B_2\cos\theta-A_2\sin\theta)\\&\quad-(A_2\cos\theta+B_2\sin\theta)(B_1\cos\theta-A_1\sin\theta),\\A_1'A_2'+B_1'B_2'&=(A_1\cos\theta+B_1\sin\theta)(A_2\cos\theta+B_2\sin\theta)\\&\quad+(B_1\cos\theta-A_1\sin\theta)(B_2\cos\theta-A_2\sin\theta),\end{aligned}$$

即得
$$\therefore\quad\frac{A_1'B_2'-A_2'B_1'}{A_1'A_2'+B_1'B_2'}=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}.$$

［说明］ $\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$ 即为直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 到直线 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 交角的正切，故由本题可知：两直线交角的正切经过坐标轴平移、旋转后不变，也即两直线的交角大小不变.

292. 已知直线 $Ax+By+C=0$ 及点 $P(x_1,\ y_1)$. 求证经过坐标轴平移、旋转后，$\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ 为不变量.

［证］ 经过坐标轴平移、旋转后直线 $Ax+By+C=0$ 的方程变换为 $A'x'+B'y'+C'=0$，其中 $A'=A\cos\theta+B\sin\theta$，$B'=B\cos\theta-A\sin\theta$，$C'=Ah+$

$Bk+C$. 根据第 289 题结论, $A'^2+B'^2=A^2+B^2$. 点 $P(x_1, y_1)$新老坐标关系为: $\begin{cases} x_1=x_1'\cos\theta-y_1'\sin\theta+h \\ y_1=y_1'\cos\theta+x_1'\sin\theta+k, \end{cases}$ $\therefore Ax_1+By_1+C=A(x_1'\cos\theta-y_1'\sin\theta+h)$ $+B(x_1'\sin\theta+y_1'\cos\theta+k)+C=(A\cos\theta+B\sin\theta)x_1'+(B\cos\theta-A\sin\theta)y_1'$ $+Ah+Bk+C=A'x_1'+B'y_1'+C'$.

$$\therefore \quad \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|A'x_1'+B'y_1'+C'|}{\sqrt{A'^2+B'^2}}.$$

[说明] 由本题可知, 点与直线的相对位置通过坐标轴平移、旋转后不变.

§9. 最大值、最小值

293. 已知直线 $y=\frac{1}{2}x$ 和两个定点 $A(1, 1)$、$B(2, 2)$, 在此直线上取一点 P, 使 PA^2+PB^2 最小, 求点 P 的坐标.

[解] 设点 P 的坐标为(x, y). $\because$ 点 P 在直线 $y=\frac{1}{2}x$ 上, $\therefore x=2y$ …①. 设 $u=PA^2+PB^2=(x-1)^2+(y-1)^2+(x-2)^2+(y-2)^2$, 将①代入, 得 $u=(2y-1)^2+(y-1)^2+(2y-2)^2+(y-2)^2$. 化简, 得

$$u=10y^2-18y+10=10\left(y-\frac{9}{10}\right)^2+\frac{19}{10}.$$

$\therefore$ 当 $x=\frac{9}{5}$, $y=\frac{9}{10}$ 时, PA^2+PB^2 取最小值 $\frac{19}{10}$. $\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(\frac{9}{5}, \frac{9}{10}\right)$.

294. 当 m 为何值时, 平面上三点 $A(1, 2)$、$B(3, 1)$、$C(2, 3)$ 到直线 $y=mx$ 距离的平方和为最小.

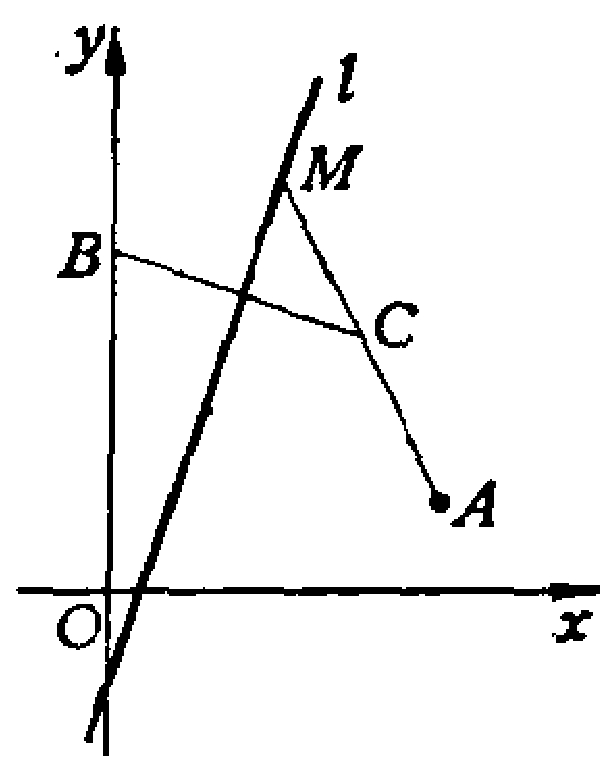
[解] $\because$ 点 $A(1, 2)$、$B(3, 1)$、$C(2, 3)$到直线 $y=mx$ 的距离分别为 $\frac{|m-2|}{\sqrt{1+m^2}}$、$\frac{|3m-1|}{\sqrt{1+m^2}}$ 和 $\frac{|2m-3|}{\sqrt{1+m^2}}$, $\therefore$ 它们的平方和

$$s=\frac{(m-2)^2+(3m-1)^2+(2m-3)^2}{1+m^2}=\frac{14m^2-22m+14}{1+m^2},$$

即 $(14-s)m^2-22m+(14-s)=0$…①. 当 $s\neq 14$ 时, $\because$ m 是实数,

∴ $11^2-(14-s)^2\geqslant 0$. 解得 $3\leqslant s\leqslant 25$, 故 s 的最小值为 3. 当 $s=3$ 时,由方程 ① 可得 $m=1$.

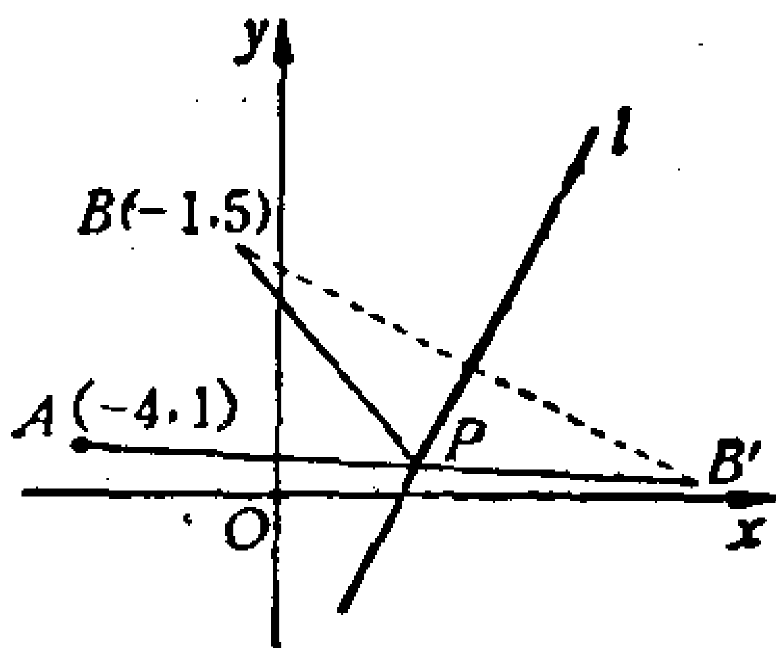
295. 已知平面上两点 $A(4, 1)$ 和 $B(0, 4)$, 在直线 l: $3x-y-1=0$ 上找一点 M, 使 $|MA|-|MB|$ 最大. 求点 M 的坐标.



[分析] 因为点 A、B 在直线 l 的两旁, 故可找点 B 关于直线 l 的对称点 C. 则对于 l 上的任意一点 M, 总有 $|MA|-|MB|=|MA|-|MC|$. 当 M、A、C 构成三角形时, 根据"三角形任意两边之差小于第三边"可知: $|MA|-|MC|<|AC|$. 仅当三点共线时, 才有 $|MA|-|MC|=|AC|$, 此时点 C 介于 A、M 之间.故连接 AC 且沿 AC 方向延长, 若和直线 l 相交, 则此交点即为所求; 否则无解.

[解] 设点 B 关于直线 l 的对称点为 $C(x_0, y_0)$, ∵ BC 被 l 垂直平分, ∴ $\frac{3x_0}{2}-\frac{y_0+4}{2}-1=0$…① 和 $\frac{y_0-4}{x_0}=-\frac{1}{3}$…② 成立. 解①、②, 得 $\begin{cases}x_0=3\\y_0=3.\end{cases}$ ∴ 点 C 的坐标为 $(3, 3)$. ∴ 直线 AC 的方程为 $2x+y-9=0$. 又, 设直线 AC 和直线 l 的交点为 $M(x, y)$. 则由 $\begin{cases}3x-y-1=0\\2x+y-9=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2\\y=5.\end{cases}$ ∴ 点 M 的坐标为 $(2, 5)$.

296. 在直线 l: $2x-y-5=0$ 上找一点 P, 使它到 $A(-4,1)$、$B(-1, 5)$ 两点的距离之和最小.

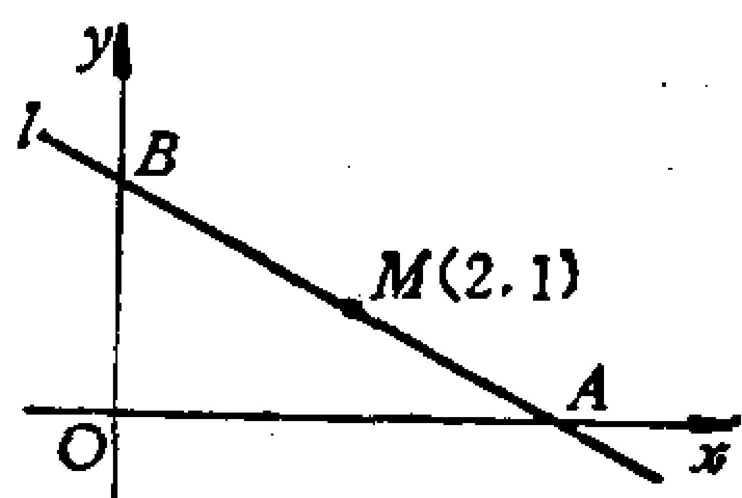


[分析] 由于 A、B 在直线 l 的同旁, 故可找点 B 关于直线 l 的对称点 B', $|AB'|$ 即为 P 到 A、B 两点距离之和的最小值. 而直线 AB' 与 l 的交点即为所求之点.

[解] 设点 B 关于直线 l 的对称点为 $B'(x_0, y_0)$, 则 BB' 被 l 垂直平分,故有 $\begin{cases}2\cdot\frac{x_0-1}{2}-\frac{y_0+5}{2}-5=0\\\frac{y_0-5}{x_0+1}\cdot 2=-1.\end{cases}$ 解此方

程组得$\begin{cases}x_0=\dfrac{43}{5}\\ y_0=\dfrac{1}{5}.\end{cases}$ 由点 A 和点 B' 的坐标求得直线 AB' 的方程是 $4x+63y-47=0$. 解方程组$\begin{cases}4x+63y-47=0\\ 2x-y-5=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=2\dfrac{51}{65}\\ y=\dfrac{37}{65}.\end{cases}$ ∴所求的点 P 的坐标为$\left(2\dfrac{51}{65},\ \dfrac{37}{65}\right)$.

297. 过点 $M(2,\ 1)$ 作直线 l, 交 x、y 轴正半轴于点 A、B, 求满足下列条件的直线 l 的方程：(1) $\triangle AOB$ 的面积 S 为最小值；(2) $|MA|\cdot|MB|$ 为最小值.



［分析］ 由于所求直线 l 与两坐标轴均相交，它的斜率 k 一定存在. 当 k 一定时，$\triangle AOB$ 的面积也随之而定，即 S 是 k 的函数，求出该函数之值最小时 k 的值，即得所求直线.

［解］ (1) 设 l 的方程为 $y-1=k(x-2)$，则 A、B 的坐标分别为 $\left(2-\dfrac{1}{k},\ 0\right)$、$(0,\ 1-2k)$. $\triangle AOB$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}(1-2k)\cdot\dfrac{2k-1}{k}$，整理得 $4k^2+(2S-4)k+1=0$. 由 $\Delta=4(S-2)^2-16\geqslant 0$，解得 $S\geqslant 4$，或 $S\leqslant 0$（舍去）. 因此，$\triangle AOB$ 的最小面积为 $S=4$，由 $4k^2+4k+1=0$，解得 $k=-\dfrac{1}{2}$. 故所求直线 l 的方程为 $y-1=-\dfrac{1}{2}(x-2)$，即 $x+2y-4=0$.

(2) 利用两点间的距离公式，求得 $|MA|\cdot|MB|=2\sqrt{\dfrac{(k^2+1)^2}{k^2}}$. 令 $\dfrac{(k^2+1)^2}{k^2}=m$，则 $k^4+(2-m)k^2+1=0$. 因 k^2 有正实根，∴ $\Delta'=(2-m)^2-4\geqslant 0$，解得 $m\geqslant 4$ 或 $m\leqslant 0$（舍去），因此 m 最小值为 4，且此时 $k^2=1$，故 $k=-1$（$k=1$ 舍去）. ∴ 所求直线 l 的方程为 $x+y-3=0$.

298. 设 m 为参数，$|m|\leqslant 1$，直线 l_1: $y=mx+1$ 和 l_2: $x=-my+1$ 的交点为 $P(x_0,\ y_0)$，且 l_1、l_2 分别通过定点 A、B. (1) 求点 A、B 的坐标；(2) 用 m 表示点 P 的坐标；(3) 用 m 表示 $\triangle ABP$ 的面积 S；(4) 求使面积 S 最大的 m 的值.

[解]　(1) ∵ l_1: $y=mx+1$ 过定点，∴ 对于定点 $A(x_1, y_1)$ 有 $mx_1+(1-y_1)\equiv 0$. ∴ $\begin{cases}x_1=0\\ y_1=1,\end{cases}$ 即定点 A 的坐标为 $(0, 1)$. 同理，对于定点 $B(x_2, y_2)$ 有 $my_2+(x_2-1)\equiv 0$. ∴ $\begin{cases}x_2=1\\ y_2=0,\end{cases}$ 即点 B 的坐标为 $(1, 0)$.

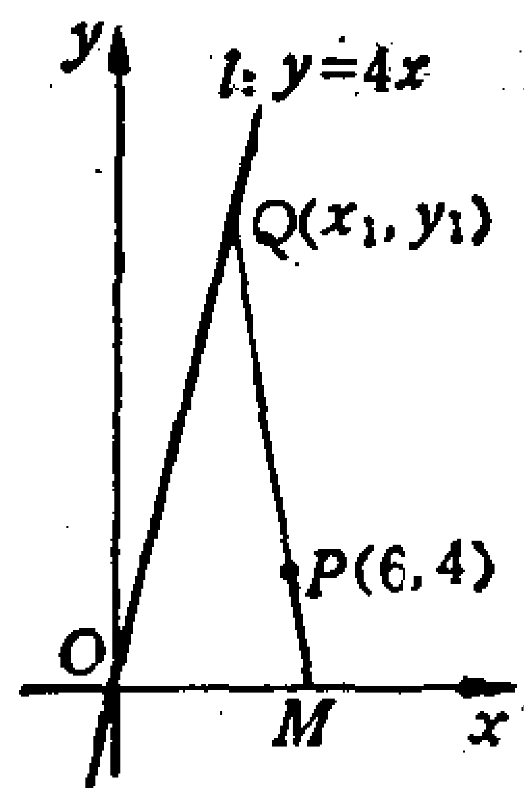
(2) 点 $P(x_0, y_0)$ 是 l_1、l_2 交点. ∴ 解 l_1 和 l_2 联立方程得 $x_0=\dfrac{1-m}{1+m^2}$, $y_0=\dfrac{1+m}{1+m^2}$. 即点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{1-m}{1+m^2}, \dfrac{1+m}{1+m^2}\right)$.

(3) 利用面积公式得 $S=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ \dfrac{1-m}{1+m^2} & \dfrac{1+m}{1+m^2} & 1\end{vmatrix}$ 的绝对值.

∵ $|m|\leqslant 1$, ∴ $S=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{1+m^2}-1\right)=\dfrac{1}{1+m^2}-\dfrac{1}{2}$.

(4) $S=\dfrac{1}{1+m^2}-\dfrac{1}{2}$, ∴ 当 $m=0$ 时，面积 S 最大.

299. **有定点 $P(6, 4)$ 及定直线 l: $y=4x$. 点 Q 是 l 上第一象限内的点，直线 PQ 交 x 轴的正半轴于 M，问点 Q 在什么位置时 $\triangle OMQ$ 的面积最小.**



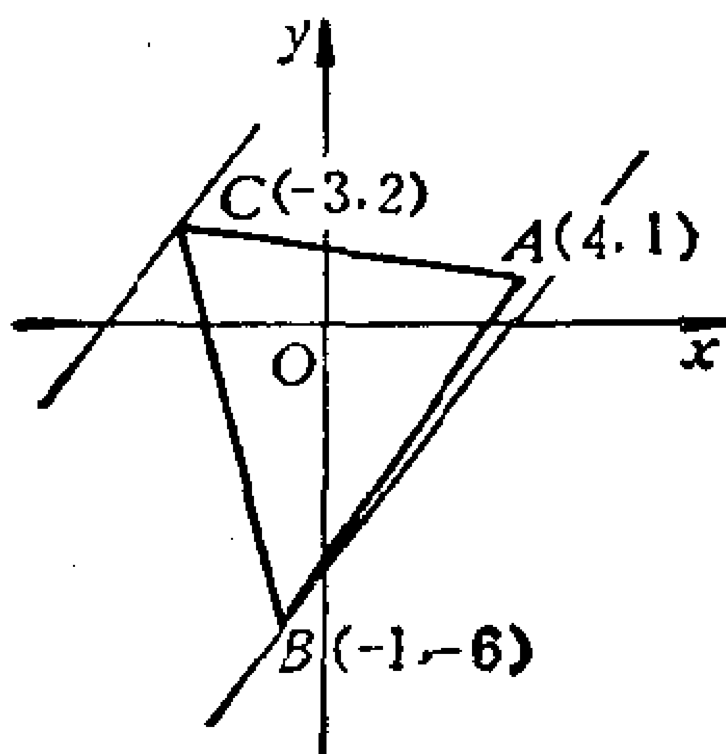
[分析]　$\triangle OMQ$ 的面积和点 Q 的位置有关，故可设点 Q 的坐标为自变量，$\triangle OMQ$ 的面积为因变量，列出函数关系，然后求函数的最小值.

[解]　设点 Q 的坐标为 (x_1, y_1)，∵ 点 Q 在直线 l 上，∴ $y_1=4x_1\cdots$①. 直线 QP 的方程是 $(x_1-6)(y-4)=(y_1-4)(x-6)$. 显然 $y_1>4$，否则点 M 或在 x 轴的负半轴上，或不存在. 又直线 QP 和 x 轴交点 M 的坐标是 $\left(\dfrac{5y_1}{y_1-4}, 0\right)$，且 $y_1>4$，∴ $\dfrac{5y_1}{y_1-4}>0$. 故 $\triangle OMQ$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5y_1^2}{y_1-4}$，$2S(y_1-4)=5y_1^2$，即 $5y_1^2-2Sy_1+8S=0\cdots$②. $\Delta=4S^2-160S\geqslant 0$，∵ $S>0$，∴ $S\geqslant 40$. 当 $S=40$ 时，由方程②得 $y_1=8$ 满足 $y_1>4$ 的条件，又以此代入①，得 $x_1=2$. ∴ 点 Q 的坐标是 $(2, 8)$ 时，$\triangle OMQ$ 的面积最小.

[说明]　利用一元二次方程的判别式所求得的极值，只有在此方程有等

根时才能达到．而本题中，由于有 $y_1>4$ 的条件，故必须验证方程②在取 $S=40$ 时的根大于 4 才行．

300．设 R 为平面上以 $A(4,\ 1)$、$B(-1,\ -6)$、$C(-3,\ 2)$ 三点为顶点的三角形区域（包括三角形内部及边界）．试求：$(x,\ y)$ 在 R 上变动时，函数 $4x-3y$ 的极值．

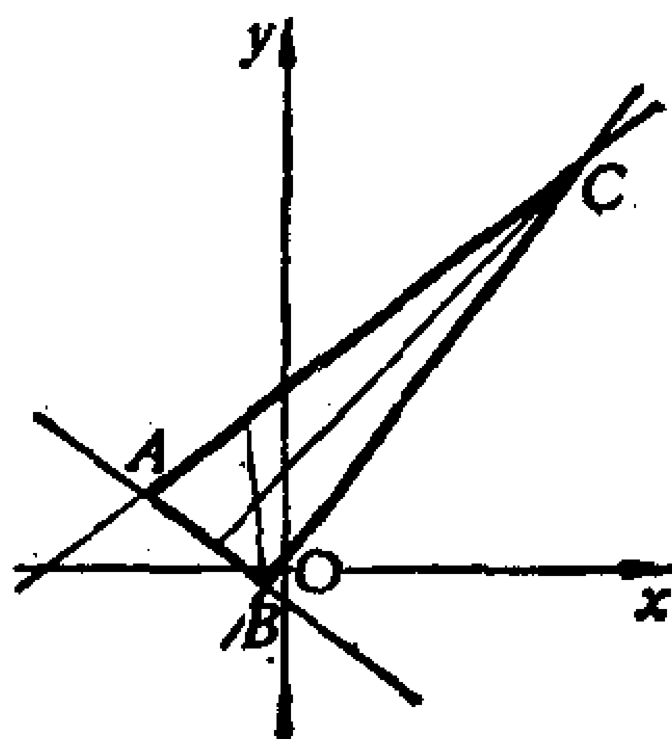


［分析］ 设 $4x-3y$ 的值为 k，则 R 上能使 k 取相同值的点在同一条直线上．当 k 的值不同时，这些直线是一组斜率为 $\frac{4}{3}$ 的平行线．故只需研究这组平行线通过 R 上的点时的情况便可解得本题．

［解］ 设 $4x-3y=k$，则 $y=\frac{4}{3}x-\frac{k}{3}\cdots$①．$\because$ $(x,\ y)$在 R 上变动，$\therefore$ 当直线①过点 $B(-1,\ -6)$时，其纵截距 $-\frac{k}{3}$ 最小，即 $\left(-\frac{k}{3}\right)_{\min}=-6+\frac{4}{3}=-\frac{14}{3}$．$\therefore k_{\max}=14$．当直线①过点 $C(-3,\ 2)$时，其截距 $-\frac{k}{3}$ 最大，$\left(-\frac{k}{3}\right)_{\max}=2+4=6$．$\therefore k_{\min}=-18$．故当$(x,\ y)$在 R 上变动时，函数 $4x-3y$ 的极大值为 14，极小值为 -18．

§10．其　它

301．已知三角形的三边分别为 AB：$3x+4y+2=0$；AC：$3x-4y+12=0$；BC：$4x-3y=0$．求内切圆的圆心坐标和半径．



［分析一］ 要求 $\triangle ABC$ 的内心坐标，只需求出两条内角平分线方程，但根据到两条相交直线距离相等这一条件求得的轨迹有两条直线，故还需通过作图来确定其内角平分线的方程．

［解一］ 直线 AB 和 BC 的交角平分线方程为 $\frac{3x+4y+2}{5}=\pm\frac{4x-3y}{5}$，即 $x-7y-2=0\cdots$①

和 $7x+y+2=0$…②. 又直线 AC 和 BC 的交角平分线方程为

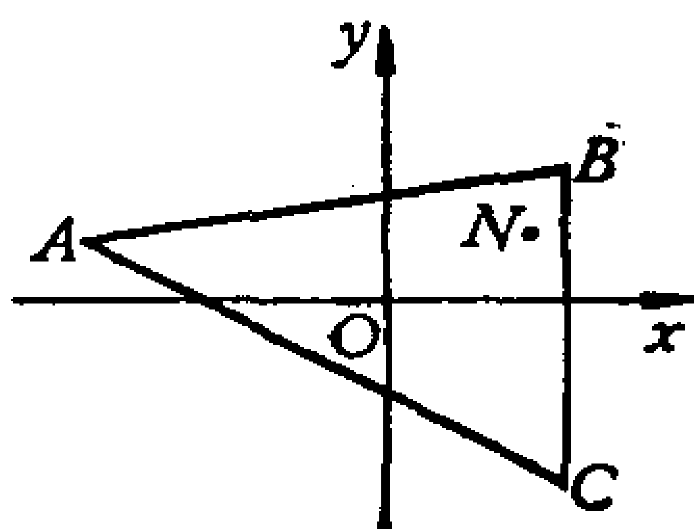
$$\frac{3x-4y+12}{5}=\pm\frac{4x-3y}{5},$$

即 $x+y-12=0$…③和 $7x-7y+12=0$…④. 通过作图可知，直线①和③都在 $\triangle ABC$ 外，故其内角 B 和 C 的平分线方程应分别为②、④. 解方程组 $\begin{cases}7x+y+2=0\\7x-7y+12=0,\end{cases}$ 得 $x=-\frac{13}{28}$，$y=\frac{5}{4}$. 故所求的内切圆的圆心坐标为 $\left(-\frac{13}{28},\ \frac{5}{4}\right)$. 而其半径 $r=\frac{\left|4\left(-\frac{13}{28}\right)-3\cdot\frac{5}{4}\right|}{5}=\frac{157}{140}$.

[分析二] 为求 $\triangle ABC$ 的内角平分线方程，也可先写出内心与各边之间的离差，然后根据内心与原点关于各边所在直线的位置关系，求得到各边的距离，从而得出内角平分线方程.

[解二] 设 $\triangle ABC$ 的内心为 $E(x,y)$，则 E 关于直线 AB、AC、BC 的离差分别为 $\frac{3x+4y+2}{-5}$、$\frac{3x-4y+12}{-5}$ 和 $\frac{4x-3y}{-5}$. ∵点 E 和原点均在直线 AB 和 AC 的同侧，∴点 E 到 AB、AC 的距离分别为 $\frac{3x+4y+2}{5}$ 和 $\frac{3x-4y+12}{5}$. 又点 E 和点 $(0,-1)$ 在直线 BC 的两侧，∴点 E 到直线 BC 的距离为 $\frac{4x-3y}{-5}$. 根据内心的性质，有 $\begin{cases}\frac{3x+4y+2}{5}=\frac{4x-3y}{-5}\\\frac{3x-4y+12}{5}=\frac{4x-3y}{-5},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}7x+y+2=0\\7x-7y+12=0.\end{cases}$ 解得 $x=-\frac{13}{28}$，$y=\frac{5}{4}$. 故所求的内切圆的圆心坐标为 $\left(-\frac{13}{28},\ \frac{5}{4}\right)$，而其半径 $r=\frac{157}{140}$.

302. 已知三角形的两个顶点为 $A(-10,2)$、$B(6,4)$，它的垂心为 $N(5,2)$. 求第三个顶点 C 的坐标.



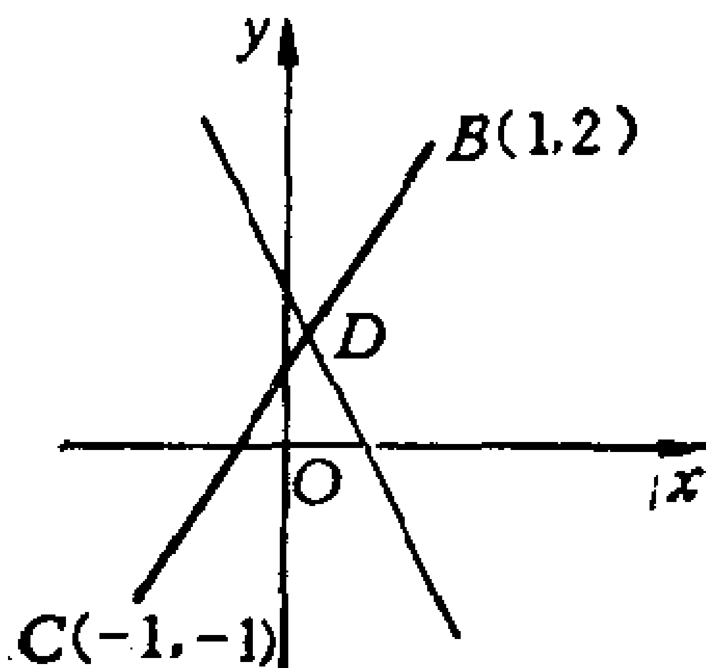
[分析] ∵点 N 是垂心，∴直线 $BC\perp AN$，BC 方程可以求出；又 $BN\perp AC$，∴AC 方程也可求出；点 C 是直线 BC、AC 的交点，故点 C 坐标

可以求出.

［解］ 直线 AN 的斜率 $k_1=0$, $\therefore AN \parallel x$ 轴. 直线 $BC\perp x$ 轴, $\therefore$ 直线 BC 的方程是 $x=6$…①. 直线 BN 的斜率 $k_2=\frac{4-2}{6-5}=2$, $\because AC\perp BN$, $\therefore$ 直线 AC 的斜率 $k_3=-\frac{1}{2}$, 故直线 AC 的方程是 $y-2=-\frac{1}{2}(x+10)$ …②. ① 代入 ②, 得 $y=-6$. $\therefore$ 点 C 的坐标为 $(6, -6)$.

303. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 的平分线方程为 $2x+y=1$, B、C 两点坐标为 $B(1, 2)$、$C(-1, -1)$. 求点 A 的坐标.

［分析］ 由于 $\angle A$ 的平分线与 B、C 两点均已知, 故它与底边 BC 交点 D 分 BC 成定比 $\frac{BD}{DC}$ 可以求出. 根据角平分线性质: $\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{BD}{DC}$, 同时点 A 在直线 $2x+y=1$ 上, 列出点 A 的坐标满足的方程, 即可求解.



［解］ $\angle A$ 的平分线与底边 BC 交于点 D, 设 $\frac{BD}{DC}=\lambda$, 点 D 的坐标为 (x, y), 则 $x=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$, $y=\frac{2-\lambda}{1+\lambda}$. 因为点 D 在直线 $2x+y=1$ 上, $\therefore \frac{2(1-\lambda)}{1+\lambda}+\frac{2-\lambda}{1+\lambda}=1$. 解得 $\lambda=\frac{3}{4}$. 设点 A 坐标为 (x_1, y_1), 则 $\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{3}{4}$, 即 $\frac{(x_1-1)^2+(y_1-2)^2}{(x_1+1)^2+(y_1+1)^2}=\frac{9}{16}$…①. 又 $2x_1+y_1=1$…②. 由①、②

解得 $\begin{cases} x_1=\frac{1}{7} \\ y_1=\frac{5}{7}, \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'=-\frac{13}{5} \\ y_1'=\frac{31}{5}. \end{cases}$ $\therefore$ 点 A 的坐标为 $\left(\frac{1}{7}, \frac{5}{7}\right)$ 或 $\left(-\frac{13}{5}, \frac{31}{5}\right)$.

304. 已知直线 l_1: $Ax-2y+2=0$ 和 l_2: $2x+6y+C=0$ 相交于点 $(1, m)$, 且从 l_2 到 l_1 的夹角为 $45°$. 求 A、C、m 的值.

［解］ 由已知直线的方程可知, 直线 l_1 的斜率为 $\frac{A}{2}$, 直线 l_2 的斜率为 $-\frac{1}{3}$. 而从 $\dfrac{\frac{A}{2}-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1+\frac{A}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)}=\operatorname{tg}45°=1$, 即 $3A+2=6-A$, 得 $A=1$. 又根

据 l_1、l_2 过点 $(1, m)$，可得 $A-2m+2=0\cdots$①，$2+6m+C=0\cdots$②. 以 $A=1$ 代入①，得 $m=\frac{A+2}{2}=\frac{3}{2}$. 再以此代入②，即得 $C=-11$.

305. 三条直线 $x=0$, $x=m$, $x=m+n$ 上各有一点 A、B、C. 如果这三点共线，求它们的纵坐标 y_1、y_2、y_3 之间的关系.

［解］ 因点 A、B、C 分别在直线 $x=0$, $x=m$, $x=m+n$ 上，故可设它们的坐标分别为 $(0, y_1)$、(m, y_2)、$(m+n, y_3)$. 又∵ A、B、C 三点共线，

∴ $\begin{vmatrix} 0 & y_1 & 1 \\ m & y_2 & 1 \\ m+n & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$，即 $my_3+(m+n)y_1-(m+n)y_2-my_1=0$. 故 y_1、y_2、y_3 具有关系：$ny_1-(m+n)y_2+my_3=0$.

306. 求直线 $kx-y=k-1$ 与 $ky-x=2k$ 的交点坐标；如果交点在第二象限，求 k 的范围.

［分析］ 由于要求两已知直线的交点在第二象限，故这两直线的方程组成的方程组之解应符合条件 $x<0$, $y>0$. 由此即可得 k 的范围.

［解］ 解方程组 $\begin{cases} kx-y=k-1 \\ -x+ky=2k. \end{cases}$

$$\because\quad D=\begin{vmatrix} k & -1 \\ -1 & k \end{vmatrix}=k^2-1=(k+1)(k-1),$$

$$D_x=\begin{vmatrix} k-1 & -1 \\ 2k & k \end{vmatrix}=k^2-k+2k=k(k+1),$$

$$D_y=\begin{vmatrix} k & k-1 \\ -1 & 2k \end{vmatrix}=2k^2+k-1=(2k-1)(k+1).$$

∴ 当 $k\neq\pm1$ 时，交点的坐标为 $\left(\frac{k}{k-1}, \frac{2k-1}{k-1}\right)$；当 $k=-1$ 时，交点有无限多个，其坐标满足方程 $x+y=2$；当 $k=1$ 时，无交点.

若交点在第二象限，则 $\frac{k}{k-1}<0\cdots\cdots$①，$\frac{2k-1}{k-1}>0\cdots$②. 由①得 $0<k<1\cdots$③. 由②得 $k>1$，或 $k<\frac{1}{2}\cdots$④. 结合③、④可知：当交点在第二象限时，$0<k<\frac{1}{2}$.

307. m 为何值时，(1) 直线 $(m-1)x+my-5=0$ 与直线 $mx+(2m-1)y+7=0$ 交点在 x 轴上；(2) 直线 $mx+(2m+3)y+m+6=0$ 与直线 $6(m+1)x+(m-1)y+m-3=0$ 的交点在 y 轴上.

［解］ (1) 设两直线的交点为 (x_1, y_1). ∵ 交点在 x 轴上，∴ $y_1=0$. 代入两直线方程得 $(m-1)x_1=5$, $mx_1=-7$. 显然, $m\neq 0$, $m\neq 1$, ∴ $\frac{5}{m-1}=\frac{-7}{m}$, 即 $m=\frac{7}{12}$.

(2) 设两直线的交点为 (x_2, y_2). ∵ 交点在 y 轴上，∴ $x_2=0$. 代入两直线方程得: $(2m+3)y_2=-(m+6)$, $(m-1)y_2=-(m-3)$. 显然, $m\neq -\frac{3}{2}$, $m\neq 1$. ∴ $-\frac{m+6}{2m+3}=-\frac{m-3}{m-1}$, 即 $m^2-8m-3=0$.

$$\therefore \quad m=4\pm\sqrt{19}.$$

308. m 为何值时，直线 $5x+4y=2m+1$ 与 $2x+3y=m$ 交于第四象限.

［解］ 解方程组 $\begin{cases}5x+4y=2m+1\\2x+3y=m,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{2m+3}{7}\\y=\frac{m-2}{7}.\end{cases}$ ∵ 两直线的交点在第四象限，∴ $\begin{cases}\frac{2m+3}{7}>0\\\frac{m-2}{7}<0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m>-\frac{3}{2}\\m<2.\end{cases}$ ∴ 当 $-\frac{3}{2}<m<2$ 时，两直线交于第四象限.

309. 在 $\triangle OAB$ 的边 OA 的延长线上取一点 C, 使 $AC=OA$. 设过点 C 的直线与边 AB、OB 的交点分别是 P、Q. 点 R 在 OA 上，且线段 PQ 与 BR 互相平分. 求 $AP:PB$ 的值.

［分析］ 若 $AP:PB$ 的值已知，则根据条件 PQ 与 BR 互相平分，而推知四边形 $BQRP$ 为平行四边形，便可求得 $BQ:QO$ 的值. 因此，在建立坐标系后，P、Q 两点的坐标均可由 $AP:PB$ 的值表示. 于是，利用 P、Q、C 共线就能求出所要求的比值.

［解一］ 以 O 为原点，OA 为 x 轴，建立直角坐标系(图1)，并设点 A、B 的坐标分别为 $(a,\ 0)$ 和 $(b,\ c)$，则点 C 的坐标为 $(2a,\ 0)$. 令 $AP:PB=\lambda$，则点 P 的横坐标 $x_P=\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}$，纵坐标 $y_P=\frac{\lambda c}{1+\lambda}$. 连结 RP、RQ. ∵ BR 和 PQ 互相平分，∴ 四边形 $BQRP$ 是平行四边形. 故 $PR\parallel BQ$, $RQ\parallel PB$. ∴ $BQ:QO=AR:RO=AP:PB=\lambda$. 于是点 Q 的横坐标 $x_Q=\frac{b}{1+\lambda}$，纵坐标 $y_Q=\frac{c}{1+\lambda}$. ∵ 点 Q、P、C 共线，∴ $\begin{vmatrix} 2a & 0 & 1 \\ x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \end{vmatrix}=0$，即 $2ay_P+x_Py_Q-x_Qy_P-2ay_Q=0$，亦即 $\frac{2ac\lambda}{1+\lambda}+\frac{(a+\lambda b)c}{(1+\lambda)^2}-\frac{bc\lambda}{(1+\lambda)^2}-\frac{2ac}{1+\lambda}=0$. 化简得 $ac\left[\frac{2(\lambda-1)}{1+\lambda}+\frac{1}{(1+\lambda)^2}\right]=0$. ∵ $ac\neq0$，∴ 解此方程即得 $\lambda=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

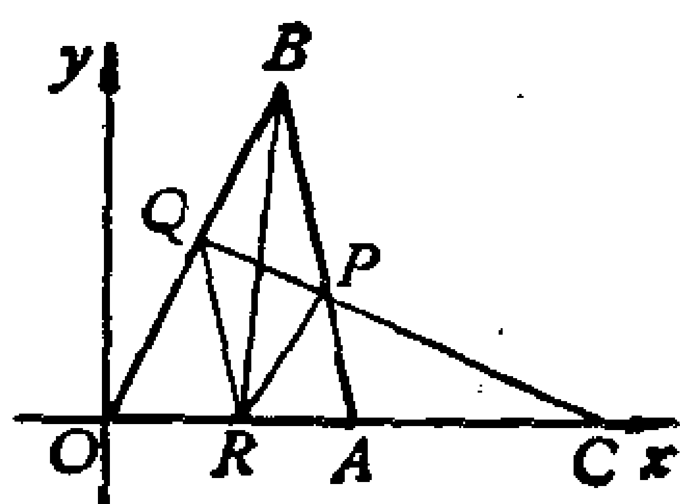


图 1

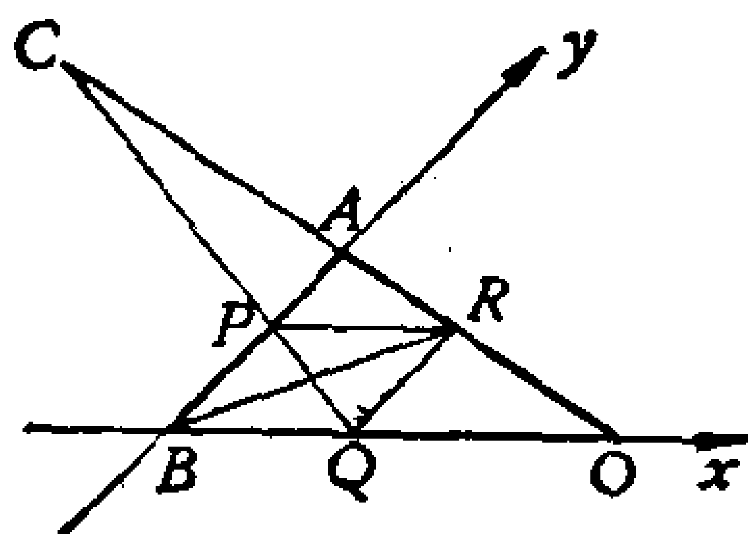


图 2

［解二］ 取 B 为原点，直线 BO、BA 分别为 x、y 轴，建立斜坐标系(图2). 设有关各点坐标分别为 $B(0,\ 0)$、$O(a,\ 0)$、$A(0,\ b)$、$c(-a,\ 2b)$. 令 $AP:PB=\lambda$，则点 P 的坐标为 $\left(0,\ \frac{b}{1+\lambda}\right)$.

设点 Q 的坐标为 $(x_0,\ 0)$，直线 PQ 的方程为 $\frac{x}{x_0}+\frac{(1+\lambda)y}{b}=1$. ∵ PQ 过点 C，∴ $\frac{-a}{x_0}+2(1+\lambda)=1$…①. 直线 AO 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. ∵ AO 过点 $R\left(x_0,\ \frac{b}{1+\lambda}\right)$，∴ $\frac{x_0}{a}+\frac{1}{1+\lambda}=1$…②. 从①、②消去 x_0，得 $(1+2\lambda)\frac{\lambda}{1+\lambda}=1$，即 $\lambda^2=\frac{1}{2}$. ∵ $\lambda>0$，∴ $\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\frac{AP}{PB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

310. 已知两直线 l_1: $Ax+By+C=0$ 和 l_2: $Ax+By+P=0$，当 $Ab\neq Ba$ 时，求直线 l: $ax+by+d=0$ 被 l_1、l_2 所截线段的长.

[分析] 由 $Ab\neq Ba$ 可知，直线 l 和 l_1、l_2 都相交. 故可分别求 l 和 l_1、l_2 的交点解之.

[解] 设直线 l_1 和 l 的交点为 (x_1, y_1)，l_2 和 l 的交点为 (x_2, y_2). 解方程组 $\begin{cases}Ax_1+By_1+C=0\\ ax_1+by_1+d=0,\end{cases}$ 得 $x_1=\frac{Bd-Cb}{Ab-Ba}$, $y_1=\frac{Ca-Ad}{Ab-Ba}$. 同理可得:

$$x_2=\frac{Bd-Pb}{Ab-Ba},\quad y_2=\frac{Pa-Ad}{Ab-Ba}.$$

故所求线段长 $=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\frac{|P-C|\sqrt{a^2+b^2}}{|Ab-Ba|}$.

311. 已知平行四边形四边的方程分别为: $4y-3x-a=0\cdots①$, $3y-4x+a=0\cdots②$, $4y-3x-3a=0\cdots③$, $3y-4x+2a=0\cdots④$. 求它的面积.

[分析] 根据其四边的方程求出四顶点坐标即可.

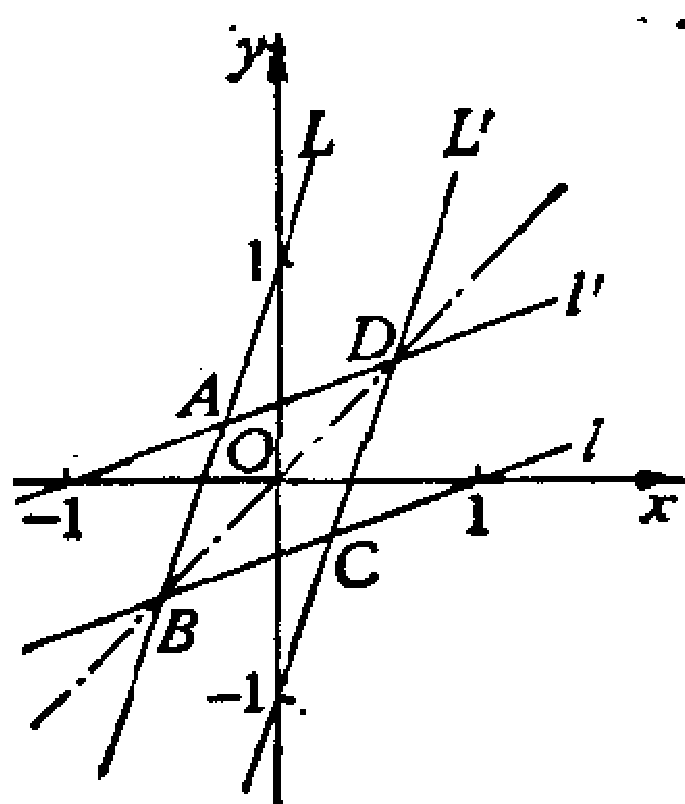
[解] 解方程组①与②、①与④、②与③，分别得交点 (a, a)、$\left(\frac{11}{7}a, \frac{10}{7}a\right)$、$\left(\frac{13}{7}a, \frac{15}{7}a\right)$. 故此平行四边形的面积

$$S=\begin{vmatrix} a & a & 1\\ \frac{11}{7}a & \frac{10}{7}a & 1\\ \frac{13}{7}a & \frac{15}{7}a & 1\end{vmatrix}\text{的绝对值}=\frac{2}{7}a^2.$$

312. 设直线 L: $y=3x+1$, 将 L 沿 x 轴正向平移 $\frac{2}{3}$ 单位，得到直线 L'. 关于直线 $y=x$，与 L、L' 对称的直线分别为 l、l'. 求此四直线围成的四边形的面积.

[分析] 要求题设中四边形的面积，可先分别求出其四边所在直线的方程，然后求它的顶点，即可计算其面积.

[解]　易知直线L'的方程为$y=3\left(x-\frac{2}{3}\right)+1$，即$y=3x-1$. ∵ 直线$l'$、$l$分别和$L'$、$L$关于直线$y=x$对称，∴ l'的方程为$x=3y-1$，l的方程为$x=3y+1$. 又∵ $L/\!/L'$, $l/\!/l'$，∴ 四边形$ABCD$是平行四边形. 易得它的顶点坐标为



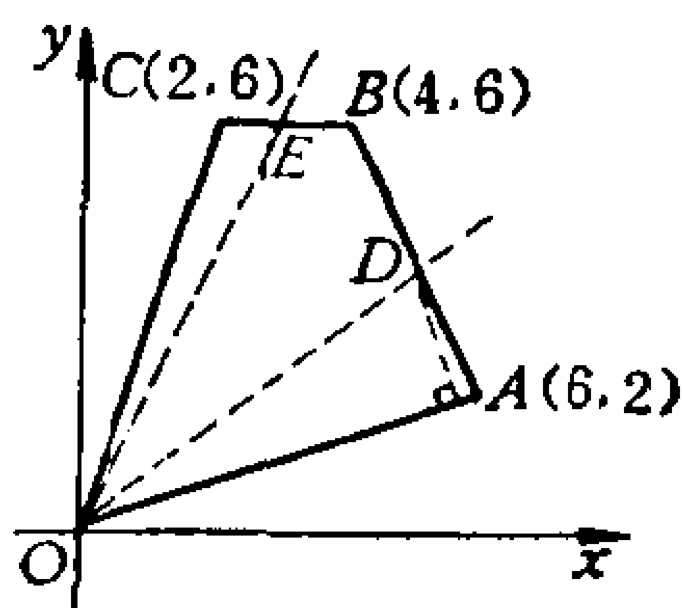
$$A\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)、B\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)、D\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right).$$

$$\therefore\quad S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}\text{的绝对值}=\frac{1}{4}.$$

故所求四边形的面积为1/2.

313. 四边形$OABC$的顶点坐标是$O(0,\ 0)$、$A(6,\ 2)$、$B(4,6)$、$C(2,6)$，直线$y=mx$ $\left(\frac{1}{3}<m<3\right)$分四边形为两部分. (1)用$m$表达出靠近$x$轴一侧部分的面积；(2)当$m$为何值时，直线$y=mx$将此四边形分为面积相等的两部分.

[分析]　由图形可知，要求面积的图形在m大于对角线OB的斜率时为四边形，否则为三角形. 故只需求出直线$y=mx$和BC或AB的交点坐标，即可算出所要求的图形的面积. 同时也能求得符合(2)中条件的m.



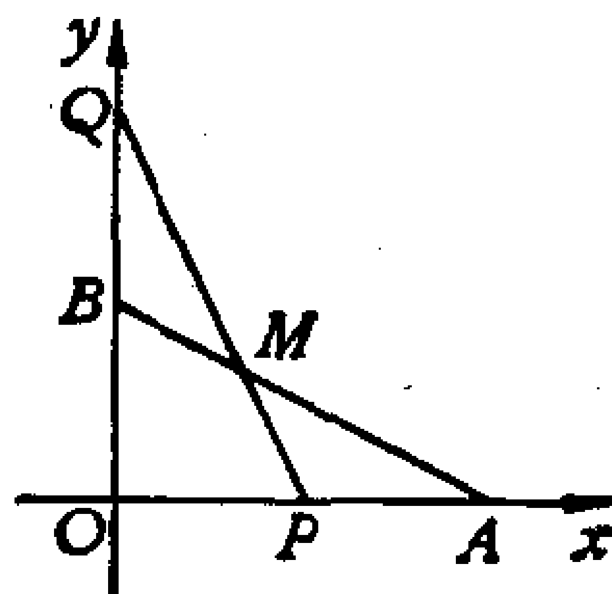
[解]　(1) 由两点式得直线AB的方程为$y=-2x+14$，当$\frac{1}{3}<m<\frac{3}{2}$时，它与直线$y=mx$的交点$D$的坐标为$\left(\frac{14}{m+2},\ \frac{14m}{m+2}\right)$. $\therefore S_{\triangle OAD}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}6 & 2\\ \frac{14}{m+2} & \frac{14m}{m+2}\end{vmatrix}=\frac{14(3m-1)}{m+2}$. 当$\frac{3}{2}\leqslant m<3$时，$y=mx$和$BC$的交点为$E\left(\frac{6}{m},\ 6\right)$，$\therefore S_{\triangle OEC}=\frac{1}{2}\left(\frac{6}{m}-2\right)\cdot 6=3\left(\frac{6}{m}-2\right)$. 容易求得$S_{OABC}=S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OBC}=20$.

$\therefore\ S_{OABE}=20-3\left(\frac{6}{m}-2\right)=26-\frac{18}{m}$. $\therefore$ 当 $\frac{1}{3}<m<\frac{3}{2}$ 时，靠近 x 轴一侧部分的面积是 $\frac{14(3m-1)}{m+2}$；当 $\frac{3}{2}\leqslant m<3$ 时，面积是 $26-\frac{18}{m}$.

(2) 当 $y=mx$ 等分四边形 $OABC$ 时，$\frac{14(3m-1)}{m+2}=10$，$\therefore m=\frac{17}{16}$.

314. 直交的半直线 Ox、Oy 上各有一点 A、B，$OA=2$，$OB=1$. 线段 OA 上一动点 P，OB 的延长线上有动点 Q，AB 和 PQ 的交点为 M. 如 P、Q 保持 $|PA|=|BQ|$ 的关系，且分别趋近于 A、B. 问点 M 趋向何处？

[分析] 当点 P 的位置按条件确定时，点 Q 的位置也被确定，从而点 M 也随之而定. 因此，要求点 M 所趋近的位置，只需先把点 M 的坐标用点 P 的坐标表示，然后在点 P 趋近于 A 时，求出点 M 坐标的极限即可.



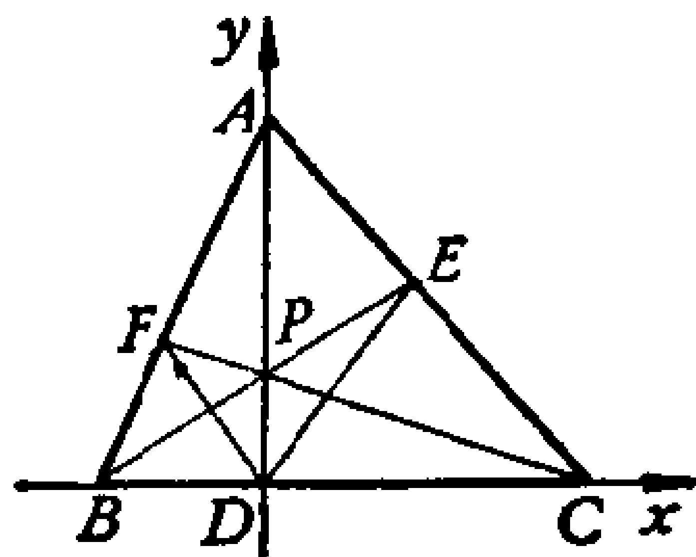
[解] 如图建立坐标系，则点 A、B 的坐标分别为 $(2, 0)$ 和 $(0, 1)$. 设 $|PA|=|BQ|=t$，则点 P 的坐标为 $(2-t, 0)$，点 Q 的坐标为 $(0, 1+t)$，其中 $0\leqslant t\leqslant 2$. 于是 AB、PQ 的方程分别为：$\frac{x}{2}+y=1$ 和 $\frac{x}{2-t}+\frac{y}{1+t}=1$（特别地当 $t=2$ 时，PQ 的方程为 $x=0$）. 解上述两方程组成的方程组得 $x=\frac{4-2t}{3}$，$y=\frac{1+t}{3}$. 当 P、Q 按条件分别趋近于 A、B 时，$t\to 0$，$\therefore x\to\frac{4}{3}$，$y\to\frac{1}{3}$. $\therefore$ 点 M 趋近于点 $\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$，即线段 AB 的 1:2 内分点.

§11. 证 明 题

315. $\triangle ABC$ 中 AD 是高，在 AD 上任取一点 P，BP 交 AC 于 E，CP 交 AB 于 F. 求证 $\angle ADE=\angle ADF$.

[分析] 若以 D 为原点，DA 所在直线为 y 轴，建立坐标系，则只要证明直线 DE、DF 的斜率之和为零即得证.

［证一］ 以直线 BC 为 x 轴、AD 为 y 轴建立直角坐标系. 设点 A、B、C 的坐标分别为 $(0, a)$、$(b, 0)$、$(c, 0)$，点 P 的坐标为 $(0,p)$. 于是，直线 AC 的方程为 $ax+cy=ac$…①，直线 BP 的方程为 $px+by=bp$…②. 由①、②解得 E 的坐标为 $\left(\frac{bc(a-p)}{ab-cp}, \frac{ap(b-c)}{ab-cp}\right)$.

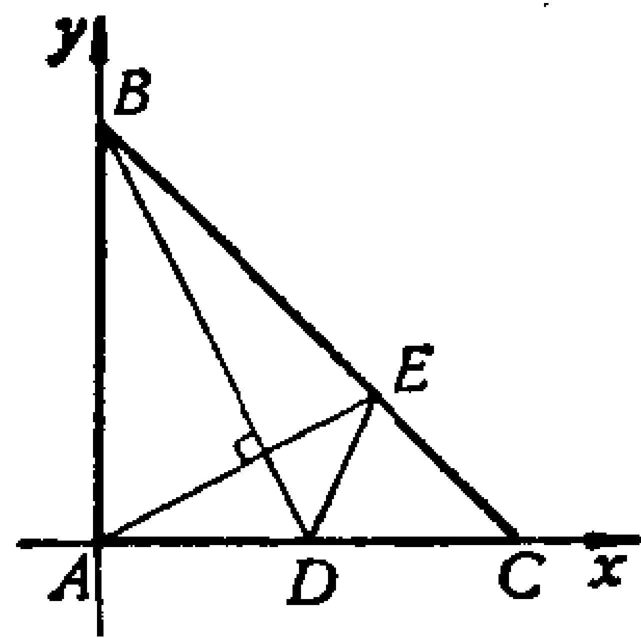


$\therefore$ DE 的斜率 $k_1=\frac{ap(b-c)}{bc(a-p)}$. 直线 AB 的方程为 $ax+by=ab$…③，直线 CP 的方程为 $px+cy=cp$…④. 由③、④解得 F 的坐标为 $\left(\frac{bc(a-p)}{ac-bp}, \frac{ap(c-b)}{ac-bp}\right)$. $\therefore$ DF 的斜率 $k_2=\frac{ap(c-b)}{bc(a-p)}$. $\because$ $k_1+k_2=0$，$\therefore$ $\angle EDC=\angle FDB$. 又 $AD\perp BC$，$\therefore$ $\angle ADE=\angle ADF$.

［证二］ 坐标系假设同前. 直线 AC、BE 的方程分别为 $\frac{x}{c}+\frac{y}{a}=1$，$\frac{x}{b}+\frac{y}{p}=1$. 过点 E 的直线系方程为 $\frac{x}{c}+\frac{y}{a}-1=\lambda\left(\frac{x}{b}+\frac{y}{p}-1\right)$. 如直线过原点，则 $\lambda=1$. $\therefore$ 直线 DE 的方程为 $\frac{x}{c}+\frac{y}{a}=\frac{x}{b}+\frac{y}{p}$，即 $x\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)+y\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{p}\right)=0$…①. 同理，从直线 AB、CF 的方程 $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$，$\frac{x}{c}+\frac{y}{p}=1$ 可得直线 DF 的方程为 $x\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+y\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{p}\right)=0$…②. $\therefore$ 直线 DE、DF 的斜率 k_1、k_2 互为相反数，即 $k_1+k_2=0$. $\therefore$ $\angle ADE=\angle ADF$.

316. $\triangle ABC$ 中，$|AB|=|AC|$，$\angle A=90°$，过 A 引中线 BD 的垂线与 BC 交于 E. 求证 $\angle ADB=\angle CDE$.

［分析］ 如图建立坐标系后，只要证直线 DE 的倾角和直线 BD 的倾角互补，即证明它们的斜率之和为零即可.



［证］ 以 AC、AB 分别为 x 轴和 y 轴建立坐标系. 设点 A、B、C 的坐标分别为 $(0, 0)$、$(0, a)$、$(a, 0)$，则点 D 的坐标为 $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$. 直线 BD 的斜率为 $k_1=\frac{a-0}{0-\frac{a}{2}}=-2$. 直线 AE 的方程是 $y=\frac{1}{2}x$，直线 BC 的方程是

$y=-x+a$. ∴它们交点 E 的坐标为 $\left(\frac{2}{3}a, \frac{a}{3}\right)$. 直线 DE 的斜率为

$k_2=\dfrac{\frac{1}{3}a}{\frac{2}{3}a-\frac{a}{2}}=2$. ∵ $k_1+k_2=0$, ∴ $\angle EDC+\angle BDC=180°$,

$$\therefore\ \angle CDE=\angle ADB.$$

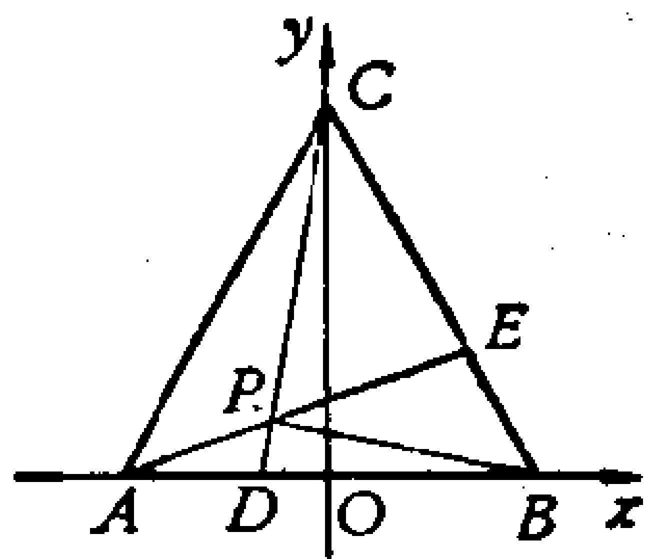
317. 求证: 四直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$, $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=2$ 所组成的平行四边形的对角线互相垂直.

[分析] 可运用直线系方程求出此平行四边形的两条对角线的方程证得.

[证] 设过 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 与 $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$ 交点的直线系方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=\lambda\left(\frac{x}{b}+\frac{y}{a}-1\right)\cdots$①, 过 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ 与 $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=2$ 交点的直线系方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-2=\lambda'\left(\frac{x}{b}+\frac{y}{a}-2\right)\cdots$②. 若①与②重合, 则 $\lambda=\lambda'=1$, 即一对角线方程为 $x-y=0$. 同法可得另一对角线方程为 $x+y=\frac{3ab}{a+b}$, ∴四边形的对角线互相垂直.

318. 在正 $\triangle ABC$ 中, D、E 分别为 AB、BC 上的点, 且 $AD=\frac{1}{3}AB$, $BE=\frac{1}{3}BC$, AE、CD 交于点 P. 求证:

$$BP\perp CP.$$

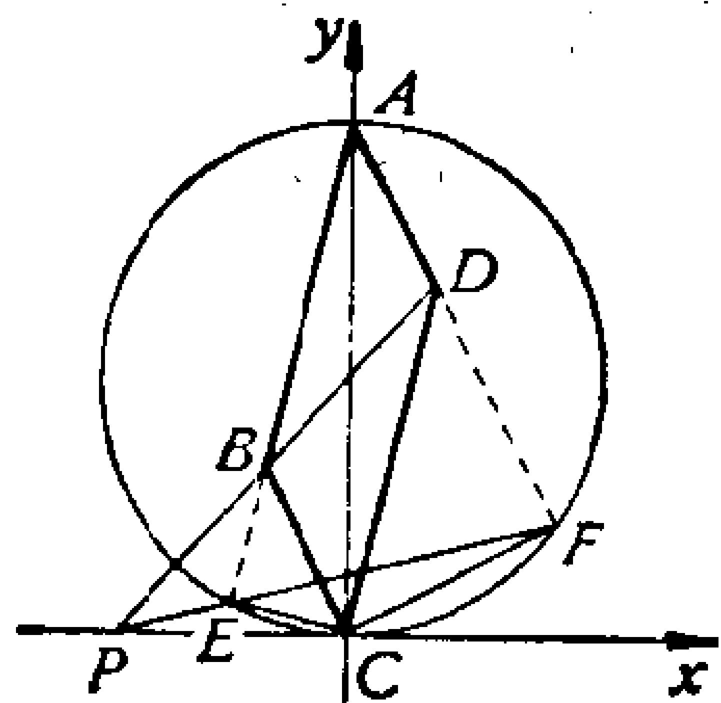


[分析] 建立适当坐标系并设定正三角形边长后, 可求出 A、B、C 及 D、E 的坐标, 从而确定直线 CP 和 BP 的方程. 然后考察两方程系数间的关系即可得证.

[证] 取直线 AB 为 x 轴, AB 的中点 O 为原点, 建立直角坐标系. 设正三角形边长为 $2a$, 则有: $A(-a, 0)$、$B(a, 0)$、$C(0, \sqrt{3}a)$、$D\left(-\frac{a}{3}, 0\right)$、$E\left(\frac{2}{3}a, \frac{\sqrt{3}}{3}a\right)$. 直线 AE 的方程为 $\sqrt{3}x-5y+\sqrt{3}a=0$, 直线

CD 的方程为 $3\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}a=0\cdots$①. 设直线 BP 的方程为 $3\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}a=\lambda(\sqrt{3}x-5y+\sqrt{3}a)$, ∵ 直线 BP 过 B 点, ∴ $3\sqrt{3}a+\sqrt{3}a=\lambda(\sqrt{3}a+\sqrt{3}a)$, $\lambda=2$. ∴ BP 的方程为 $\sqrt{3}x+9y-\sqrt{3}a=0\cdots$②. 由 ①、② 可知 $A_1A_2+B_1B_2=3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+(-1)\cdot 9=0$, ∴ $BP\perp CP$.

319. 平行四边形 $ABCD$ 非菱形或矩形，引 $CE\perp AB$ 于 E, $CF\perp AD$ 于 F, 连 FE 并延长交 DB 的延长线于 P, 则 $\angle ACP=90°$.



[分析] 当取 C 为原点、CA 为 y 轴时，欲证 $\angle ACP=90°$, 只需证出点 P 的纵坐标为零.

[证] 取 C 为原点，CA 所在直线为 y 轴，建立直角坐标系. 设 CD 的方程为 $y=m_1x$, CB 的方程为 $y=-m_2x$, $|AC|=b$, 则 AB 的方程: $y=m_1x+b$; AD 的方程: $y=-m_2x+b$; CF 的方程: $x-m_2y=0$; CE 的方程: $x+m_1y=0$.

设 BD 的方程为 $m_2x+y-b=\lambda(m_1x-y)$. ∵ BD 过 AC 的中点 $\left(0,\dfrac{b}{2}\right)$, ∴ $\lambda=1$, 故 BD 的方程为 $(m_1-m_2)x-2y+b=0\cdots$①.

设 EF 的方程为 $m_1x-y+b=\lambda'(x+m_1y)$ 或 $m_2x+y-b=\mu'(x-m_2y)$, 即 $(m_1-\lambda')x-(1+\lambda'm_1)y+b=0$ 或 $(m_2-\mu')x+(1+\mu'm_2)y-b=0$.

∵ 两方程表示同一直线, ∴ $\dfrac{m_1-\lambda'}{m_2-\mu'}=\dfrac{-1-\lambda'm_1}{1+\mu'm_2}=\dfrac{b}{-b}$. 由此得 $\lambda'=m_2$. 故 EF 的方程为 $(m_1-m_2)x-(1+m_1m_2)y+b=0\cdots$②.

从 ①、② 可得点 P 的坐标为 $\left(-\dfrac{b}{m_1-m_2},\ 0\right)$.

$$\therefore\quad AC\perp CP,\quad \text{即}\quad \angle ACP=90°.$$

[说明] 用解析法证平几问题，常取问题中两互相垂直的直线为坐标轴. 利用直线系方程来解题，可以避免解方程组求交点坐标，使运算过程简化. 本题结论亦可改为: PC 与以 AC 为直径的圆相切.

320. 设三直线 $x+y\cos\beta+\cos\gamma=0$, $x\cos\beta+y+\cos\alpha=0$ 和 $x\cos\gamma+y\cos\alpha+1=0$ 相交于一点. 求证: $\beta-\gamma\pm\alpha=2n\pi$

或 $\beta+\gamma\pm\alpha=2n\pi\ (n\in J)$.

[证] ∵ 直线 $x+y\cos\beta+\cos\gamma=0$, $x\cos\beta+y+\cos\alpha=0$ 和 $x\cos\gamma+y\cos\alpha+1=0$ 共点, ∴ $\begin{vmatrix}1 & \cos\beta & \cos\gamma\\ \cos\beta & 1 & \cos\alpha\\ \cos\gamma & \cos\alpha & 1\end{vmatrix}=0$.

又 ∵
$$\begin{vmatrix}1 & \cos\beta & \cos\gamma\\ \cos\beta & 1 & \cos\alpha\\ \cos\gamma & \cos\alpha & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & \cos\beta & \cos\gamma\\ 0 & 1-\cos^2\beta & \cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma\\ 0 & \cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma & 1-\cos^2\gamma\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}1-\cos^2\beta & \cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma\\ \cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma & 1-\cos^2\gamma\end{vmatrix}$$
$$=(1-\cos^2\beta)(1-\cos^2\gamma)-(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)^2$$
$$=\sin^2\beta\sin^2\gamma-(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)^2$$
$$=(\sin\beta\sin\gamma+\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha)\cdot(\sin\beta\sin\gamma-\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha)$$
$$=[\cos(\beta-\gamma)-\cos\alpha][\cos\alpha-\cos(\beta+\gamma)].$$

∴ $[\cos(\beta-\gamma)-\cos\alpha][\cos\alpha-\cos(\beta+\gamma)]=0$.

故 $\cos\alpha=\cos(\beta-\gamma)$ 或 $\cos\alpha=\cos(\beta+\gamma)$. 即得
$$\beta-\gamma\pm\alpha=2n\pi \quad 或 \quad \beta+\gamma\pm\alpha=2n\pi(n\in J).$$

321. 已知不同的三直线 $x\sin 3\alpha+y\sin\alpha=a$, $x\sin 3\beta+y\sin\beta=a$, $x\sin 3\gamma+y\sin\gamma=a$ 共点, 其中 $a\neq 0$. 求证:
$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0.$$

[证一] 根据三条互不平行的直线共点的条件可得
$$\begin{vmatrix}\sin 3\alpha & \sin\alpha & -a\\ \sin 3\beta & \sin\beta & -a\\ \sin 3\gamma & \sin\gamma & -a\end{vmatrix}=0,$$

即
$$\begin{vmatrix}3\sin\alpha-4\sin^3\alpha & \sin\alpha & -a\\ 3\sin\beta-4\sin^3\beta & \sin\beta & -a\\ 3\sin\gamma-4\sin^3\gamma & \sin\gamma & -a\end{vmatrix}=0.$$

$$\because \quad a\neq 0, \quad \therefore \quad \begin{vmatrix} \sin^3\alpha & \sin\alpha & 1 \\ \sin^3\beta & \sin\beta & 1 \\ \sin^3\gamma & \sin\gamma & 1 \end{vmatrix}=0,$$

即 $(\sin\alpha-\sin\beta)(\sin\beta-\sin\gamma)(\sin\gamma-\sin\alpha)(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)=0$.

又 $\sin\alpha\neq\sin\beta$, $\sin\beta\neq\sin\gamma$, $\sin\gamma\neq\sin\alpha$, $\therefore \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$.

［证二］ 设三直线都过定点(h, k)，则$h\sin 3\alpha+k\sin\alpha=a$，即

$$4h\sin^3\alpha-(3h+k)\sin\alpha+a=0\cdots①;$$

$h\sin 3\beta+k\sin\beta=a$，即

$$4h\sin^3\beta-(3h+k)\sin\beta+a=0\cdots②;$$

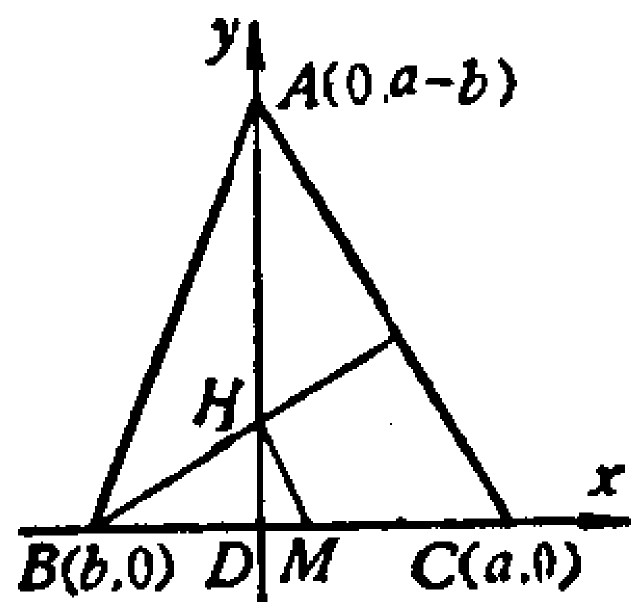
$h\sin 3\gamma+k\sin\gamma=a$，即

$$4h\sin^3\gamma-(3h+k)\sin\gamma+a=0\cdots③.$$

由①、②、③可知$\sin\alpha$、$\sin\beta$、$\sin\gamma$是方程$4ht^3-(3h+k)t+a=0$的三个根．根据韦达定理有$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$.

322. $\triangle ABC$中AD是BC边上的高，且$|AD|=|BC|$，M为BC的中点，H为垂心，求证$|MH|+|HD|=|BM|$.

［分析］ 本题当取BC、AD所在直线为坐标轴，设定B、C两点坐标后，点A、D、H的坐标随之而定，计算距离$|MH|$、$|HD|$、$|BM|$即可证明.



［证］ 建立直角坐标系如图．设点B、C的坐标分别为$(b, 0)$, $(a, 0)$. $\because |AD|=|BC|$, $\therefore$ 点A的坐标为$(0, a-b)$．直线BH的方程为$y=\dfrac{a}{a-b}(x-b)$, $\therefore$ 点H的坐标为$\left(0, \dfrac{-ab}{a-b}\right)$. $|HD|=\dfrac{-ab}{a-b}$. 点M坐标为$\left(\dfrac{a+b}{2}, 0\right)$,

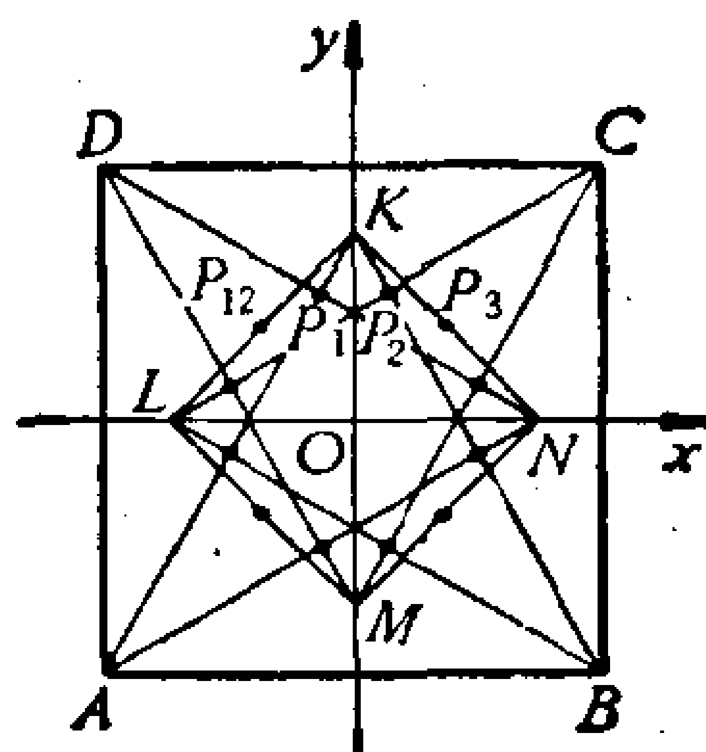
$$\therefore \quad |BM|=\frac{a+b}{2}-b=\frac{a-b}{2},$$

$$|MH|=\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{a^2b^2}{(a-b)^2}}=\frac{a^2+b^2}{2(a-b)}.$$

$$\therefore \quad |MH|+|HD|=\frac{a^2+b^2}{2(a-b)}+\frac{-ab}{a-b}$$

$$=\frac{a^2+b^2-2ab}{2(a-b)}=\frac{a-b}{2}=|BM|.$$

323. 在已知正方形 $ABCD$ 内侧，作等边 $\triangle ABK$、$\triangle BCL$、$\triangle CDM$、$\triangle DAN$. 试证：KL、LM、MN 和 NK 这四条线段的中点和 AK、BK、BL、CL、CM、DM、DN、AN 等八条线段的中点，是一个正十二边形的十二个顶点.



[分析] 要证诸线段的中点 P_1、P_2、…、P_{12} 是正十二边形的顶点，可从证 $P_i(i=1, 2, \cdots, 12)$ 共圆，且相邻两点的距离均相等着手. 为此宜取正方形的中心 O 为原点，使 x、y 轴分别与正方形两邻边平行，取正方形边长为 $2a$，求出 P_i 的坐标，即可得证.

[证] 以正方形中心 O 为原点，使 x 轴、y 轴平行于正方形两邻边，建立直角坐标系. 设正方形边长为 $2a$，则 $A(-a, -a)$、$B(a, -a)$、$C(a, a)$、$D(-a, a)$. 因为四个等边三角形是分别以 x 轴、y 轴为对称轴的对称图形，所以 K、L、M、N 四点分别在 x 轴与 y 轴上，它们的坐标是 $K(0, (\sqrt{3}-1)a)$、$L(-(\sqrt{3}-1)a, 0)$、$M(0, -(\sqrt{3}-1)a)$、$N((\sqrt{3}-1)a, 0)$. 又设 DN、CL 和 KN 的中点为 P_1、P_2 和 P_3，则根据中点公式它们的坐标分别为：

$$P_1\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}a, \frac{a}{2}\right)、P_2\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}a, \frac{a}{2}\right)、P_3\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}a, \frac{\sqrt{3}-1}{2}a\right),$$

根据两点间距离公式得 $|P_1P_2|=(2-\sqrt{3})a$, $|P_2P_3|=(2-\sqrt{3})a$,
$\therefore |P_1P_2|=|P_2P_3|$. 同样，$|OP_1|=\sqrt{2-\sqrt{3}}a$, $|OP_2|=\sqrt{2-\sqrt{3}}a$, $|OP_3|=\sqrt{2-\sqrt{3}}a$, $\therefore$ $|OP_1|=|OP_2|=|OP_3|$.

再由图形的对称性，可知另外九个顶点均在以 O 为圆心，$\sqrt{2-\sqrt{3}}a$ 长为半径的圆上，且它们相邻两点之间的距离是 $(2-\sqrt{3})a$. 因此，这十二个顶点是正十二边形的顶点.

324. 设两已知点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$ 的连线交直线 $Ax+By+C=0$ 于点 P(P_2 不在此直线上). 求证：

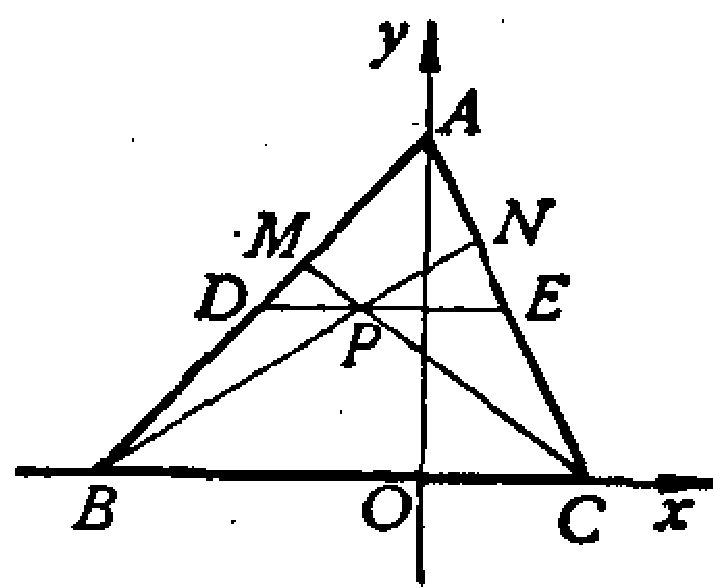
$$\frac{P_1P}{PP_2}=-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}.$$

［分析］ 设 $\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$，则点 P 的坐标可以利用分点坐标公式求得. 再根据点 P 在直线 $Ax+By+C=0$ 上，即可得证.

［证］ 设 $\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$，则点 P 坐标为 $\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$. ∵点 P 在直线 $Ax+By+C=0$ 上，∴ $A\cdot\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}+B\cdot\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}+C=0$， 解得 $\lambda=-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}$. ∴ $\frac{P_1P}{PP_2}=-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}$ $(Ax_2+By_2+C\neq 0)$.

［说明］ 这是一个有广泛应用的定理，可用于证明离差符号法则，也可用于证比例线段.

325. P 为 $\triangle ABC$ 的边 BC 所对的中位线 DE 上任意一点，CP 交 AB 于 M，BP 交 AC 于 N. 求证：$\frac{AN}{NC}+\frac{AM}{MB}=1$.



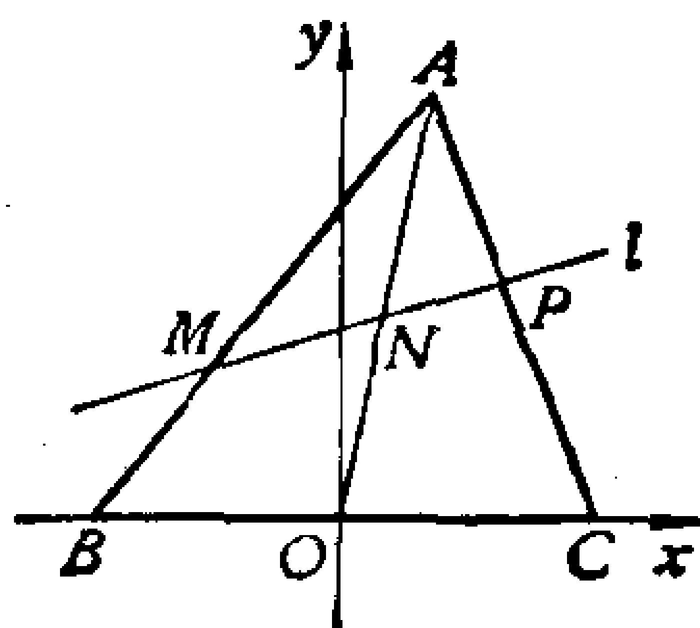
［分析］ 可先利用上题的结论，求得本题中所涉及到的线段之比，然后证之.

［证］ 建立坐标系如图. 设 $\triangle ABC$ 顶点坐标为 $A(0, a)$、$B(b, 0)$、$C(c, 0)$， 点 P 的坐标为 $\left(x_0, \frac{a}{2}\right)$. 则直线 BP 的方程为 $ax-2y(x_0-b)-ab=0$. 根据上题结论，$\frac{AN}{NC}=\frac{2a(x_0-b)+ab}{ac-ab}=\frac{2x_0-b}{c-b}$. 直线 CP 的方程为 $ax-2y(x_0-c)-ac=0$. 同理有

$$\frac{AM}{MB}=-\frac{-2a(x_0-c)-ac}{ab-ac}=-\frac{c-2x_0}{b-c}=\frac{c-2x_0}{c-b}.$$

$$\therefore\ \frac{AN}{NC}+\frac{AM}{MB}=\frac{2x_0-b}{c-b}+\frac{c-2x_0}{c-b}=\frac{c-b}{c-b}=1.$$

326. $\triangle ABC$ 中 BC 边上的中线为 AO，任意一直线 l 分别交 AB、AO、AC 于 M、N、P. 求证：$\frac{BM}{MA}$、$\frac{ON}{NA}$、$\frac{CP}{PA}$ 成等差数列.



［证］ 建立坐标系如图. 设点 B 的坐标为

$(-a,\ 0)$，点 C 的坐标为 $(a,\ 0)$，点 A 的坐标为 $(b,\ d)$． 直线 l 的方程为 $px+qy+r=0$．根据第 324 题结论有

$$\frac{BM}{MA}=-\frac{-ap+r}{pb+qd+r},\quad \frac{ON}{NA}=-\frac{r}{pb+qd+r},$$

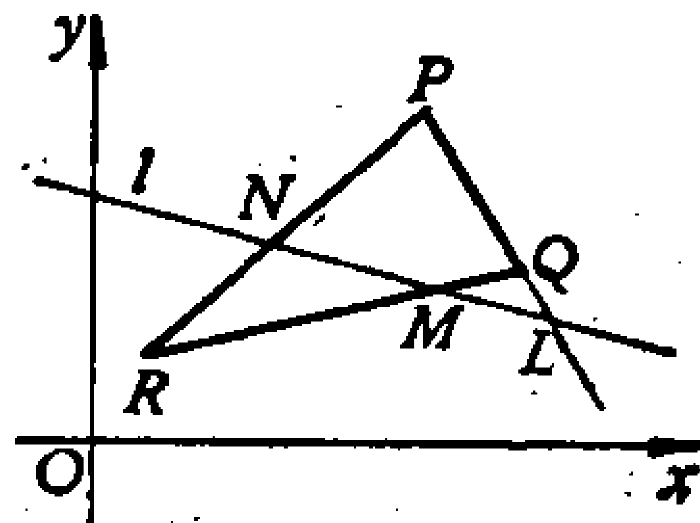
$$\frac{CP}{PA}=-\frac{ap+r}{pb+qd+r}.$$

$$\frac{BM}{MA}+\frac{CP}{PA}=-\frac{2r}{pb+qd+r}=\frac{2ON}{NA}.$$

$\therefore\ \frac{BM}{MA}$、$\frac{ON}{NA}$、$\frac{CP}{PA}$ 成等差数列．

327．设 $\triangle PQR$ 的三边 PQ、QR、RP（或其延长线）交直线 l 于 L、M、N 三点．求证：$\frac{PL}{LQ}\cdot\frac{QM}{MR}\cdot\frac{RN}{NP}=-1$．

［证］ 任意建立直角坐标系．设顶点的坐标为 $P(x_1,\ y_1)$、$Q(x_2,\ y_2)$、$R(x_3,\ y_3)$，直线 l 的方程为 $Ax+By+C=0$．根据第 324 题结论，



$$\frac{PL}{LQ}=-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C},$$

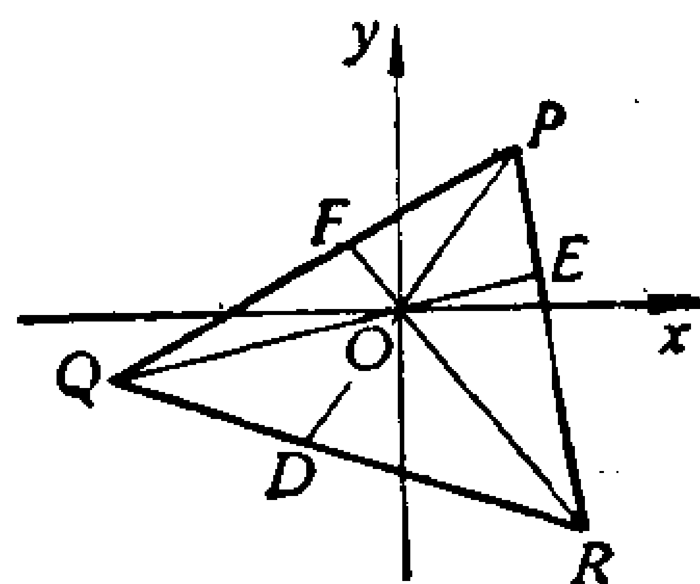
$$\frac{QM}{MR}=-\frac{Ax_2+By_2+C}{Ax_3+By_3+C},$$

$$\frac{RN}{NP}=-\frac{Ax_3+By_3+C}{Ax_1+By_1+C}.$$

$$\therefore\quad \frac{PL}{LQ}\cdot\frac{QM}{MR}\cdot\frac{RN}{NP}=-1.$$

［说明］ 本命题又称梅内劳斯(Menelaus)定理．

328 在 $\triangle PQR$ 中，自顶点 P、Q、R 向对边引三线 PD、QE、RF 交于一点 O．求证 $\frac{QD}{DR}\cdot\frac{RE}{EP}\cdot\frac{PF}{FQ}=1$．



［证］ 取 O 为原点建立直角坐标系．设三顶点的坐标为 $P(x_1,\ y_1)$、$Q(x_2,\ y_2)$、$R(x_3,\ y_3)$．直线 PD 的方程为 $y_1x-x_1y=0$． 根据第 324 题结论 $\frac{QD}{DR}=-\frac{y_1x_2-x_1y_2}{y_1x_3-x_1y_3}=\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_1y_3-y_1x_3}$． 同理，$\frac{RE}{EP}=\frac{y_2x_3-x_2y_3}{x_2y_1-y_2x_1}$，

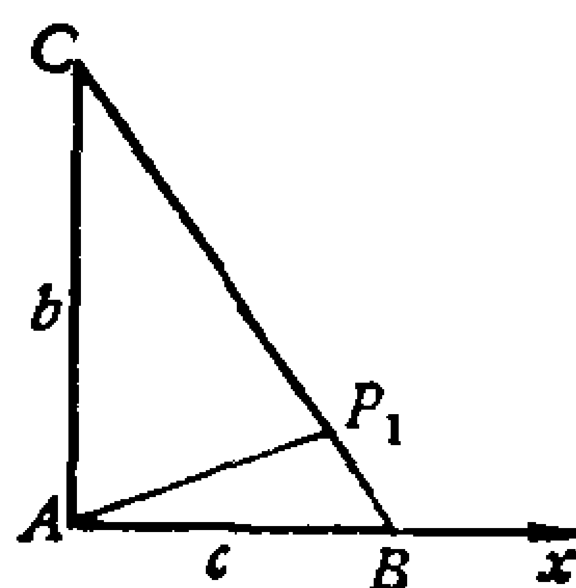
$\frac{PF}{FQ}=\frac{y_3x_1-x_3y_1}{x_3y_2-y_3x_2}$. $\therefore \frac{QD}{DR}\cdot\frac{RE}{EP}\cdot\frac{PF}{FQ}=1$.

[说明] 本命题又称塞瓦(Ceva)定理.

329. 在直角三角形 ABC 中, $|AB|=c$, $|AC|=b$, 直角 A 的 n 等分线顺次与斜边 BC 交于点 P_1、P_2、…、P_{n-1}. 求证:

$$\frac{1}{AP_1}+\frac{1}{AP_2}+\cdots+\frac{1}{AP_{n-1}}=\frac{b+c}{2bc}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n}-1\right).$$

[证] 建立极坐标系如图, 则点 B 的坐标为 $(c, 0)$, 点 C 的坐标为 $\left(b, \frac{\pi}{2}\right)$. BC 边的极坐标方程为 $\rho\left(\frac{\cos\theta}{c}+\frac{\sin\theta}{b}\right)=1$. 设 $\angle BAP_1=\alpha$, 则



$$\frac{1}{AP_1}=\frac{\cos\alpha}{c}+\frac{\sin\alpha}{b}.$$

同理可得
$$\frac{1}{AP_2}=\frac{\cos 2\alpha}{c}+\frac{\sin 2\alpha}{b}, \cdots$$
$$\frac{1}{AP_{n-1}}=\frac{\cos(n-1)\alpha}{c}+\frac{\sin(n-1)\alpha}{b}.$$

$$\because \quad \cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos(n-1)\alpha=\frac{\sin\frac{(n-1)\alpha}{2}\cos\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\cdots+\sin(n-1)\alpha=\frac{\sin\frac{(n-1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{AP_1}+\frac{1}{AP_2}+\cdots+\frac{1}{AP_{n-1}}$$
$$=\frac{1}{c}(\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos(n-1)\alpha)$$
$$+\frac{1}{b}(\sin\alpha+\sin 2\alpha+\cdots+\sin(n-1)\alpha)$$
$$=\frac{1}{c}\cdot\frac{\sin\frac{(n-1)\alpha}{2}\cos\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{b}\cdot\frac{\sin\frac{(n-1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{(n-1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\cos\frac{n\alpha}{2}}{c}+\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{b}\right).$$

$$\because\quad \alpha=\frac{\pi}{2n},$$

$$\therefore\quad \frac{1}{AP_1}+\frac{1}{AP_2}+\cdots+\frac{1}{AP_{n-1}}$$

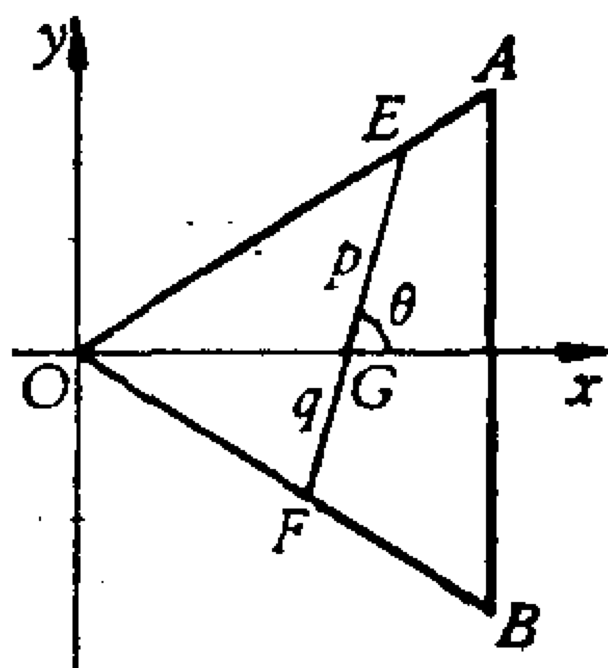
$$=\frac{\sin\frac{(n-1)\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{c}+\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{b}\right)$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4n}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\left(\frac{b+c}{\sqrt{2}\,bc}\right)$$

$$=\frac{b+c}{2bc}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n}-1\right).$$

330. 过边长为 a 的正三角形的重心 G 作一直线交两边于 E、F，设 $|EG|=p$，$|FG|=q$. 求证：$\frac{1}{p^2}-\frac{1}{pq}+\frac{1}{q^2}=\frac{9}{a^2}$.

［分析一］ 显然，p、q 的值决定于过定点 G 的直线 EF，故可在建立坐标系后，将 p、q 写成此直线的倾角的函数式，再通过计算证之.



［证一］ 建立坐标系如图，则边 OA、OB 所在直线的方程分别为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$, 和 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

又设 $\angle xGE=\theta$, $\because OG=\frac{\sqrt{3}}{3}a$. $\therefore$ 点 E 的坐标为$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a+p\cos\theta,\ p\sin\theta\right)$，点 F 的坐标为$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a-q\cos\theta,\ -q\sin\theta\right)$.

$\because$ 点 E 在 OA 上，$\therefore p\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a+p\cos\theta\right)$.

$$\therefore\quad \frac{1}{p}=\frac{\sqrt{3}\,(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta)}{a}.$$

同理，由点 F 在 OB 上，可得 $\frac{1}{q}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)}{a}$. 故

$$\frac{1}{p^2}-\frac{1}{pq}+\frac{1}{q^2}=\frac{3}{a^2}[(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta)^2-(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta)\cdot(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)+(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)^2]$$
$$=\frac{3}{a^2}(3\sin^2\theta+3\cos^2\theta)=\frac{9}{a^2}.$$

［分析二］ 由于待证结论中涉及到同一直线上的线段长 p、q，故也可用直线的参数式证之.

［证二］ 建立坐标系如前，则 OA、OB 两直线的方程可表示为

$$x^2-3y^2=0\cdots①.$$

过 $G\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a,\ 0\right)$的任意直线 EF 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{3}a+t\cos\theta\\ y=t\sin\theta,\end{cases}$ 代入①，得

$$(\cos^2\theta-3\sin^2\theta)t^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}at\cos\theta+\frac{1}{3}a^2=0\cdots②.$$

方程 ② 的两个根为 p、$-q$，而以 $\frac{1}{p}$、$-\frac{1}{q}$ 为根的方程为

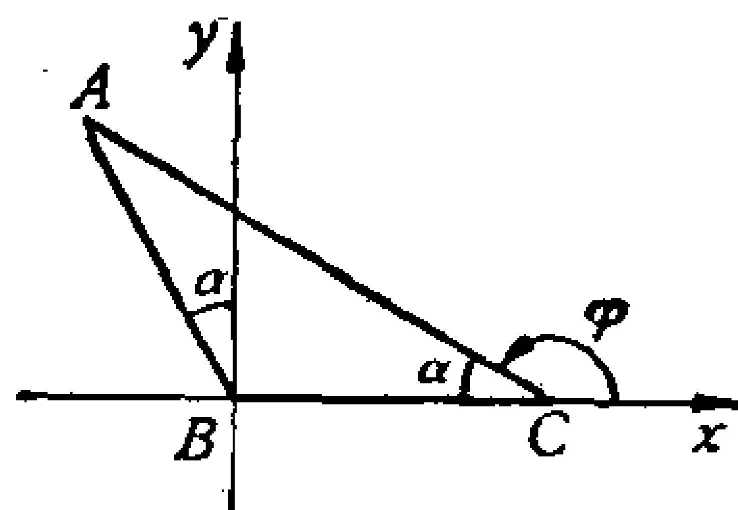
$$\frac{1}{3}a^2t^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}at\cos\theta+(\cos^2\theta-3\sin^2\theta)=0.$$

$$\therefore\ \frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{-2\sqrt{3}\cos\theta}{a},\quad -\frac{1}{pq}=\frac{3(\cos^2\theta-3\sin^2\theta)}{a^2}.$$

$$\frac{1}{p^2}-\frac{1}{pq}+\frac{1}{q^2}=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)^2+\frac{1}{pq}$$
$$=\frac{12\cos^2\theta-3\cos^2\theta+9\sin^2\theta}{a^2}=\frac{9}{a^2}.$$

331. $\triangle ABC$ 中，$\angle B-\angle C=90°$，$|BC|=a$，$|CA|=b$，$|AB|=c$. 求证：

$$\frac{2}{a^2}=\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}.$$



［证一］ 建立坐标系如图，设点 B、C 的坐标分别为$(0,\ 0)$、$(a,\ 0)$，$\angle ACB=\alpha$，则 $\angle ABC=90°+\alpha$. 并设 $k=-\mathrm{tg}\,\alpha$，

则直线 AC 的方程为 $y=k(x-a)$，直线 AB 的方程为 $y=\frac{1}{k}x$，故点 A 的坐标为 $\left(\frac{ak^2}{k^2-1},\ \frac{ak}{k^2-1}\right)$. $b^2=|AC|^2=\left(\frac{ak^2}{k^2-1}-a\right)^2+\left(\frac{ak}{k^2-1}\right)^2=\frac{a^2(k^2+1)}{(k^2-1)^2}=\frac{a^2\sec^2\alpha}{(\operatorname{tg}^2\alpha-1)^2}$，显然 α 为锐角，$\therefore b=\frac{a\sec\alpha}{|\operatorname{tg}^2\alpha-1|}$.

$$c^2=|AB|^2=\frac{a^2k^4}{(k^2-1)^2}+\frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2}=\frac{a^2k^2(1+k^2)}{(k^2-1)^2}=\frac{a^2\operatorname{tg}^2\alpha\sec^2\alpha}{(\operatorname{tg}^2\alpha-1)^2},$$

$$c=\frac{a\operatorname{tg}\alpha\sec\alpha}{|\operatorname{tg}^2\alpha-1|}.$$

$$\frac{1}{(b+c)^2}=\frac{(\operatorname{tg}\alpha-1)^2}{a^2\sec^2\alpha},\quad \frac{1}{(b-c)^2}=\frac{(\operatorname{tg}\alpha+1)^2}{a^2\sec^2\alpha}.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}=\frac{2\sec^2\alpha}{a^2\sec^2\alpha}=\frac{2}{a^2}.$$

[证二]　设 $\angle xCA=\varphi$，则 $\angle xBA=\frac{\pi}{2}+(\pi-\varphi)=\frac{3\pi}{2}-\varphi$.

$$\because\ \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA},\quad \therefore\ (\overrightarrow{BC})_{Bx}+(\overrightarrow{CA})_{Bx}=(\overrightarrow{BA})_{Bx},$$

即 $a+b\cos\varphi=c\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right)$. 同理，$b\sin\varphi=c\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\varphi\right)$，即

$a+b\cos\varphi=-c\sin\varphi, b\sin\varphi=-c\cos\varphi$. $\therefore \sin\varphi=\frac{ac}{b^2-c^2}, \cos\varphi=\frac{-ab}{b^2-c^2}$.

消去 φ，得 $\left(\frac{ac}{b^2-c^2}\right)^2+\left(\frac{-ab}{b^2-c^2}\right)^2=1$，即 $\frac{2}{a^2}=\frac{2(b^2+c^2)}{(b^2-c^2)^2}$.

又
$$\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}=\frac{2(b^2+c^2)}{(b^2-c^2)^2}.$$

$$\therefore\quad \frac{2}{a^2}=\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}.$$

332. 证明：正三角形内任意一点到三边的距离之和为定值.

[分析一]　可在建立坐标系后，写出三边所在的直线的法线式再证之.

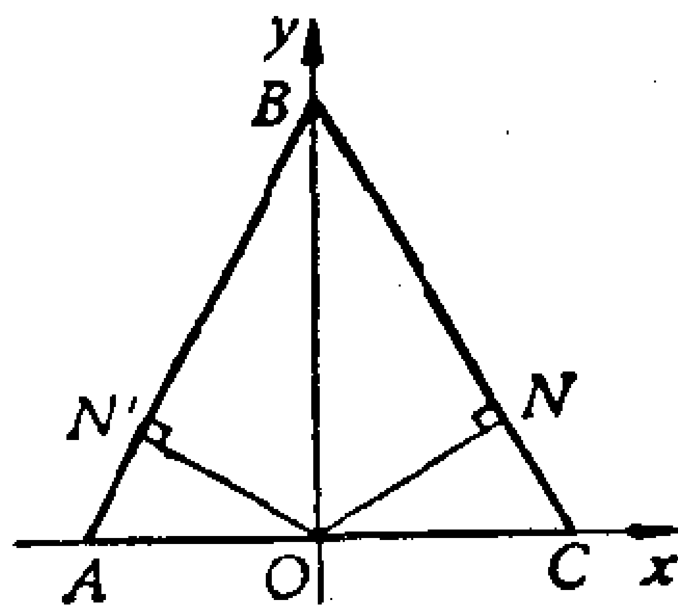


图 1

[证一]　以正三角形的一边 AC 所在直线为 x 轴，AC 中点 O 为原点建立坐标系，并置 $\triangle ABC$ 在 x 轴的上方(图 1). 设 O 到两边 AB、BC 所作的垂线分别为 ON' 和 ON，且到这两边的距离均为 d，则 $\angle xON=30°$，$\angle xON'=150°$. 于是

BC、AB、AC 的法线式方程分别为 $x\cos 30°+y\sin 30°-d=0$, $x\cos 150°+y\sin 150°-d=0$ 和 $y=0$. 又设点 $P(a, b)$为 $\triangle ABC$ 内的任意一点，则它到三边的距离之和应是

$$-(a\cos 30°+b\sin 30°-d)-(a\cos 150°+b\sin 150°-d)+b=2d,$$

故为定值.

[分析二] 由于正三角形的内心到三边等距，若取内心为原点，一边与 x 轴平行，则三边的法线式方程易求出.

[证二] 取正三角形 ABC 的内心 O 为原点，过 O 与三角形一边 AC 平行的直线为 x 轴建立坐标系，内切圆半径为 r(图 2)，则三边的方程分别为:

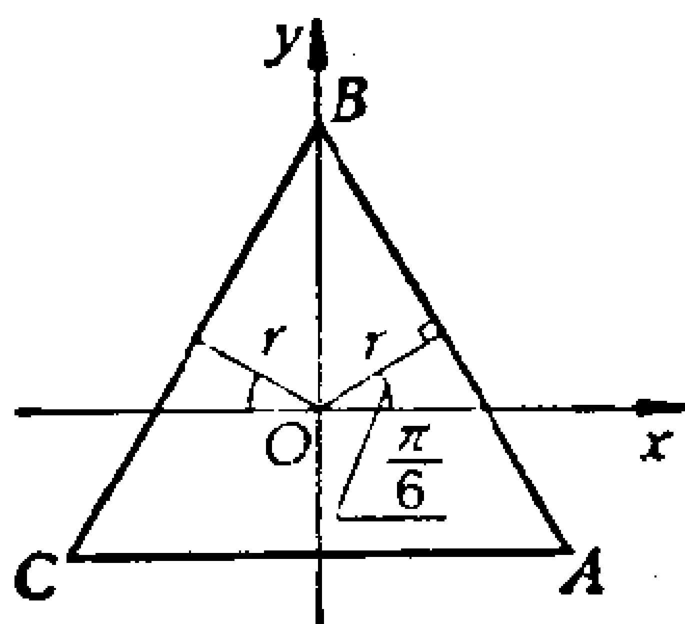


图 2

$$x\cos\frac{\pi}{6}+y\sin\frac{\pi}{6}-r=0,$$

$$x\cos\frac{5\pi}{6}+y\sin\frac{5\pi}{6}-r=0,\quad x\cos\frac{3\pi}{2}+y\cos\frac{3\pi}{2}-r=0.$$

$\therefore$ $\triangle ABC$ 内部任意一点 $P(a, b)$到三边的距离之和为:

$$-\left(a\cos\frac{\pi}{6}+b\sin\frac{\pi}{6}-r\right)-\left(a\cos\frac{5\pi}{6}+b\sin\frac{5\pi}{6}-r\right)$$
$$-\left(a\cos\frac{3\pi}{2}+b\sin\frac{3\pi}{2}-r\right)=3r,$$

故为定值.

[说明] 由于正三角形的内心与外心重合，如[证二]所取的坐标系，三角形的三边方程、三顶点的坐标、内切圆和外接圆方程等都易求出，因而证明正三角形的有关性质，常用此类方法.

333. 求证：m 为任意实数时，直线 $(m-1)x+(2m-1)y=m-5$ 通过某一定点.

[分析一] 由于 m 为任意实数，直线方程表示直线系. 任取 m 的两个值，可得直线系中的两条直线. 如果直线系中所有直线都过某一定点，则此定点即上述两直线的交点.

[证一] 取 $m=1$, 直线方程为 $y=-4$…①;　取 $m=\frac{1}{2}$, 直线方程为 $x=9$…②. 显然此两直线的交点为 $P(9, -4)$. 以点 P 的坐标代入原直

线系方程的左端，得$(m-1)x+(2m-1)y=(m-1)9-(2m-1)4=m-5$. 故不论$m$为何实数，点$P(9,-4)$总在直线系$(m-1)x+(2m-1)y=m-5$上. 即此直线系通过定点$P(9,-4)$.

［分析二］ m既为任意实数，方程$(m-1)x+(2m-1)y=m-5$乃是对m而言的恒等式. 根据恒等式定理，由m的一次项系数与常数项均等于零，就可得出直线系通过的定点坐标.

［证二］ 把原方程按m的降幂排列得$(x+2y-1)m-(x+y-5)=0$. 此式对于m为任意实数值都成立. 根据恒等式定理，m的一次项的系数与常数项均等于零: $\begin{cases}x+2y-1=0\\x+y-5=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=9\\y=-4.\end{cases}$ $\therefore$ m为任意实数时，所给直线均过定点$(9,-4)$.

［说明］ 有关曲线系过定点的问题中，无论曲线系的参数如何变化，定点坐标均满足方程. 因此对参数而言，原方程是恒等式. 根据恒等式定理，可以求出曲线系所过定点的坐标. 如果曲线系中所含单参数为一次，则可与过两定曲线交点的曲线系方程(如为直线系，即公式(3.64))对比，加以证明.

334. 如果$A+B+C=0$，证明直线$Ax+By+C=0$必过一定点.

［证一］ 设$A=1$、$B=0$，则由$A+B+C=0$可得$C=-1$，此时直线方程为$x-1=0$…①. 设$A=0$、$B=1$，则$C=-1$，此时直线方程为$y-1=0$…②. 显然，方程①、②所表示的两直线交点为$(1,1)$. 以此代入原方程的左端，得$Ax+By+C=A+B+C=0$. 故当$A+B+C=0$时，直线$Ax+By+C=0$必过定点$(1,1)$.

［证二］ $\because$ $A+B+C=0$，$\therefore$ $A=-(B+C)$，代入直线方程得$(y-x)B+(1-x)C=0$. 由此可将原方程看作过$\begin{cases}y-x=0\\1-x=0\end{cases}$交点的直线系，$\therefore$ 此定点为$(1,1)$.

335. 如果直线在x、y轴上的截距的倒数之和为常数$\dfrac{1}{k}$，证明此直线必过一定点.

［证］ 设直线在 x、y 轴上的截距为 a、b，则直线方程为

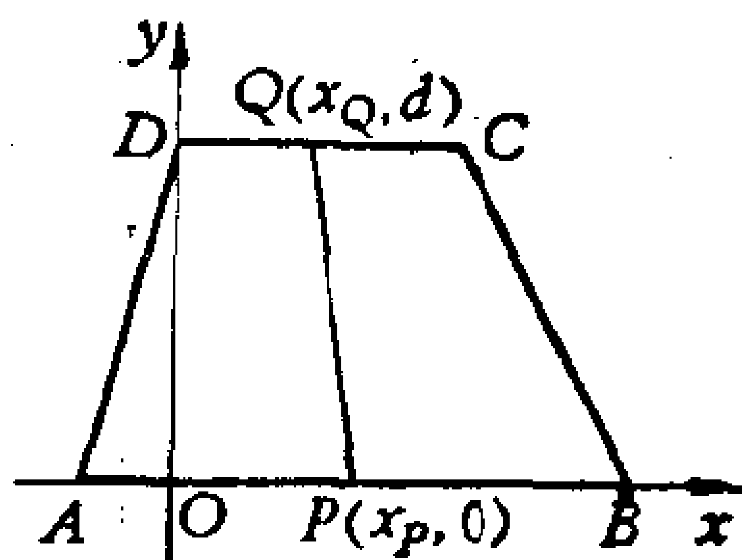
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\cdots①.$$

$$\because\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{k},\quad \therefore\ \frac{1}{a}=\frac{1}{k}-\frac{1}{b}.$$

代入①，得　$$(y-x)\frac{1}{b}+\frac{1}{k}x-1=0,$$

对于任意实数 $b(b\neq0)$ 都成立，$\therefore\begin{cases}y-x=0\\ \frac{1}{k}x-1=0,\end{cases}$ 由此解得 $\begin{cases}x=k\\ y=k.\end{cases}$ 故对于满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{k}$ 的一切直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 都过定点 (k,k)。

336. 设梯形 $ABCD$ 两平行边 AB、CD 上各有一动点 P、Q，直线 PQ 平分梯形的面积．求证 PQ 必过一定点．



［证］ 以 AB 所在直线为 x 轴，y 轴过 D 点，建立直角坐标系．设 $A(-a,0)$、$B(b,0)$、$C(c,d)$、$D(0,d)$，以及 $P(x_P,0)$、$Q(x_Q,d)$．已知梯形 $APQD$ 和梯形 $PBCQ$ 的面积相等，高也相等．$\therefore |AP|+|DQ|=|PB|+|CQ|$，即 $(x_P+a)+x_Q=(b-x_P)+(c-x_Q)$，$\therefore x_P+x_Q=\frac{1}{2}(b+c-a)$．直线 PQ 的方程为

$$y=\frac{d}{x_Q-x_P}(x-x_P)\cdots①.$$

设 $s=x_P+x_Q$，①式即 $d(x-x_P)=y(s-2x_P)$，$dx-sy=x_P(d-2y)$．故 PQ 过两定直线 $\begin{cases}dx-sy=0\\ d-2y=0\end{cases}$ 的交点 $\left(\frac{s}{2},\frac{d}{2}\right)$，即过定点 $\left(\frac{b+c-a}{4},\frac{d}{2}\right)$．

337. 一直线在 x 轴、y 轴上的截距分别为 $\frac{at+b}{ct+d}$、$\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}$，$(ad\neq bc$、$\alpha\delta\neq\beta\gamma$、$ad\beta\gamma\neq bc\alpha\delta$、$ac(\beta\gamma-\alpha\delta)\neq\alpha\gamma(bc-ad)$、$\beta\delta(bc-ad)\neq bd(\beta\gamma-\alpha\delta))$．若 t 为参数，试求这些直线过一定点的充要条件．

［分析］ 已知直线在 x、y 轴上的截距，因而直线方程可求．但此直线方

程含有参数t，故为直线系．若此直线系过定点，则此直线系方程是关于t的恒等式，根据恒等式定理，即可得解．

[解] 随t而变的直线系方程为$\dfrac{ct+d}{at+b}x+\dfrac{\gamma t+\delta}{\alpha t+\beta}y=1$．即

$$(ct+d)(\alpha t+\beta)x+(at+b)(\gamma t+\delta)y=(at+b)(\alpha t+\beta).$$

按t的降幂整理得：$t^2(c\alpha x+a\gamma y-a\alpha)+t[(c\beta+d\alpha)x+(a\delta+b\gamma)y-(a\beta+b\alpha)]+(d\beta x+b\delta y-b\beta)=0$．这些动直线过一定点$(x_0, y_0)$的充要条件是下列三方程有公共解：

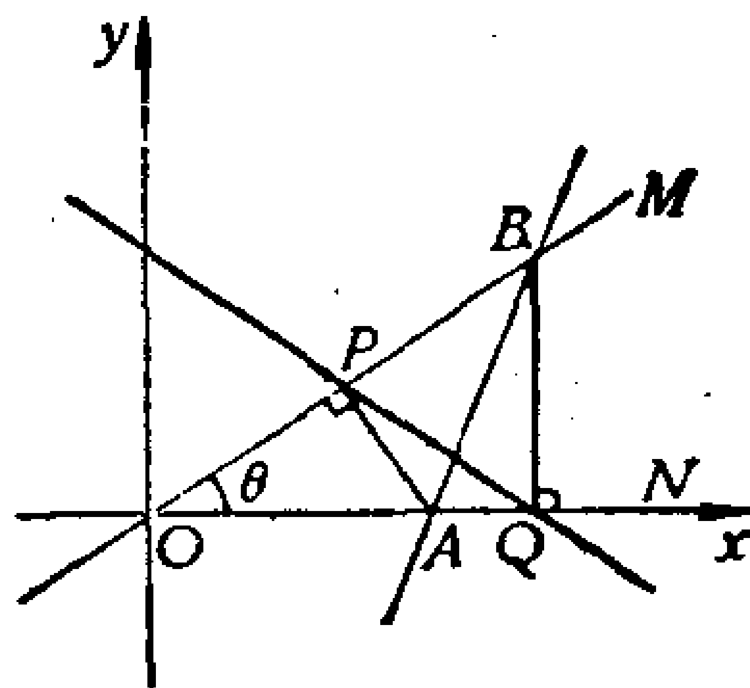
$$c\alpha x_0+a\gamma y_0-a\alpha=0 \quad \cdots①,$$
$$(c\beta+d\alpha)x_0+(a\delta+b\gamma)y_0-(a\beta+b\alpha)=0 \cdots②,$$
$$d\beta x_0+b\delta y_0-b\beta=0 \quad \cdots③.$$

$\because ad\beta\gamma\neq bc\alpha\delta$，$\therefore$ 方程 ① 与 ③ 有公解；又 $\because ac(\beta\gamma-\alpha\delta)\neq\alpha\gamma(bc-ad)$，即$a\gamma(c\beta+d\alpha)\neq c\alpha(a\delta+b\gamma)$，$\therefore$ 方程 ① 与 ② 有公解；再 $\because \beta\delta(bc-ad)\neq bd(\beta\gamma-\alpha\delta)$，即$b\delta(c\beta+d\alpha)\neq d\beta(a\delta+b\gamma)$，$\therefore$ 方程 ② 与 ③ 有公解．故方程 ①、②、③ 有公共解的充要条件是：

$$\begin{vmatrix} c\alpha & a\gamma & a\alpha \\ c\beta+d\alpha & a\delta+b\gamma & a\beta+b\alpha \\ d\beta & b\delta & b\beta \end{vmatrix}=0.$$

展开整理得$(ad-bc)(\alpha\delta-\beta\gamma)(b\alpha-a\beta)=0$．$\because ad-bc\neq0$，$\alpha\delta-\beta\gamma\neq0$，$\therefore$ 这些直线过一定点的充要条件是$b\alpha-a\beta=0$．

338．两定直线ON、OM与动直线分别交于点A、B，A、B在直线OBM与OAN上的射影分别为P和Q，如果AB过一定点，则PQ也过一定点．



[证一] 以O为原点，ON为x轴建立坐标系如图．设点A的坐标为$(a, 0)$，又设$|OB|=b$，$\angle NOM=\theta$．$\because ON$、OM为两定直线，$\therefore \theta$是一定值．于是点B的坐标为$(b\cos\theta, b\sin\theta)$．又因点$Q$、$P$分别是点$B$、$A$在$OAN$、$OBM$上的射影，故点$Q$的坐标是$(b\cos\theta, 0)$．而$OP=a\cos\theta$，$\therefore$ 点P的坐标为$(a\cos^2\theta, a\cos\theta\sin\theta)$．于是直线

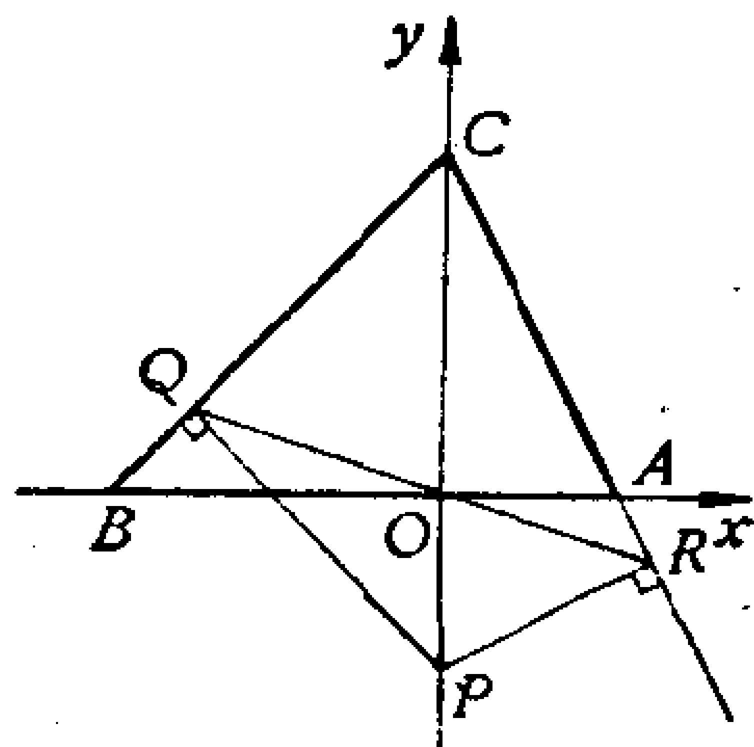
AB 的方程为 $bx\sin\theta+(a-b\cos\theta)y-ab\sin\theta=0\cdots$①; 直线 PQ 的方程为 $ax\sin\theta+(b-a\cos\theta)y-ab\cos\theta\sin\theta=0\cdots$②; 设直线 AB 过定点 (p, q), 则 $ab\sin\theta=bp\sin\theta+(a-b\cos\theta)q\cdots$③. ③代入②, 得 $(a\sin\theta)x+(b-a\cos\theta)y-[bp\sin\theta+(a-b\cos\theta)q]\cos\theta=0$. 整理即得 $a(x\sin\theta-y\cos\theta-q\cos\theta)+b(y-p\sin\theta\cos\theta+q\cos^2\theta)=0\cdots$④. 若 a、b 都等于零, 则 AB 过定点 O, PQ 也过定点 O; 若 a、b 不全为零, 则由④可知直线 PQ 过直线 $x\sin\theta-y\cos\theta-q\cos\theta=0$ 和直线 $y-p\sin\theta\cos\theta+q\cos^2\theta=0$ 的交点. 解方程组 $\begin{cases}x\sin\theta-y\cos\theta-q\cos\theta=0\\ y-p\sin\theta\cos\theta+q\cos^2\theta=0,\end{cases}$ 得

$$x=(p\cos\theta+q\sin\theta)\cos\theta,\quad y=(p\sin\theta-q\cos\theta)\cos\theta.$$

∴ 直线 PQ 过定点 $((p\cos\theta+q\sin\theta)\cos\theta, (p\sin\theta-q\cos\theta)\cos\theta)$.

[证二] 取 ON、OM 为 x、y 轴, 建立斜坐标系. 设 $(ON, OM)=\omega$, A、B 两点的坐标分别为 $(a, 0)$、$(0, b)$, 则 Q、P 两点的坐标分别为 $(b\cos\omega, 0)$、$(0, a\cos\omega)$, 直线 AB 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. 如 AB 过定点 (p, q), 则 $\frac{p}{a}+\frac{q}{b}=1\cdots$①. 又直线 PQ 的方程为 $\frac{x}{b\cos\omega}+\frac{y}{a\cos\omega}=1\cdots$②. ②-①, 得 $\frac{1}{b\cos\omega}(x-q\cos\omega)+\frac{1}{a\cos\omega}(y-p\cos\omega)=0$. 故 PQ 过定点 $(q\cos\omega, p\cos\omega)$.

339. 三角形的三顶点为 $A(a, 0)$、$B(-b, 0)$、$C(0, c)$, 自点 $P\left(0, -\frac{ab}{c}\right)$ 至各边引垂线. 求证三垂足共线.



[证] 直线 AC 的方程为 $y=-\frac{c}{a}(x-a)$, 过点 P 垂直于 AC 的直线方程为 $y=\frac{a}{c}x-\frac{ab}{c}$, 它们的交点为 $R\left(\frac{a(ab+c^2)}{a^2+c^2}, \frac{ac(a-b)}{a^2+c^2}\right)$. 而直线 BC 的方程为 $y=\frac{c}{b}x+c$, 过点 P 垂直于 BC 的直线方程为 $y=-\frac{b}{c}x-\frac{ab}{c}$, 它们的交点为 $Q\left(\frac{-b(ab+c^2)}{b^2+c^2},\right.$

$\left.\frac{-bc(a-b)}{b^2+c^2}\right)$. $\therefore k_{OR}=\frac{c(a-b)}{ab+c^2}$, $k_{OQ}=\frac{c(a-b)}{ab+c^2}$. $\therefore k_{OR}=k_{OQ}$, 即三垂足 Q、O、R 共线.

［说明］ $\because |OA|\cdot|OB|=ab=c\left(\frac{ab}{c}\right)=|OC|\cdot|OP|$, $\therefore A$、B、P、C 四点共圆. 即若 P 为 $\triangle ABC$ 外接圆上一点，则点 P 在三边上的射影 Q、O、R 三点共线. 此直线称为西姆松(Simson)线.

340. 设三角形的三边方程为 $3x-4y+4a=0$, $2x-3y+4a=0$ 和 $5x-y+a=0$. 求此三角形的面积，并证明原点在三边上的射影共线.

［解］ 由三边方程解得三顶点坐标为 $(4a, 4a)$、$(0, a)$ 和 $\left(\frac{a}{13}, \frac{18}{13}a\right)$. 则三角形面积 $S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}4a & 4a & 1\\ 0 & a & 1\\ \frac{a}{13} & \frac{18a}{13} & 1\end{vmatrix}$ 的绝对值 $=\frac{17}{26}a^2$. 而原点在三边上的射影由方程组

$$\begin{cases}3x-4y+4a=0\\ y=-\frac{4}{3}x,\end{cases}\quad \begin{cases}2x-3y+4a=0\\ y=-\frac{3}{2}x,\end{cases}\quad \begin{cases}5x-y+a=0\\ y=-\frac{1}{5}x\end{cases}$$

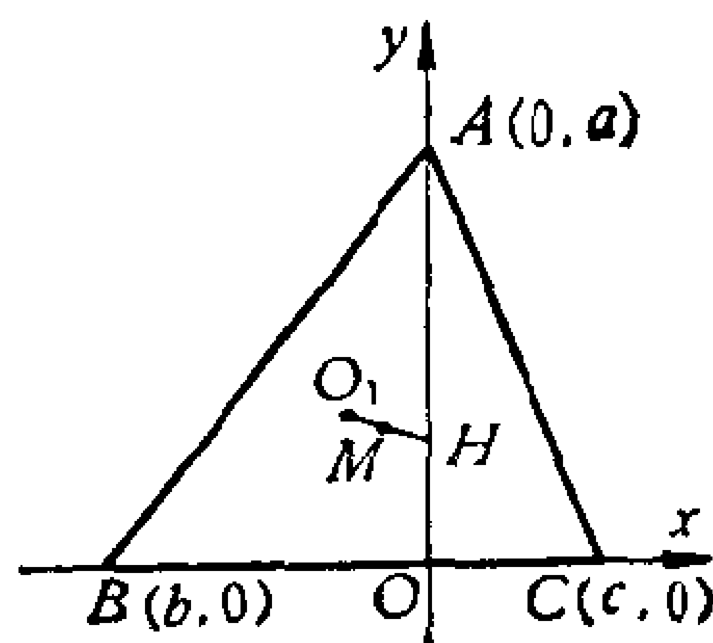
分别解得 $\left(-\frac{12}{25}a, \frac{16}{25}a\right)$、$\left(-\frac{8}{13}a, \frac{12}{13}a\right)$ 和 $\left(-\frac{5}{26}a, \frac{1}{26}a\right)$.

$$\because \begin{vmatrix}-\frac{12}{25}a & \frac{16}{25}a & 1\\ -\frac{5}{26}a & \frac{1}{26}a & 1\\ -\frac{8}{13}a & \frac{12}{13}a & 1\end{vmatrix}=0,$$

$\therefore$ 原点在三边上的射影共线.

341. 求证：三角形的外心、重心和垂心在同一直线上，且重心三等分外心和垂心之连线.

［证］ 如图建立直角坐标系. 设 $\triangle ABC$ 的三顶点分别为 $A(0, a)$、$B(b, 0)$、$C(c, 0)$, 则重心为 $M\left(\frac{b+c}{3}, \frac{a}{3}\right)$. AC 边上高的方程为 $y=$



$\frac{c}{a}(x-b)$，与 AO 的交点即垂心 $H\left(0,\ -\frac{bc}{a}\right)$，$BC$ 的垂直平分线的方程为 $x=\frac{b+c}{2}$，AC 的垂直平分线的方程为 $y=\frac{c}{a}\left(x-\frac{c}{2}\right)+\frac{a}{2}$，两垂直平分线的交点即外心 $O_1\left(\frac{b+c}{2},\ \frac{bc+a^2}{2a}\right)$.

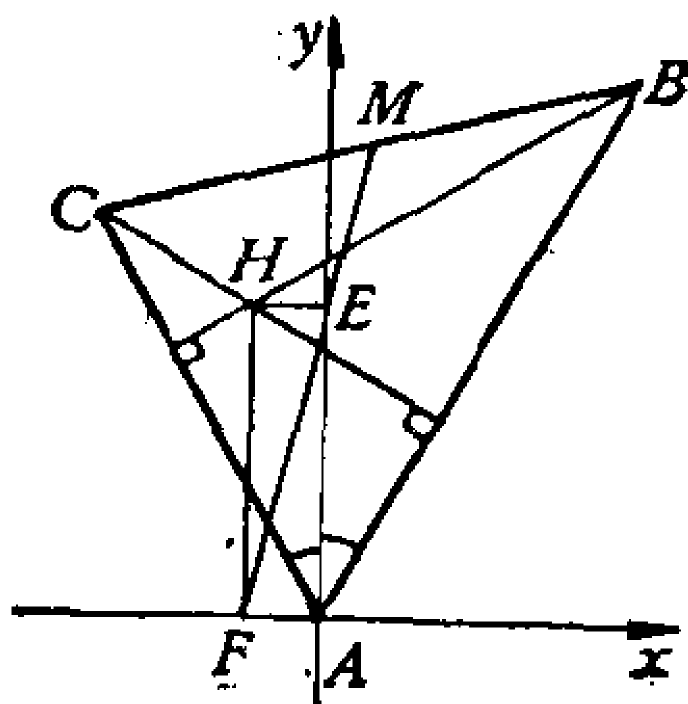
$\because$ HO_1 的三等分点 $M'(x',\ y')$ $(HM':M'O_1=2:1)$的坐标为

$$x'=\frac{0+2\left(\frac{b+c}{2}\right)}{1+2}=\frac{1}{3}(b+c),\quad y'=\frac{-\frac{bc}{a}+2\left(\frac{bc+a^2}{2a}\right)}{1+2}=\frac{a}{3}.$$

$\therefore$ M' 与 M 重合. 故 M、O_1、H 三点共线，且 M 三等分 H、O_1 的连线.

［说明］ 本命题又称欧拉(Euler)定理.

342. 自 $\triangle ABC$ 的垂心 H 引 $\angle A$ 的内外角平分线的垂线，垂足分别为 E、F. M 是 BC 的中点，则 M、E、F 三点共线.



［分析］ 由于 $\angle A$ 的内外角平分线互相垂直，故可以它们为轴建立坐标系，并取 AB 的斜率和 B、C 两点的横坐标为参数，即可求出有关点的坐标，从而得证.

［证］ 以 $\angle A$ 的内、外角平分线分别为 y 轴和 x 轴建立坐标系如图. 令 AB 的斜率为 k，则 $k=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$. $\because 0°<\frac{A}{2}<90°$，$\therefore k\neq 0$.

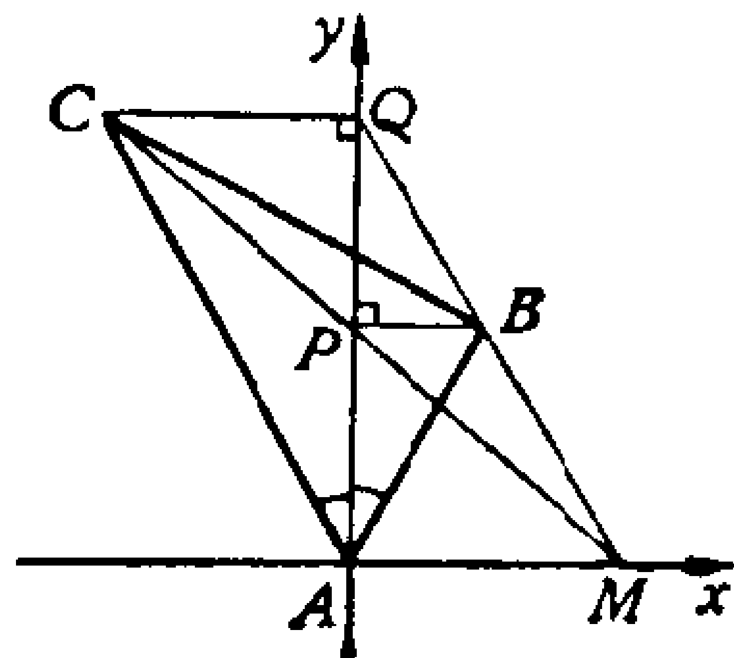
而 AC 的斜率为 $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=-k$，故可设点 B 的坐标为 $(b,\ bk)$，点 C 的坐标为 $(c,\ -ck)$. 于是点 M 的坐标是 $\left(\frac{b+c}{2},\ \frac{(b-c)k}{2}\right)$.

又设垂心 H 的坐标是 $(u,\ v)$，则 E、F 的坐标应分别为 $(0,\ v)$、$(u,\ 0)$.

$\because$ $CH\perp AB$，$\therefore \frac{v+ck}{u-c}=-\frac{1}{k}$，又 $\because$ $BH\perp AC$，$\therefore \frac{v-bk}{u-b}=\frac{1}{k}$. 两式相加，得 $2uv+uck-vb-ubk-cv=0$，即 $v(b+c)+uk(b-c)=2uv\cdots$①. 又直线 EF 的方程为 $vx+uy=uv\cdots$②. 以点 M 的坐标代入 ② 的左端，并利用①化简，得 $v\cdot\frac{b+c}{2}+u\cdot\frac{(b-c)k}{2}=\frac{v(b+c)+uk(b-c)}{2}=uv$，故点 M

在直线 EF 上，即 M、E、F 三点共线.

343. 自 $\triangle ABC$ 的顶点 B、C 作 $\angle A$ 的平分线的垂线，垂足分别为 P、Q，则 $\angle A$ 的外角平分线及 BQ、CP 三线共点.



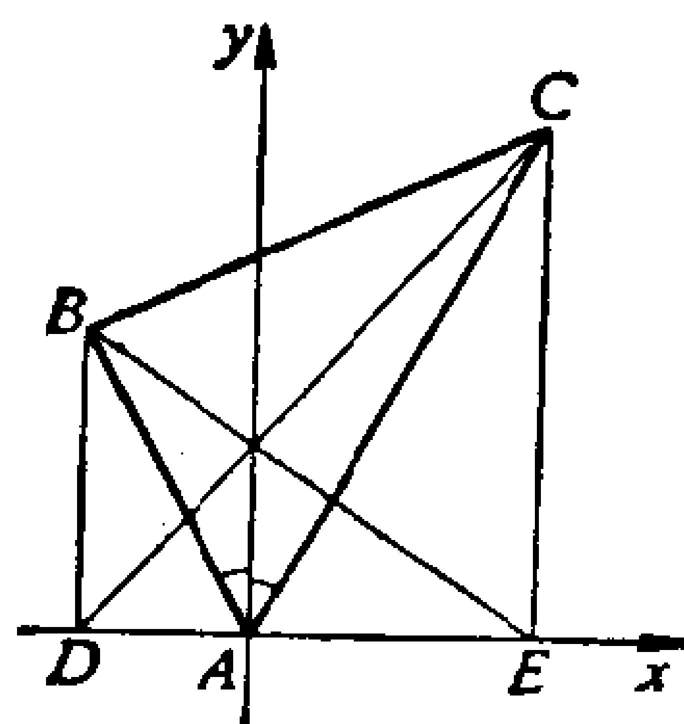
［证］ 取 A 为原点，$\angle A$ 内角平分线为 y 轴，建立直角坐标系，则 x 轴为 $\angle A$ 外角平分线. 令 $\angle BAC=2\theta$，$|AB|=c$，$|AC|=b$. 三角形顶点和 P、Q 的坐标分别为 $A(0,0)$、$B(c\sin\theta, c\cos\theta)$、$C(-b\sin\theta, b\cos\theta)$、$P(0, c\cos\theta)$、$Q(0, b\cos\theta)$. 直线 BQ、CP 的方程分别为

$$y-b\cos\theta=\frac{c-b}{c}x\operatorname{ctg}\theta\cdots①,$$

$$y-c\cos\theta=\frac{c-b}{b}x\operatorname{ctg}\theta\cdots②.$$

它们的交点为 $M\left(\frac{bc}{b-c}\sin\theta,\ 0\right)$，故点 M 在 x 轴上，即 $\angle A$ 的外角平分线(x 轴)与 BQ、CP 三线共点.

344. 自 $\triangle ABC$ 的顶点 B、C 至 $\angle A$ 的外角平分线作垂线，垂足分别为 D、E，则 $\angle A$ 的内角平分线与 BE、CD 三线共点.



［证］ 以点 A 为原点，$\angle A$ 外角平分线为 x 轴，建立直角坐标系，则 y 轴为 $\angle A$ 的内角平分线. 设 $\angle xAC=\alpha$，$\angle xAB=\pi-\alpha$，$|AC|=b$，$|AB|=c$，则 B、D、C、E 的坐标分别为 $B(-c\cos\alpha, c\sin\alpha)$、$D(-c\cos\alpha, 0)$、$C(b\cos\alpha, b\sin\alpha)$、$E(b\cos\alpha, 0)$. $\therefore$ BE 的方程为

$$y=\frac{c\sin\alpha}{-c\cos\alpha-b\cos\alpha}(x-b\cos\alpha),$$

即 $cx\operatorname{tg}\alpha+(b+c)y-bc\sin\alpha=0\cdots①$；$CD$ 的方程为

$$y=\frac{b\sin\alpha}{b\cos\alpha+c\cos\alpha}(x+c\cos\alpha),$$

即 $bx\operatorname{tg}\alpha-(b+c)y+bc\sin\alpha=0\cdots②$；$\angle A$ 的内角平分线方程为 $x=0\cdots③$.

$$\because \begin{vmatrix} c\operatorname{tg}\alpha & b+c & -bc\sin\alpha \\ b\operatorname{tg}\alpha & -(b+c) & bc\sin\alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (b+c)\operatorname{tg}\alpha & 0 & 0 \\ b\operatorname{tg}\alpha & -(b+c) & bc\sin\alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

∴ $\angle A$ 的内角平分线与 BE、CD 三线共点.

［说明］ 因为同一角的内、外角平分线互相垂直，故凡涉及角平分线的问题，常分别以此角的内、外角平分线为坐标轴，建立直角坐标系.

345. 求证：完全四边形三条对角线的中点共线[1].

［证］ 设四边形 $OABC$ 的边 OA 与 CB 的延长线交于 D，OC 与 AB 的延长线交于 E，并以 O 为原点、OA 为 y 轴建立坐标系(图 1). 令直线 OC 的方程是 $y=kx$，A、B、C、D、E 各点的坐标分别为 $(0, 2a)$、$(2u, 2v)$、$(2c, 2kc)$、$(0, 2d)$、$(2e, 2ke)$，则对角线 OB、AC、DE 的中点 L、M、N 的坐标分别是 (u, v)、$(c, a+kc)$、$(e, d+ke)$. ∵ C、B、D 三点共线，

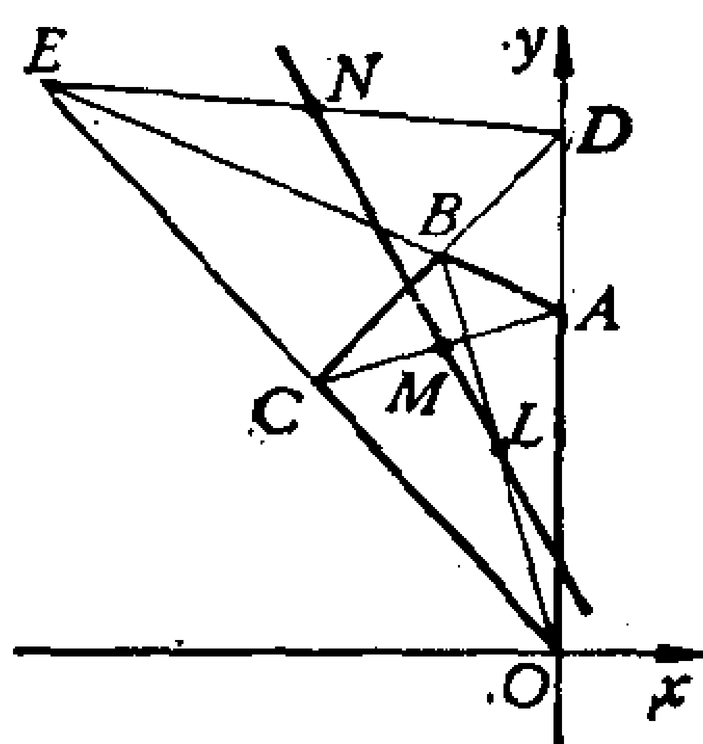


图 1

$$\therefore \begin{vmatrix} 2c & 2kc & 1 \\ 2u & 2v & 1 \\ 0 & 2d & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

即 $cv+du-cd-kcu=0$; 又 ∵ A、B、E 三点共线，

$$\therefore \begin{vmatrix} 0 & 2a & 1 \\ 2u & 2v & 1 \\ 2e & 2ke & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\therefore \quad ae+keu-ev-au=0.$$

而

$$\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ c & a+kc & 1 \\ e & d+ke & 1 \end{vmatrix} = (au+kcu+cd+cke+ev)$$

$$-(ae+ekc+du+keu+cv)$$

$$= -(cv+du-cd-kcu)$$

$$-(ae+keu-ev-au)=0.$$

(1) 完全四边形是由两两相交的四条直线组成的图形. 有四边、六顶点，不共边的两顶点称为对顶点，其连线称为对角线. 因有三对对顶点，故有三条对角线.

$\therefore L$、M、N 三点共线.

［证二］ 取 OA、OC 为坐标轴建立斜坐标系(图 2). 各顶点坐标分别为 $O(0, 0)$、$A(2a, 0)$、$D(2d, 0)$、$C(0, 2c)$、$E(0, 2e)$.

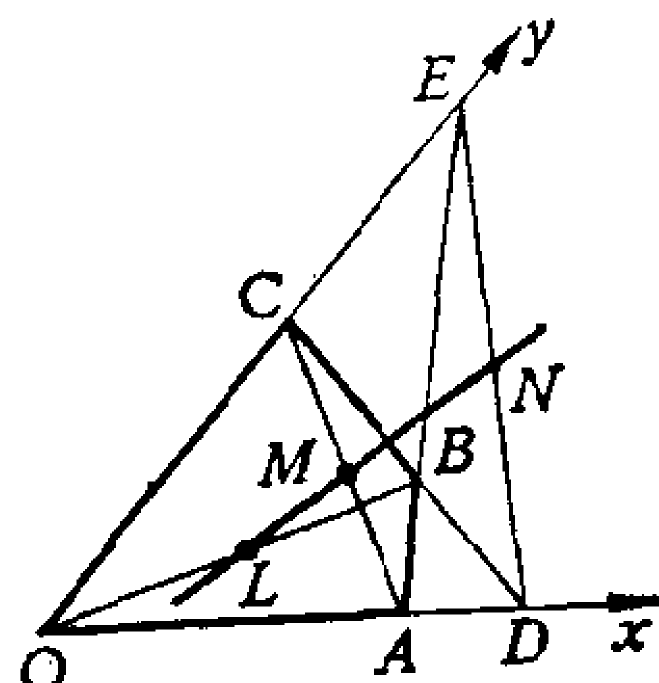


图 2

直线 AE、CD 的方程分别为:

$$\frac{x}{2a}+\frac{y}{2e}=1\cdots①,$$

$$\frac{x}{2d}+\frac{y}{2c}=1\cdots②.$$

解方程组 ①、②, 得 $B\left(\frac{2ad(c-e)}{ac-de}, \frac{2ce(a-d)}{ac-de}\right)$.

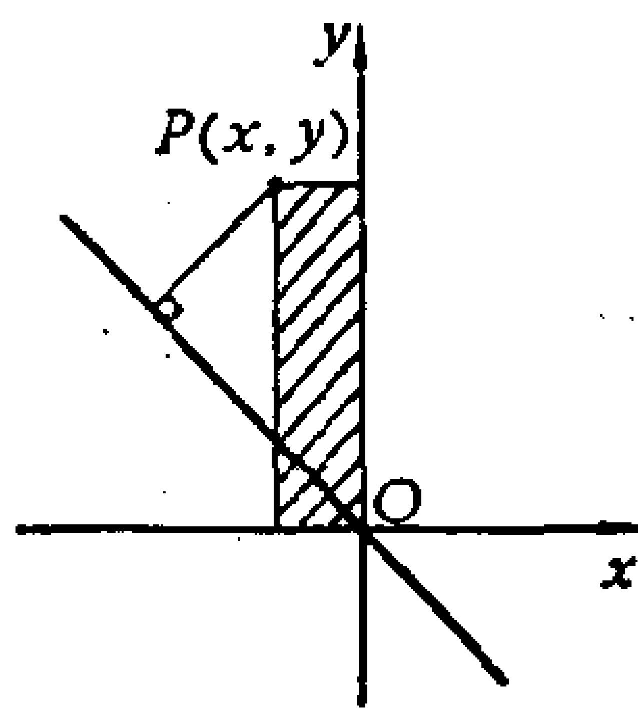
OB、AC、DE 的中点分别为: $L\left(\frac{ad(c-e)}{ac-de}, \frac{ce(a-d)}{ac-de}\right)$、$M(a, c)$、$N(d, e)$. 直线 MN 的方程为 $(c-e)(x-a)-(a-d)(y-c)=0$. 将点 L 的坐标代入上式, 整理得 $\frac{ac(c-e)(d-a)-ac(e-c)(a-d)}{ac-de}=0$. 故点 L 在直线 MN 上, 即 L、M、N 三点共线.

［说明］ 本题中 L、M、N 所在直线, 又称牛顿(Newton)线.

§12. 轨 迹 题

346. 一动点至直线 $x+y=0$ 的距离平方等于这动点向 x 轴、y 轴引的垂线与两坐标轴围成的矩形面积. 求动点 P 的轨迹.

［解］ 如图, 设 $P(x, y)$ 为轨迹上任意一点, 则



$$\left(\frac{|x+y|}{\sqrt{2}}\right)^2=|xy|,$$

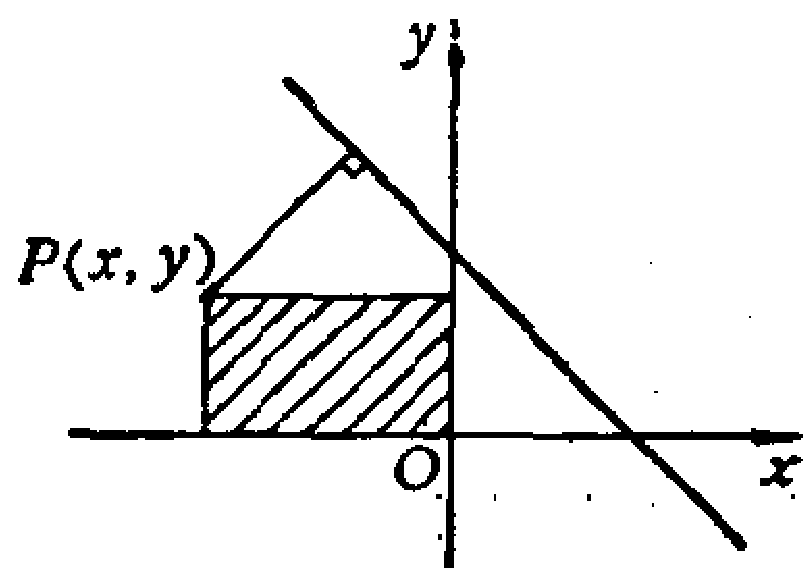
即 $x^2+y^2+2xy-2|xy|=0$. 当 $xy\geqslant 0$ 时, $x^2+y^2=0$, 即为原点. 当 $xy<0$ 时, $x^2+4xy+y^2=0$. 即

$$(y+2x)^2-3x^2=0,$$

$$(y+2x+\sqrt{3}x)(y+2x-\sqrt{3}x)=0.$$

亦即 $y=-(2+\sqrt{3})x$ 与 $y=-(2-\sqrt{3})x$. $\because \operatorname{tg}15^\circ=2-\sqrt{3}$, $\operatorname{tg}75^\circ=2+\sqrt{3}$. $\therefore$ 点 P 的轨迹为两条经过原点, 倾角分别为 105° 与 165° 的直线.

347. 一动点至直线 $x+y=a$ $(a>0)$ 的距离的平方等于动点向 x、y 轴引的垂线与坐标轴组成的矩形面积，求动点的轨迹.



［解］ 设 $P(x, y)$为轨迹上任意一点，则 P 到直线 $x+y=a$ 的距离为 $d=\left|\frac{x+y-a}{\sqrt{2}}\right|$；点 P 到坐标轴的垂线与坐标轴组成的矩形面积为 $S=|xy|$. $\therefore \left(\frac{|x+y-a|}{\sqrt{2}}\right)^2=|xy|$，即

$$x^2+2xy+y^2-2ax-2ay+a^2=2|xy|.$$

若 $xy\geqslant 0$，则点 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2-2ax-2ay+a^2=0$，轨迹是圆；若 $xy<0$，则点 P 轨迹方程为 $x^2+4xy+y^2-2ax-2ay+a^2=0$，轨迹为该双曲线在第二、四象限的部分. 在第三象限内，满足条件的轨迹不存在.

348. 求两已知直线 $4x-3y+1=0$ 和 $12x+5y+13=0$ 交角平分线的方程.

［解］ 设 $M(x, y)$是角平分线上的一点，则 $M(x, y)$到两直线的距离相等，即 $\frac{|4x-3y+1|}{5}=\frac{|12x+5y+13|}{13}$，$\frac{4x-3y+1}{5}=\pm\frac{12x+5y+13}{13}$.
故所求角平分线的方程为 $2x+16y+13=0$ 和 $56x-7y+39=0$.

349. 从动点 $P(x, y)$到两定直线 l_1: $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p_1=0$，$l_2$: $x\cos\beta+y\sin\beta-p_2=0$ 的距离之比为正常数 λ，试求动点 P 的轨迹.

［解］ $$\because \quad \frac{|x\cos\alpha+y\sin\alpha-p_1|}{|x\cos\beta+y\sin\beta-p_2|}=\lambda,$$

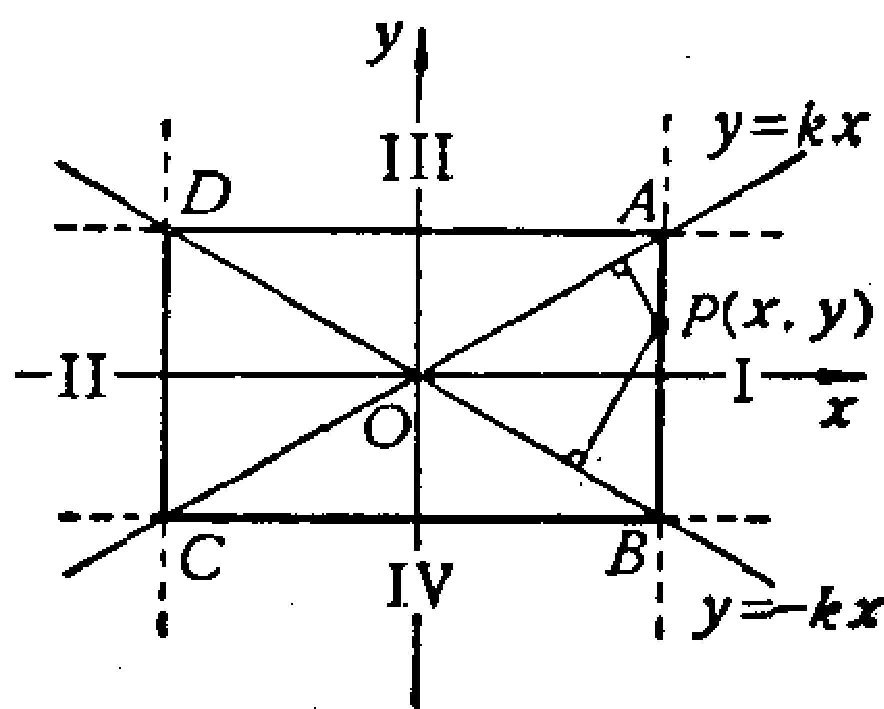
即 $$(x\cos\alpha+y\sin\alpha-p_1)^2-\lambda^2(x\cos\beta+y\sin\beta-p_2)^2=0.$$

整理得 $$[(x\cos\alpha+y\sin\alpha-p_1)+\lambda(x\cos\beta+y\sin\beta-p_2)]$$
$$\cdot[(x\cos\alpha+y\sin\alpha-p_1)-\lambda(x\cos\beta+y\sin\beta-p_2)]=0.$$

$\therefore$ 动点 P 的轨迹是直线 $l_1+\lambda l_2=0$ 与 $l_1-\lambda l_2=0$.

350. 求到两相交直线距离之和为定值的点的轨迹.

［分析］　两相交直线的两条角平分线必互相垂直，故可选为坐标轴．



［解］　建立直角坐标系如图，使两相交直线方程为 $y=\pm kx$, $(k>0)$．设 $P(x, y)$ 为轨迹上任意一点，则

$$\frac{|kx+y|}{\sqrt{1+k^2}}+\frac{|-kx+y|}{\sqrt{1+k^2}}=m\ (m>0),$$

即 $|kx+y|+|kx-y|=m\sqrt{1+k^2}$．两相交直线 $y=\pm kx$ 把坐标平面分成四块(见图)．当 $\begin{cases}kx+y\geqslant 0\\ kx-y\geqslant 0,\end{cases}$ 即在 I 中，$x=\frac{m}{2k}\sqrt{1+k^2}$，轨迹是线段 AB；当 $\begin{cases}kx+y\leqslant 0\\ kx-y\leqslant 0,\end{cases}$ 即在 II 中，$x=-\frac{m}{2k}\sqrt{1+k^2}$，轨迹是线段 CD；当 $\begin{cases}kx+y\geqslant 0\\ kx-y\leqslant 0,\end{cases}$ 即在 III 中，$y=\frac{m}{2}\sqrt{1+k^2}$，轨迹是线段 AD；当 $\begin{cases}kx+y\leqslant 0\\ kx-y\geqslant 0,\end{cases}$ 即在 IV 中，$y=-\frac{m}{2}\sqrt{1+k^2}$，轨迹是线段 BC．故所求点的轨迹是矩形 $ABCD$ 的周界．

［说明］　若问题改为："求到两相交直线的距离之差为定值的点的轨迹"，亦可类似求之，其轨迹如图中虚线所示．特别地，若一动点到两坐标轴的距离之和为定值 a，则此动点的轨迹是一正方形，其中心在原点，对角线为坐标轴．

351．过定点 O 的一条动直线 l 和 n 条定直线交于 P_1、P_2、…、P_n，在 l 上取一点 Q，使得 $\frac{n}{OQ}=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{OP_i}$．求点 Q 的轨迹方程．

［分析］　由于轨迹条件为 $\frac{n}{OQ}=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{OP_i}$，故若取 O 为极点建立极坐标系，容易将所给的条件写成解析式．

［解］　以定点 O 为极点任意建立极坐标系，设 n 条定直线方程分别为 $p_i=\rho\cos(\theta-\theta_i)(i=1, 2, \cdots n)$，过定点 O 的动直线方程为 $\theta=\theta_0$，此动直线和 n 条定直线的交点 P_i 的坐标分别为 $(\rho_i, \theta_0)(i=1, 2, \cdots, n)$．则 $\rho_i=\frac{p_i}{\cos(\theta_0-\theta_i)}$．又设点 Q 的坐标是 (ρ_0, θ_0)，则 $OQ=\rho_0$, $OP_i=\rho_i$．根据条

件，得 $\frac{n}{\rho_0}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos(\theta_0-\theta_i)}{p_i}$. 以 ρ、θ 代换 ρ_0、θ_0，即得所求的轨迹方程

$$\rho\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos(\theta-\theta_i)}{p_i}=n.$$

352. 质点 $P(x, y)$ 沿一直线作匀速运动，当 $t=0$ 时，它的位置是 $(1, 1)$，沿 x、y 轴的分速度分别为 9 与 12. 求 (1) 质点运动的轨迹方程；(2) 质点与直线 $x-y+9=0$ 相遇的时刻及其位置.

［解］ 设时间 t 为参数，因为速度乘时间等于位移，

$$\therefore \begin{cases} x=1+9t \\ y=1+12t \end{cases} \quad (t\geqslant 0)\cdots①.$$

消去 t，得 $4x-3y-1=0$ $(x\geqslant 1)$，此即质点运动的轨迹方程.

把 ① 代入 $x-y+9=0$，得 $-3t+9=0$，即 $t=3$. 再代入方程组 ① 得 $x=28$, $y=37$. ∴ 质点在 $t=3$ 时与直线 $x-y+9=0$ 相遇，相遇时位置在 $(28, 37)$.

353. a 是实数，求两动直线 $y-ax-2(a+1)=0$ 与 $ay+x+2(a-1)=0$ 的交点的轨迹方程.

［解一］ 解关于 x、y 的方程组 $\begin{cases} y-ax-2(a+1)=0 \\ ay+x+2(a-1)=0, \end{cases}$ 得

$$x=\frac{-2[(a^2-1)+2a]}{1+a^2}, \quad y=\frac{-2[(a^2-1)-2a]}{1+a^2}.$$

两式平方后相加，即得所求的轨迹方程 $x^2+y^2=8$.

［解二］ 解方程 $y-ax-2(a+1)=0$，得 $a=\frac{y-2}{x+2}$. 代入 $ay+x+2(a-1)=0$，得 $\frac{y(y-2)}{x+2}+x+2\left(\frac{y-2}{x+2}-1\right)=0$. 化简即得 $x^2+y^2=8$.

［说明］ 求两直线交点的轨迹方程，原则上是求得交点的坐标，即所求轨迹的参数方程，再设法消去参数，如［解一］. 但也可不求交点坐标，而直接从两直线方程中消去参数，如［解二］.

354. 已知直线 l_1: $5x-2y+3m(3m+1)=0$ 和 l_2: $2x+6y-3m(9m+20)=0$，(1) 求两直线交点的轨迹方程；(2) m 取何值

时，l_1、l_2 的交点到直线 $4x-3y-12=0$ 的距离最短？最短距离是多少？

［分析］ (1) 只需从直线 l_1 和 l_2 的方程中消去参数 m，即可得轨迹方程. (2) 由于 m 是变数，直线 l_1 和 l_2 的交点是一动点，故欲求此交点到直线 $4x-3y-12=0$ 的最短距离，可将交点到此直线的距离表示成 m 的函数再解之.

［解］ (1) 直线 l_1 的方程两边乘以 3，分别与 l_2 的方程两边相加，得 $17x-51m=0$，即 $3m=x$. 代入 l_1 的方程，得 $x^2+6x-2y=0$. 此即所求的轨迹方程.

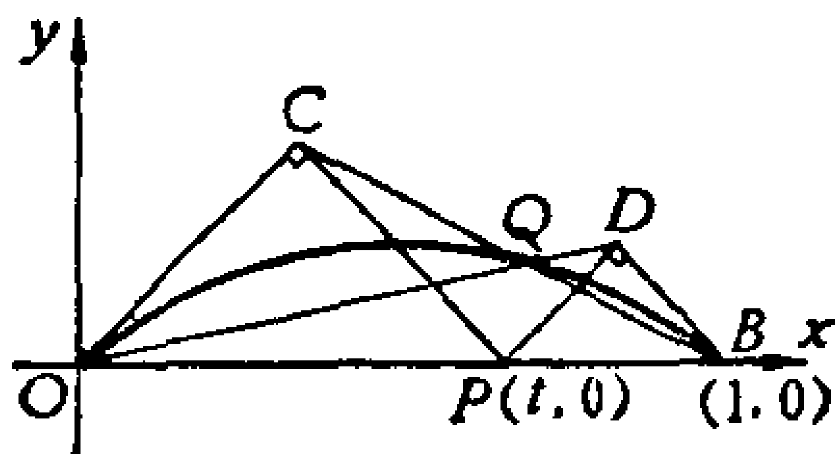
(2) 以 $x=3m$ 代入 l_1，得 $y=\frac{9m}{2}(m+2)$. 故 l_1、l_2 的交点 $P\left(3m, \frac{9m}{2}(m+2)\right)$ 到直线 $4x-3y-12=0$ 的距离：

$$d=\frac{\left|4\cdot 3m-3\cdot\frac{9m}{2}(m+2)-12\right|}{5}=\frac{3}{10}|9m^2+10m+8|$$

$$=\frac{27}{10}\left(m+\frac{5}{9}\right)^2+\frac{47}{30}.$$

$\therefore$ 当 $m=-\frac{5}{9}$ 时，l_1、l_2 的交点 P 到直线 $4x-3y-12=0$ 的距离最短，其最短距离是 $\frac{47}{30}$.

355. 对于 x 轴上两点 $O(0, 0)$、$B(1, 0)$ 以及线段 OB 上的点 $P(t, 0)$，在第一象限内分别以线段 OP 和 PB 为斜边作等腰直角三角形 OCP 和 PDB，线段 OD 与 BC 相交于 Q 点. 当点 P 在线段 OB 上移动时，求点 Q 的轨迹方程.



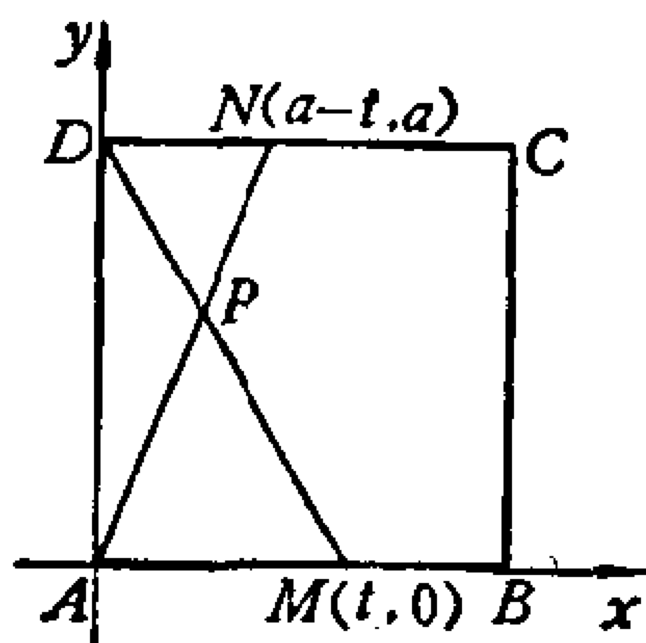
［分析］ 根据已知条件，D、C 两点的坐标都可用 t 的解析式表示，从而可得 OD 和 BC 的方程. 消去参数 t，便得点 Q 的轨迹方程.

［解］ 根据题意可知，点 C 的坐标为 $\left(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right)$，点 D 的坐标为 $\left(\frac{1+t}{2}, \frac{1-t}{2}\right)$，且 $0\leqslant t\leqslant 1$. 故直线 OD 的方

程为 $y=\frac{1-t}{1+t}x\cdots$①，直线 BC 的方程为 $y=\frac{t}{t-2}(x-1)\cdots$②. 由①得 $t=\frac{x-y}{x+y}$. 代入②并化简，得点 Q 的轨迹方程

$$x^2+3y^2-x+y=0\quad(x\geqslant0,\ y\geqslant0).$$

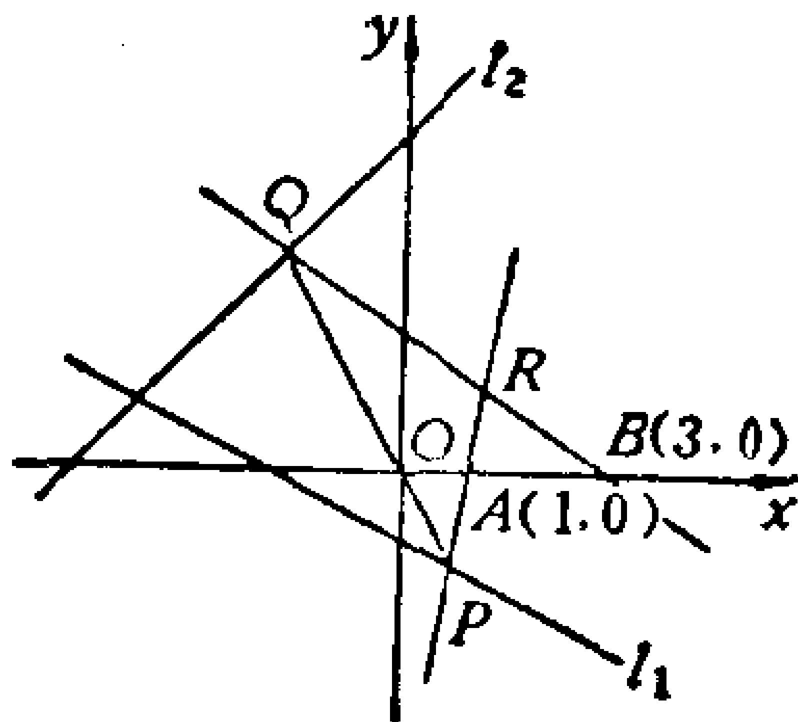
356. 正方形 $ABCD$，其边长为 a. 在 AB、DC 上分别取点 M、N，使 $|AM|=|CN|$. 求直线 AN 和 DM 交点的轨迹方程.



［解］ 建立坐标系如图，使正方形四顶点分别为 $A(0,\ 0)$、$B(a,\ 0)$、$C(a,\ a)$、$D(0,\ a)$. 设点 M 的坐标为 $(t,\ 0)$，∵ $|AM|=|CN|$，∴ 点 N 的坐标为 $(a-t,\ a)$，且 $0\leqslant t\leqslant a$. 于是直线 AN 和 DM 的方程分别为 $ax+ty=ay\cdots$①，$ax+ty=at\cdots$②. 由①、②可知 $t=y$. 代入①，即得所求的轨迹方程

$$y^2+ax-ay=0\quad(0\leqslant y\leqslant a).$$

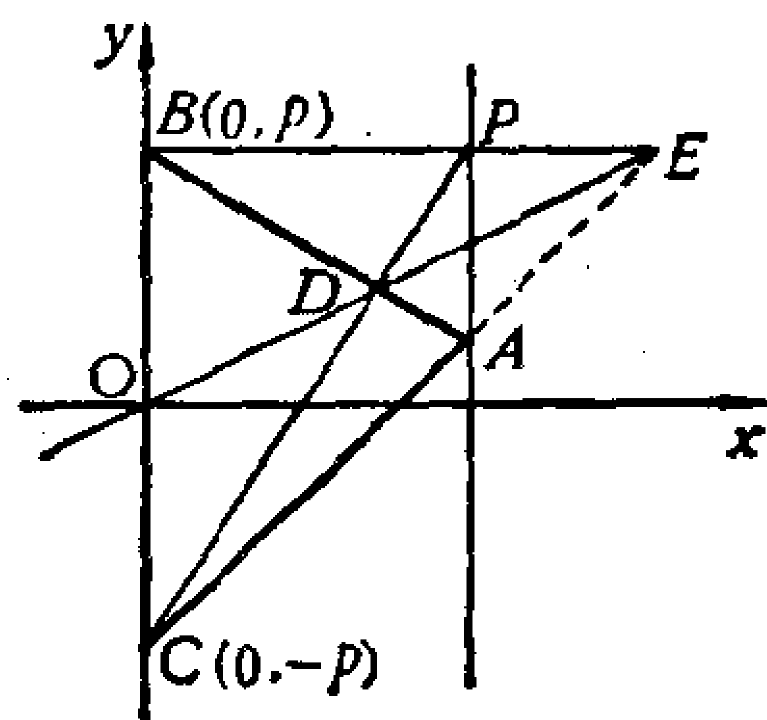
357. 已知两直线 l_1: $x+2y+2=0$ 和 l_2: $x-y+5=0$，以及两定点 $A(1,\ 0)$ 和 $B(3,\ 0)$. 过原点的直线与 l_1、l_2 分别交于点 P 和 Q. 求直线 AP、BQ 的交点 R 的轨迹.



［分析］ 点 R 的位置决定于直线 AP 和 BQ，而这两直线的位置又决定于点 P 与点 Q. 故只需在假设直线 PQ 的方程后，定出表示直线 AP 和 BQ 的方程，即可求得点 R 的轨迹.

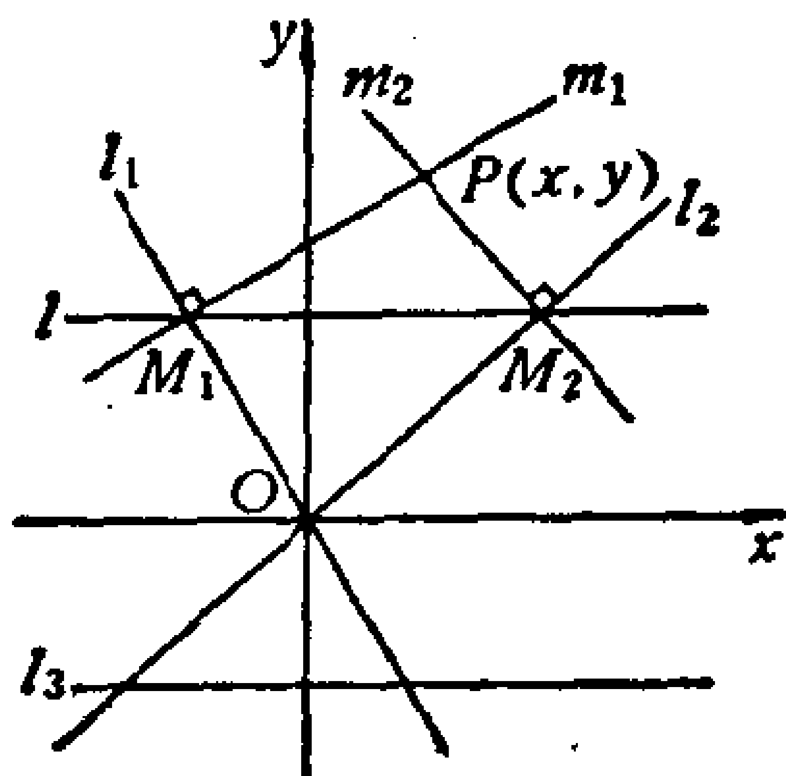
［解］ 根据题意，设直线 PQ 的方程为 $x-my=0$. 过 l_1 和 PQ 的交点 P 的直线系方程为 $\lambda(x+2y+2)+x-my=0$. 以 $(1,0)$ 代入，得 $\lambda=-\frac{1}{3}$. ∴ 直线 AP 的方程为 $2x-2y-2=3my\cdots$①. 同理可得直线 BQ 的方程为 $5x+3y-15=8my\cdots$②. ①×8－②×3，得 $x-25y+29=0$（$y\neq0$，否则点 R 在 x 轴上，直线 AP 与 BQ 相重合）. 故所求的轨迹为一直线，不包括它和 x 轴的交点 $(-29,0)$.

358．已知 $\triangle ABC$，过 BC 边的中点 O 引任意直线分别与直线 AB 和 AC 相交于 D、E．求 BE 与 CD 两直线交点 P 的轨迹．



［解］ 以点 O 为原点，直线 CB 为 y 轴建立坐标系如图．设点 B 的坐标为 $(0, p)$，则点 C 的坐标为 $(0, -p)$．显然 AB、AC 的倾角不可能等于 $90°$，故可令直线 AB 的方程为 $y=k_1x+p$，直线 AC 的方程为 $y=k_2x-p$．又设过点 O 的任意直线为 $y=kx$，$(k\neq k_1, k\neq k_2)$．于是可得点 D 的坐标为 $\left(\frac{p}{k-k_1}, \frac{kp}{k-k_1}\right)$，点 E 的坐标为 $\left(\frac{p}{k_2-k}, \frac{kp}{k_2-k}\right)$．因此直线 CD 和 BE 的方程分别为 $y=(2k-k_1)x-p$ 和 $y=(2k-k_2)x+p$．从中消去参数 k，即得 $x=\frac{2p}{k_2-k_1}$．易知点 A 的横坐标为 $\frac{2p}{k_2-k_1}$，故所求的轨迹为过点 A 且平行于 BC 边的一条直线．

359．l_1、l_2 和 l_3 为两两相交的三直线，动直线 l 分别交 l_1、l_2 于点 M_1、M_2，且 $l /\!/ l_3$．过 M_1、M_2 分别作 l_1、l_2 的垂线 m_1、m_2，求直线 m_1、m_2 交点 P 的轨迹方程．



［分析］ 当直线 l 的位置设定后，点 M_1、M_2 也随之而定，则直线 m_1、m_2 的方程即可写出，从而便能求得点 P 的轨迹方程．

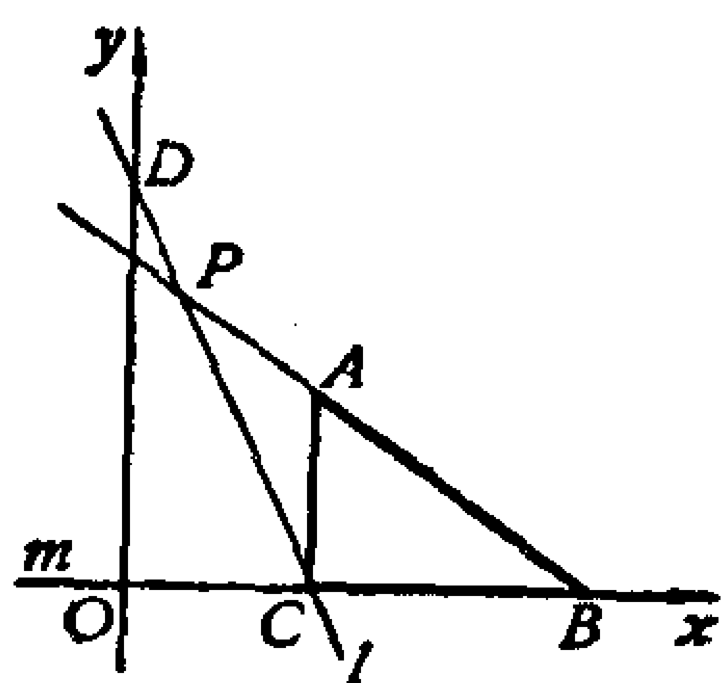
［解］ 以直线 l_1、l_2 的交点 O 为原点，过 O 平行于直线 l_3 的直线为 x 轴，建立坐标系如图．设直线 l_1 的方程为 $A_1x+B_1y=0$，直线 l_2 的方程为 $A_2x+B_2y=0$．动直线 l 的方程为 $y=b$，则过点 M_1 的直线系方程是 $A_1x+(B_1+\lambda)y-\lambda b=0\cdots$①．$\because l_1\perp m_1$，$\therefore A_1^2+B_1(B_1+\lambda)=0\cdots$②．由①、②消去 λ，可得直线 m_1 的方程为 $A_1B_1x-A_1^2y+(A_1^2+B_1^2)b=0\cdots$③．同理可得 m_2 的方程为 $A_2B_2x-A_2^2y+(A_2^2+B_2^2)b=0\cdots$④．从③、④消去参数 b，即得 $(A_2^2+B_2^2)(A_1B_1x-A_1^2y)=(A_1^2+B_1^2)(A_2B_2x-A_2^2y)$，即

$$(B_1A_2-A_1B_2)(A_1A_2-B_1B_2)x+(B_1A_2-A_1B_2)(B_1A_2+A_1B_2)y=0,$$

∵直线 l_1 和 l_2 相交，∴ $B_1A_2-A_1B_2\neq 0$. 故所求的轨迹方程为

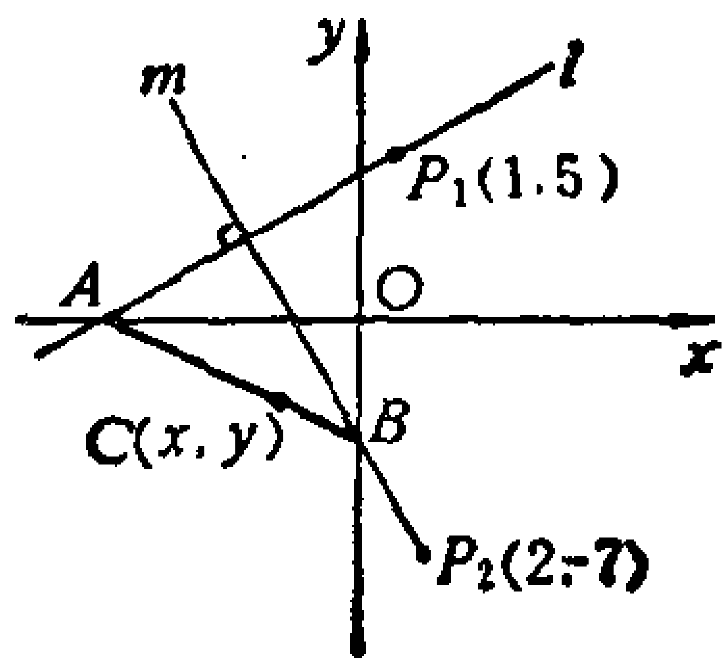
$$(A_1A_2-B_1B_2)x+(B_1A_2+A_1B_2)y=0.$$

360. 过定点 D 的动直线 l 和水平直线 m 相交于 C，在 m 上点 C 的右边取一点 B，作直角 $\triangle ABC$，使 A、D 在直线 m 的同旁，且 $\angle ACB=90^\circ$，$|AC|=b$，$|BC|=a$（a、b 为定值）. 求直线 l 和 AB 交点 P 的轨迹方程.



［解］ 设点 D 在直线 m 上的射影为 O，$|OD|=d$. 取 O 为原点，m 为 x 轴建立坐标系如图. 设点 C 的坐标为 $(\lambda, 0)$，则点 B 的坐标为 $(a+\lambda, 0)$. 而 A、D 的坐标分别为 (λ, b) 和 $(0, d)$. 故直线 l 的方程为 $dx+\lambda y=\lambda d$…①，直线 AB 的方程为 $y-b=-\frac{b}{a}(x-\lambda)$…②. 由②解出 λ 代入①，即得所求的轨迹方程 $ay^2+bxy-a(b+d)y+abd=0$.

361. 过点 $P_1(1, 5)$ 任作一直线 l 交 x 轴于点 A，过点 $P_2(2, -7)$ 作直线 l 的垂线 m 交 y 轴于点 B. 求分线段 AB 为 $BC:CA=1:2$ 的动点 C 的轨迹.



［分析］ 线段的定比分点决定于这线段的两端点和比值. 现比值已知，故可以从探求其两端点入手去解.

［解］ 设直线 l 的倾角为 θ，∵直线 l 恒与 x 轴相交，故 $\theta\neq 0$. 当 $\theta\neq\frac{\pi}{2}$ 时，直线 l 的方程为 $y-5=\operatorname{tg}\theta\cdot(x-1)$，∴点 A 的坐标为 $(1-5\operatorname{ctg}\theta, 0)$. 又∵ $m\perp l$，∴直线 m 的方程为 $y+7=-\operatorname{ctg}\theta\cdot(x-2)$. 故点 B 的坐标为 $(0, 2\operatorname{ctg}\theta-7)$.

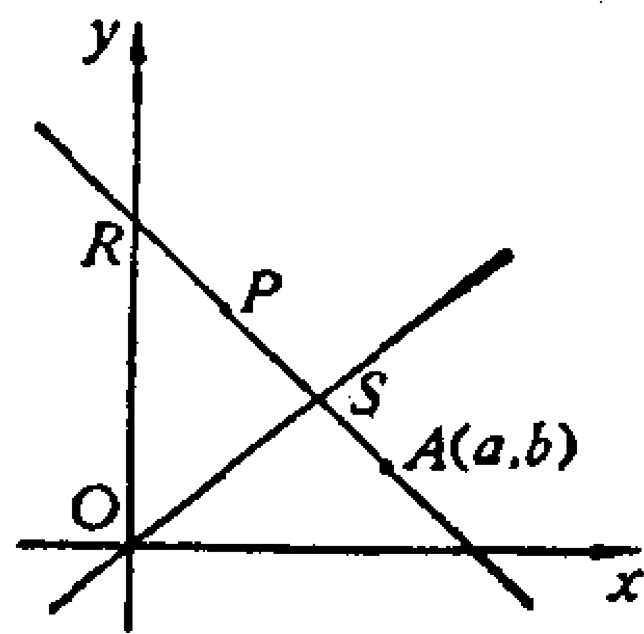
设点 C 的坐标为 (x, y)，∵ $\frac{BC}{CA}=\frac{1}{2}$，∴ $x=\dfrac{\frac{1}{2}(1-5\operatorname{ctg}\theta)}{1+\frac{1}{2}}$，

$$\therefore\ \operatorname{ctg}\theta=\frac{-3x+1}{5}\cdots①;$$

又
$$y=\frac{2\operatorname{ctg}\theta-7}{1+\frac{1}{2}},$$
$$\therefore\quad \operatorname{ctg}\theta=\frac{3y+14}{4}\cdots②.$$

由 ①、② 得 $4x+5y+22=0$. 当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，直线 l 的方程为 $x=1$，直线 m 的方程为 $y=-7$. ∴ 点 A 和点 B 的坐标分别为 $(1, 0)$ 和 $(0, -7)$. 此时点 C 的坐标 $x=\frac{1}{3}$，$y=-\frac{14}{3}$，仍适合方程 $4x+5y+22=0$. 故所求的轨迹是直线 $4x+5y+22=0$.

362. 一动直线过定点 A，且与两定直线分别交于 R、S 两点. 求线段 RS 中点的轨迹方程.

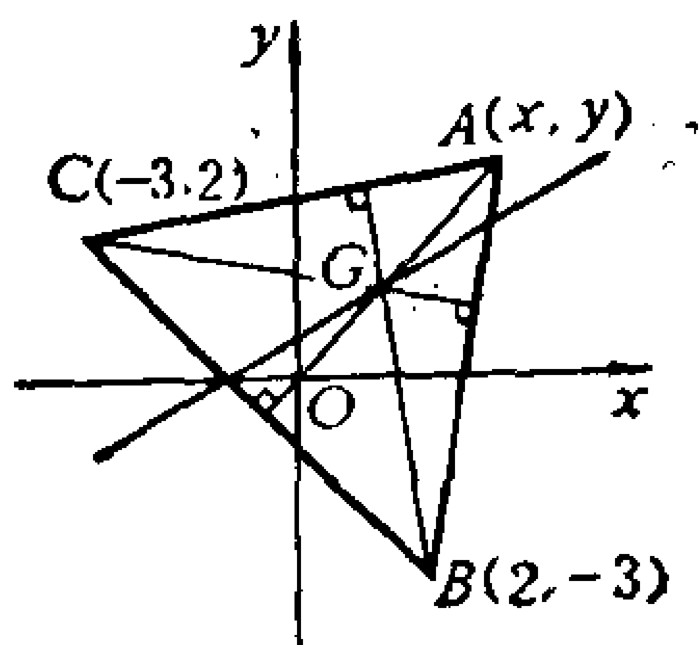


［解］ (1) 若两定直线互不平行. 以一定直线为 y 轴，两定直线交点 O 为原点，建立坐标系如图. 设另一定直线方程为 $y=kx$. 定点 A 的坐标为 (a, b). ∵ 过定点 A 的动直线和两定直线都相交，故此动直线的斜率 m 必然存在，且 $k\neq m$，其方程为 $y-b=m(x-a)\cdots①$. 显然点 R 的横坐标 $x_R=0$. 以 $y=kx$ 代入 ①，解得点 S 的横坐标 $x_S=\frac{b-am}{k-m}$. 设线段 RS 的中点为 $P(x, y)$，则 $x=\frac{x_R+x_S}{2}=\frac{b-am}{2(k-m)}\cdots②$. 又由 ① 得 $m=\frac{y-b}{x-a}$. 代入 ②，即得所求的轨迹方程
$$2kx^2-2xy-(2ak-b)x+ay=0.$$

(2) 若两定直线互相平行. 以一定直线为 y 轴，此直线上任一点为原点，建立坐标系. 设另一定直线方程为 $x=p$，定点 A 的坐标为 (a, b)，则过点 A 任作一直线和两定直线交点 R、S 的横坐标分别为 $x_R=0$，$x_S=p$. 仍设线段 RS 的中点为 $P(x, y)$，则 $x=\frac{p}{2}$ 即为所求的轨迹方程.

［说明］ (1) 合理地建立坐标系可以简化问题的解答. 本题若以一定直线为 x 轴建立坐标系，则单用直线的点斜式还不能包括所有过定点 A 且与两定直线相交的直线，因此还需另行考虑过定点且垂直于 x 轴的直线这一特殊情况. (2) 不能遗漏两定直线平行的情况.

363. 已知 $\triangle ABC$ 的两个顶点 $B(2,\ -3)$、$C(-3,\ 2)$，垂心 G 在直线 $x-2y+1=0$ 上移动，求第三个顶点 A 的轨迹方程.



［分析］ 若点 G 已知，则 $AB\perp CG$, $AG\perp CB$. 故可写出 AB、AG 的方程，从而求得点 A 的轨迹方程.

［解］ 设 $A(x,\ y)$ 为轨迹上的任意一点，点 G 的坐标为 $(2y_1-1,\ y_1)$. ∵ $AB\perp CG$,

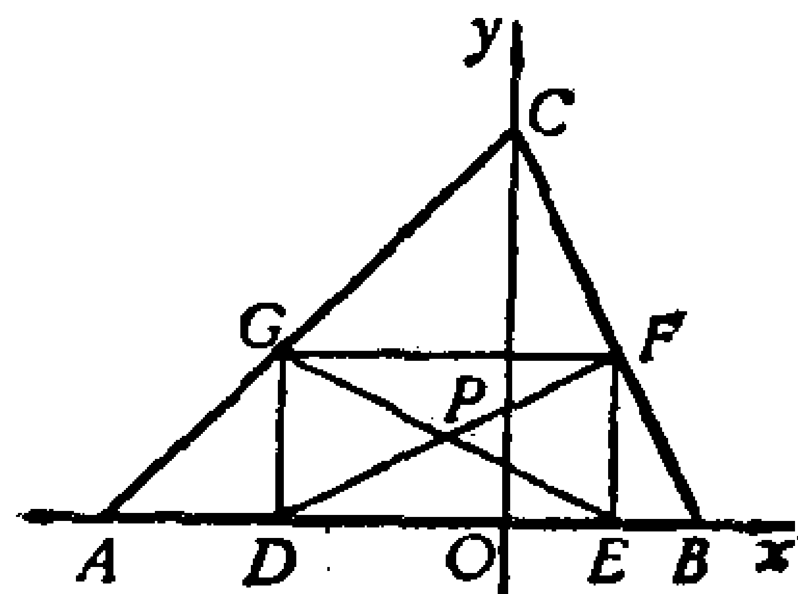
$$\therefore\ \frac{y+3}{x-2}\cdot\frac{y_1-2}{2y_1+2}=-1,$$

即 $(y+3)(y_1-2)=-2(x-2)(y_1+1)\cdots$①; 当直线 AB、CG 中有一斜率不存在时，①式仍成立. ∵ $AG\perp CB$, $\therefore\ \dfrac{y-y_1}{x-2y_1+1}\cdot\dfrac{2+3}{-3-2}=-1\cdots$②. 从②得 $y_1=x-y+1$，代入①消去参数 y_1，得

$$(y+3)(x-y-1)=-2(x-2)(x-y+2).$$

化简得点 A 的轨迹方程 $2x^2-xy-y^2+3x-11=0$.

364. 已知 $\triangle ABC$ 的内接矩形 $DEFG$ 的顶点 F、G 分别在边 BC 和 AC 上，而 D、E 在边 AB 上，求此矩形的中心 P 的轨迹.



［分析］ 点 P 的位置决定于直线 GF，故在建立坐标系，并假设 GF 的方程后，即能定出 D、E、G、F 的坐标，由此求得点 P 的轨迹.

［解］ 以直线 AB 为 x 轴，点 C 在 AB 上的射影 O 为原点，OC 为 y 轴建立坐标系，并设三顶点的坐标分别为 $A(a,\ 0)$、$B(b,\ 0)$、$C(0,\ c)$，$c>0$，$ab\leqslant 0$. 设直线 GF 的方程为 $y=t\ (0<t<c)$. ∵ 直线 AC 的方程为 $cx+ay=ac$，直线 BC 的方程为 $cx+by=bc$，∴ 点 G 的坐标为 $\left(\dfrac{a(c-t)}{c},\ t\right)$，点 F 的坐标为 $\left(\dfrac{b(c-t)}{c},\ t\right)$. 根据矩形的性质，可知其中心点 P 的横坐标:

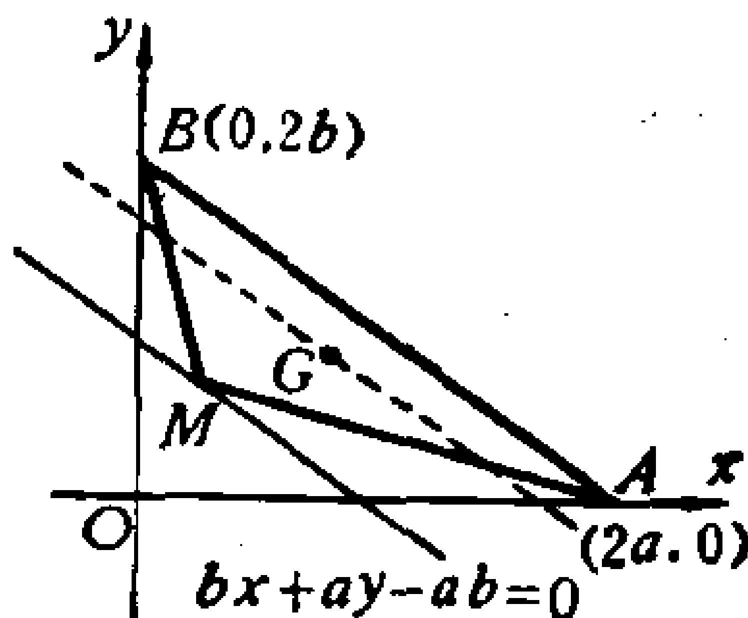
$$x=\frac{1}{2}\left[\frac{a(c-t)}{c}+\frac{b(c-t)}{c}\right]=\frac{(a+b)(c-t)}{2c}\cdots①,$$

纵坐标:　　　　　　$y=\frac{1}{2}t\cdots②$.

② 代入 ①, 得 $x=\frac{(a+b)(c-2y)}{2c}$, 即 $cx+(a+b)y-\frac{1}{2}(a+b)c=0$. 又 $\because 0<t<c$, $\therefore$ 由 ② 可知 $0<y<\frac{c}{2}$. 故所求的轨迹为直线 $cx+(a+b)y-\frac{1}{2}(a+b)c=0$ 在 $0<y<\frac{c}{2}$ 中的一段.

若 A、B 在 y 轴同旁, 即 $ab>0$, 则本题无解.

365. 已知两定点 $A(2a,\ 0)$、$B(0,\ 2b)$, M 为直线 $bx+ay-ab=0$ 上的动点, 试求: (1) $\triangle ABM$ 的重心轨迹; (2) 使 $|AM|+|BM|$ 的值最小的点 M 的位置, 此时直线 AM、BM 的方程及 $\triangle ABM$ 的面积.



[分析] (1) 因为 $\triangle AMB$ 的重心随点 M 的坐标而定, 所以重心坐标$(x,\ y)$ 可用点 M 的坐标表示之. 根据点 M 在已知直线上, 就可求出 x、y 之间的关系.

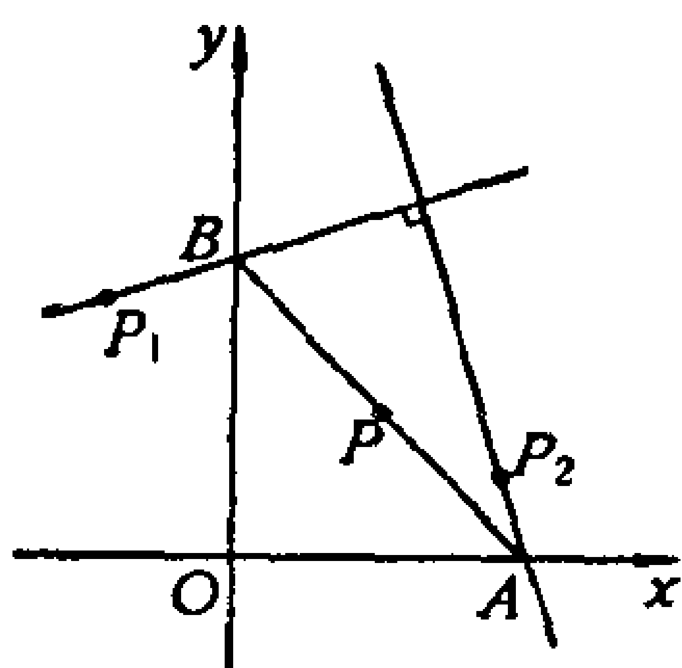
(2) 因为点 M 所在的直线和 AB 平行, 故使 $|AM|+|BM|$ 的值最小的点 M 应在线段 AB 的垂直平分线上, 由此即可求得点 M 的坐标, 于是可写出直线 AM、BM 的方程. 至于 $\triangle ABM$ 的面积, 因已知直线平行于直线 AB, 且前者截距为后者截距之半, 故 $\triangle ABM$ 的面积应是 $\triangle ABO$ 面积的一半.

[解] (1) 设 $\triangle ABM$ 的重心 G 的坐标为$(x,\ y)$. 点 M 坐标$(x_1,\ y_1)$作为参数, 则 $bx_1+ay_1=ab\cdots①$, 又据三角形重心坐标与顶点坐标间的关系, 有 $3x=2a+x_1\cdots②$, $3y=2b+y_1\cdots③$. 由 ①、②、③ 消去参数 x_1、y_1, 得 $b(3x-2a)+a(3y-2b)=ab$, 即 $3bx+3ay-5ab=0$. $\therefore\triangle ABM$ 的重心轨迹为平行于 $bx+ay-ab=0$ 的一直线.

(2) 因为同底等高的三角形中, 以等腰三角形周长为最短, 故使 $|AM|+|BM|$ 为最小的点 M 应在 AB 的垂直平分线上, 即$(x-2a)^2+y^2=x^2+(y-2b)^2$, 化简得 $ax-by=a^2-b^2\cdots④$. 又点 M 在已知直线 $bx+ay=ab\cdots⑤$ 上, 由 ④、⑤ 解得交点 $M\left(\frac{a^3}{a^2+b^2},\ \frac{b^3}{a^2+b^2}\right)$即为所求. 用两点式

可得直线 AM 的方程 $b^3x+a(a^2+2b^2)y-2ab^3=0$. 同理, BM 的方程为 $b(b^2+2a^2)x+a^3y-2a^3b=0$. ∵ 直线 $bx+ay-ab=0$ 是 $\triangle ABO$ 中平行底边 AB 的中位线所在直线的方程, ∴ $\triangle ABM$ 的面积 $=\frac{1}{2}\triangle ABO$ 的面积 $=\frac{1}{4}|2a|\cdot|2b|=|ab|$.

366. $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 为两定点. 过 P_1 作直线交 y 轴于 B 点; 过 P_2 作直线与直线 P_1B 垂直, 且交 x 轴于 A 点. 求线段 AB 中点 P 的轨迹方程.



[分析一] 点 P 由点 A、B 确定, 反之, 如设点 P 的坐标为 (x_0, y_0), 根据题设条件可得点 A、B 的坐标. 故利用 $P_2A\perp P_1B$, 即可得轨迹方程.

[解一] 设线段 AB 的中点为 $P(x_0, y_0)$, 则点 B 和点 A 的坐标分别为 $(0, 2y_0)$ 和 $(2x_0, 0)$. 直线 P_1B 的方程为 $(x-x_1)(y_1-2y_0)=(y-y_1)(x_1-0)$, 即 $(y_1-2y_0)x-x_1y=-2x_1y_0$. 直线 P_2A 的方程为 $(x-x_2)(y_2-0)=(y-y_2)(x_2-2x_0)$, 即 $y_2x-(x_2-2x_0)y=2x_0y_2$. ∵ $P_1B\perp P_2A$, ∴ $y_2(y_1-2y_0)+x_1(x_2-2x_0)=0$. 将 x、y 代换 x_0、y_0 并化简, 得 $2x_1x+2y_2y-x_1x_2-y_1y_2=0$. 此即所求的轨迹方程.

[分析二] 点 P 由点 A、B 确定, 而 A、B 由过 P_1、P_2 的动直线确定, 取动直线 P_1B 的倾角 θ 作参数, 根据 $P_2A\perp P_1B$, 可得 P_2A 的倾角为 $\theta+\frac{\pi}{2}$ 或 $\theta-\frac{\pi}{2}$. 由此可得 P_1B、P_2A 的方程, 于是点 A、B 与 P 的坐标也可求得. 消去 θ, 即得所求的轨迹方程.

[解二] 取直线 P_1B 的倾角 θ 为参数 $\left(\theta\neq\frac{\pi}{2}\right)$, ∵ $P_1B\perp P_2A$, ∴ P_2A 的倾角为 $\theta+\frac{\pi}{2}$ 或 $\theta-\frac{\pi}{2}$, 故直线 P_1B 的方程为

$$(x-x_1)\sin\theta=(y-y_1)\cos\theta.$$

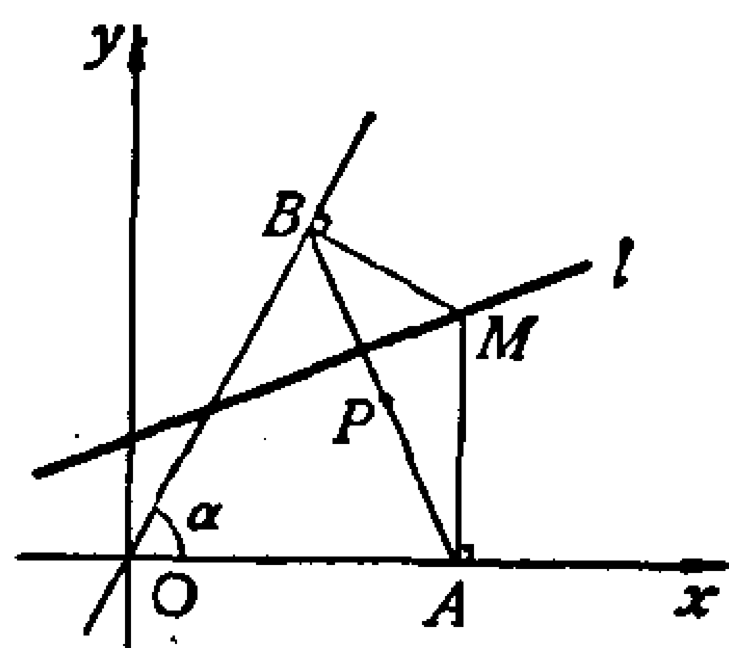
∴ 点 B 的坐标为 $(0, y_1-x_1\operatorname{tg}\theta)$. 直线 P_2A 的方程为

$$(x-x_2)\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=(y-y_2)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right),$$

或
$$(x-x_2)\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=(y-y_2)\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),$$

即 $-(x-x_2)\cos\theta=(y-y_2)\sin\theta$. ∴ 点 A 的坐标为$(x_2+y_2\operatorname{tg}\theta,\ 0)$. 设 AB 的中点为 $P(x,\ y)$, ∴ $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(x_2+y_2\operatorname{tg}\theta)\\ y=\dfrac{1}{2}(y_1-x_1\operatorname{tg}\theta),\end{cases}$ 消去 θ, 即得轨迹方程 $2x_1x+2y_2y-x_1x_2-y_1y_2=0$.

367. M 是定直线 l 上的动点, 自 M 作另两互不垂直的定直线 OA、OB 的垂线, 垂足分别为 A、B. 求线段 AB 中点 P 的轨迹方程.



［解］ 取 O 为原点, OA 所在直线为 x 轴, 建立直角坐标系. 设点 M 的坐标为(x_0, y_0), 则点 A 的坐标为$(x_0,\ 0)$. 又设 $\angle AOB=\alpha$, 则直线OB的方程为 $x\sin\alpha-y\cos\alpha=0\cdots$①. ∵ $MB\perp OB$, ∴ 直线 MB 的方程为 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha\cdots$②. 解①、②得点 B 的坐标$(\cos\alpha(x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha),\ \sin\alpha(x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha))$. 因此 AB 的中点 P 的坐标为:

$$x=\frac{1}{2}(x_0\cos^2\alpha+y_0\sin\alpha\cos\alpha+x_0),$$

$$y=\frac{1}{2}(x_0\sin\alpha\cos\alpha+y_0\sin^2\alpha).$$

从中解得

$$x_0=\frac{2}{\sin\alpha}(x\sin\alpha-y\cos\alpha)\cdots③,$$

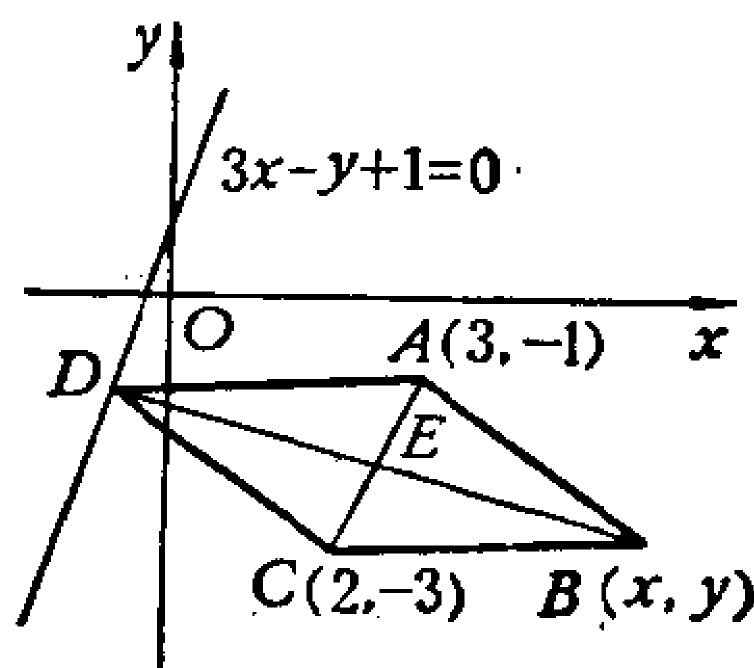
$$y_0=\frac{2}{\sin^2\alpha}(y+y\cos^2\alpha-x\sin\alpha\cos\alpha)\cdots④.$$

设定直线 l 方程为 $Ax+By+C=0$, ∵ 点 $M(x_0,\ y_0)$在直线 l 上, ∴ $Ax_0+By_0+C=0$. 以③、④代入, 即得所求轨迹方程

$$2\sin\alpha(A\sin\alpha-B\cos\alpha)x+2(B+B\cos^2\alpha-A\sin\alpha\cos\alpha)y+C\sin^2\alpha=0.$$

368. 平行四边形 $ABCD$ 一条对角线的两端在 $A(3,\ -1)$、$C(2,\ -3)$两点, 点 D 在直线 $3x-y+1=0$ 上移动. 求点 B 的轨迹方程.

［分析］ 平行四边形对角线互相平分，BD 的中点即 AC 的中点 E. 而点 E 坐标可求，故点 B 的位置仅决定于点 D 的位置，借助于点 D 在已知直线上即可求得点 B 的轨迹.



［解一］ 设点 B 的坐标为 (x, y)；取 x_1 为参数，点 D 的坐标为 $(x_1, 3x_1+1)$. 求出 AC 的中点 $E\left(\frac{5}{2}, -2\right)$. ∵ E 又是 BD 的中点，

$$\therefore\ \frac{5}{2}=\frac{x+x_1}{2}\cdots①,\quad -2=\frac{3x_1+1+y}{2}\cdots②.$$

从①、②消去参数 x_1，得 $3x-y-20=0$. 此即点 B 的轨迹方程.

［解二］ 设点 B 的坐标为 (x, y)，点 D 的坐标为 (u, v). ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ AC 的中点 $E\left(\frac{5}{2}, -2\right)$ 也是 BD 的中点，故有 $u=-x+5,\ v=-y-4$. 又 ∵ 点 $D(u, v)$ 在直线 $3x-y+1=0$ 上，∴ $3(-x+5)+y+4+1=0$，即 $3x-y-20=0$. 此即所求的轨迹方程.

［说明］ 如［解二］那样，用动点坐标表示已知曲线上点的坐标，然后代入已知曲线的方程而求得动点的轨迹方程，也是一种求轨迹的常用方法.

369. P 为直线 l: $Ax+By+C=0$ 上一动点，$M(a, b)$ 为一定点，点 Q 在直线 MP 上，且 $MQ:QP=\lambda$. 求点 Q 的轨迹，$(\lambda\neq-1,\ \lambda\neq0)$.

［解］ 设点 P 的坐标为 (x_0, y_0)，点 Q 的坐标为 (x, y). ∵ $MQ:QP=\lambda$，

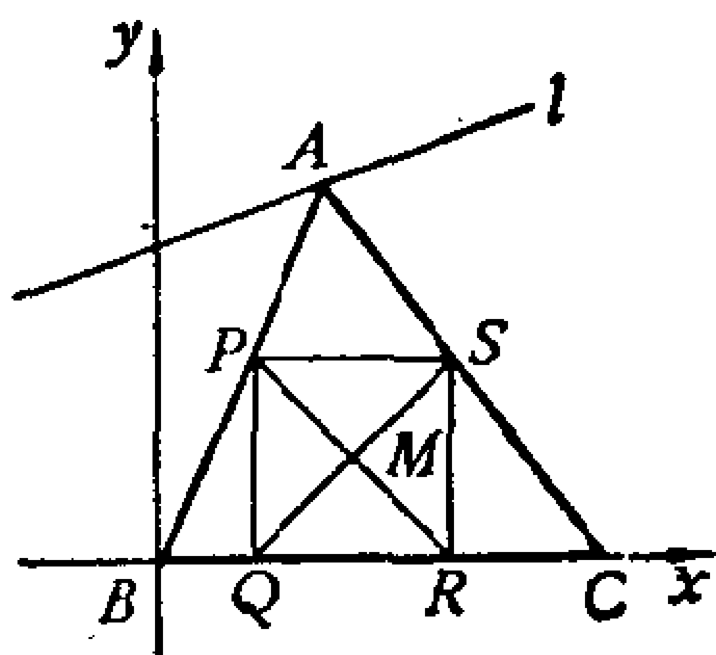
$$\therefore\ x=\frac{a+\lambda x_0}{1+\lambda},\quad 即\quad x_0=\frac{(1+\lambda)x-a}{\lambda}\cdots①;$$

$$y=\frac{b+\lambda y_0}{1+\lambda},\quad 即\quad y_0=\frac{(1+\lambda)y-b}{\lambda}\cdots②.$$

∵ 点 P 在直线 l 上，∴ $Ax_0+By_0+C=0$. 以①、②代入，并化简得 $A(1+\lambda)x+B(1+\lambda)y-Aa-Bb+C\lambda=0$. ∴ 点 Q 的轨迹是与直线 l 平行的一直线.

370. $\triangle ABC$ 的边 BC 的位置和长短一定，A 点在定直线 l 上移动，三角形内接正方形 $PQRS$ 的顶点 P 在 AB 上，S 在 AC 上，Q、R 在 BC 上. 求此正方形中心 M 的轨迹.

［分析］ 当点 A 确定后，正方形 $PQRS$ 的中心 M 也随之而定，故点 M 的坐标可用点 A 的坐标表示之．借助点 A 在直线 l 上，即可求得点 M 的轨迹．



［解］ 如图建立直角坐标系，并令点 C 的坐标为 $(p,\ 0)$，直线 l 的方程为 $ax+by+c=0\cdots$①．设点 A 的坐标为 $(u,\ v)$，点 M 的坐标为 $(x,\ y)$，则根据正方形的性质可知：点 P、S 的坐标分别为 $(x-|y|,\ 2y)$ 和 $(x+|y|,\ 2y)$．∵ A、P、B 三点共线，

$$\therefore\quad \begin{vmatrix} u & v & 1 \\ x-|y| & 2y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

即 $2yu-(x-|y|)v=0\cdots$②．又∵ A、S、C 三点共线，

$$\therefore\quad \begin{vmatrix} u & v & 1 \\ x+|y| & 2y & 1 \\ p & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

即 $2yu+(p-x-|y|)v=2py\cdots$③．解②、③，得

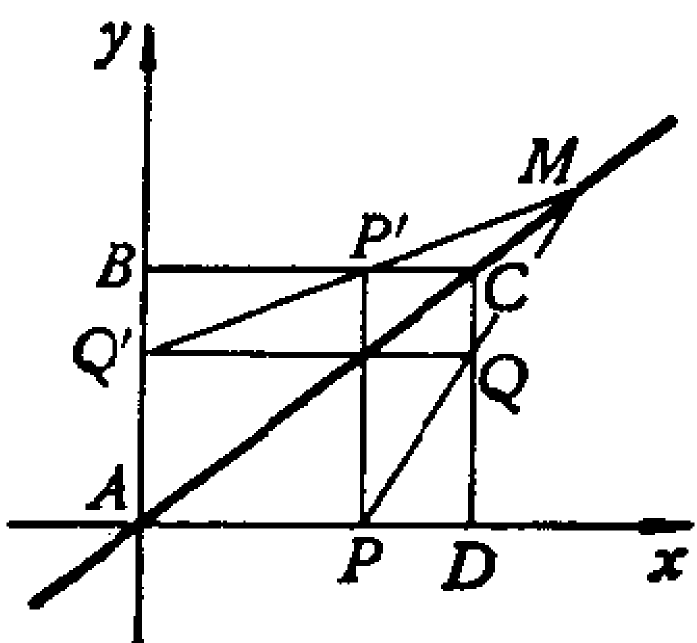
$$u=\frac{p(x-|y|)}{p-2|y|},\quad v=\frac{2py}{p-2|y|}.$$

∵ 点 $A(u,\ v)$ 在直线 l：$ax+by+c=0$ 上，

$$\therefore\quad \frac{ap(x-|y|)}{p-2|y|}+\frac{2bpy}{p-2|y|}+c=0,$$

即 $apx-(ap+2c)|y|+2bpy+pc=0\cdots$④．当 $\triangle ABC$ 中 $\angle B$ 或 $\angle C$ 为钝角时，题设内接正方形不存在，∴ 应有 $\begin{cases} x-|y|\geqslant 0 \\ x+|y|\leqslant p \end{cases}\cdots$⑤．当 $y\geqslant 0$ 时，由④、⑤得 $apx-(ap-2bp+2c)y+pc=0\cdots$⑥ $\left(\begin{cases} x-y\geqslant 0 \\ x+y\leqslant p \end{cases}\right)$；当 $y\leqslant 0$ 时，由④、⑤得 $apx+(ap+2bp+2c)y+pc=0\cdots$⑦ $\left(\begin{cases} x+y\geqslant 0 \\ x-y\leqslant p \end{cases}\right)$．故所求轨迹为方程⑥所表示的直线在 $y\geqslant 0,\ x-y\geqslant 0,\ x+y\leqslant p$ 所围成的三角形内部的一段；或方程⑦所表示的直线在 $y\leqslant 0,\ x+y\geqslant 0,\ x-y\leqslant p$ 所围成的三角形内部的一段；当直线 l 与 BC 的交点落在线段 BC 内部时，轨迹为上述两线段所组成图形的一部分．

371. 已知矩形 $ABCD$, 两动直线 $PP' \parallel AB$, $QQ' \parallel AD$, 且 P、P' 分别在 AD、BC 两边所在直线上滑动, Q、Q' 分别在 DC、AB 两边所在直线上滑动. 求直线 PQ 和 $Q'P'$ 交点 M 的轨迹.



[解] 设矩形 $ABCD$ 两邻边 $|AD|=a$, $|AB|=b$. 如图建立坐标系, 则其四顶点坐标分别为 $A(0, 0)$、$B(0, b)$、$C(a, b)$、$D(a, 0)$. 又设点 P 的坐标为 $(\lambda, 0)$, 点 Q' 的坐标为 $(0, \mu)$, 则点 P' 和点 Q 的坐标分别为 (λ, b) 和 (a, μ). 于是直线 PQ 的方程为 $(a-\lambda)y=\mu(x-\lambda)$…①. 直线 $Q'P'$ 的方程为 $\lambda(y-\mu)=(b-\mu)x$…②. ①+②, 得 $bx-ay=0$. 即所求轨迹为直线 AC.

[说明] 在求轨迹过程中引入两个参数时, 一般需要有三个条件才能将参数消去. 本题由于情况特殊(PQ、$Q'P'$ 的交点必在直线 AC 上), 故只需两个方程即可消去参数 λ、μ.

372. 自已知角内一定点引任意直线与角的两边或其反向延长线相交. 过两交点分别作角的两边的平行直线, 求此两直线交点 P 的轨迹方程.

[分析] 如图建立坐标系后, 由题设条件可知, 点 M、N 的坐标都可用点 P 的坐标表示, 故点 P 的横坐标与纵坐标之间的关系可通过 N、A、M 三点共线而求得.

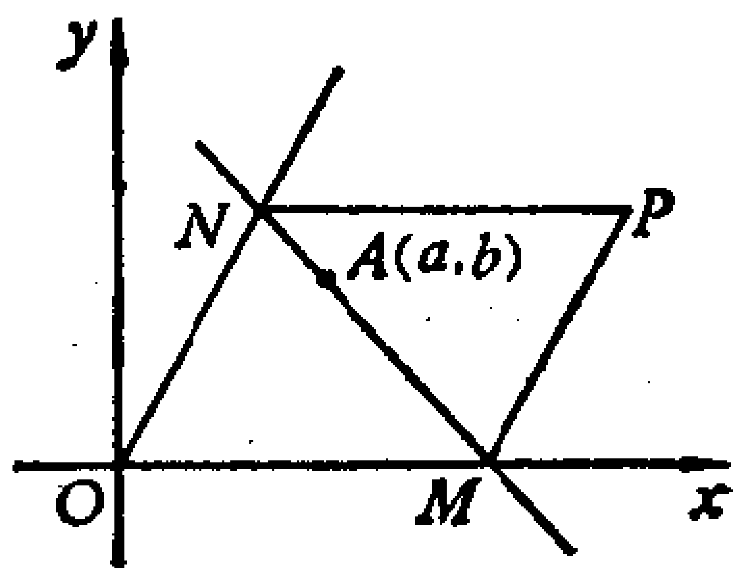


图 1

[解一] 以已知角的顶点为原点, 一边为 x 轴, 建立直角坐标系(图1). 设角的另一边方程为 $x=my$, 定点 A 的坐标为 (a,b), 过点 A 的直线交角的两边于 M、N, 动点 P 的坐标为 (x_0, y_0), 则点 N 的坐标为方程组 $\begin{cases} x=my \\ y=y_0 \end{cases}$ 的解, 即 (my_0, y_0). 而直线 PM 的方程为 $x-x_0=m(y-y_0)$, 故点 M 的坐标为方程组 $\begin{cases} x-x_0=m(y-y_0) \\ y=0 \end{cases}$ 的解, 即 $(x_0-my_0, 0)$.

$\because N$、A、M 三点共线，$\therefore \begin{vmatrix} my_0 & y_0 & 1 \\ a & b & 1 \\ x_0-my_0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$. 展开行列式，并以 x、y 代换 x_0、y_0，即得 $xy-my^2-bx+(2bm-a)y=0$. 此即所求的轨迹方程.

［解二］ 以已知角的顶点 O 为原点，两边为坐标轴，建立斜坐标系(图 2)．过定点 $A(a,b)$ 的直线分别交 x 轴和 y 轴于点 M、N，令此直线的方程为 $y-b=\lambda(x-a)$（λ 为参数），则点 M 的坐标为 $\left(a-\dfrac{1}{\lambda}b,\ 0\right)$，点 N 的坐标为

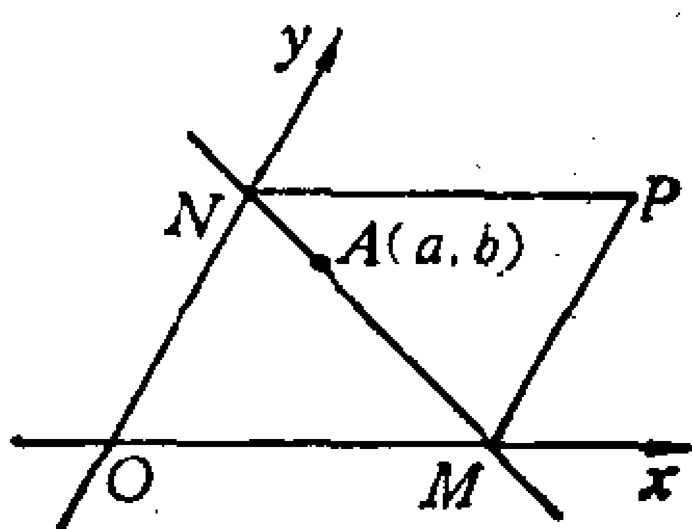


图　2

$(0, b-\lambda a)$．设点 P 的坐标为 $(x,\ y)$，则 $\begin{cases} x=a-\dfrac{1}{\lambda}b \\ y=b-\lambda a. \end{cases}$ 消去 λ，即得所求的轨迹的斜坐标系方程 $(x-a)(y-b)=ab$.

［说明］ 本题也可先假设过点 A 的动直线方程，然后求出点 P 的含有参数的坐标，再消参数解之，但不如上述解法简捷．利用动点坐标表示其它点的坐标或曲线的方程以后，再根据题设条件去求轨迹，也是一种常用的思考方法.

373. 在斜 $\triangle AOB$ 内作 DE 平行于 AB，交 OA 于 D、交 OB 于 E．求直线 AE、BD 交点的轨迹.

［解一］ 如图 1 建立直角坐标系，令点 A、B、O 的坐标分别为 $(a, 0)$、(b, mb)、$(0, 0)$. 设点 D、E 的坐标分别为 $(\lambda,\ 0)$、$(\mu,\ m\mu)$．$\because DE \parallel AB$，$\therefore \dfrac{m\mu}{\mu-\lambda}=\dfrac{mb}{b-a}$，故 $\lambda b=a\mu\cdots$①．直线 AE 的方程为 $(\mu-a)y=m\mu(x-a)\cdots$②．直线 BD 的方程为 $(b-\lambda)y=mb(x-\lambda)\cdots$③．由②、③解得 μ、λ，代入①并化简，即得所求的轨迹方程 $b^2m^2x^2-2b^2mxy+(b^2-a^2)y^2-ab^2m^2x+abm(a+b)y=0\cdots$④，即 $[bmx-(b+a)y][bmx-(b-a)y-abm]=0$．但 $bmx-(b-a)y-abm=0$ 就是直线 AB 的方程，故所求的轨迹为直线 $bmx-(b+a)y=0$ 在 $\triangle AOB$ 内的部分.

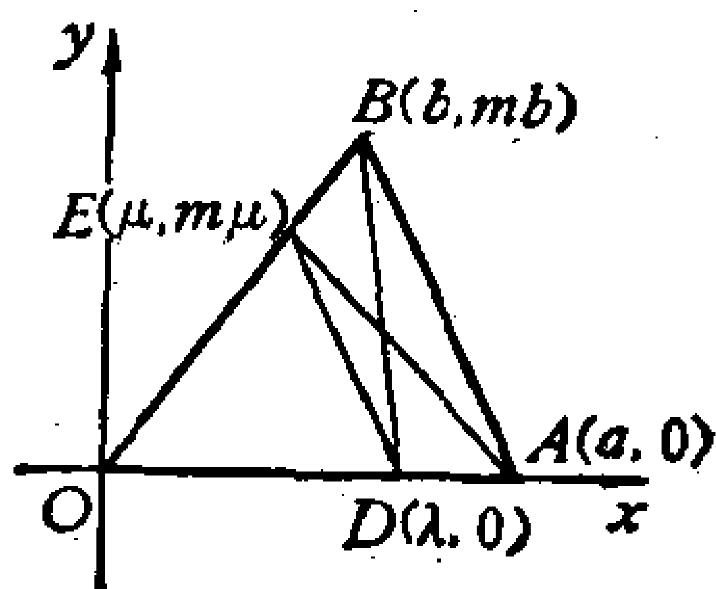


图　1

［解二］ 以 O 为原点，OA、OB 所在直线分别为 x 轴、y 轴建立斜坐标

系(图 2). 令点 A、B 的坐标分别为 $(a, 0)$、$(0, b)$, D、E 的坐标分别为 $(\lambda, 0)$、$(0, \mu)$. $\because DE \parallel AB$, $\therefore \dfrac{\lambda}{a}=\dfrac{\mu}{b}\cdots$①.
直线 AE 的方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{\mu}=1\cdots$②, 直线 BD 的方程为 $\dfrac{x}{\lambda}+\dfrac{y}{b}=1\cdots$③. 由②、③解出 μ、λ, 代入①即得所求的轨迹方程 $b^2x^2-a^2y^2-ab^2x+a^2by=0$, 即 $(bx+ay-ab)(bx-ay)=0$. 但 $bx+ay-ab=0$ 就是直线 AB 的方程, 故所求的轨迹为直线 $bx-ay=0$ 在 $\triangle AOB$ 内的部分.

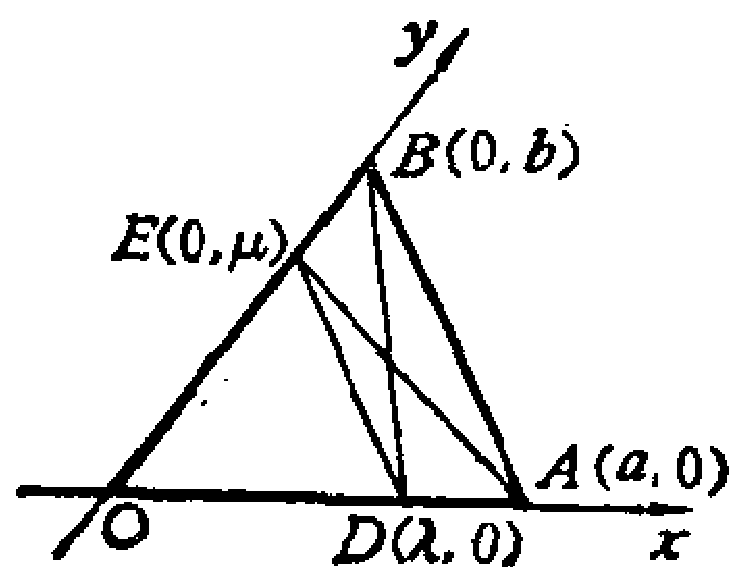


图 2

[说明] 以上两种解法所得的轨迹方程表示同一直线.

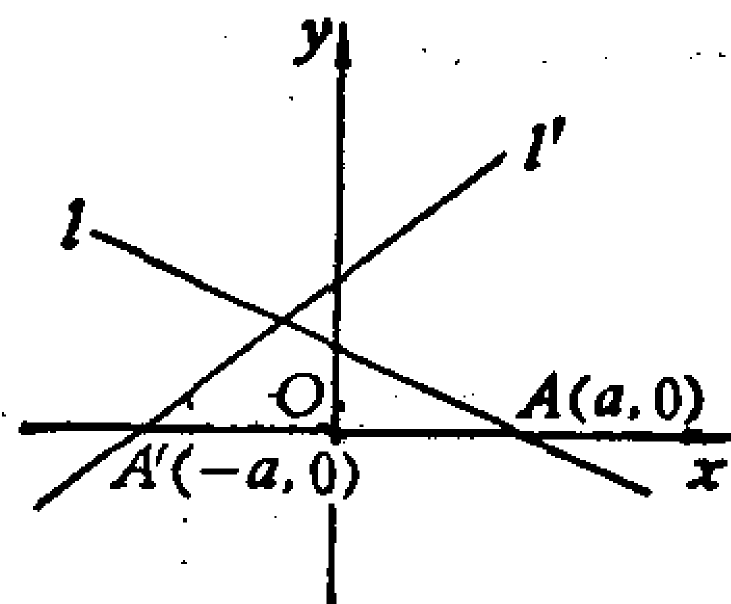
374. 过两定点 $A(a, 0)$、$A'(-a, 0)$ 分别作两动直线 l、l', 此两动直线在 y 轴上的截距又分别为 t、t', 且 $tt'=b^2$(b 为常数). 求此两动直线交点的轨迹.

[解] 据条件可知, 直线 l 的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{t}=1, \quad 即 \quad \frac{y}{t}=1-\frac{x}{a}\cdots①;$$

直线 l' 的方程为

$$\frac{x}{-a}+\frac{y}{t'}=1, \quad 即 \quad \frac{y}{t'}=1+\frac{x}{a}\cdots②.$$



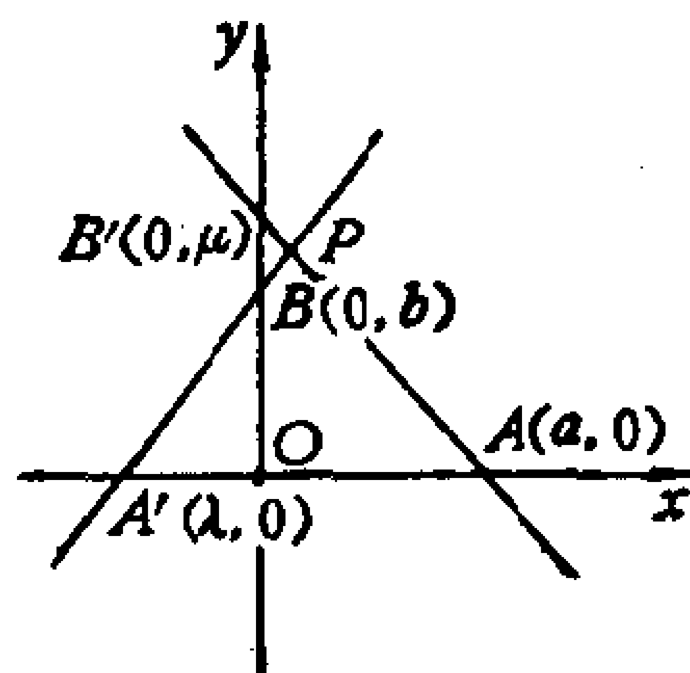
①×②, 得 $\dfrac{y^2}{tt'}=1-\dfrac{x^2}{a^2}$. $\because tt'=b^2$, 代入上式, 并整理得 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. 故其轨迹为一椭圆.

375. 一动直线 l 和两坐标轴分别交于 A、B, $\triangle AOB$ 的面积为 k^2, 点 P 分线段 AB 为 $m:n$, 求点 P 的轨迹方程.

[解] 设点 A 的坐标为 $(a, 0)$, 点 B 的坐标为 $(0, b)$, 点 P 的坐标为 (x, y). $\because AP:PB=m:n$, $\therefore x=\dfrac{a}{1+\dfrac{m}{n}}$, 即 $a=\dfrac{(m+n)x}{n}\cdots$①; $y=\dfrac{\dfrac{m}{n}b}{1+\dfrac{m}{n}}$, 即 $b=\dfrac{(m+n)y}{m}\cdots$②. $\because S_{\triangle AOB}=k^2$, $\therefore |ab|=2k^2$. 以①、②代入, 得 $\left|\dfrac{(m+n)^2}{mn}xy\right|=2k^2$. $\therefore$ 点 P 的轨迹方程为 $xy=\pm\dfrac{2k^2mn}{(m+n)^2}$.

376. $A(a, 0)$、$B(0, b)$为两定点，在x、y轴上分别有一动点A'、B'，设AB'与$A'B$的交点为P．分别求满足下列各条件的点P的轨迹：(1) $OA'+OB'=OA+OB$；(2) $\frac{1}{OA'}-\frac{1}{OB'}=\frac{1}{OA}-\frac{1}{OB}$．

[分析]　点P的位置决定于点A'和B'，故可先假设A'、B'的坐标，再定出直线AB'与$A'B$的方程，求出点P的坐标．然后分别利用所给的条件消去参数，即得点P的轨迹方程．



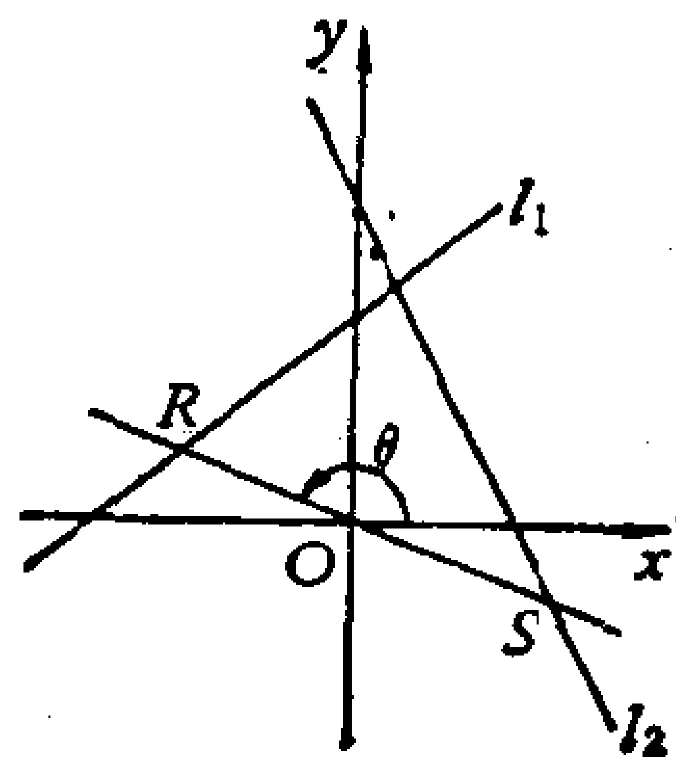
[解]　(1) 设点A'的坐标为$(\lambda, 0)$，点B'的坐标为$(0, \mu)$，则直线AB'和$A'B$的方程可分别写作$\mu x+ay=a\mu$…①，和$bx+\lambda y=b\lambda$…②．由①得$\mu=\frac{ay}{a-x}$；由②得$\lambda=\frac{bx}{b-y}$．根据条件可知$\lambda+\mu=a+b$，

$$\therefore\quad \frac{ay}{a-x}+\frac{bx}{b-y}=a+b.$$

化简得$bx^2+(a+b)xy+ay^2-b(2a+b)x-a(a+2b)y+ab(a+b)=0$，即$(bx+ay-ab)(x+y-a-b)=0$．故所求的轨迹为直线$x+y=a+b$和直线$bx+ay=ab$(当$\lambda=a$，$\mu=b$时的特例)．

(2) 假设同(1)．则由条件可知$\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$，即$\frac{1}{a}-\frac{1}{\lambda}=-\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{b}\right)$…③；且①、②相应地可写成$\frac{x}{a}+\frac{y}{\mu}=1$…④和$\frac{x}{\lambda}+\frac{y}{b}=1$…⑤．④－⑤，得$x\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\lambda}\right)+y\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{b}\right)=0$，以③代入，得$x-y=0$．故所求的轨迹为第一、三象限的角平分线．

377. 过定点O的动直线与两已知直线l_1、l_2分别交于R、S两点，求此动直线上符合下列条件的点P的轨迹方程：(1) $2\cdot OP=OR+OS$；(2) $OP^2=OR\cdot OS$．



[解] (1) 取 O 为原点，过 O 的任意两互相垂直的直线为坐标轴建立坐标系如图. 设两已知直线的方程分别为 l_1: $A_1x+B_1y+C_1=0$, l_2: $A_2x+B_2y+C_2=0$, $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OR})=\theta$, $OP=t$, $OR=t_1$, $OS=t_2$, 则点 R、S 的坐标分别为 $(t_1\cos\theta, t_1\sin\theta)$ 和 $(t_2\cos\theta, t_2\sin\theta)$, 而点 P 的坐标为 $(t\cos\theta, t\sin\theta)$. ∵ 点 R、S 分别在 l_1、l_2 上，∴ $A_1t_1\cos\theta+B_1t_1\sin\theta+C_1=0$, $A_2t_2\cos\theta+B_2t_2\sin\theta+C_2=0$. 即

$$(A_1\cos\theta+B_1\sin\theta)t_1=-C_1\cdots①,$$
$$(A_2\cos\theta+B_2\sin\theta)t_2=-C_2\cdots②.$$
$$\because\ 2\cdot OP=OR+OS,\quad \therefore\ 2t=t_1+t_2\cdots③.$$

$①\times(A_2\cos\theta+B_2\sin\theta)t+②\times(A_1\cos\theta+B_1\sin\theta)t$, 并以 ③ 代入得

$$2(A_1\cos\theta+B_1\sin\theta)(A_2\cos\theta+B_2\sin\theta)t^2$$
$$=-C_1(A_2\cos\theta+B_2\sin\theta)t-C_2(A_1\cos\theta+B_1\sin\theta)t,$$

即 $2(A_1x+B_1y)(A_2x+B_2y)+C_1(A_2x+B_2y)+C_2(A_1x+B_1y)=0$. 此即所求的轨迹方程.

(2) $\because\ OP^2=OR\cdot OS,\quad \therefore\ t^2=t_1\cdot t_2\cdots④.$

①×②，并以 ④ 代入得

$$(A_1\cos\theta+B_1\sin\theta)(A_2\cos\theta+B_2\sin\theta)t^2=C_1C_2,$$

即 $(A_1x+B_1y)(A_2x+B_2y)=C_1C_2$. 此即所求的轨迹方程.

378. 过定点 O 的动直线与两已知直线分别交于 R、S 两点，P 为此动直线上的点，且满足 $\dfrac{2}{OP}=\dfrac{1}{OR}+\dfrac{1}{OS}$. 求点 P 的轨迹方程.

[解] 取 O 为原点，过 O 的任意两互相垂直的直线为坐标轴建立坐标系，设两已知直线的方程分别为 l_1: $A_1x+B_1y+C_1=0$, l_2: $A_2x+B_2y+C_2=0$. 设 $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP})=\theta$, $OP=t$, $OR=t_1$, $OS=t_2$, 则直线 OP 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\theta\\ y=t\sin\theta\end{cases}\cdots①$; 点 R 和点 S 的坐标分别为 $(t_1\cos\theta, t_1\sin\theta)$ 和 $(t_2\cos\theta, t_2\sin\theta)$. ∵ 点 R 和点 S 分别在直线 l_1 和 l_2 上，∴ $A_1t_1\cos\theta+B_1t_1\sin\theta+C_1=0$, $A_2t_2\cos\theta+B_2t_2\sin\theta+C_2=0$; 即 $(A_1\cos\theta+B_1\sin\theta)t_1=-C_1\cdots②$, $(A_2\cos\theta+B_2\sin\theta)t_2=-C_2\cdots③$. 显然 $C_1\neq0$, 否则 $(A_1\cos\theta+B_1\sin\theta)t_1=0$, 但 $t_1=OR\neq0$, ∴ $A_1\cos\theta+B_1\sin\theta=0$, 从而 t_1 有无穷多

解，与直线 OP 和 l_1 相交矛盾. 同理，$C_2\neq0$. 故由 ②、③ 可得

$$\frac{1}{t_1}=\frac{A_1\cos\theta+B_1\sin\theta}{-C_1},\quad \frac{1}{t_2}=\frac{A_2\cos\theta+B_2\sin\theta}{-C_2}.$$

$$\because\quad \frac{2}{OP}=\frac{1}{OR}+\frac{1}{OS},\quad 即\quad \frac{2}{t}=\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}.$$

$$\therefore\quad \frac{2}{t}=-\frac{A_1\cos\theta+B_1\sin\theta}{C_1}-\frac{A_2\cos\theta+B_2\sin\theta}{C_2}.$$

去分母，得 $C_2(A_1\cos\theta+B_1\sin\theta)t+C_1(A_2\cos\theta+B_2\sin\theta)t+2C_1C_2=0$. 以 ① 代入即得所求的轨迹方程

$$(A_1C_2+A_2C_1)x+(B_1C_2+B_2C_1)y+2C_1C_2=0.$$

879. 一定角绕顶点 O 旋转，其边与一定直线交于 A、B 两点，求 $\triangle OAB$ 的外心 M 的轨迹.

［分析］ 当定角旋转到一定位置时，它和定直线的交点 A、B 也随之而定. 所以在建立坐标系后，$\triangle OAB$ 的外心坐标可用点 A、B 的坐标表示. 利用 $\angle AOB$ 为定角这一条件消去在假设点 A、B 坐标时引入的参数，即可得到轨迹方程.

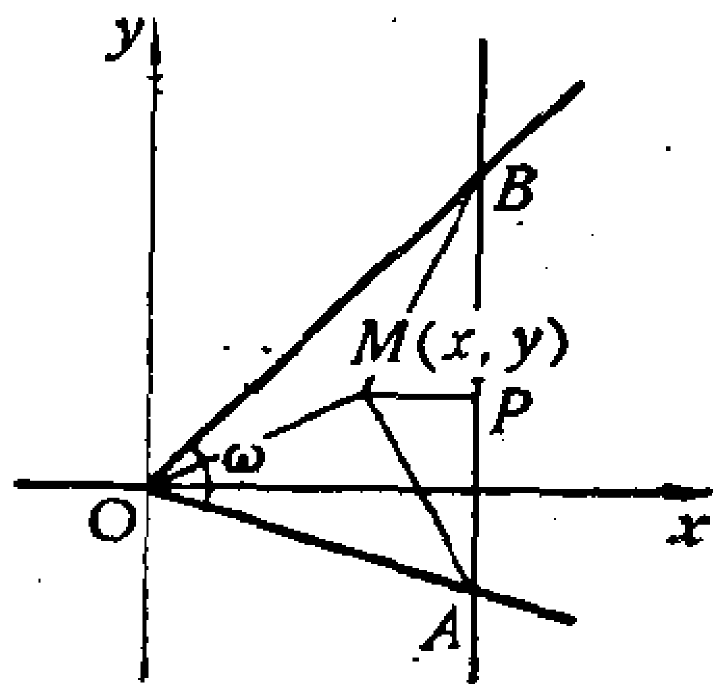


图 1

［解］ 以定角的顶点 O 为原点，过 O 且平行于定直线的直线为 y 轴建立坐标系如图 1. 并令定角 $\angle AOB=\omega$, 定直线的方程为 $x=p$. 设 $\triangle OAB$ 的外心为 $M(x, y)$. 连结 M 和线段 AB 的中点 P, 则 $MP\perp AB$. 若设点 A、B 的坐标分别为 (p, λ) 和 (p, μ). 则点 P 的坐标为 $\left(p, \dfrac{\lambda+\mu}{2}\right)$. $\therefore y=\dfrac{\lambda+\mu}{2}$, 即 $\lambda+\mu=2y\cdots$①. 连 OM、AM, 显然 $|OM|=|AM|$, 故得 $x^2+y^2=(x-p)^2+(y-\lambda)^2\cdots$②. 又 $\because$ 点 M 是 $\triangle OAB$ 的外心，$\therefore$ 当 $\omega=\dfrac{\pi}{2}$ 时，点 M 重合于点 P, 显然此时点 M 的轨迹即为直线 AB. 当 $0<\omega<\dfrac{\pi}{2}$ 时，点 M 在直线 AB 的左方，$\because \angle AOB=\dfrac{1}{2}\angle AMB=\angle AMP$, $\therefore \angle AMP=\omega$. 又 $|MP|=p-x$, 而 $|AP|=\dfrac{\lambda+\mu}{2}-\lambda=\dfrac{\mu-\lambda}{2}$, $\therefore \operatorname{tg}\omega=\dfrac{|AP|}{|MP|}=\dfrac{\mu-\lambda}{2(p-x)}$, 即 $\mu-\lambda=2(p-x)\operatorname{tg}\omega\cdots$③. 解 ①、③ 得 $\lambda=y-(p-x)\operatorname{tg}\omega$. 代入 ②，并化简得 $x^2+y^2=(x-p)^2\sec^2\omega$,

即 $x^2\sin^2\omega-y^2\cos^2\omega-2px+p^2=0\cdots④$. ∵ 点 M 恒在直线 AB 的左方，∴ $x<p$. 故所求的轨迹为双曲线④在直线 AB 左方的一支. 当 $\frac{\pi}{2}<\omega<\pi$ 时，点 M 在直线 AB 的右方(图2). 此时有 $\angle AOB+\angle AMP=\pi$, ∴ $\angle AMP=\pi-\omega$. 而 $|MP|=x-p$, ∴ $\operatorname{tg}(\pi-\omega)=\frac{|AP|}{|MP|}=\frac{\mu-\lambda}{2(x-p)}$，故仍有 $\operatorname{tg}\omega=\frac{\mu-\lambda}{2(p-x)}$，即③仍成立. 同 $0<\omega<\frac{\pi}{2}$ 时一样，④式依旧成立. 但由于点 M 恒在直线 AB 的右方，∴ $x>p$. 此时所求的轨迹为双曲线④在直线 AB 右方的一支.

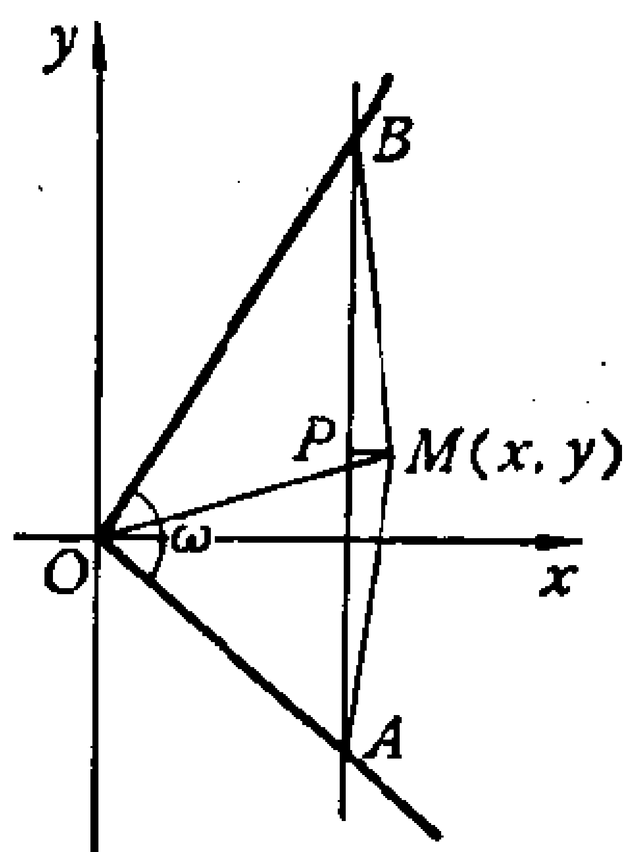


图 2

380. 在 $\triangle OAB$ 中，$\angle AOB=\alpha(\alpha<90^\circ)$，从点 M 引 OA 的垂线 MP, OB 的垂线 MQ, P、Q 是垂足. H 是 $\triangle OPQ$ 的垂心. 求点 H 在下列情况下的轨迹: (1) 点 M 在线段 AB 上移动; (2) 点 M 在 $\triangle OAB$ 的内部和边界上(除点 O 外)移动.

［分析］ (1) 不难看出四边形 $HQMP$ 为一平行四边形，利用垂心的定义和平行四边形对角线互相平分的性质，将点 M 的坐标用动点 H 的坐标表示，然后根据 A、M、B 共线即可解得.

(2) 将点 M 看成在与 AB 平行的一组直线上，即将 AB 向 O 点平行移动，用上述思考方法即可得解.

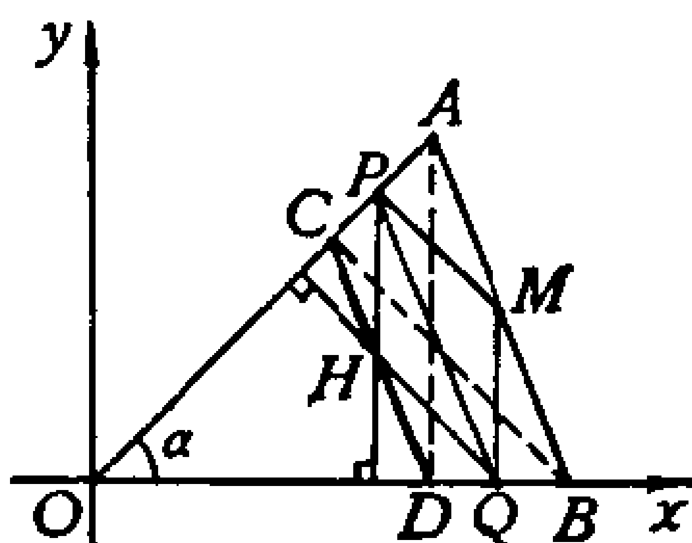


图 1

［解一］ (1) 以 O 为原点，OB 为 x 轴建立直角坐标系(图1). 并令点 A 的坐标为 $(a, am)(m=\operatorname{tg}\alpha)$，点 B 的坐标为 $(b, 0)$，显然 $am>0$. 设点 H 的坐标为 (x, y)，则点 P 的坐标可设为 (x, mx). 又设点 Q 的坐标为 $(u, 0)$，则点 M 的坐标可设为 (u, v). ∵ 四边形 $HQMP$ 为平行四边形，根据平行四边形对角线互相平分，可得 $\frac{mx+0}{2}=\frac{y+v}{2}$, ∴ $v=mx-y$. 又 ∵ $MP\perp OA$, ∴ $\frac{v-mx}{u-x}=-\frac{1}{m}$, ∴ $u=x+my$. 故点 M 的坐标为 $(x+my, mx-y)$. ∵ A、M、B 三点共线，

$$\therefore \begin{vmatrix} a & am & 1 \\ x+my & mx-y & 1 \\ b & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

即　$bmx+(a-b+am^2)y-abm=0\cdots$①．　由于点 M 在线段 AB 上，$\therefore 0\leqslant mx-y\leqslant am$．即 $\begin{cases} y\leqslant mx \\ y\geqslant m(x-a). \end{cases}$ 故所求的轨迹为直线①夹在两平行线 $y=mx$ 和 $y=m(x-a)$ 间的一段．

(2) 当点 M 在 $\triangle OAB$ 内部时，过点 $M(x+my,\ mx-y)$ 作 AB 的平行线分别交 OA、OB 于 A'、B'(图 2)．因点 M 在 $\triangle OAB$ 内部或边界上，故可设点 B' 的坐标为 $(tb,\ 0)(0<t\leqslant 1)$，则点 A' 的坐标为 $(ta,\ tam)$．利用 A'、M、B' 三点共线，可得方程：$bmx+(a-b+am^2)y-abmt=0$，且 $\begin{cases} y\leqslant mx \\ y\geqslant m(x-at). \\ 0<t\leqslant 1 \end{cases}$ 即所求轨迹为动直线 $C'D'$．当 t 在 $(0,\ 1]$ 中连续变化时，点 H 的轨迹为图 1 中的 $\triangle OCD$，包括其内部和除点 O 外的边界．

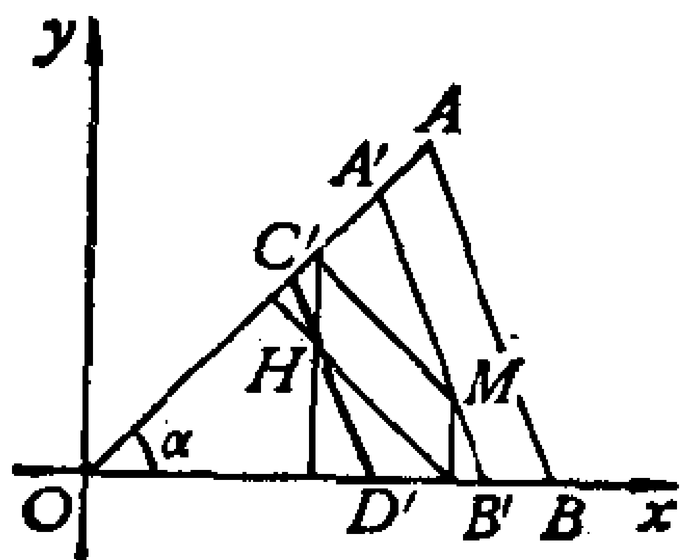


图 2

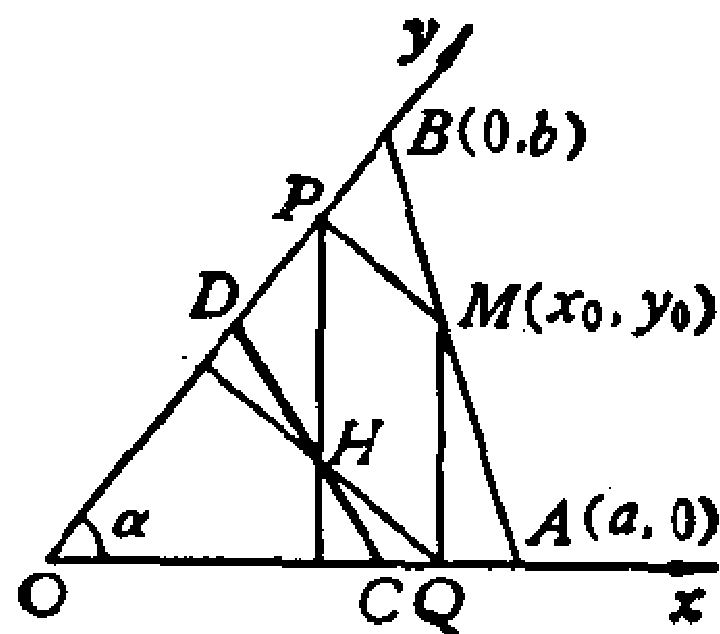


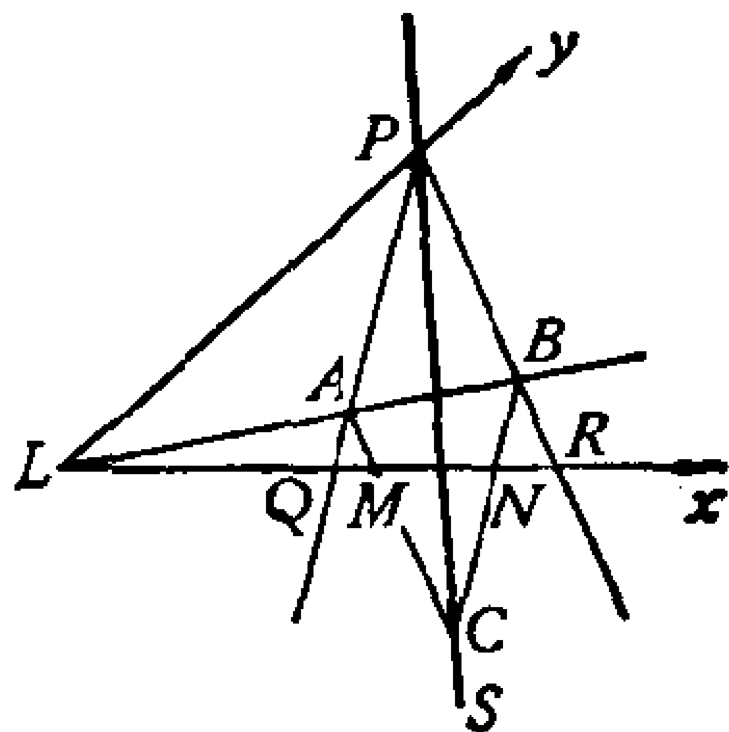
图 3

［解二］ (1) 取 OA、OB 所在直线为 x、y 轴，建立斜坐标系(图 3)．设 A、B 的坐标分别为 $(a,\ 0)$、$(0,\ b)$，线段 AB 上任意一点 M 坐标为 (x_0, y_0)，则 P、Q 两点的坐标分别为：$(0,\ y_0+x_0\cos\alpha)$、$(x_0+y_0\cos\alpha,\ 0)$．设相应 $\triangle OPQ$ 的垂心 H 坐标为 $(x,\ y)$．$MQHP$ 是平行四边形，其对角线互相平分，$\therefore x+x_0=x_0+y_0\cos\alpha$，$y+y_0=y_0+x_0\cos\alpha$；即 $x=y_0\cos\alpha\cdots$①，$y=x_0\cos\alpha\cdots$②．$\because M$ 在线段 AB 上，$\therefore \frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}=1\cdots$③．从①、②、③消去 x_0、y_0，即得垂心 H 的轨迹为 $\frac{x}{b\cos\alpha}+\frac{y}{a\cos\alpha}=1$．无论 $\angle ABO$ 是

锐角或钝角，由于 α 是锐角，点 M 在线段 AB 上，故必在第一象限．轨迹为以 $(b\cos\alpha,\ 0)$、$(0,\ a\cos\alpha)$ 为端点的线段 CD.

(2) 假设同(1)．∵ 点 M 在 $\triangle OAB$ 内部和边界上(点 O 除外)移动，过 M 必存在一与 AB 平行的直线，∴ 点 M 可看作在与 AB 平行的直线系上：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\lambda(0<\lambda\leqslant 1)$．从上面 ①、② 得 $\begin{cases} x_0=\dfrac{y}{\cos\alpha} \\ y_0=\dfrac{x}{\cos\alpha}. \end{cases}$ ∴ $\frac{x}{b\cos\alpha}+\frac{y}{a\cos\alpha}=\lambda$．轨迹为以 $C'(\lambda b\cos\alpha,\ 0)$ 和 $D'(0,\ \lambda a\cos\alpha)$ 为端点的线段．当 λ 在 $(0,\ 1]$ 中连续变化时，线段 $C'D'$ 自点 O 向 CD 平行移动．∴ 点 H 的轨迹为 $\triangle OCD$ 的内部，包括除点 O 以外的边界.

381．$\triangle ABC$ 的两顶点 A、B 在两定直线 PQ、PR 上滑动，三边分别经过一直线上的三定点 L、M、N，求第三顶点 C 的轨迹.



［解］ 取 LN 为 x 轴，LP 为 y 轴，建立斜坐标系．各点坐标分别为：$L(0,0)$、$M(\alpha,0)$、$N(\beta,0)$、$P(0,\ b)$、$Q(a,\ 0)$、$R(c,\ 0)$．设直线 LAB 的方程为 $y=\lambda x$，λ 为参数．点 A 为直线 $y=\lambda x$ 与 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 的交点 $\left(\frac{ab}{b+a\lambda},\ \frac{ab\lambda}{b+a\lambda}\right)$；点 B 为直线 $y=\lambda x$ 与 $\frac{x}{c}+\frac{y}{b}=1$ 的交点 $\left(\frac{cb}{b+c\lambda},\ \frac{cb\lambda}{b+c\lambda}\right)$．∴ AC 的方程为

$$\frac{y-0}{\dfrac{ab\lambda}{b+a\lambda}}=\frac{x-\alpha}{\dfrac{ab}{b+a\lambda}-\alpha},$$

即
$$ab\lambda(x-\alpha)-[ab-\alpha(b+a\lambda)]y=0,$$
$$[ab(x-\alpha)+a\alpha y]\lambda=b(a-\alpha)y\cdots①.$$

BC 的方程为
$$\frac{y-0}{\dfrac{bc\lambda}{b+c\lambda}}=\frac{x-\beta}{\dfrac{bc}{b+c\lambda}-\beta},$$

即
$$bc\lambda(x-\beta)-[bc-\beta(b+c\lambda)]y=0,$$
$$[bc(x-\beta)+c\beta y]\lambda=b(c-\beta)y\cdots②.$$

从①、② 消去λ，即得点C轨迹的斜坐标方程

$$(a-\alpha)[bc(x-\beta)+c\beta y]=(c-\beta)[ab(x-\alpha)+a\alpha y],$$

即 $b(a\beta-c\alpha)x+[\alpha\beta(a-c)-ac(\alpha-\beta)]y-b[\alpha\beta(a-c)-ac(\alpha-\beta)]=0.$

$\therefore$ 第三顶点C的轨迹为过点$P(0, b)$的一条直线PS.

［说明］ (1) 本题也可取三定点L、M、N连线为x轴，点P在x轴上射影O为原点，建立直角坐标来解，但过程较繁.

(2) 本题的逆命题："如果$\triangle ABC$三顶点A、B、C分别在三直线PQ、PR、PS上移动，且两边CA、BC各过定点M、N，则第三边AB必过一定点(L)."也成立. 可取PQ、PS为坐标轴建立斜坐标系，设PR的方程为$y=kx$，点B的坐标为$(\lambda, k\lambda)$，λ为参数，然后求出AB的方程加以证明.

第四章　圆

1. 圆的标准方程:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2.$$

圆心: $C(x_0, y_0)$, 　半径: r. 　　(4.10)

参数方程: $\begin{cases} x=x_0+r\cos\theta \\ y=y_0+r\sin\theta, \end{cases}$ θ 为参数. 　　(4.11)

2. 圆心在原点的圆方程:

$$x^2+y^2=r^2.$$

圆心 $O(0, 0)$, 　半径: r. 　　(4.20)

(1) 参数方程:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta, \end{cases} \quad \theta \text{ 为参数}. \tag{4.21}$$

(2) 切点为 (x_1, y_1) 的切线方程:

$$x_1x+y_1y=r^2. \tag{4.22}$$

(3) 切点为 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 的切线方程:

$$x\cos\theta+y\sin\theta=r. \tag{4.23}$$

(4) 已知斜率 k 的切线方程:

$$y=kx\pm r\sqrt{1+k^2}. \tag{4.24}$$

*(5) 切点弦: 自点 (x_0, y_0) 引曲线的两切线, 其切点的连线称为点 (x_0, y_0) 关于此曲线的切点弦.

点 (x_0, y_0) 关于圆的切点弦方程:

$$x_0x+y_0y=r^2. \tag{4.25}$$

*(6) 极与极线：设过点 $P_0(x_0, y_0)$ 的动直线与二次曲线有两个交点，二次曲线在此两点的切线交点的轨迹称为点 P_0 关于二次曲线的极线，P_0 称为此极线的极.

点 (x_0, y_0) 关于圆的极线方程(见第 418 题)：

$$x_0x+y_0y=r^2. \tag{4.26}$$

3. 圆的一般方程：

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

$$\text{圆心：} C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right), \quad \text{半径：} r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}. \tag{4.30}$$

$\Delta=D^2+E^2-4F$. 当 $\Delta>0$ 时，方程表示实圆；$\Delta=0$ 时，表示点圆；$\Delta<0$ 时，表示虚圆(无轨迹).

(1) 切点为 (x_1, y_1) 的切线方程：

$$x_1x+y_1y+D\left(\frac{x+x_1}{2}\right)+E\left(\frac{y+y_1}{2}\right)+F=0. \tag{4.31}$$

(2) 自 $P_0(x_0, y_0)$ 引圆之切线，切点为 P_1，切线长：

$$|P_0P_1|=\sqrt{x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F}. \tag{4.32}$$

***4. 根轴与共轴圆系：**

到两不同心的已知圆 $x^2+y^2+D_ix+E_iy+F_i=0\ (i=1, 2)$ 的切线长相等的点的轨迹称为此两圆的根轴. 共根轴的圆系称为共轴圆系. 共轴圆系的方程为

$$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0. \tag{4.40}$$

其中 λ 为不等于 -1 的任意常数，此圆系中不包括第二个圆. 当 $\lambda=-1$ 时为根轴方程.

当两圆相交时，(4.40)表示过两圆交点的圆系；当两圆相切

时，(4.40)表示过两圆切点且与它们相切于该点的圆系.

(1) 根轴方程：

$$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0. \qquad (4.41)$$

(2) 以 y 轴为根轴、圆心在 x 轴上的共轴圆系方程：

$$x^2+y^2-2\lambda x+F=0 \quad (\lambda \text{ 为任意常数}). \qquad (4.42)$$

5. 圆的极坐标方程(见第406题)：

(1) 一般式：$\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)+a^2=r^2$.

圆心：$C(a, \alpha)$，半径：r. (4.51)

(2) $\rho=2a\cos(\theta-\alpha)$.

圆心：$C(a, \alpha)$，半径：$|a|$. (4.52)

§1. 圆的方程

382. 已知圆在 x 轴上截距为 a、b，在 y 轴上一截距为 $c(c\neq 0)$，求此圆的方程.

[分析一] 圆的一般方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，它在 x 轴上的截距 a、b 是方程 $x^2+Dx+F=0$ 的根，在 y 轴上一截距 c 是方程 $y^2+Ey+F=0$ 的根，从而可求出 D、E、F.

[解一] 设所求的圆方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$. ∵ 此圆在 x 轴上的截距为 a、b，∴ a、b 是方程 $x^2+Dx+F=0$ 的两个根，据韦达定理得：$D=-(a+b)$，$F=ab$. ∵ 此圆在 y 轴上一截距为 c，即过点 $(0, c)$，∴ $c^2+cE+F=0$，故 $E=-\dfrac{c^2+F}{c}=-\dfrac{c^2+ab}{c}$. 所求的圆方程为

$$x^2+y^2-(a+b)x-\left(c+\frac{ab}{c}\right)y+ab=0.$$

[分析二] 因为此圆过 $A(a, 0)$、$B(b, 0)$、$C(0, c)$，故圆心在 AB、AC 的中垂线上，由此可求得圆心坐标与半径.

[解二] ∵ 圆过点 $A(a, 0)$、$B(b, 0)$、$C(0, c)$，∴ 圆心在 AB、AC

的中垂线上，即为直线 $x=\dfrac{a+b}{2}\cdots$① 与 $y-\dfrac{c}{2}=\dfrac{a}{c}\left(x-\dfrac{a}{2}\right)\cdots$② 的交点.
解方程①与②，得圆心坐标为$\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{c^2+ab}{2c}\right)$，半径 $r^2=\left(\dfrac{a+b}{2}-a\right)^2+\left(\dfrac{c^2+ab}{2c}\right)^2$. 故所求圆方程为 $\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{c^2+ab}{2c}\right)^2=\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{c^2+ab}{2c}\right)^2$，即 $x^2+y^2-(a+b)x-\left(c+\dfrac{ab}{c}\right)y+ab=0$.

[说明] 求圆的方程，一般有三种方法：(1) 利用圆的一般方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，根据所给条件确定 D、E、F；(2) 利用圆的标准方程 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$，根据条件求出圆心坐标 (x_0, y_0) 与半径 r；(3) 写出满足两个已知条件的圆系方程，利用第三个条件，求出待定常数的值.

383. 求过原点，在 x、y 轴上截距分别为 a、b 的圆方程 $(a\neq 0,\ b\neq 0)$.

[解] 因所求的圆过原点，故可设其方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey=0$. 又 $\because$ 此圆过 $(a,\ 0)$、$(0,\ b)$ 两点，$\therefore a^2+Da=0,\ b^2+Eb=0$. $\because a\neq 0,\ b\neq 0$, $\therefore D=-a,\ E=-b$. 故所求的圆方程为 $x^2+y^2-ax-by=0$.

384. 求与圆 $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ 同心，且过点 $(-1,\ 1)$ 的圆方程.

[解] 圆 $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ 的圆心为 $(2,\ -3)$. 设所求的圆为 $(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$. $\because$ 此圆过 $(-1,\ 1)$，$\therefore$ $r^2=(-1-2)^2+(1+3)^2=25$. 故所求的圆方程为 $(x-2)^2+(y+3)^2=25$.

[说明] 若所给条件涉及圆心或半径，在假设圆方程时常采用标准方程.

385. 求以 $A(x_1,\ y_1)$、$B(x_2,\ y_2)$ 为直径两端点的圆方程.

[解] 因为以 $A(x_1,\ y_1)$、$B(x_2,\ y_2)$ 为直径两端点的圆的圆心即为线段 AB 的中点，故所求圆的圆心是 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$，而半径长为 $\dfrac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$. 则所求的圆方程为

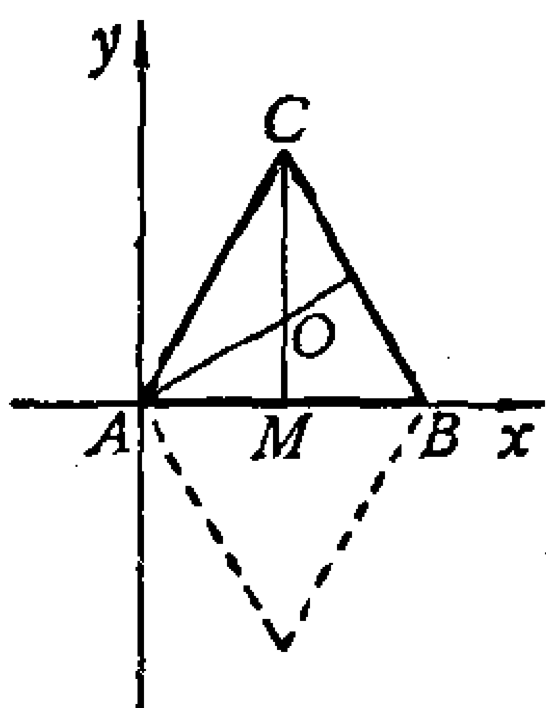
$$\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2=\frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{4},$$

即
$$x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y+x_1x_2+y_1y_2=0.$$

化简得 $$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$$

[说明] 本题结论即第444题中 $k=0$ 时的形式.

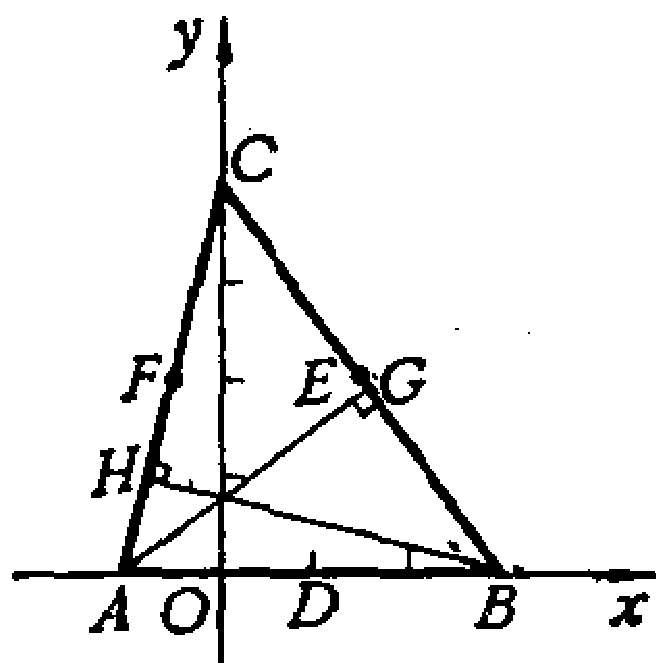
386. 正△ABC 的一边长为 a, 以 A 为原点, $\overrightarrow{AB}$ 为 x 轴正方向建立直角坐标系, 求△ABC 的外接圆方程.



[解] 根据题意建立坐标系如图, 则点 A、B、C 的坐标分别为 $(0,\ 0)$、$(a,\ 0)$、$\left(\frac{a}{2},\ \frac{\pm\sqrt{3}}{2}a\right)$. 作 $CM\perp AB$, 交 AB 于 M. 点 O 分线段 MC 为 $MO:OC=1:2$, 则点 O 即为外接圆的圆心, $|OC|$ 等于外接圆半径. ∵ $|OM|=\frac{\sqrt{3}}{6}a$, ∴ 点 O 的坐标为 $\left(\frac{a}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)$, $|OC|=\frac{\sqrt{3}}{3}a$. 故△ABC 的外接圆方程为 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y\pm\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2=\frac{a^2}{3}$, 即

$$3x^2+3y^2-3ax\pm\sqrt{3}ay=0.$$

387. 已知三点 $A(-1,\ 0)$、$B(3,\ 0)$、$C(0,\ 4)$. 求△ABC 的中点三角形(连接三角形三边中点所得的三角形)和垂足三角形的外接圆方程.



[解] 设△ABC 的中点三角形外接圆方程为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

∵ 边 AB 的中点 $D(1,\ 0)$、BC 的中点 $E\left(\frac{3}{2},2\right)$、$AC$ 的中点 $F\left(-\frac{1}{2},\ 2\right)$ 均在此圆上, ∴ $$\begin{cases} D\qquad\quad +F=-1 \\ \frac{3}{2}D+2E+F=-\frac{9}{4}-4 \\ -\frac{1}{2}D+2E+F=-\frac{1}{4}-4. \end{cases}$$

解此方程组, 得 $D=-1$, $E=-\frac{19}{8}$, $F=0$. 故△ABC 的中点三角形外接圆方程为 $x^2+y^2-x-\frac{19}{8}y=0$. 又设△$ABC$ 的垂足三角形外接圆方程为 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$. 由于直线 BC 的方程为 $4x+3y=12\cdots$①, 故 BC 边上的高 AG 所在的直线方程为 $3x-4y=-3\cdots$②. 解①、②, 得垂

足G的坐标为$\left(\frac{39}{25}, \frac{48}{25}\right)$. 同理解得垂足$H$的坐标为$\left(-\frac{13}{17}, \frac{16}{17}\right)$. 另一垂足即为原点$O(0, 0)$. ∵ O、G、H在所求的圆上, ∴ $f=0$, 且

$$\begin{cases} \frac{39}{25}d+\frac{48}{25}e=-\left(\frac{39}{25}\right)^2-\left(\frac{48}{25}\right)^2 \\ -\frac{13}{17}d+\frac{16}{17}e=-\left(-\frac{13}{17}\right)^2+\left(\frac{16}{17}\right)^2. \end{cases}$$

解此方程组,得$d=-1$, $e=-\frac{19}{8}$. 故$\triangle ABC$的垂足三角形外接圆方程为$x^2+y^2-x-\frac{19}{8}y=0$.

[说明] 由本题可知, $\triangle ABC$的中点三角形和垂足三角形的外接圆相同,故三中点及三垂足六点共圆. 此结论对任何三角形都成立.

388. 求证: $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$ 为过不共线的三点(x_1, y_1)、(x_2, y_2)、(x_3, y_3)的圆方程.

[分析] 显然三点的坐标都满足方程, 故只需证明给出的方程中不含xy项,且x^2和y^2的系数相等但不为零即可.

[证] 将原方程左端按第一行展开,得

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}(x^2+y^2)-\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\cdot x$$
$$+\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}\cdot y-\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}=0.$$

由于(x_1, y_1)、(x_2, y_2)、(x_3, y_3)不共线,可知$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$,故此方程为圆方程. 又当$x=x_i$, $y=y_i$时$(i=1, 2, 3)$, 原方程的左端为零. 故原方程为过不共线的三点(x_1, y_1)、(x_2, y_2)、(x_3, y_3)的圆方程.

389. 求过点 $A(2,\ -1)$，和直线 $x-y=1$ 相切，且圆心在直线 $y=-2x$ 上的圆方程.

［解］ 由于所求圆的圆心在直线 $y=-2x$ 上，故设此圆方程为 $(x-a)^2+(y+2a)^2=r^2$. ∵ 此圆过已知点 $A(2,\ -1)$，∴ $(2-a)^2+(-1+2a)^2=r^2\cdots$①. 又因圆和直线 $x-y=1$ 相切，∴ $\dfrac{|a+2a-1|}{\sqrt{2}}=r$，即 $(3a-1)^2=2r^2\cdots$②. 由①、②得 $(3a-1)^2=2[(2-a)^2+(-1+2a)^2]$，即 $a^2-10a+9=0$，∴ $a=1$ 或 $a=9$. 代入②，得 $r^2=2$ 或 $r^2=338$. 故所求的圆方程为

$$(x-1)^2+(y+2)^2=2 \quad 或 \quad (x-9)^2+(y+18)^2=338.$$

390. 求过原点且与直线 $x=1$ 及圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 相切的圆方程.

［解］ 设所求的圆方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$. ∵ 此圆过原点，∴ $a^2+b^2=r^2\cdots$①. 又 ∵ 此圆与直线 $x=1$ 及圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 相切，∴ $(a-1)^2=r^2\cdots$②，$(a-1)^2+(b-2)^2=(r\pm1)^2\cdots$③. 由①、②得 $a^2+b^2=(a-1)^2$，即 $a=\dfrac{1-b^2}{2}\cdots$④. ①－③，得 $a+2b=2\pm r\cdots$⑤. 又由②得 $\pm r=a-1\cdots$⑥，⑥代入⑤，得 $a+2b=2\pm(a-1)$. 当取“+”号时，得 $b=\dfrac{1}{2}$. 从而得 $a=\dfrac{3}{8}$，$r^2=\dfrac{25}{64}$；当取“−”号时，得 $a=\dfrac{3-2b}{2}$. 代入④，得 $b^2-2b+2=0$，方程无实根. 故所求的圆方程为

$$\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{64}.$$

391. 求圆心在直线 $5x-3y=8$ 上，又与坐标轴相切的圆方程.

［分析］ 与两坐标轴相切的圆，其圆心必在直线 $x\pm y=0$ 上，而其半径长等于纵坐标或横坐标的绝对值. 由此，再利用题设圆心在直线 $5x-3y=8$ 上，即可求得圆心坐标和半径长.

［解一］ ∵ 所求圆与两坐标轴相切. ∴ 其圆心必在直线 $x\pm y=0$ 上，解方程组 $\begin{cases}5x-3y=8\\ x\pm y=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=4\\ y=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1\\ y=-1.\end{cases}$ 故所求的圆方程为

$$(x-4)^2+(y-4)^2=16, \quad 或 \quad (x-1)^2+(y+1)^2=1,$$

［解二］ 设圆方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. ∵ 此圆和x、y轴均相切，∴ $a^2=b^2=r^2$…①. 又∵ 圆心在直线$5x-3y=8$上，∴ $5a=3b+8$…②. ②代入①，并化简得$b^2-3b-4=0$，∴ $b=4$，或$b=-1$. 代入②，得$a=4$，或$a=1$. 代入①，得$r^2=16$，或$r^2=1$. 故所求的圆方程为

$$(x-4)^2+(y-4)^2=16, \quad 或 \quad (x-1)^2+(y+1)^2=1.$$

392. **求圆心为(2, 1)，且与已知圆$x^2+y^2-3x=0$的公共弦所在直线过点(5, −2)的圆的方程.**

［解］ 设所求圆的方程为$(x-2)^2+(y-1)^2=r^2$. 即$x^2+y^2-4x-2y+5-r^2=0$…①. 已知圆的方程为$x^2+y^2-3x=0$…②，故②−①，即得它们公共弦所在的直线为$x+2y-5+r^2=0$. 又∵ 此直线过点(5, −2)，∴ $5-4-5+r^2=0$，$r^2=4$. 故所求圆的方程为$(x-2)^2+(y-1)^2=4$.

［说明］ 求两相交圆的公共弦所在的直线方程，只要将这两圆的方程相减，但并非任意两圆的方程相减所得的一次方程即为此两圆的公共弦所在的直线方程，因为任给的两圆未必相交.

393. **在直角坐标系中，求与y轴正半轴相切，且与直线$4x-3y+1=0$切于纵坐标为3的点的圆方程.**

［解］ 以$y=3$代入方程$4x-3y+1=0$，得$x=2$，即所求圆与直线$4x-3y+1=0$切于点(2, 3). 设此圆的圆心为(a, b)，半径为r，∵ 圆与y轴切于正半轴，∴ $b>0$. 且$a^2=r^2$…①. 又点(2, 3)为切点. ∴ $(2-a)^2+(3-b)^2=r^2$…②. 且$\frac{|4a-3b+1|}{5}=r$，即$(4a-3b+1)^2=25r^2$…③. 解①、②、③联立方程，并考虑$b>0$的条件，得$a=\frac{10}{9}$，$b=\frac{11}{3}$，$r^2=\left(\frac{10}{9}\right)^2$. 故所求的圆方程为

$$\left(x-\frac{10}{9}\right)^2+\left(y-\frac{11}{3}\right)^2=\left(\frac{10}{9}\right)^2, \quad 即 \quad 9x^2+9y^2-20x-66y+121=0.$$

394. **求与圆C: $x^2+y^2-4x-2y-4=0$及直线$y=0$都相切，且半径为4的圆方程.**

［分析］ 因所求圆与直线$y=0$相切，故其半径即为圆心纵坐标的绝对值. 又利用相切两圆的半径与圆心距的关系，即可求得圆心的横坐标，从而求出圆方程.

［解］ 设所求圆的圆心坐标为(a, b). ∵此圆和直线$y=0$相切，∴$|b|=4\cdots$①. 又与圆C相切，而圆C的圆心为$(2, 1)$，半径长为3. ∴$\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2}=(4\pm3)$，即$(a-2)^2+(b-1)^2=49\cdots$② 或$(a-2)^2+(b-1)^2=1\cdots$③. 由①得$b=\pm4$. 当$b=4$时，代入②，得$a=2\pm2\sqrt{10}$;代入③,得$(a-2)^2=-8$,无实根. 当$b=-4$时,代入②,得$a=2\pm2\sqrt{6}$;代入③,得$(a-2)^2=-24$，无实根. 故所求的圆方程为

$$(x-2-2\sqrt{10})^2+(y-4)^2=16,\quad (x-2+2\sqrt{10})^2+(y-4)^2=16,$$
$$(x-2-2\sqrt{6})^2+(y+4)^2=16,\quad (x-2+2\sqrt{6})^2+(y+4)^2=16.$$

395. 求半径为10，且与两直线$4x-3y=10$和$6x+8y=35$相切的圆方程.

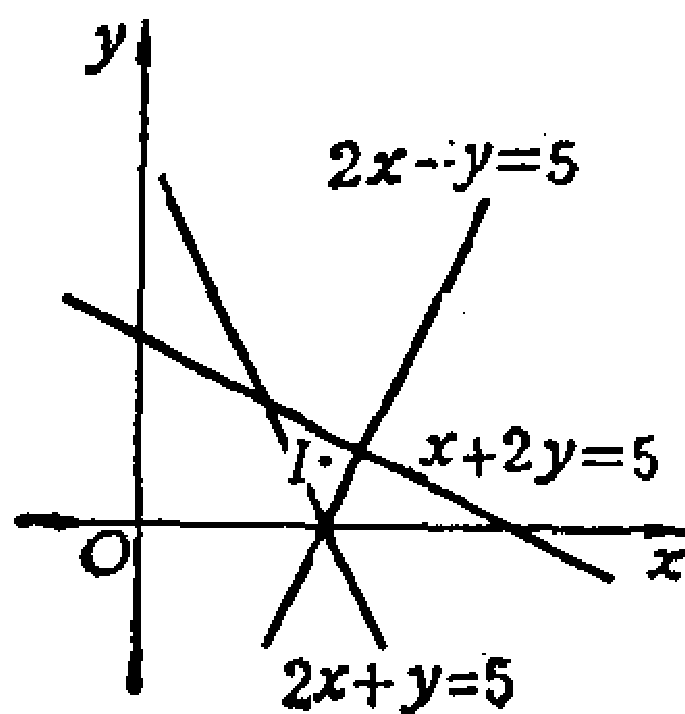
［解］ 设所求圆的圆心为(a, b). ∵此圆和两直线$4x-3y=10$，$6x+8y=35$都相切，∴$\frac{|4a-3b-10|}{5}=10$，即$(4a-3b-10)^2=2500\cdots$①. 同时，$\frac{|6a+8b-35|}{10}=10$，即$(6a+8b-35)^2=100^2\cdots$②. 由①、②可得四个方程组：$\begin{cases}4a-3b=60\\6a+8b=135\end{cases}\cdots$③，$\begin{cases}4a-3b=60\\6a+8b=-65\end{cases}\cdots$④，$\begin{cases}4a-3b=-40\\6a+8b=135\end{cases}\cdots$⑤，$\begin{cases}4a-3b=-40\\6a+8b=-65\end{cases}\cdots$⑥. 解上述四方程组，可分别得解：

$$\begin{cases}a=17.7\\b=3.6,\end{cases}\begin{cases}a=5.7\\b=-12.4,\end{cases}\begin{cases}a=1.7\\b=15.6\end{cases}\text{和}\begin{cases}a=-10.3\\b=-0.4.\end{cases}$$

故所求圆有四个，即

$$(x-17.7)^2+(y-3.6)^2=100,\quad (x-5.7)^2+(y+12.4)^2=100,$$
$$(x-1.7)^2+(y-15.6)^2=100,\quad (x+10.3)^2+(y+0.4)^2=100.$$

396. 已知三角形的三边所在直线为：$x+2y=5$，$2x-y=5$，$2x+y=5$，求三角形的内切圆方程.



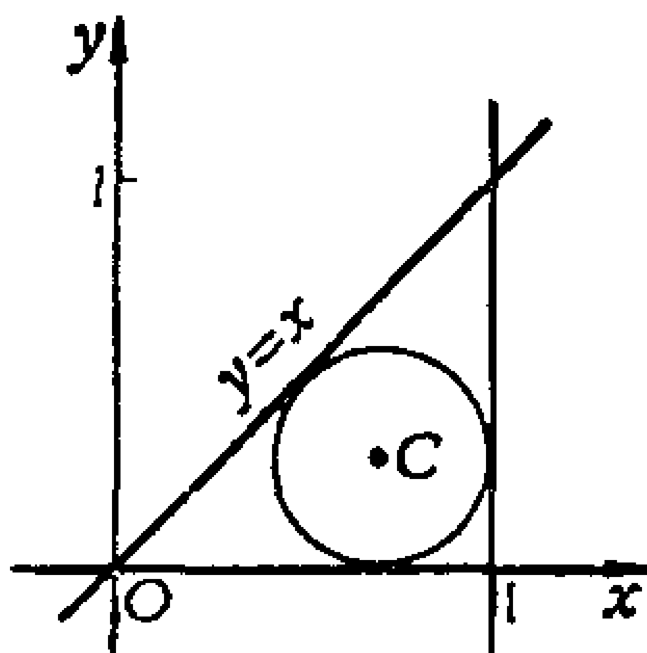
［分析］ 利用直线关于点的离差法则以及三角形内心到三边的距离都等于内切圆半径，即能求得内心坐标与半径长.

［解］ 设内切圆圆心为$I(a, b)$，半径长为r. ∵三角形的内心总在这三角形的内部，

$$\therefore\quad r=\frac{2a-b-5}{-\sqrt{5}}=\frac{2a+b-5}{+\sqrt{5}}=\frac{a+2b-5}{-\sqrt{5}}.$$

由 $2a-b-5=a+2b-5$，得 $a=3b\cdots$①. 由 $2a-b-5=-(2a+b-5)$，得 $a=\frac{5}{2}$. 代入①，得 $b=\frac{5}{6}$. $\therefore r=\dfrac{5+\frac{5}{6}-5}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{6}$. 故所求的内切圆方程为 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{5}{36}$.

397. 求由直线 $y=0$, $x=1$, $y=x$ 所交成的三角形的内切圆的方程.



［解］ 设所求圆的圆心为 $C(a, b)$，半径长为 r，则 $|b|=r\cdots$①，$|1-a|=r\cdots$②，$|a-b|=\sqrt{2}r\cdots$③. ∵ 圆心 C 在三直线围成的三角形内部，故由①得 $b=r\cdots$④，由②得 $1-a=r$，即 $a=1-r\cdots$⑤. ④、⑤代入③，得 $2r^2-4r+1=0$. $\therefore r=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$. 但当 $r=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ 时，$a<0$，点 C 不在三角形内部，故 $r=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. 代入④、⑤，得 $b=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$，$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故所求圆方程为

$$\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2.$$

［说明］ 本题若利用平几知识："直角三角形两直角边之和等于斜边与其内切圆直径之和"，则解法可简化.

398. 求与两直线 $x=1$, $y=2$ 相切，并过点(3, 4)的圆的方程.

［分析］ 由于所求圆和直线 $x=1$, $y=2$ 相切，故圆心到这两直线的距离应等于半径的长. 由此即可求得圆心的坐标和半径长的关系.

［解］ 设所求圆的圆心为 (a, b)，半径为 r. ∵ 此圆和直线 $x=1$, $y=2$ 相切，$\therefore (a-1)^2=r^2\cdots$①，$(b-2)^2=r^2\cdots$②. 又此圆过点(3, 4)，$\therefore (3-a)^2+(4-b)^2=r^2\cdots$③. 解联立方程①、②、③，得 $a=5\pm2\sqrt{2}$，$b=6\pm2\sqrt{2}$，$r^2=(4\pm2\sqrt{2})^2$. 故所求的圆方程为

$$(x-5\mp2\sqrt{2})^2+(y-6\mp2\sqrt{2})^2=(4\pm2\sqrt{2})^2.$$

399. 求与三已知圆 C_1: $(x-3)^2+(y-3)^2=1$, C_2: $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 及 C_3: $(x-4)^2+(y-1)^2=4$ 都外切的圆方程.

[分析] 运用定理:"两圆外切,圆心距等于两圆半径之和"即可得解.

[解] 设所求圆的圆心为(a, b),半径为 r. ∵ 此圆和圆 C_1、C_2、C_3 都外切. ∴ $(a-3)^2+(b-3)^2=(r+1)^2$…①, $(a-1)^2+(b-1)^2=(r+1)^2$…②, $(a-4)^2+(b-1)^2=(r+2)^2$…③. 解联立方程①、②、③, 得 $a=\frac{13}{7}$, $b=\frac{15}{7}$, $r=\frac{3}{7}$. 故所求的圆方程为 $\left(x-\frac{13}{7}\right)^2+\left(y-\frac{15}{7}\right)^2=\frac{9}{49}$.

400. 求过原点, 且与两已知圆 C_1: $x^2+y^2-6x+8y=0$, C_2: $x^2+y^2-2x-2y-7=0$ 直交的圆方程.

[分析] 两圆直交, 交点处的切线互相垂直, 故过每一交点的两圆半径和连心线组成一个直角三角形. 据此,便可求得所求圆的方程.

[解] 因所求圆过原点, 故可设其方程为 $x^2+y^2+2Dx+2Ey=0$. 其圆心为$(-D, -E)$,半径长为 $\sqrt{D^2+E^2}$. ∵ 所求圆和圆 C_1 直交,且圆 C_1 的圆心为 $(3, -4)$, 半径长为 5, ∴ $(-D-3)^2+(-E+4)^2=D^2+E^2+25$, 即 $6D-8E=0$…①. 同理可得 $2D+2E=7$…②. 由①、②解得: $D=2$, $E=\frac{3}{2}$. 故所求的圆方程为 $x^2+y^2+4x+3y=0$.

401. 求与三已知圆 C_1: $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$, C_2: $(x-b)^2+(y-a)^2=a^2$ 及 C_3: $(x-a-b-c)^2+y^2=ab+c^2$ 都直交的圆方程, $(a\neq b,\ c\neq 0)$.

[解] 设所求圆的方程为 $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$…①. ∵ 所求圆与圆 C_1 直交, ∴ $(m-a)^2+(n-b)^2=r^2+b^2$…②, 即 $m^2+n^2-2am-2bn=r^2-a^2$…③. 同理, 可得 $m^2+n^2-2bm-2an=r^2-b^2$…④ 和 $m^2+n^2-2(a+b+c)m=r^2-(a^2+b^2+ab+2ac+2bc)$…⑤. ③-⑤, 得 $2(b+c)m-2bn=(a+b)(b+2c)$…⑥. ④-⑤, 得 $2(a+c)m-2an=(a+b)(a+2c)$…⑦. 由⑥、⑦解得: $m=a+b$, $n=\frac{a+b}{2}$. 代入②,得 $r^2=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. 故由①可得所求的圆方程为 $[x-(a+b)]^2+\left(y-\frac{a+b}{2}\right)^2=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.

［说明］ 本题若将⑥、⑦中的 m、n 分别换以 x、y，则得 $2(b+c)x-2by=(a+b)(b+2c)$ 与 $2(a+c)x-2ay=(a+b)(a+2c)$. 此两方程为圆 C_1、C_3 和 C_2、C_3 的根轴方程. 点 (m, n) 就是两根轴的交点. 又从②式得 $r^2=(m-a)^2+(n-b)^2-b^2$. 对照圆 C_1 的方程，可知所求圆的半径长等于点 (m, n) 到圆 C_1 的切线长. 由此可见，和三已知圆直交的圆，其圆心即为任意两条根轴的交点，而半径长等于此点到任一已知圆的切线长.

402. 求与三已知圆 C_1: $x^2+y^2+2gx+c=0$, C_2: $x^2+y^2+2g'x+c=0$ 及 C_3: $x^2+y^2+2hx+2ky+a=0$ 直交的圆方程，$(g\neq g',\ k\neq 0,\ c>0)$.

［分析］ 由上题［说明］可知，只需求出圆 C_1、C_3 的根轴和圆 C_2、C_3 的根轴的交点，以及此点到任一圆的切线长，即可得所求的圆.

［解］ 圆 C_3 和 C_1 的方程相减，得 $2(h-g)x+2ky+a-c=0\cdots$①. 圆 C_3 和 C_2 的方程相减，得 $2(h-g')x+2ky+a-c=0\cdots$②. 解①、②，得 $x=0$, $y=\dfrac{-(a-c)}{2k}$. 又点 $\left(0,\ -\dfrac{a-c}{2k}\right)$ 到圆 C_1 的切线长 l 满足 $l^2=\left(\dfrac{a-c}{2k}\right)^2+c$. 故所求圆的方程为 $x^2+\left(y+\dfrac{a-c}{2k}\right)^2=\left(\dfrac{a-c}{2k}\right)^2+c$，即

$$k(x^2+y^2)+(a-c)y-kc=0.$$

403. 设 $\triangle ABC$ 的三边 AB、BC、CA 所在直线的方程分别为：$u_1(x, y)=x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1=0$, $u_2(x, y)=x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2=0$, $u_3(x, y)=x\cos\alpha_3+y\sin\alpha_3-p_3=0$, 求证：$\triangle ABC$ 的外接圆方程为

$$u_1u_2\sin(\alpha_2-\alpha_1)+u_2u_3\sin(\alpha_3-\alpha_2)+u_3u_1\sin(\alpha_1-\alpha_3)=0\cdots(*).$$

［证］ 设 A、B、C 三点坐标分别为 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)、(x_3, y_3).
$\because u_1(x_1, y_1)=0$, $u_3(x_1, y_1)=0$,

$$\therefore\ u_1(x_1, y_1)u_2(x_1, y_1)\sin(\alpha_2-\alpha_1)+u_2(x_1, y_1)u_3(x_1, y_1)\sin(\alpha_3-\alpha_2)$$
$$+u_3(x_1, y_1)u_1(x_1, y_1)\sin(\alpha_1-\alpha_3)=0,$$

即(*)所表示的曲线过 A 点. 同理可证此曲线也过 B、C 点. u_1、u_2、u_3 都是含有 x、y 的一次式，故方程(*)为 x、y 的二次方程. 其中 xy 项的系数为：

$$\sin(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\alpha_2-\alpha_1)+\sin(\alpha_2+\alpha_3)\sin(\alpha_3-\alpha_2)$$
$$+\sin(\alpha_3+\alpha_1)\sin(\alpha_1-\alpha_3)$$
$$=\frac{1}{2}(\cos 2\alpha_1-\cos 2\alpha_2+\cos 2\alpha_2-\cos 2\alpha_3+\cos 2\alpha_3-\cos 2\alpha_1)=0.$$

x^2、y^2 的系数分别为:

$$A=\cos\alpha_1\cos\alpha_2\sin(\alpha_2-\alpha_1)+\cos\alpha_2\cos\alpha_3\sin(\alpha_3-\alpha_2)$$
$$+\cos\alpha_3\cos\alpha_1\sin(\alpha_1-\alpha_3);$$
$$B=\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin(\alpha_2-\alpha_1)+\sin\alpha_2\sin\alpha_3\sin(\alpha_3-\alpha_2)$$
$$+\sin\alpha_3\sin\alpha_1\sin(\alpha_1-\alpha_3).$$

则
$$A-B=\cos(\alpha_2+\alpha_1)\sin(\alpha_2-\alpha_1)+\cos(\alpha_3+\alpha_2)\sin(\alpha_3-\alpha_2)$$
$$+\cos(\alpha_1+\alpha_3)\sin(\alpha_1-\alpha_3)$$
$$=\frac{1}{2}(\sin 2\alpha_2-\sin 2\alpha_1+\sin 2\alpha_3-\sin 2\alpha_2+\sin 2\alpha_1-\sin 2\alpha_3)$$
$$=0,$$
$$A+B=\cos(\alpha_2-\alpha_1)\sin(\alpha_2-\alpha_1)+\cos(\alpha_3-\alpha_2)\sin(\alpha_3-\alpha_2)$$
$$+\cos(\alpha_1-\alpha_3)\sin(\alpha_1-\alpha_3)$$
$$=\frac{1}{2}[\sin 2(\alpha_2-\alpha_1)+\sin 2(\alpha_3-\alpha_2)+\sin 2(\alpha_1-\alpha_3)]$$
$$=-2\sin(\alpha_2-\alpha_1)\sin(\alpha_3-\alpha_2)\sin(\alpha_1-\alpha_3).$$
$$\therefore\quad A=B=-\sin(\alpha_2-\alpha_1)\sin(\alpha_3-\alpha_2)\sin(\alpha_1-\alpha_3),$$

故方程(*)所表示的曲线为一圆，且过 A、B、C，即为 $\triangle ABC$ 外接圆的方程.

[说明] (1) 由以上证明可知：过三直线 $u_1=0$，$u_2=0$，$u_3=0$ 三交点的二次曲线系方程为 $\alpha u_1u_2+\beta u_2u_3+\gamma u_3u_1=0$，其中 α、β、γ 为任意常数.

(2) 根据此题可证明：当 $\triangle ABC$ 所在平面内一点 P 在此三角形三边上的射影共线时，则点 P 的轨迹为 $\triangle ABC$ 的外接圆. 三边的方程为本题所设，并设点 $P(x, y)$ 在三边上的射影为 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)、(x_3, y_3)，则

$$x-x_1=u_1\cos\alpha_1,\quad x-x_2=u_2\cos\alpha_2,\quad x-x_3=u_3\cos\alpha_3;$$
$$y-y_1=u_1\sin\alpha_1,\quad y-y_2=u_2\sin\alpha_2,\quad y-y_3=u_3\sin\alpha_3.$$

$\because$ 三射影共线，

$$\therefore\quad \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1},\quad 即\quad \frac{(y_2-y)-(y_1-y)}{(x_2-x)-(x_1-x)}=\frac{(y_3-y)-(y_1-y)}{(x_3-x)-(x_1-x)}.$$

$$\therefore\quad \frac{u_2\sin\alpha_2-u_1\sin\alpha_1}{u_2\cos\alpha_2-u_1\cos\alpha_1}=\frac{u_3\sin\alpha_3-u_1\sin\alpha_1}{u_3\cos\alpha_3-u_1\cos\alpha_1},$$

整理化简即得:

$$u_1u_2\sin(\alpha_2-\alpha_1)+u_2u_3\sin(\alpha_3-\alpha_2)+u_3u_1\sin(\alpha_1-\alpha_3)=0.$$

这一命题的逆命题,即西姆松(Simson)线定理.

404. 三条两两相交的直线, 其方程分别为 $3x-y=0$, $x+y-8=0$, $x-2y-5=0$. 求过三交点的圆的方程.

[解一] 解方程组 $\begin{cases}3x-y=0\\x+y-8=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2\\y=6.\end{cases}$ 故直线 $3x-y=0$ 和 $x+y-8=0$ 的交点为 $A(2, 6)$. 同理,解方程组 $\begin{cases}x+y-8=0\\x-2y-5=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x-2y-5=0\\3x-y=0,\end{cases}$ 可得另两交点 B、C 的坐标为(7, 1)和(−1, −3). 于是线段 AB 的中点为 $\left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right)$, 其垂直平分线方程为 $x-y-1=0\cdots$①; 线段 BC 的中点为 $(3, -1)$, 其垂直平分线方程为 $2x+y-5=0\cdots$②. 由①、②解得 $\triangle ABC$ 的外心坐标为(2, 1). 又因外心和点 A 的距离为 $|6-1|=5$. 故所求圆的方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=25$.

[解二] 根据上题[说明](1)可设所求圆的方程为

$(3x-y)(x+y-8)+\lambda(x+y-8)(x-2y-5)+\mu(x-2y-5)(3x-y)=0$,

即 $(3+\lambda+3\mu)x^2+(2-\lambda-7\mu)xy+(-1-2\lambda+2\mu)y^2+(-24-13\lambda-15\mu)x+(8+11\lambda+5\mu)y+40\lambda=0\cdots$①, 则 $3+\lambda+3\mu=-1-2\lambda+2\mu\cdots$②, $2-\lambda-7\mu=0\cdots$③. 由②、③解得 $\lambda=-\frac{3}{2}$, $\mu=\frac{1}{2}$. 代入①式, 得 $3x^2+3y^2-12x-6y-60=0$, 即 $x^2+y^2-4x-2y-20=0$, 其标准式为 $(x-2)^2+(y-1)^2=25$.

405. 求以极坐标 (a, α)、(b, β) 为直径端点的圆方程.

[解] ∵ 除两已知点 $A(a, \alpha)$、$B(b, \beta)$ 外,圆上任一点 $P(\rho, \theta)$ 对直径 AB 张直角, ∴ $\triangle APB$ 为一直角三角形, 则 $|PA|^2+|PB|^2=|AB|^2$. 又 ∵ $|PA|^2=\rho^2+a^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)$, $|PB|^2=\rho^2+b^2-2b\rho\cos(\theta-\beta)$, $|AB|^2=a^2+b^2-2ab\cos(\alpha-\beta)$. ∴ $[\rho^2+a^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)]+[\rho^2+b^2-2b\rho\cos(\theta-\beta)]=a^2+b^2-2ab\cos(\alpha-\beta)$, 即

$$\rho^2=a\rho\cos(\theta-\alpha)+b\rho\cos(\theta-\beta)-ab\cos(\alpha-\beta)\cdots①.$$

当 $\rho=a$，$\theta=\alpha$ 时，① 式的左边=右边=a^2，∴ 点 $A(a, \alpha)$在圆 ① 上. 同理，可验证点 $B(b, \beta)$ 也在圆 ① 上. ∴ 方程 ① 即为所求的圆方程.

406. (1) 求过极点，圆心的极坐标为(a, α)的圆方程. (2) 求圆心极坐标为(a, α)，半径为 r 的圆方程.

［解］ (1) ∵ 圆过极点，∴ 此圆的半径为 $|a|$. 设圆上任一点的坐标为 (ρ, θ)，根据圆的定义，可得 $a^2=\rho^2+a^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)$，即 $\rho=2a\cos(\theta-\alpha)$. 此即所求的圆方程.

(2) 设圆上任一点的坐标为(ρ, θ). ∵ 此圆的半径为 r，根据圆的定义，可得 $r^2=\rho^2+a^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)$，即 $\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)+a^2=r^2$. 此即所求的圆方程.

［说明］ 在(1)中，若 $a>0$，圆方程是 $\rho=2a\cos(\theta-\alpha)$. 若 $a<0$，则点(a, α)和$(-a, \pi+\alpha)$为同一点，于是方程就为 $\rho=-2a\cos[\theta-(\pi+\alpha)]$，但 $\cos[\theta-(\pi+\alpha)]=\cos[\pi-(\theta-\alpha)]=-\cos(\theta-\alpha)$，故方程仍是

$$\rho=2a\cos(\theta-\alpha).$$

§2. 直线与圆、圆与圆的位置关系

407. 求证：过圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 上两个已知点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$的割线方程为

$$(x_1+x_2+D)x+(y_1+y_2+E)y-x_1x_2-y_1y_2+F=0.$$

(P_1、P_2 的连线不过圆心)

［证］ $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$的坐标均满足方程

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=x^2+y^2+Dx+Ey+F\cdots①.$$

化简后即 $(x_1+x_2+D)x+(y_1+y_2+E)y-x_1x_2-y_1y_2+F=0\cdots②$.

∵ P_1、P_2 的连线不过圆心$\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$，∴ $\dfrac{y_1+\frac{E}{2}}{x_1+\frac{D}{2}}\neq\dfrac{y_2+\frac{E}{2}}{x_2+\frac{D}{2}}$，故 $(y_1-y_2)(x_1+x_2+D)\neq(x_1-x_2)(y_1+y_2+E)$. ∵ 点 P_1、P_2 不重合，

$\therefore$ x_1+x_2+D、y_1+y_2+E 不同时为零，故割线 P_1P_2 的方程为方程 ②.

[说明] 因为以 P_1P_2 为直径的圆方程为 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)\cdot(y-y_2)=0$，故方程 ① 即此圆与已知圆的根轴（公共弦）方程，因而方程 ② 即为 P_1P_2 的连线方程.

408. 已知圆 $x^2+y^2=r^2$，求被此圆内一点 $A(a, b)$ 平分的弦所在直线的方程（a、b 不同时为 0）.

[分析一] 利用"圆心与弦的中点连线垂直于此弦"的性质，便可得解.

[解一] 当 a、b 均不为 0 时，$k_{OA}=\frac{b}{a}$，$\therefore$ 弦的斜率 $k'=-\frac{a}{b}$. 弦所在直线的方程为 $y-b=-\frac{a}{b}(x-a)$，即 $ax+by=a^2+b^2\cdots$①. 当 $a=0$, $b\neq0$ 时，$y=b$；当 $b=0$, $a\neq0$ 时，$x=a$. 故 ① 式即为所求.

[分析二] 因为此定点到弦的两端距离相等，故利用直线参数方程中参数 t 的几何意义求解亦较方便，且此解法适用于一般二次曲线.

[解二] 设过 $A(a, b)$，倾角为 α 的直线参数方程为 $\begin{cases} x=a+t\cos\alpha\cdots① \\ y=b+t\sin\alpha\cdots② \end{cases}$ （t 为参数）. 代入圆 $x^2+y^2=r^2$，整理得 $t^2+2(a\cos\alpha+b\sin\alpha)t+a^2+b^2-r^2=0$. $\because$ A 为中点，设 t_1、t_2 为方程的两根，$\therefore$ $t_1+t_2=0$，即 $a\cos\alpha+b\sin\alpha=0\cdots$③. ①$\times a+$②$\times b$，利用 ③ 得 $ax+by=a^2+b^2$. 此即弦所在直线的方程.

409. 已知圆 $x^2+y^2+6x-10y-2=0$，求在已知圆中垂直于直线 $2x-3y=5$ 的直径所在直线的方程.

[解] 化已知圆方程为标准式：$(x+3)^2+(y-5)^2=36$，$\therefore$ 圆心为 $(-3, 5)$. 因已知直线的斜率 $k=\frac{2}{3}$，故所求直线的斜率为 $-\frac{3}{2}$. $\therefore$ 所求的直线方程为 $y-5=-\frac{3}{2}(x+3)$，即 $3x+2y-1=0$.

410. 求过圆 $\rho=2a\cos\theta$ $(a>0)$ 上任意两点 $P_1(\rho_1, \theta_1)$、$P_2(\rho_2, \theta_2)$ 的割线方程. 如果 P_1 与 P_2 重合，则此割线转化为什么?

[解] 设直线 P_1P_2 的极坐标方程为 $\rho\cos(\theta-\alpha)=p\cdots$①，其中 α、p 是

待定常数. $\therefore \begin{cases}\rho_1\cos(\theta_1-\alpha)=p\\ \rho_2\cos(\theta_2-\alpha)=p\end{cases}\cdots$②. $\because$ P_1、P_2 在圆 $\rho=2a\cos\theta$ 上,

$\therefore \begin{cases}\rho_1=2a\cos\theta_1\\ \rho_2=2a\cos\theta_2\end{cases}\cdots$③. 以③代入②, 得

$$2a\cos\theta_1\cos(\theta_1-\alpha)=2a\cos\theta_2\cos(\theta_2-\alpha)=p.$$

$\therefore \cos(2\theta_1-\alpha)+\cos\alpha=\cos(2\theta_2-\alpha)+\cos\alpha$. 从此得

$\cos(2\theta_1-\alpha)=\cos(2\theta_2-\alpha)$, $\therefore$ $(2\theta_1-\alpha)\pm(2\theta_2-\alpha)=2n\pi, (n\in J)\cdots$④.

$\because$ P_1、P_2 不重合, $\therefore$ 当④式取"$-$"号时, $\theta_1-\theta_2=n\pi$, P_1、P_2 与极点 O 共线, $\therefore$ 割线 P_1P_2 的方程为: $\theta=\theta_1$ 或 $\theta=\theta_2$. 当④式取"$+$"号时, $\theta_1+\theta_2=n\pi+\alpha$, 即 $\alpha=\theta_1+\theta_2-n\pi$. 代入②, 得 $p=2a\cos\theta_1\cos(n\pi-\theta_2)$. 以 α、p 的值代入①, 得割线 P_1P_2 的方程为

$$\rho\cos(\theta-\theta_1-\theta_2+n\pi)=2a\cos\theta_1\cos(n\pi-\theta_2),$$

即
$$\rho\cos(\theta-\theta_1-\theta_2)=2a\cos\theta_1\cos\theta_2.$$

当 P_1 与 P_2 重合时, 割线 P_1P_2 转化为过点 P_1 的切线, 其方程为

$$\rho\cos(\theta-2\theta_1)=2a\cos^2\theta_1.$$

［说明］ 利用极坐标方程研究圆的切线问题时,本题结论是有用的工具.

411. 圆方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 中, a、b、r 满足什么条件才能使圆: (1) 与两坐标轴相切; (2) 与直线 $lx+my+n=0$ 相切、相交或相离.

［解］ (1) 由圆方程可知, 圆心为 (a, b)、半径为 r. $\because$ 圆心到 x 轴的距离为 $|b|$, 到 y 轴的距离为 $|a|$, $\therefore$ 当 $|a|=|b|=r$, 即 $a^2=b^2=r^2$ 时, 圆和两坐标轴相切.

(2) 圆心到直线 $lx+my+n=0$ 的距离为 $\dfrac{|la+mb+n|}{\sqrt{l^2+m^2}}$,

当 $(la+mb+n)^2=r^2(l^2+m^2)$ 时, 圆和此直线相切;

当 $(la+mb+n)^2<r^2(l^2+m^2)$ 时, 圆和此直线相交;

当 $(la+mb+n)^2>r^2(l^2+m^2)$ 时, 圆和此直线相离.

［说明］ 此题也可通过求由圆和直线的方程所组成的方程组有两相同解、两不同解或无解的条件解之.

412. 求过两直线: $x-y-4=0$ 和 $2x+y-8=0$ 的交点, 且与圆 $x^2+y^2=4$ 相切的直线方程.

[解一] 由 $\begin{cases} x-y-4=0 \\ 2x+y-8=0 \end{cases}$ 解得两直线交点为$(4, 0)$. 设切点为(x_1, y_1), 则切线方程为 $x_1x+y_1y=4$, 且 $x_1^2+y_1^2=4\cdots$①. ∵ 切线过$(4, 0)$, ∴ $4x_1=4$, $x_1=1$, 代入①, 得 $y_1=\pm\sqrt{3}$. ∴ 切点坐标为$(1, \pm\sqrt{3})$. 所求切线方程为 $x\pm\sqrt{3}y=4$.

[解二] 设所求的切线方程为 $\lambda(x-y-4)+2x+y-8=0$, 即 $(\lambda+2)x-(\lambda-1)y-4(\lambda+2)=0$. 显然 $\lambda+2\neq 0$, 此方程可化为 $x-\frac{\lambda-1}{\lambda+2}y-4=0\cdots$②. 由于 $\frac{4}{\sqrt{1+\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+2}\right)^2}}=2$, ∴ $\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+2}\right)^2=3$, $\frac{\lambda-1}{\lambda+2}=\pm\sqrt{3}$. 代入②, 即得所求的切线方程 $x\pm\sqrt{3}y-4=0$.

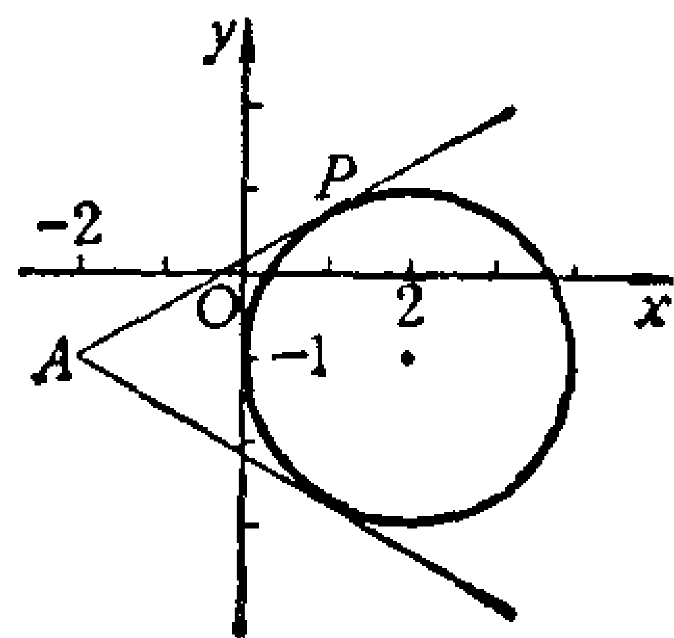
[说明] 除上述两种方法外, 还可在假设切线方程后, 代入圆方程, 利用所得的二次方程的判别式为零解之.

413. 圆 $x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$ 的切线和两坐标轴交成的三角形面积为 a^2, 求这切线的方程.

[解] 设切点坐标为(x_1, y_1), 则切线方程为 $x_1x+y_1y=a^2$. 它在 x 轴、y 轴上的截距为 $\frac{a^2}{x_1}$、$\frac{a^2}{y_1}$. 根据题意, 三角形面积 $S=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^4}{|x_1y_1|}=a^2$, 即 $x_1^2y_1^2=\frac{a^4}{4}\cdots$①; 又 $x_1^2+y_1^2=a^2\cdots$②. 从①、②解得 $x_1^2=y_1^2=\frac{a^2}{2}$. 切点有四个: $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}, \pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$、$\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}, \mp\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$. 故所求切线有四条, 方程为: $x\pm y-\sqrt{2}a=0$, $x\pm y+\sqrt{2}a=0$.

[说明] 由于已知圆的圆心在原点, 也可用法线式 $x\cos\theta+y\sin\theta-a=0$ 表示切线方程解之. 事实上, 此方程就是将切点坐标用$(a\cos\theta, a\sin\theta)$表示后的切线方程.

414. 从点 $A(-2, -1)$ 向曲线 $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ 引切线. 求切点坐标.



[解一] 设切点坐标为 $P(x_1, y_1)$, 过点 P 的切线方程是 $x_1x+y_1y-2(x+x_1)+(y+y_1)+1=0$. ∵ 切线过 $A(-2, -1)$, ∴ $-2x_1-y_1+4-2x_1-1+y_1+1=0$. 解得 $x_1=1$, 代入原曲线方程,

解得 $y=-1+\sqrt{3}$ 或 $y=-1-\sqrt{3}$. ∴ 切点 P 的坐标是

$$(1,\ -1+\sqrt{3}) \quad 或 \quad P(1,\ -1-\sqrt{3}).$$

［解二］ 曲线 $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ 即为圆 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$. 设切点坐标为 $(2+2\cos\theta,\ -1+2\sin\theta)$. 切线方程为

$$(x-2)\cos\theta+(y+1)\sin\theta=2.$$

∵ 过点 $A(-2,\ -1)$, ∴ $-4\cos\theta=2$, $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$, $\sin\theta=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ∴ 切点坐标为 $(1,\ -1+\sqrt{3})$、$(1,\ -1-\sqrt{3})$.

415. 已知 $P(x_1,\ y_1)$ 为圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 外部一点，过点 P 作圆的切线 PQ, Q 为切点. 求证：切线长

$$|PQ|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+Dx_1+Ey_1+F}.$$

［证］ 圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 即

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4},$$

∴ 圆心 A 的坐标是 $\left(-\dfrac{D}{2}、-\dfrac{E}{2}\right)$, 半径是 $\sqrt{\dfrac{D^2+E^2-4F}{4}}$.

$$|PQ|=\sqrt{AP^2-AQ^2}=\sqrt{\left(x_1+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y_1+\frac{E}{2}\right)^2-\frac{D^2+E^2-4F}{4}}$$

$$=\sqrt{x_1^2+y_1^2+Dx_1+Ey_1+F}.$$

416. 求直线 $\dfrac{1}{\rho}=a\cos\theta+b\sin\theta$ 与圆 $\rho=2c\cos\theta$ 相切的条件.

［解一］ 以极轴所在直线为 x 轴，极点为原点建立直角坐标系，则直线 $\dfrac{1}{\rho}=a\cos\theta+b\sin\theta$ 的直角坐标方程为 $ax+by=1$…①; 圆 $\rho=2c\cos\theta$ 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2cx=0$, 即 $(x-c)^2+y^2=c^2$…②. ∵ 直线①和圆②相切，故圆心 $(c,\ 0)$ 到直线①的距离等于半径 $|c|$,

$$\therefore\quad \frac{|ac+b\cdot 0-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=|c|.$$

化简即得 $b^2c^2+2ac=1$.

［解二］ 解方程组 $\begin{cases}\rho a\cos\theta+\rho b\sin\theta=1\\ \rho=2c\cos\theta\end{cases}$ 消去 ρ, 得

$$2ac\cos^2\theta+2bc\sin\theta\cos\theta=1,\quad 即\quad c(b\sin 2\theta+a\cos 2\theta)=1-ac,$$

亦即$\sin(2\theta+\varphi)=\dfrac{1-ac}{c\sqrt{a^2+b^2}}$. 当且仅当$\left|\dfrac{1-ac}{c\sqrt{a^2+b^2}}\right|=1$,即此方程在$[0, 2\pi)$内$\theta$只有两解,且对应的两点重合时,直线与圆相切,故所求条件为$b^2c^2+2ac=1$.

417. 自$P_0(x_0, y_0)$作圆$x^2+y^2=r^2$的两切线,切点分别为P_1、P_2,求切点弦P_1P_2所在直线的方程.

[分析] 因P_0、P_1、O、P_2在以OP_0为直径的圆上,故所求的直线即为此圆与已知圆的根轴.

[解一] 以OP_0为直径的圆方程为$x(x-x_0)+y(y-y_0)=0\cdots$①. 它与圆$x^2+y^2=r^2\cdots$②的根轴即$P_1P_2$的连线. 由②−①得: $x_0x+y_0y=r^2$.

[解二] 设切点P_1、P_2的坐标分别为(x_1, y_1)、(x_2, y_2),则过P_1、P_2的圆$x^2+y^2=r^2$的切线分别为$x_1x+y_1y=r^2\cdots$①, $x_2x+y_2y=r^2\cdots$②. ∵两切线均过$P_0(x_0, y_0)$, ∴$x_1x_0+y_1y_0=r^2\cdots$③, $x_2x_0+y_2y_0=r^2\cdots$④. 由③、④可知,P_1、P_2在直线$x_0x+y_0y=r^2$上,∴切点弦P_1P_2所在直线方程为$x_0x+y_0y=r^2$.

418. 过一定点$P_0(x_0, y_0)$的动直线交圆$x^2+y^2=r^2$于两点P_1、P_2,求证:过P_1、P_2的切线交点必在直线$x_0x+y_0y=r^2$上.

[证一] 设过点$P_0(x_0, y_0)$的动直线的倾角为θ, $P_0P_1=t_1$, $P_0P_2=t_2$,则P_1、P_2的坐标分别为$(x_0+t_1\cos\theta,\ y_0+t_1\sin\theta)$和$(x_0+t_2\cos\theta,\ y_0+t_2\sin\theta)$. 于是过这两点的切线方程分别可表示为$(x_0+t_1\cos\theta)x+(y_0+t_1\sin\theta)y=r^2\cdots$① 和 $(x_0+t_2\cos\theta)x+(y_0+t_2\sin\theta)y=r^2\cdots$②. 解①、②,得这两切线的交点为$\left(\dfrac{-r^2\sin\theta}{y_0\cos\theta-x_0\sin\theta}, \dfrac{r^2\cos\theta}{y_0\cos\theta-x_0\sin\theta}\right)$.

$$\because\quad x_0\cdot\frac{-r^2\sin\theta}{y_0\cos\theta-x_0\sin\theta}+y_0\cdot\frac{r^2\cos\theta}{y_0\cos\theta-x_0\sin\theta}$$

$$=r^2\left(\frac{-x_0\sin\theta}{y_0\cos\theta-x_0\sin\theta}+\frac{y_0\cos\theta}{y_0\cos\theta-x_0\sin\theta}\right)=r^2,$$

∴过P_1、P_2的切线交点在直线$x_0x+y_0y=r^2$上.

[证二] 设过P_1、P_2的切线的交点坐标为(α, β),则此交点关于已知圆$x^2+y^2=r^2$的切点弦P_1P_2所在的直线的方程为$\alpha x+\beta y=r^2$. ∵点

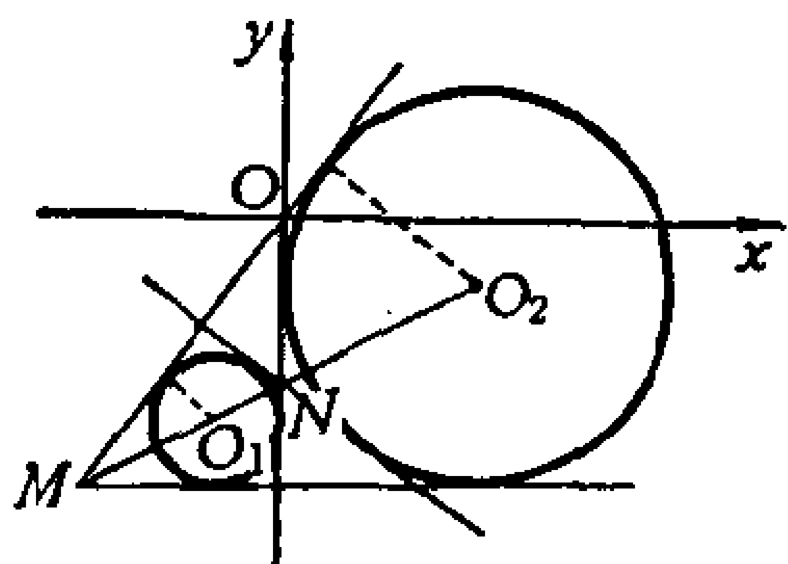
$P_0(x_0, y_0)$在直线 P_1P_2 上，$\therefore \alpha x_0+\beta y_0=r^2$. 故过 P_1、P_2 的切线的交点在直线 $x_0x+y_0y=r^2$ 上.

［说明］ 本题中，点 P_0 称为直线 $x_0x+y_0y=r^2$ 关于圆 $x^2+y^2=r^2$ 的极，而直线 $x_0x+y_0y=r^2$ 称为点 P_0 关于圆 $x^2+y^2=r^2$ 的极线. 当点 P_0 在圆外时，极线与圆相交，即为点 P_0 关于圆 $x^2+y^2=r^2$ 的切点弦；当点 P_0 在圆上时，极线与圆相切，即为过点 P_0 的切线；当点 P_0 在圆内时，极线与圆相离，但注意 P_0 不能在圆心上.

419. 试求直线 $Ax+By+C=0$ $(C\neq 0)$ 关于圆 $x^2+y^2=r^2$ 的极.

［解］ 设极为(α, β)，则极线为 $\alpha x+\beta y=r^2\cdots$①. 极线①与直线 $Ax+By+C=0$ 重合，$\therefore \dfrac{\alpha}{A}=\dfrac{\beta}{B}=\dfrac{-r^2}{C}$，即 $\alpha=-\dfrac{A}{C}r^2$，$\beta=-\dfrac{B}{C}r^2$. 故极为 $\left(-\dfrac{A}{C}r^2, -\dfrac{B}{C}r^2\right)$.

420. 求两圆 C_1: $x^2+y^2+2x+6y+9=0$, C_2: $x^2+y^2-6x+2y+1=0$ 的公切线方程.



［分析］ 由于两圆的内、外公切线分别内分和外分圆心距成两圆半径之比，故两圆的公切线与连心线的交点可确定. 先利用公切线过此交点假设直线方程，再根据直线与圆相切的条件解之.

［解］ 由两圆方程可知圆 C_1 的圆心为 $O_1(-1, -3)$，半径 $r_1=1$；圆 C_2 的圆心为 $O_2(3, -1)$，半径 $r_2=3$. 设两圆外、内公切线分别交连心线 O_1O_2 于 M、N，则 $\dfrac{O_1M}{MO_2}=-\dfrac{r_1}{r_2}=-\dfrac{1}{3}$；$\dfrac{O_1N}{NO_2}=\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{1}{3}$. 故利用定比分点坐标公式可求得 $x_M=-3$, $y_M=-4$；$x_N=0$, $y_N=-\dfrac{5}{2}$. $\because$ 两圆的外公切线过点 M，$\therefore$ 可设其方程为 $y+4=k(x+3)$，即 $kx-y+3k-4=0\cdots$①. 又 $\because$ 圆心到切线的距离等于半径，

$$\therefore \quad \frac{|k(-1)-(-3)+3k-4|}{\sqrt{1+k^2}}=1, \quad 即 \quad (2k-1)^2=k^2+1.$$

解之，得 $k=0$, $k=\dfrac{4}{3}$. 代入①，即得两圆的外公切线方程为 $y+4=0$ 和

$4x-3y=0$. 又∵ 两圆的内公切线过点 N, ∴ 可设其方程为 $y+\frac{5}{2}=kx$, 即 $2kx-2y-5=0\cdots②$. 同理, $\frac{|2k(-1)-2(-3)-5|}{\sqrt{4+4k^2}}=1$, 即$(2k-1)^2=4+4k^2$. 解此方程, 得 $k=-\frac{3}{4}$. 代入②, 即得两圆的内公切线为 $3x+4y+10=0$. 因为两圆内公切线过点 $N\left(0,\ -\frac{5}{2}\right)$, 故应考虑直线 $x=0$. 经检验, $x=0$ 为另一条内公切线的方程.

[说明] 两圆的外公切线或内公切线至多只有两条. 若已求得两条公切线,则不必再验证斜率不存在的情况;若只能求得一条切线,如本题求内公切线时的情况,应再验证是否有斜率不存在的公切线.

421. 对于实数 $a(a\neq1)$, 设有集合 $C_a=\{(x,\ y)\,|\,x^2-2ax+y^2+2(a-2)y+2=0\}$. 求与所有的圆 C_a 相切的直线方程.

[分析] 设切线方程为 $mx+ny+p=0$. 根据直线与圆相切, 则圆心到切线的距离等于半径, 可列出 m、n、p 应满足的方程组, 解此方程组可求得 m、n、p. 从而求切线方程.

[解一] 设直线方程 $mx+ny+p=0$ 和圆 C_a 都相切. 圆 C_a 的标准式是: $(x-a)^2+[y+(a-2)]^2=2(a-1)^2$. ∴ 圆心 O' 坐标为$(a,\ 2-a)$, 半径为 $\sqrt{2}\,|a-1|$. 圆心 O' 到直线 $mx+ny+p=0$ 的距离

$$d=\frac{|am+(2-a)n+p|}{\sqrt{m^2+n^2}}=\sqrt{2}\,|a-1|\quad(a\neq1).$$

整理得

$$(m+n)^2a^2-(4m^2+4mn+2mp-2np)a+2m^2-2n^2-4np-p^2=0\cdots①.$$

∵ 直线和所有圆相切, ∴ ① 式是关于 a 的恒等式. ∴ $m+n=0\cdots②$, $4m^2+4mn+2mp-2np=0\cdots③$, $2m^2-2n^2-4np-p^2=0\cdots④$. 由②得 $m=-n$. 代入③, 得 $mp=0$, 但 $m\neq0$, ∴ $p=0$. 将 $m=-n$, $p=0$ 代入④, 两边均等于零. ∴ 所求直线方程为 $y=x$. 即与所有圆 C_a 都相切的直线方程为 $y-x=0$.

[解二] ∵ $x^2-2ax+y^2+2(a-2)y+2=0$, 即 $(x^2+y^2-4y+2)-2a(x-y)=0$. ∴ 集合 C_a 是过定圆 $x^2+y^2-4y+2=0\cdots①$ 与定直线 $x-y=0\cdots②$ 的交点的圆系. 而①的圆心 $(0,\ 2)$ 到直线②的距离 $d=\frac{|0-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, 恰为圆①的半径. ∴ 直线②是定圆①的切线, 因而圆

系中的每一个圆均与直线 ② 相切. 故所求直线方程为 $x-y=0$.

422. 已知圆系: $x^2+y^2-2ax-4ay+\frac{9}{2}a^2=0$, $(a\neq 0)$. 求证: (1) 圆心在直线 $y=2x$ 上; (2) 圆系有公切线, 并求出公切线方程.

[证] (1) 将方程整理得 $(x-a)^2+(y-2a)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2$, 则圆心坐标为 $\begin{cases}x=a\\y=2a,\end{cases}$ 消去 a, 得 $y=2x$, ∴ 圆心在直线 $y=2x$ 上.

(2) 设直线 $y=kx+b$ 与圆相切, 则圆心到直线的距离等于半径,

$$\left|\frac{ka-2a+b}{\sqrt{1+k^2}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

即 $\left[(k-2)^2-\frac{1}{2}(1+k^2)\right]a^2+2(k-2)ab+b^2=0$. ∵ 所求直线是圆系的公切线, ∴ 对于一切 a 的值都成立, 即是关于 a 的恒等式, 故 $b=0$, 且 $(k-2)^2-\frac{1}{2}(1+k^2)=0$. 解得 $k=1$ 或 $k=7$, 即圆系的公切线为

$$y=x \quad 或 \quad y=7x.$$

[说明] 要求圆系的公切线, 可先将直线与圆系相切的条件整理成以圆系的参数为变量的等式, 再利用恒等式定理, 解出直线方程中的待定系数.

423. 求相离两圆 C_1: $x^2+y^2=r_1^2$, C_2: $(x-a)^2+y^2=r_2^2$ 的公切线方程.

[分析] 由于圆 C_1 的圆心在原点, 故可将其切线方程写成法线式, 然后再考虑它和圆 C_2 相切去解之.

[解] 设两圆公切线 l 的法线式方程为 $x\cos\varphi+y\sin\varphi=p$.

$$\because \quad \frac{|0\cdot\cos\varphi+0\cdot\sin\varphi-p|}{\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}}=r_1, \quad \therefore \quad p=r_1\cdots①;$$

$$\because \quad \frac{|a\cos\varphi+0\cdot\sin\varphi-p|}{\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}}=r_2, \quad \therefore \quad |a\cos\varphi-p|=r_2\cdots②.$$

由 ①、② 解得 $\cos\varphi=\frac{r_1\pm r_2}{a}$,

$$\therefore \quad \sin\varphi=\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\pm\sqrt{\frac{a^2-(r_1\pm r_2)^2}{a^2}}=\pm\frac{\sqrt{a^2-(r_1\pm r_2)^2}}{a}.$$

因两圆相离，从而四条公切线方程为：

$$\frac{r_1+r_2}{a}x\pm\frac{\sqrt{a^2-(r_1+r_2)^2}}{a}y=r_1,$$

与
$$\frac{r_1-r_2}{a}x\mp\frac{\sqrt{a^2-(r_1-r_2)^2}}{a}y=r_1.$$

424. 已知两圆 C_1: $x^2+y^2+4x-4y-5=0$, C_2: $x^2+y^2-8x+4y+7=0$. (1) 证明此两圆相切，并求过切点的公切线；(2) 求过点(2, 3)且与两圆相切于上述切点的圆方程.

[分析一] 为证明两圆相切，只需证明两圆的圆心距等于两半径之和或差即可. 并由于连心线垂直于公切线，可求得公切线的斜率，从而得出其方程.

[解一] (1) 两圆的方程可化为：$(x+2)^2+(y-2)^2=13$, $(x-4)^2+(y+2)^2=13$. ∴ 圆心分别为 $M(-2, 2)$、$N(4, -2)$，半径都是 $\sqrt{13}$. 圆心距 $|MN|=\sqrt{(4+2)^2+(-2-2)^2}=2\sqrt{13}$, 即为两圆半径的和. ∴ 两圆外切. ∵ $k_{MN}=\frac{2+2}{-2-4}=-\frac{2}{3}$, ∴ 切线的斜率 $k=\frac{3}{2}$. 两圆方程联立，解得切点坐标为(1, 0). 故所求切线方程为 $y=\frac{3}{2}(x-1)$, 即

$$3x-2y-3=0.$$

(2) 与两圆相切于点(1, 0)的圆的圆心必在直线 $y=-\frac{2}{3}(x-1)\cdots$① 上，且 $(x-1)^2+y^2=(x-2)^2+(y-3)^2\cdots$②. 解方程①、②，得圆心坐标 $\left(-4, \frac{10}{3}\right)$, ∴ $r^2=\frac{325}{9}$. 故所求圆方程为 $(x+4)^2+\left(y-\frac{10}{3}\right)^2=\frac{325}{9}$,

即
$$3x^2+3y^2+24x-20y-27=0.$$

[分析二] 因点(2, 3)不在圆 C_2 上，故可用圆系方程 $C_1+\lambda C_2=0$ 解之.

[解二] (1) 先求两圆的根轴：$12x-8y-12=0$, 即 $3x-2y-3=0$. 两已知圆圆心到根轴的距离：

$$\left|\frac{3(-2)-2\times2-3}{\sqrt{9+4}}\right|=\sqrt{13},\quad \left|\frac{3\times4-2(-2)-3}{\sqrt{9+4}}\right|=\sqrt{13},$$

∴ 此两圆均与其根轴相切. 故根轴即为所求的公切线.

(2) 与两已知圆相切于同一点的圆系方程

$$(x^2+y^2+4x-4y-5)+\lambda(x^2+y^2-8x+4y+7)=0.$$

∵ 所求圆通过点(2, 3)，将该点坐标代入上式，得 $4+16\lambda=0$，解得 $\lambda=-\frac{1}{4}$。故所求圆方程为 $3x^2+3y^2+24x-20y-27=0$.

425. 已知两圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ 和 $(x-1)^2+(y-2)^2=r^2$ 相切，求半径 r.

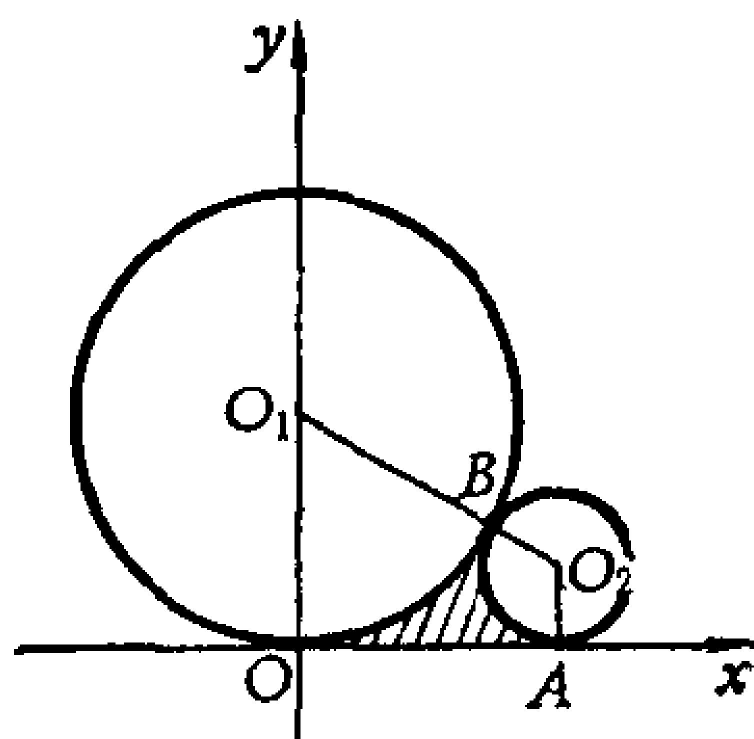
［解］ ∵ 当两圆外切时，圆心距等于两半径之和，

$$\therefore\quad \sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2}=5+r,\quad r=2\sqrt{2}-5.$$

而 $2\sqrt{2}-5<0$，故此两圆不可能外切。又当两圆内切时，圆心距等于两半径之差，∴ $\sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2}=|5-r|$。故

$$r=5-2\sqrt{2}\quad 或\quad r=5+2\sqrt{2}.$$

426. 已知两圆 C_1: $x^2+y^2-6y=0$, C_2: $(x-2\sqrt{3})^2+(y-1)^2=1$. (1) 求证两圆外切，且 x 轴是它们的一条外公切线；(2) 求切点间的两弧与 x 轴所围成图形的面积.



［解］ 如图. (1) C_1: $x^2+(y-3)^2=9$，∴ C_1 的圆心为 $O_1(0, 3)$，半径 $r_1=3$；C_2 的圆心为 $O_2(2\sqrt{3}, 1)$，半径 $r_2=1$.

$$\because\quad |O_1O_2|=\sqrt{(0-2\sqrt{3})^2+(3-1)^2}=4=r_1+r_2,$$

∴ C_1 和 C_2 两圆外切。圆心 O_1、O_2 到 x 轴的距离分别为 3 与 1，即各自半径之长，∴ C_1、C_2 均与 x 轴相切。又 ∵ 圆心的纵坐标均为正值，故两圆都在 x 轴上方，∴ x 轴为它们的一条外公切线.

(2) ∵ 直线 O_1O_2 的斜率 $k=-\frac{2}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，∴ $\angle OO_1O_2=\frac{\pi}{3}$，$\angle O_1O_2A=\frac{2\pi}{3}$。∴ 扇形 O_1OB 的面积 $=\frac{1}{6}\pi\cdot 3^2=\frac{3\pi}{2}$；扇形 O_2AB 的面积 $=\frac{1}{3}\pi\cdot 1^2=\frac{\pi}{3}$。而梯形 OO_1O_2A 的面积 $=\frac{3+1}{2}\cdot 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$。∴ 所求面积 $=4\sqrt{3}-\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=4\sqrt{3}-\frac{11}{6}\pi$（面积单位）.

427. 求证：圆系 $x^2+y^2+2\lambda x+(4\lambda+10)y+20+10\lambda=0$ 中任意两圆相切于同一点，并求出切点坐标.

［分析一］ 在圆系方程中，当 λ 分别取 λ_1 和 λ_2 时，证明此两圆必相切于一定点.

［证一］ 在圆系方程中，设 λ 分别取 λ_1 和 λ_2 $(\lambda_1>\lambda_2)$，则得圆方程

$$(x+\lambda_1)^2+[y+(2\lambda_1+5)]^2=5(\lambda_1+1)^2$$

和

$$(x+\lambda_2)^2+[y+(2\lambda_2+5)]^2=5(\lambda_2+1)^2.$$

圆心坐标为 $(-\lambda_1,\ -(2\lambda_1+5))$ 和 $(-\lambda_2,\ -(2\lambda_2+5))$. 两圆半径为

$$r_1=\sqrt{5}\,|\lambda_1+1| \quad 和 \quad r_2=\sqrt{5}\,|\lambda_2+1|.$$

两圆圆心距为

$$d=\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2)^2+4(\lambda_1-\lambda_2)^2}=\sqrt{5}\,|\lambda_1-\lambda_2|=\sqrt{5}(\lambda_1-\lambda_2).$$

分三种情况研究:

(1) $\lambda_1>\lambda_2\geqslant-1$, $d=\sqrt{5}(\lambda_1-\lambda_2)$, $r_1-r_2=\sqrt{5}(\lambda_1-\lambda_2)$. 两圆内切;

(2) $\lambda_1\geqslant-1>\lambda_2$, $d=\sqrt{5}(\lambda_1-\lambda_2)$, $r_1+r_2=\sqrt{5}(\lambda_1-\lambda_2)$. 两圆外切;

(3) $-1>\lambda_1>\lambda_2$, $d=\sqrt{5}(\lambda_1-\lambda_2)$, $r_2-r_1=\sqrt{5}(\lambda_1-\lambda_2)$. 两圆内切.

无论何种情况都表示两圆相切，∴ 圆系内任意两圆彼此相切.

又将圆系方程化为 $x^2+y^2+10y+20+\lambda(2x+4y+10)=0$. 解方程组 $\begin{cases}2x+4y+10=0\\x^2+y^2+10y+20=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1\\y=-3.\end{cases}$ 故不论 λ 取何值，圆系中的圆都经过点 $(1,\ -3)$. 由前面证明可知，点 $(1,\ -3)$ 必是各圆相切时的切点.

［分析二］ 将圆系方程化为 $x^2+y^2+10y+20+2\lambda(x+2y+5)=0$，则此圆系方程表示过圆 $x^2+y^2+10y+20=0$ 与直线 $x+2y+5=0$ 交点的圆系，只要证明此直线与此圆相切，即可得证.

［证二］ 圆系方程可化为 $x^2+y^2+10y+20+2\lambda(x+2y+5)=0$，∴ 此圆系为过 $\begin{cases}x^2+y^2+10y+20=0\\x+2y+5=0\end{cases}$ 交点的圆系. 但 $x^2+y^2+10y+20=0$ 即 $x^2+(y+5)^2=5$，它的中心 $(0,\ -5)$ 到直线 $x+2y+5=0$ 的距离 $d=\dfrac{|0+2(-5)+5|}{\sqrt{1+4}}=\sqrt{5}$. ∴ 圆 $x^2+y^2+10y+20=0$ 与直线 $x+2y+5=0$

相切，切点为 $(1,\ -3)$，且圆系中的圆均与直线 $x+2y+5=0$ 相切于点 $(1,\ -3)$. 故圆系中任意两圆都相切于点$(1,\ -3)$.

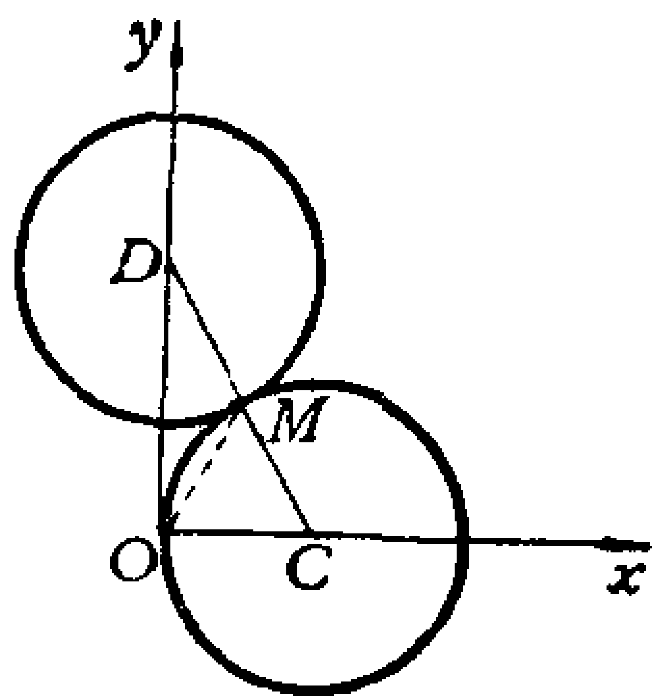
428. **证明方程 $x^4-16x^2+2x^2y^2-16y^2+y^4=4x^3+4xy^2-64x$ 的曲线为两个互切的圆.**

［分析］ 根据题断，可知此方程必可化为两个二次方程之积等于零的形式.

［证］ $\because$ $x^4+2x^2y^2+y^4-16(x^2+y^2)-4x(x^2+y^2)+64x$
$=(x^2+y^2-4x)(x^2+y^2-16)$.

$\therefore$ 原方程的曲线为两个圆: $x^2+y^2-4x=0$ 和 $x^2+y^2-16=0$. 此两圆的圆心$(2,\ 0)$、$(0,\ 0)$间的距离为 2，等于两圆的半径之差. $\therefore$ 此两圆互相内切.

429. **已知两圆的极坐标方程: $\rho=2\cos\theta$ 和 $\rho^2-2\sqrt{3}\rho\sin\theta+2=0$. 求证两圆外切，并求切点的极坐标.**



［分析］ 欲证两圆外切，只需证明两圆圆心距等于两圆半径之和.

［证］ 圆 $\rho=2\cos\theta$ 圆心的极坐标为 $C(1,\ 0)$，半径为 1；又圆 $\rho^2-2\sqrt{3}\rho\sin\theta+2=0$，即 $\rho^2+(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=1$，圆心为 $D\left(\sqrt{3},\ \frac{\pi}{2}\right)$，半径为 1. 圆心距$=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$，等于此两圆的半径之和，故此两圆外切，切点 M 为圆心距的中点，且 $\angle COD=\frac{\pi}{2}$. $\therefore$ $|OM|=|CM|=|DM|$，$\angle COM=\frac{\pi}{3}$. $\therefore$ 切点 M 的极坐标为 $\left(1,\ \frac{\pi}{3}\right)$.

430. **记圆心为$(a,\ a^2)$且与 x 轴相切的圆为 $C(a)$，当 $C(a)$ 的圆心在抛物线 $y=x^2$ 上变动时$(a\neq0)$，$C(a)$的全体为 E. (1) 为使圆 $C(a)$与圆 $C(b)$相外切，试求 a、b 之间的关系；(2) 为使圆 $C(a)$只与 E 中唯一的圆外切，求 a 的值；(3) 对于除去(2)规定的 a 值，当 $C(a)$与 $C(b)$外切时，试用 a 表出 b 的**

值；(4) 若 $C(a_1)$、$C(a_2)$、$C(a_3)$、$C(a_4)$逐个相外切，且 $a_1=\frac{1}{2}>a_2>a_3>a_4$，试求 a_4 的值.

［解］ (1) 圆 $C(a)$的圆心为 $(a,\ a^2)$，半径长为 a^2；圆 $C(b)$ 的圆心为 $(b,\ b^2)$，半径长为 b^2. 为使圆 $C(a)$与圆 $C(b)$外切，应有

$$\sqrt{(a-b)^2+(a^2-b^2)^2}=a^2+b^2,$$

即
$$(a-b)^2=4a^2b^2\cdots①.$$

(2) 由(1)可知，在 E 中与圆 $C(a)$相外切的圆 $C(b)$其圆心的横坐标必须且只须满足 ① 式. 化 ① 式为 b 的二次方程$(4a^2-1)b^2+2ab-a^2=0\cdots$ ②. 当 $4a^2-1\neq0$ 时，其判别式 $\Delta=4a^2+4a^2(4a^2-1)=16a^4$，$\therefore$ 对于任意的 $a\neq0$，方程 ② 总有两不等的实根. 而抛物线 $y=x^2$ 中的 $x\in(-\infty,\infty)$，故必有 E 中的两个圆都和 $C(a)$外切. 为使圆 $C(a)$只与 E 中唯一的圆外切，则方程 ② 只能有一解，$\therefore$ $4a^2-1=0$，故 $a=\pm\frac{1}{2}$.

(3) 当 $a\neq\pm\frac{1}{2}$ 时，即 $4a^2-1\neq0$ 时，由 ② 解得

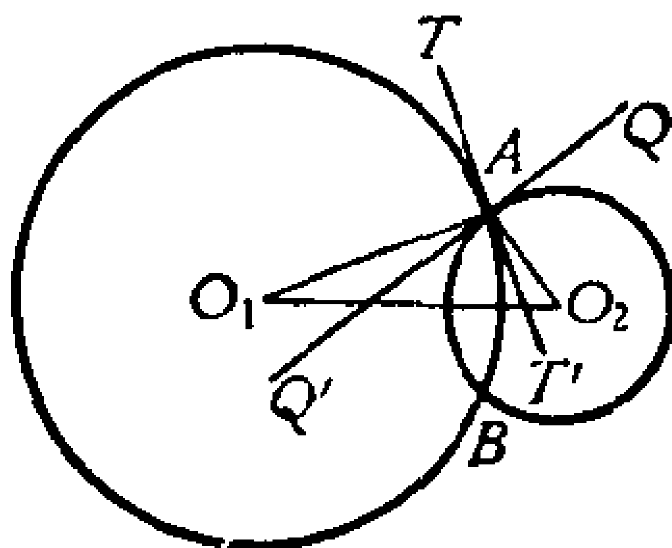
$$b=\frac{-a\pm\sqrt{4a^4}}{4a^2-1}=\frac{-a\pm2a^2}{4a^2-1}=\frac{a(1\mp2a)}{(1-2a)(1+2a)}=\frac{a}{1\pm2a}\cdots③.$$

(4) $\because$ $C(a_1)$ 和 $C(a_2)$ 外切，且 $a_1=\frac{1}{2}>a_2$，由 ③ 可得 $a_2=\frac{1}{4}$. 又 $\because$ $C(a_2)$和 $C(a_3)$外切，且 $a_2=\frac{1}{4}>a_3$，由 ③ 可得 $a_3=\frac{1}{6}$.

同理可得 $a_4=\frac{1}{8}$.

431. 求两圆 $x^2+y^2+D_ix+E_iy+F_i=0\ (i=1,\ 2)$的夹角 θ.

［分析］ 过两圆交点各自的切线分别与两圆半径垂直，故两圆的交角等于过交点两圆的半径的夹角或它的补角[1].



［解］ 设 A 为两圆的一个交点，过点 A 圆 O_1 的切线为 TT'，圆 O_2 的切线为 QQ'.

$$\because\quad O_1A\perp TT',\ O_2A\perp QQ';$$

$$\therefore\quad \angle TAQ'=\angle O_1AO_2=\theta,\quad 或\quad \pi-\angle O_1AO_2=\theta.$$

[1] 两曲线的交角一般规定为过交点两切线所夹的锐角或直角。

$$\cos\theta=\left|\frac{|O_1A|^2+|O_2A|^2-|O_1O_2|^2}{2|O_1A||O_2A|}\right|,$$

而 $\quad |O_1A|^2=\frac{1}{4}(D_1^2+E_1^2-4F_1),\quad |OA_2|^2=\frac{1}{4}(D_2^2+E_2^2-4F_2),$

$$|O_1O_2|^2=\left(\frac{D_1}{2}-\frac{D_2}{2}\right)^2+\left(\frac{E_1}{2}-\frac{E_2}{2}\right)^2.$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{|D_1D_2+E_1E_2-2(F_1+F_2)|}{\sqrt{D_1^2+E_1^2-4F_1}\sqrt{D_2^2+E_2^2-4F_2}}.$$

从此即可求得 θ.

432. **求证两圆 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 和 $x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 互相直交的充要条件为 $D_1D_2+E_1E_2-2(F_1+F_2)=0$.**

[证] 两圆直交，即过它们交点的切线互相垂直，则两圆中心和它们的交点组成一直角三角形. 根据勾股定理及其逆定理，可得两圆过它们交点的切线互相垂直的充要条件为:

$$\frac{1}{4}(D_1^2+E_1^2-4F_1)+\frac{1}{4}(D_2^2+E_2^2-4F_2)=\left(\frac{D_1}{2}-\frac{D_2}{2}\right)^2+\left(\frac{E_1}{2}-\frac{E_2}{2}\right)^2,$$

即 $$D_1D_2+E_1E_2-2(F_1+F_2)=0.$$

[说明] 这个充要条件也可直接从上题的结论中导出.

433. **求证两圆 $x^2+y^2-2mx-2ny-m^2+n^2=0$ 和 $x^2+y^2-2nx+2my+m^2-n^2=0$ 在交点处的切线互相垂直.**

[证一] 应用上题两圆直交的充要条件，即可证明.

[证二] 设两圆的交点坐标为 $(x_1,\ y_1)$，则

$$x_1^2+y_1^2-2mx_1-2ny_1-m^2+n^2=0,\ x_1^2+y_1^2-2nx_1+2my_1+m^2-n^2=0.$$

相加得 $$2(x_1^2+y_1^2)-2(m+n)x_1+2(m-n)y_1=0,$$

即 $$x_1^2+y_1^2-(m+n)x_1+(m-n)y_1=0.$$

过交点的两圆切线方程为:

$$x_1x+y_1y-m(x+x_1)-n(y+y_1)-m^2+n^2=0,$$

即 $$(x_1-m)x+(y_1-n)y-(mx_1+ny_1+m^2-n^2)=0;$$

$$x_1x+y_1y-n(x+x_1)+m(y+y_1)+m^2-n^2=0,$$

即 $$(x_1-n)x+(y_1+m)y-(nx_1-my_1-m^2+n^2)=0.$$

$$\because\quad (x_1-m)(x_1-n)+(y_1-n)(y_1+m)$$
$$=x_1^2+y_1^2-(m+n)x_1+(m-n)y_1=0,$$

$\therefore$ 过点$(x_1,\ y_1)$的两切线互相垂直.

434. 试证圆 $x^2+y^2-4x+1=0$ 与通过点$(-1,\ 0)$、$(1,\ 0)$ 的任一圆 C 互相直交.

[分析一] 由于直交两圆在交点处的切线互相垂直，故只要写出已知圆和过点$(-1,\ 0)$、$(1,\ 0)$的圆在交点处的切线的方程，即可验证.

[证一] 过$(-1,\ 0)$、$(1,\ 0)$的任一圆 C 的方程为 $x^2+y^2-2\lambda y-1=0$，设圆 C 与圆 $x^2+y^2-4x+1=0$ 的交点坐标为$(x_1,\ y_1)$，则 $x_1^2+y_1^2-4x_1+1=0$, $x_1^2+y_1^2-2\lambda y_1-1=0$. 相加得 $x_1^2+y_1^2-2x_1-\lambda y_1=0$. 过点$(x_1,\ y_1)$的两圆的切线方程分别为：

$$x_1x+y_1y-2(x+x_1)+1=0,\quad x_1x+y_1y-\lambda(y+y_1)-1=0.$$

即
$$(x_1-2)x+y_1y-2x_1+1=0,\quad x_1x+(y_1-\lambda)y-\lambda y_1-1=0.$$

$$\because\quad (x_1-2)x_1+y_1(y_1-\lambda)=x_1^2+y_1^2-2x_1-\lambda y_1=0,$$

$\therefore$ 过交点$(x_1,\ y_1)$的两圆的切线互相垂直.

[分析二] 直接利用两圆直交的充要条件证明(参见第432题).

[证二] 过$(-1,\ 0)$、$(1,\ 0)$的任一圆的方程为 $x^2+y^2-2\lambda y-1=0$,（λ 为任意常数）. $\because$ $(-4)\cdot 0+0\cdot(-2\lambda)-2(1-1)=0$, $\therefore$ 圆 $x^2+y^2-4x+1=0$ 和过点$(-1,\ 0)$、$(1,\ 0)$的任一圆 C 互相直交.

435. **求证：过两已知点 $(0,\ a)$、$(0,\ -a)$ 且与直线 $y=mx+c$ 相切的两圆，当 $c^2=a^2(2+m^2)$时，互相直交.**

[分析] 在假设过两已知点$(0,\ a)$、$(0,\ -a)$的两圆后，根据它们和直线 $y=mx+c$ 相切，及题设的关系，设法推得两圆直交的充要条件即可得证.

[证] 设过两已知点$(0,\ a)$、$(0,\ -a)$的任意两圆方程为：$x^2+y^2-2\lambda_1x-a^2=0$, $x^2+y^2-2\lambda_2x-a^2=0$. 若与直线 $y=mx+c$ 相切，则方程 $x^2+(mx+c)^2-2\lambda_ix-a^2=0$ $(i=1,\ 2)$有等根，

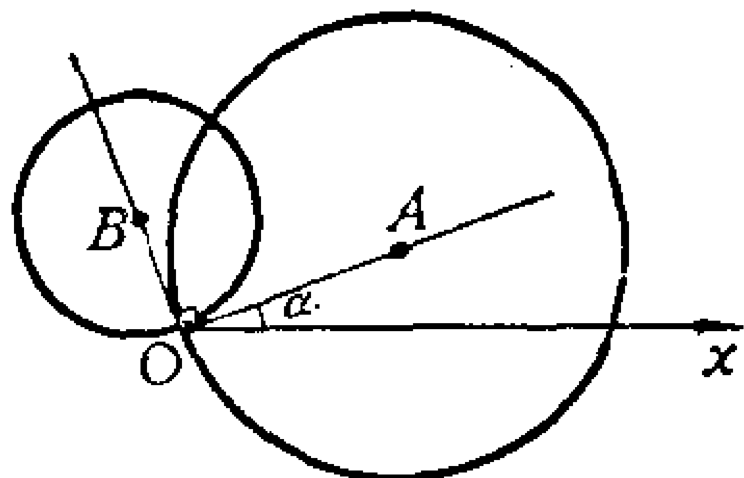
$$\therefore\quad \Delta=4(mc-\lambda_i)^2-4(1+m^2)(c^2-a^2)=0,$$

即
$$\lambda_i^2-2\lambda_imc-c^2+a^2(1+m^2)=0\quad (i=1,\ 2).$$

因 $c^2=a^2(2+m^2)$，故 $\lambda_i^2-2\lambda_imc-a^2=0$，$\lambda_1$、$\lambda_2$ 是此方程的两个根.

$\therefore \lambda_1\cdot\lambda_2=-a^2$, 即 $\lambda_1\lambda_2+a^2=0$. 此即两圆直交的充要条件,故此两圆直交.

436. 求证两圆 $\rho=a\cos(\theta-\alpha)$, $\rho=b\sin(\theta-\alpha)$ 直交.



[证] $\because$ 圆 $\rho=a\cos(\theta-\alpha)$的圆心为 $A\left(\frac{a}{2},\alpha\right)$, 另一圆的圆心为 $B\left(\frac{b}{2},\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$, $\therefore \angle AOB=\frac{\pi}{2}$.
即 $AO\perp BO$, 亦即过两圆交点的两条切线互相垂直. 故两圆直交.

437. 设点 P 关于一已知圆的切点弦与它关于另一相离的已知圆的切点弦相交于点 Q. 求证以 PQ 为直径的圆过两定点,且与这两已知圆直交.

[证] 取两已知圆连心线为 x 轴,其根轴为 y 轴,建立坐标系,使两圆的方程为: $x^2+y^2-2\lambda_ix+c=0$ ($c>0$, $i=1, 2$). 设点 P 坐标为 (x_1, y_1), 则其关于两圆的切点弦方程为 $x_1x+y_1y-\lambda_i(x+x_1)+c=0$, ($i=1, 2$). $\because$ 它们过同一点 $Q(x_2, y_2)$, 故

$$x_1x_2+y_1y_2-\lambda_1(x_1+x_2)+c=0,\quad x_1x_2+y_1y_2-\lambda_2(x_1+x_2)+c=0.$$

$$\therefore\quad x_2=-x_1,\ y_2=\frac{x_1^2-c}{y_1}\quad (y_1\neq0).$$

以 PQ 为直径的圆方程为 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$, 即

$$x^2+y^2-y\frac{x_1^2+y_1^2-c}{y_1}-c=0.$$

$\therefore$ 此圆过两定点 $(\sqrt{c}, 0)$、$(-\sqrt{c}, 0)$. 故在 $c>0$ 时, 根据两圆直交的充要条件: $D_1D_2+E_1E_2-2(F_1+F_2)=0$, 可知此圆与两已知圆直交.

§3. 圆 系

438. 求以相交两圆 C_1: $x^2+y^2+4x+y+1=0$ 及 C_2: $x^2+y^2+2x+2y+1=0$ 的公共弦为直径的圆方程.

[分析] 由于所求圆过两已知圆的交点, 其方程可用圆系方程 $c_1+\lambda c_2=0$ 设之, 其圆心坐标就可用 λ 表出. 再利用圆心在公共弦上, 求得 λ 的

值即可.

［解］ 两圆的方程相减，得 $2x-y=0$. 此即两圆公共弦所在的直线方程. 显然，圆 C_2 的圆心$(-1,\ -1)$不在此直线上，故可设所求圆的方程为 $x^2+y^2+4x+y+1+\lambda(x^2+y^2+2x+2y+1)=0$，即

$$(1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2+2(2+\lambda)x+(1+2\lambda)y+(1+\lambda)=0.$$

其圆心 C 的坐标为 $\left(-\frac{2+\lambda}{1+\lambda},\ -\frac{1+2\lambda}{2(1+\lambda)}\right)$. ∵ 点 C 在直线 $2x-y=0$ 上，∴ $-\frac{2(2+\lambda)}{1+\lambda}+\frac{1+2\lambda}{2(1+\lambda)}=0$，即 $2\lambda+7=0$，∴ $\lambda=-\frac{7}{2}$. 故所求的方程为 $-\frac{5}{2}x^2-\frac{5}{2}y^2-3x-6y-\frac{5}{2}=0$，即 $5x^2+5y^2+6x+12y+5=0$.

［说明］ (1) 在求过两已知圆交点的圆时，常利用圆系方程.

(2) 圆系方程 $\lambda C_1+\mu C_2=0$ 表示所有过圆 $C_1=0$ 和 $C_2=0$ 交点的圆，但一般常用 $C_1+\lambda C_2=0$ 的形式. 后一形式不包括圆 $C_2=0$ 本身. 故使用这一形式时，必须确定所求的圆不可能是圆 $C_2=0$ 才行.

(3) 在 $C_1+\lambda C_2=0$ 中，若 $\lambda=-1$，则此方程表示两圆的根轴方程. 当两圆相交时，即为公共弦所在的直线方程；当两圆相切时，即为其内公切线方程.

439. **求过两圆 $x^2+y^2+2x+3y-7=0$ 和 $x^2+y^2+3x-2y-1=0$ 的交点及点(1, 2)的圆方程.**

［解］ ∵ 当 $x=1$, $y=2$ 时，$x^2+y^2+3x-2y-1=3\neq0$，∴ 点(1, 2)不在圆 $x^2+y^2+3x-2y-1=0$ 上，故设所求的圆方程为

$$x^2+y^2+2x+3y-7+\lambda(x^2+y^2+3x-2y-1)=0.$$

以 $x=1$, $y=2$ 代入，得 $6+3\lambda=0$，∴ $\lambda=-2$. 故所求的圆方程为

$$x^2+y^2+2x+3y-7-2(x^2+y^2+3x-2y-1)=0,$$

化简得

$$x^2+y^2+4x-7y+5=0.$$

440. **求过两已知圆 C_1: $x^2+y^2-4x+2y=0$ 和 C_2: $x^2+y^2-2y-4=0$ 的交点，且圆心在直线 l: $2x+4y=1$ 上的圆方程.**

［解］ ∵ 圆 C_2 的圆心(0, 1)不在直线 l 上，∴ 可设所求圆的方程为

$$x^2+y^2-4x+2y+\lambda(x^2+y^2-2y-4)=0,$$

即

$$(1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2-4x+2(1-\lambda)y-4\lambda=0\cdots①.$$

其圆心C为$\left(\frac{2}{1+\lambda}, \frac{\lambda-1}{1+\lambda}\right)$. 又点$C$在直线$l$上, $\therefore \frac{4}{1+\lambda}+\frac{4(\lambda-1)}{1+\lambda}=1$. 解此方程, 得$\lambda=\frac{1}{3}$. 代入①, 得所求的圆方程为

$$\frac{4}{3}x^2+\frac{4}{3}y^2-4x+\frac{4}{3}y-\frac{4}{3}=0, \quad 即 \quad x^2+y^2-3x+y-1=0.$$

441. 求以圆$x^2+y^2-2ay=0$截直线$y=mx+k$所得的弦为直径的圆方程.

[解] 设所求的圆方程为$x^2+y^2-2ay+\lambda(y-mx-k)=0$, 即$x^2+y^2-m\lambda x-(2a-\lambda)y-\lambda k=0$. 其圆心$C$的坐标为$\left(\frac{\lambda m}{2}, \frac{2a-\lambda}{2}\right)$. $\because$点C在直线$y=mx+k$上, $\therefore \frac{2a-\lambda}{2}=\frac{\lambda m^2}{2}+k$. 解此方程, 得$\lambda=\frac{2(a-k)}{1+m^2}$. 故所求的圆方程为

$$x^2+y^2-\frac{2m(a-k)}{1+m^2}x-\left[2a-\frac{2(a-k)}{1+m^2}\right]y-\frac{2k(a-k)}{1+m^2}=0,$$

即　$(1+m^2)x^2+(1+m^2)y^2-2m(a-k)x-2(am^2+k)y-2k(a-k)=0$.

442. 求过两圆$x^2+y^2=4$和$x^2+y^2-2x-4y+4=0$的两个交点, 且和直线$x+2y=0$相切的圆方程.

[解] 圆$x^2+y^2=4$和直线$x+2y=0$相交, 故可设所求的圆方程为

$$\lambda(x^2+y^2-4)+x^2+y^2-2x-4y+4=0,$$

即
$$(\lambda+1)x^2+(\lambda+1)y^2-2x-4y-4(\lambda-1)=0.$$

以$x=-2y$代入, 得$5(\lambda+1)y^2=4(\lambda-1)$. $\because$所求圆和直线$x+2y=0$相切, 且$\lambda\neq-1$, $\therefore \lambda-1=0$, 即$\lambda=1$. 故所求的圆方程为

$$x^2+y^2-x+2y=0.$$

443. 求过直线$2x+y+4=0$和圆$x^2+y^2+2x-4y+1=0$的交点, 且满足下列条件之一的圆方程: (1) 过原点; (2) 有最小面积.

[解] 设所求的圆方程为$x^2+y^2+2x-4y+1+\lambda(2x+y+4)=0$, 即

$$x^2+y^2+2(1+\lambda)x+(\lambda-4)y+(1+4\lambda)=0\cdots①.$$

(1) $\because$此圆过原点, $\therefore 1+4\lambda=0$, $\lambda=-\frac{1}{4}$. 故所求的圆方程为

$$x^2+y^2+\frac{3}{2}x-\frac{17}{4}y=0.$$

(2) 当半径最小时,圆面积也最小. 由 ① 得

$$[x+(1+\lambda)]^2+\left(y+\frac{\lambda-4}{2}\right)^2=(1+\lambda)^2+\frac{(\lambda-4)^2}{4}-4\lambda-1$$
$$=\frac{5}{4}\left(\lambda-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{4}{5}.$$

∴ 当 $\lambda=\frac{8}{5}$ 时,此圆的面积最小. 故满足条件的圆方程为

$$\left(x+\frac{13}{5}\right)^2+\left(y-\frac{6}{5}\right)^2=\frac{4}{5}.$$

444. 求证过两定点(x_1, y_1)、(x_2, y_2)的圆系方程为

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+k[(x-x_1)(y_2-y_1)$$
$$-(y-y_1)(x_2-x_1)]=0\cdots①,$$

其中 k 为参数.

[分析] 显然 ① 为过两定点(x_1, y_1)、(x_2, y_2)的圆方程,故只需证明对于任意给出的一个符合条件的圆,总能找到一个常数 k, 使 ① 式为此圆的方程.

[证] 设 C 为任一过点(x_1, y_1)、(x_2, y_2)的圆. 在 C 上另取一异于这两点的点(x_3, y_3), 代入 ① 式,得

$$(x_3-x_1)(x_3-x_2)+(y_3-y_1)(y_3-y_2)+k[(x_3-x_1)(y_2-y_1)$$
$$-(y_3-y_1)(x_2-x_1)]=0.$$

∵ (x_1, y_1)、(x_2, y_2)、(x_3, y_3)为圆 C 上不同的三点,故此三点不共线,

$$\therefore\quad (x_3-x_1)(y_2-y_1)-(y_3-y_1)(x_2-x_1)\neq 0.$$

取
$$k=-\frac{(x_3-x_1)(x_3-x_2)+(y_3-y_1)(y_3-y_2)}{(x_3-x_1)(y_2-y_1)-(y_3-y_1)(x_2-x_1)},$$

则 ① 式即可化为

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)$$
$$-\frac{(x_3-x_1)(x_3-x_2)+(y_3-y_1)(y_3-y_2)}{(x_3-x_1)(y_2-y_1)-(y_3-y_1)(x_2-x_1)}$$
$$\cdot[(x-x_1)(y_2-y_1)-(y-y_1)(x_2-x_1)]=0.$$

显然,这是一个圆方程,且过点(x_1, y_1)、(x_2, y_2)、(x_3, y_3). ∵ 过这三点的

圆只有一个，即圆C. ∴此方程即为圆C的方程. 故任一过点(x_1, y_1)、(x_2, y_2)的圆均可表示为①式.

［说明］(1) 凡求过两定点的圆，利用本题的结论去解时，只需确定一个常数，简化了解的过程.

(2) 当$k=0$时，①式即为以(x_1, y_1)、(x_2, y_2)的连线为直径的圆方程.

445. 求与已知圆$x^2+y^2-7y+10=0$相交，所得公共弦平行于已知直线$2x-3y-1=0$，且过点$(-2, 3)$、$(1, 4)$的圆方程.

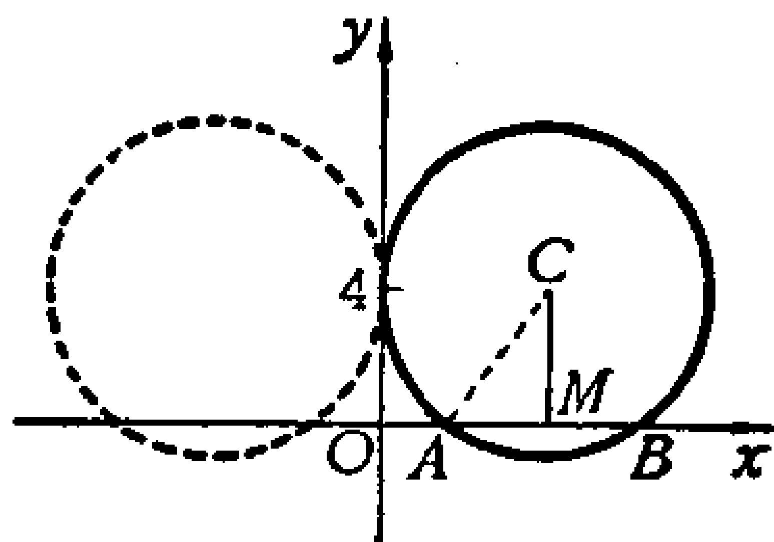
［解］因为所求的圆过点$(-2, 3)$和$(1, 4)$，故根据上题结论可设其方程为$(x+2)(x-1)+(y-3)(y-4)+k[(x+2)-(y-3)\cdot 3]=0$，即

$$x^2+y^2+(k+1)x-(3k+7)y+11k+10=0 \cdots ①.$$

∵已知圆方程为$x^2+y^2-7y+10=0\cdots②$，∴它们的公共弦所在的直线方程是$(k+1)x-3ky+11k=0$. 又∵此直线平行于直线$2x-3y-1=0$，故得$\frac{k+1}{2}=\frac{-3k}{-3}$，∴$k=1$. 代入①式，即得所求圆的方程

$$x^2+y^2+2x-10y+21=0.$$

446. 求与y轴切于点$(0, 4)$，且在x轴上截取的弦长为6的圆方程.



［分析］与y轴相切于定点的圆，其圆心的纵坐标即为此定点的纵坐标，而半径则等于圆心的横坐标的绝对值.

［解］根据已知条件，可设满足条件的圆的圆心为$C(a, 4)$，半径长为$|a|$. 若此圆交x轴于A、B，则$|AB|=6$. 作$CM\perp AB$，交AB于M，则$|AM|=3$. 而$|AC|=|a|$，$|CM|=4$，又$|AC|^2=|AM|^2+|CM|^2=25$，∴$|a|=5$，$a=\pm 5$. 故所求的圆方程为

$$(x\mp 5)^2+(y-4)^2=25, \quad 即 \quad x^2+y^2\mp 10x-8y+16=0.$$

447. 求证：与直线$x=a$，$y=b$相切的圆的方程均可表示为$(x-a-p)^2+(y-b\mp p)^2=p^2$的形式（$p$为待定常数）.

［分析］与直线$x=a$相切的圆，其半径必为圆心的横坐标与a之差的绝对值. 同样，与直线$y=b$相切的圆，其半径必为圆心的纵坐标与b之差

的绝对值．由此考虑即可得证．

［证］ 设满足条件的圆的圆心坐标为(α, β)．由于此圆与直线$x=a$, $y=b$相切，其半径应等于$|\alpha-a|$或$|\beta-b|$，∴ 此圆方程可表示为$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(\alpha-a)^2$…①．设$p=\alpha-a$…②，则$\alpha=a+p$…③，且$|p|=|\alpha-a|=|\beta-b|$，∴ $\pm p=\beta-b$，即$\beta=b\pm p$…④．以③、④代入①，即得$(x-a-p)^2+(y-b\mp p)^2=p^2$．故任一与直线$x=a$, $y=b$相切的圆的方程均可表示为此种形式．

［说明］ (1) 凡涉及分别同平行于两坐标轴的直线相切的圆，利用本题结论去解，只需确定一个常数．

(2) 当方程$(x-a-p)^2+(y-b\mp p)^2=p^2$为一圆方程时，$p\neq 0$．否则，此方程仅表示两个点．

(3) 当研究只同$x=a$或$y=b$中一条直线相切的圆时，也可使用此方程，但此时a、b、p三者之中有两个为待定常数．

448．求过点$A(2, 0)$、$B(5, 0)$且与直线l：$y=2x$相切的圆方程．

［分析一］ 由于所求圆与已知直线l相切，由圆方程和直线l的方程组成的方程组必有两组相同的解．据此以及所求圆过两已知点的条件，即可得符合条件的圆方程．

［解一］ 设所求的圆方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，∵ 此圆过点$A(2, 0)$、$B(5, 0)$，∴ $4+2D+F=0$…①，$25+5D+F=0$…②．由①、②解得$D=-7$，$F=10$．又∵ 此圆和直线$y=2x$相切，∴ 方程$5x^2+(D+2E)x+F=0$的判别式为零，即$(D+2E)^2-20F=0$．以D、F的值代入，得$E=\dfrac{7\pm 10\sqrt{2}}{2}$．故所求的圆方程为

$$x^2+y^2-7x+\frac{7\pm 10\sqrt{2}}{2}y+10=0.$$

［分析二］ 由于所求圆过两已知点，故也可利用第444题结论解之．

［解二］ ∵ 所求圆过点$A(2, 0)$、$B(5, 0)$，故可设其方程为

$(x-2)(x-5)+y^2+k\cdot 3y=0$，即 $x^2+y^2-7x+3ky+10=0$…①．

以$y=2x$代入①式，得$5x^2+(6k-7)x+10=0$．∵ 所求圆和直线$y=2x$

相切，$\therefore (6k-7)^2-4\cdot5\cdot10=0$.解此方程，得 $k=\dfrac{7\pm10\sqrt{2}}{6}$. 代入①式，即得所求圆的方程 $x^2+y^2-7x+\dfrac{7\pm2\sqrt{10}}{2}y+10=0$.

449. 设 P_1、P_2 为两圆 C_1: $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 和 C_2: $x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 的圆心，而 P 为圆 C:

$$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+k(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$$

的圆心($k\neq-1$). 求证 $\dfrac{P_1P}{PP_2}=k$.

[分析] 从所给圆方程中求出 P_1、P、P_2 的坐标，并进行验证即可.

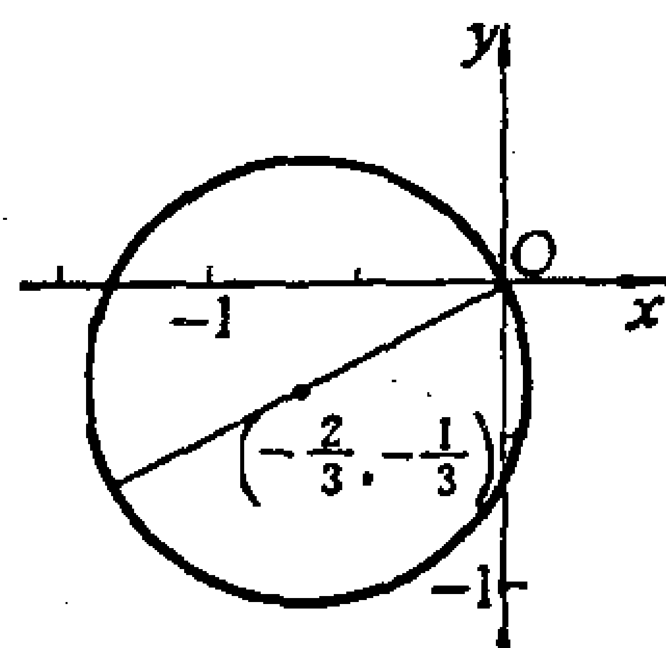
[证] 由圆 C_1、C_2、C 的方程，可得其圆心 P_1、P_2、P 的坐标分别为 $\left(-\dfrac{D_1}{2},\ -\dfrac{E_1}{2}\right)$、$\left(-\dfrac{D_2}{2},\ -\dfrac{E_2}{2}\right)$ 及 $\left(-\dfrac{D_1+kD_2}{2(1+k)},\ -\dfrac{E_1+kE_2}{2(1+k)}\right)$.

$$\because\quad -\frac{D_1+kD_2}{2(1+k)}=\frac{-\frac{D_1}{2}+k\left(-\frac{D_2}{2}\right)}{1+k},\quad -\frac{E_1+kE_2}{2(1+k)}=\frac{-\frac{E_1}{2}+k\left(-\frac{E_2}{2}\right)}{1+k},$$

$$\therefore\quad \frac{P_1P}{PP_2}=k.$$

§4. 图象与区域

450. 已知复数 $z=x+iy$，求在复平面上满足 $|2z+1|=|z-i|$ 之点集的图象，并在点集内求使 $|z|$ 有最大值的点的坐标.



[分析] 将用复数表示的条件转化为用实数表示即可.

[解] $|2z+1|=|z-i|$, 即

$$|(2x+1)+2yi|=|x+i(y-1)|,$$

亦即
$$\sqrt{(2x+1)^2+4y^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}.$$

得
$$x^2+y^2+\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}y=0,\quad 即\quad \left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{9}.$$

$\therefore$ 图象是圆心在 $\left(-\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$、半径是 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ 的圆周. 点集内使 $|z|=$

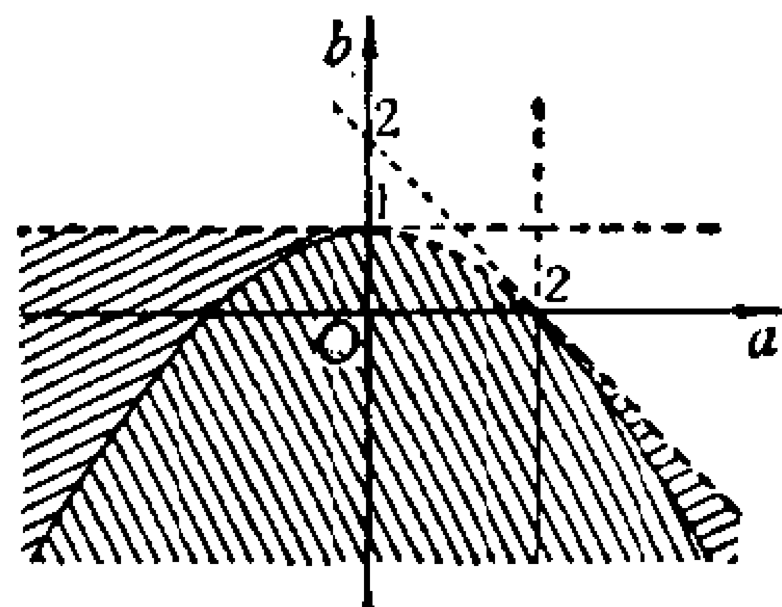
$\sqrt{x^2+y^2}$ 有最大值的点，即是过原点的直径的另一端点$\left(-\frac{4}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$.

［说明］ $\because |2z+1|=2\left|z+\frac{1}{2}\right|$，故原方程$|2z+1|=|z-i|$的几何意义为点 Z 到点$\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$距离的两倍等于点 Z 到点$(0,\ 1)$的距离．因此本题亦即已知点 $M(x,\ y)$到点$(0,\ 1)$的距离等于到点$\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$距离的两倍，求点 M 的轨迹．

451．如果连结 $A(0,\ 2)$、$B(2,\ 2)$的线段 AB 恒在圆 C：

$$x^2+y^2-2ax-2by=0$$

的外部，试画图表示这个圆的圆心存在的范围．



［分析］ 线段 AB 在圆 C 的外部有两种情况：一种是线段 AB 所在直线与圆 C 无公共点；另一种是线段 AB 所在直线虽与圆 C 有公共点，但圆心 C 到 A、B 的距离均大于半径，且圆心 C 在直线 AB 上的射影不在线段 AB 上．由此便能找出圆心存在范围的边界．

［解］ 改写圆 C 的方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2$，故圆心 C 的坐标为$(a,\ b)$，半径为 $\sqrt{a^2+b^2}$．$\because$ 直线 AB 的方程为 $y-2=0$，$\therefore$ 圆心 C 到直线 AB 的距离等于$|b-2|$．当$|b-2|>\sqrt{a^2+b^2}$，即 $b<1-\frac{a^2}{4}$…①时，显然直线 AB 与圆 C 相离，故线段 AB 在圆 C 的外部．

当$|b-2|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$…② 时，如圆心 C 在直线 $y-2=0$ 上的射影为 M，$\because AM$、BM 同号，$\therefore (a-0)(a-2)>0$．解不等式组：

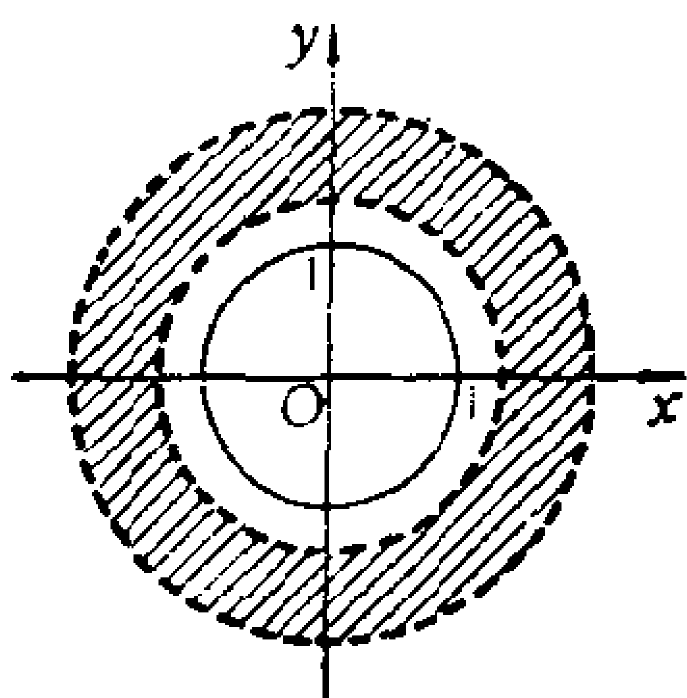
$$\begin{cases}|CA|>\sqrt{a^2+b^2}\\|CB|>\sqrt{a^2+b^2}\\(a-0)(a-2)>0,\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}\sqrt{a^2+(b-2)^2}>\sqrt{a^2+b^2}\\\sqrt{(a-2)^2+(b-2)^2}>\sqrt{a^2+b^2}\\a(a-2)>0.\end{cases}$$

结合 ②，得$\begin{cases}1>b\geqslant 1-\frac{a^2}{4}\\a+b<2\\a<0,\text{ 或 }a>2\end{cases}$…③．

由 ①、③ 即可得圆心存在的范围是图上划有斜线的部分．

［说明］ 求符合给定条件的点集的图象，一般可先研究其边界.

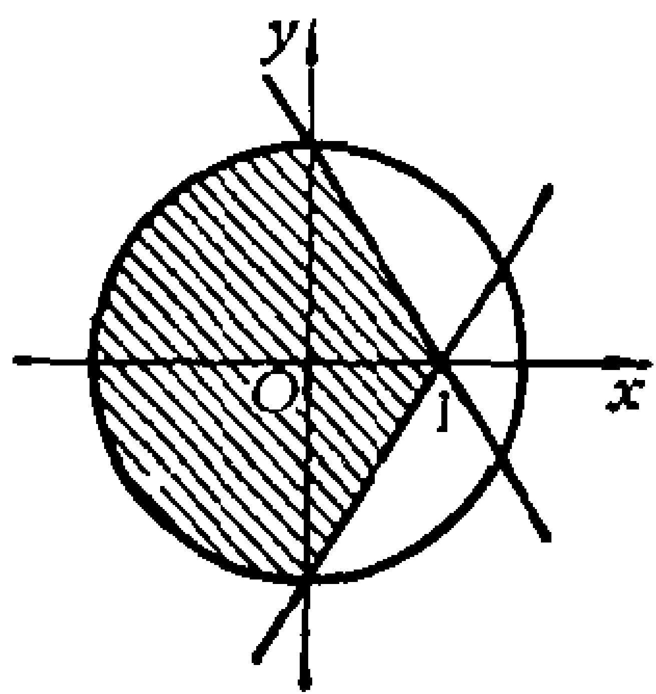
452. 设区域 A 为圆 $x^2+y^2=1$ 的外部与圆 $x^2+y^2=2$ 的内部的公共部分，点 $P(x, y)$ 在 A 中运动，求点 $Q(x+y, x-y)$ 运动的范围.



［分析］ 由于点 Q 的坐标和点 P 的坐标之间的关系已知，而点 P 又可看作在半径大于 1 而小于 2 的诸同心圆上移动，点 Q 的运动范围即可求得.

［解］ 设点 Q 的坐标为 (x_0, y_0)，则 $x_0=x+y$，$y_0=x-y$. 由此解得 $x=\frac{x_0+y_0}{2}$，$y=\frac{x_0-y_0}{2}$. 点 $P(x, y)$ 在圆 $x^2+y^2=r^2$ 上移动（其中 $1<r^2<2$）. 故有 $\left(\frac{x_0+y_0}{2}\right)^2+\left(\frac{x_0-y_0}{2}\right)^2=r^2$，即 $\frac{x_0^2+y_0^2}{2}=r^2$. $\because 1<r^2<2$，$\therefore 2<x_0^2+y_0^2<4$. 以 x、y 分别换以 x_0、y_0，得 $2<x^2+y^2<4$. 故点 Q 的运动范围为圆 $x^2+y^2=2$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 之间的部分. 即图上阴影部分（不包括边界）.

453. 已知直线 $k^2x-ay-1=0$ 和直线 $k^2x+ay+k=0$，其中 $0<a<1$. (1) 以上两直线同过点 $(1, 0)$，试求 k 的值；(2) 求由(1)确定的两直线与圆 $x^2+y^2=\frac{1}{a^2}$ 的交点；(3) 求由(1)确定的两直线与(2)中的圆所包围的，且包含原点的那部分区域的面积.



［解］ (1) $\because$ 两直线 $k^2x-ay-1=0$ 和 $k^2x+ay+k=0$ 都过点 $(1, 0)$，$\therefore k^2-1=0$，且 $k^2+k=0$，故 $k=-1$.

(2) 由(1)确定的两直线方程分别为 $x-ay-1=0$…① 和 $x+ay-1=0$…②. $\because a\neq 0$，故由①得 $y=\frac{x-1}{a}$. 代入圆方程 $x^2+y^2=\frac{1}{a^2}$，得

$$[(a^2+1)x-2]x=0, \quad \therefore \quad x=0 \quad 或 \quad x=\frac{2}{a^2+1}.$$

代入①式，得 $y=-\frac{1}{a}$，或 $y=\frac{1-a^2}{a(a^2+1)}$. 故直线①和圆 $x^2+y^2=\frac{1}{a^2}$ 的交点为 $\left(0,\ -\frac{1}{a}\right)$ 和 $\left(\frac{2}{a^2+1},\ \frac{1-a^2}{a(a^2+1)}\right)$. 同理可得，直线②与圆的交点为 $\left(0,\ \frac{1}{a}\right)$ 和 $\left(\frac{2}{a^2+1},\ -\frac{1-a^2}{a(a^2+1)}\right)$.

(3) 题中所指的区域是图上阴影部分，其面积

$$S=\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{1}{a^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{a}\cdot 1=\frac{\pi+2a}{2a^2}.$$

454. 已知集合

$$D_a=\{(x,\ y)\,|\,x^2-2ax+y^2+2(a-2)y+2>0\}.$$

(1) 当 a 为小于 1 的某一常数时，图示 D_a; (2) 当 a 在区间 $(-\infty,\ 1)$ 内变化时，图示同时属于一切 D_a 的元素所组成的集合.

[解] (1) 将不等式 $x^2-2ax+y^2+2(a-2)y+2>0$ 变形，得 $(x-a)^2+[y+(a-2)]^2>2(a-1)^2$. 由于 a 为小于 1 的某一常数，集合 D_a 即为图 1 上圆：$(x-a)^2+[y+(a-2)]^2=2(a-1)^2$ 的圆外部分(不包括边界).

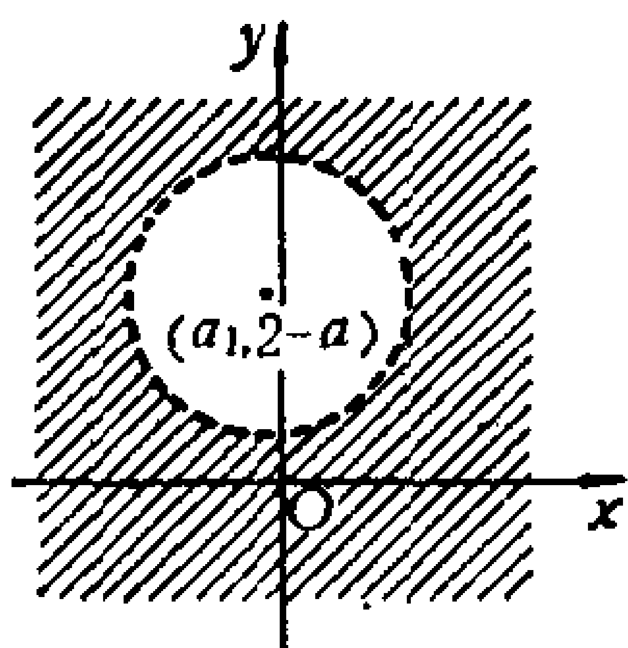


图 1

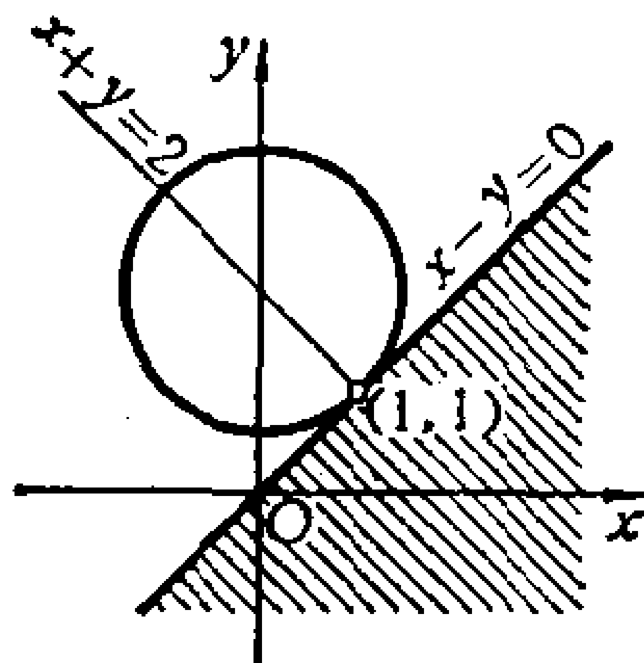


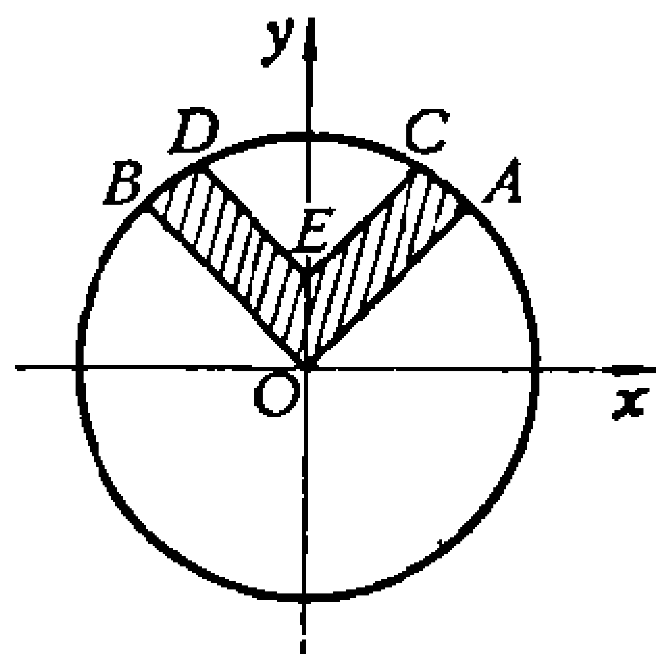
图 2

(2) 由(1)可知，对于 a 为区间 $(-\infty,\ 1)$ 内的任一值时，D_a 表示某一圆的圆外部分. 此圆的圆心坐标为 $\begin{cases}x=a\\ y=2-a,\end{cases}$ 满足方程 $x+y=2\ (x<1)$.

$\because\ x^2-2ax+y^2+2(a-2)y+2=x^2+y^2-4y+2-2a(x-y)=0$，而圆 C: $x^2+y^2-4y+2=0$ 的中心 $(0,\ 2)$ 到直线 l: $x-y=0$ 的距离 $d=\left|\frac{0-2}{\sqrt{2}}\right|=\sqrt{2}$ 等于圆 C 的半径. $\therefore$ 方程 $x^2-2ax+y^2+2(a-2)y+2=0$ 表示与圆

C 和直线 l 相切的圆系. ∵ $a<1$, ∴ 此圆系中的圆与圆 C 均在直线 $x-y=0$ 的同侧. 当 $a\to-\infty$ 时,相应圆的半径 $\sqrt{2}|a-1|\to\infty$. 故符合条件的集合 D_a 在直角坐标平面内即表示图 2 中阴影部分, 包括除点(1, 1)以外的直线 $x-y=0$ 上所有的点.

455. 作出点集 D: $\{(x, y)\,|\,|x|\leqslant y\leqslant|x|+\sqrt{3}-1,\ x^2+y^2\leqslant4\}$, 并求其面积.



[分析] 将集合中元素应满足的不等式改为相应的等式,即可得点集 D 所表示的区域的边界.

[解] 设直线 $y=|x|$, $y=|x|+\sqrt{3}-1$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 分别交于 A、B, C、D; 圆心为 O. $y=|x|+\sqrt{3}-1$ 与 y 轴的交点为 $E(0, \sqrt{3}-1)$. 点集 D 为图中扇形 OAB 中除去扇形 ECD 所构成的区域(图中阴影部分, 包括边界).

$$\because\quad \angle xOA=\frac{\pi}{4},\ \angle xOB=\frac{3\pi}{4},\ \angle CEy=\frac{\pi}{4},\ \angle yED=\frac{\pi}{4}.$$

∴ 点集 D 的面积为 $S=\frac{\pi}{4}\cdot2^2-\frac{\pi}{4}(2-\sqrt{3}+1)^2=\frac{\pi}{2}(3\sqrt{3}-4)$.

§ 5. 平移、旋转、对称变换

456. 平移坐标轴, 分别以(1) $(h-r, k)$; (2) $(h, k-r)$ 为新原点建立坐标系 $x'O'y'$. 求方程 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 在新坐标系中的方程.

[解] (1) ∵ 新老坐标系的坐标变换公式为 $\begin{cases}x=x'+h-r\\ y=y'+k,\end{cases}$ ∴ 方程 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 在新坐标系中的方程为

$$[(x'+h-r)-h]^2+[(y'+k)-k]^2=r^2,\quad 即\quad (x'-r)^2+y'^2=r^2.$$

(2) ∵ 新老坐标系的坐标变换公式为 $\begin{cases}x=x'+h\\ y=y'+k-r,\end{cases}$ ∴ 方程 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 在新坐标系中的方程为

$$[(x'+h)-h]^2+[(y'+k-r)-k]^2=r^2,\quad 即\quad x'^2+(y'-r)^2=r^2.$$

457. 问将圆 C: $x^2+y^2=1$ 平移到什么位置时，才能使它与圆 C_1: $(x-3)^2+y^2=16$ 直交，且与 y 轴相切？

[分析] 半径确定的圆其位置决定于它的圆心，故只需求出其平移后的圆心坐标.

[解] 设圆 C 平移后的方程为 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=1$. 它与 y 轴相切，故 $|x_0|=1$，即 $x_0=\pm1$，又它与圆 C_1 直交，故 $(\pm1-3)^2+y_0^2=1+16$. 从此可得 $y_0=\pm\sqrt{13}$，或 $y_0=\pm1$. 故将圆 C 平移到圆心坐标为 $(1, \sqrt{13})$ 或 $(1, -\sqrt{13})$ 或 $(-1, 1)$ 或 $(-1, -1)$ 时，都能和圆 C_1 直交，且与 y 轴相切.

458. 设 θ 为任意常数 $(0\leqslant\theta<2\pi)$，通过变换：

$$\begin{cases} x'=x\cos\theta+y\sin\theta \\ y'=x\sin\theta-y\cos\theta \end{cases}\cdots①,$$

将点 $P(x, y)$ 变到点 $Q(x', y')$，(1) 证明：在此变换下，必能将点 Q 变回到点 P；(2) 证明：在此变换下，可将圆 $x^2+y^2=1$ 上的点变到同圆的圆周上；(3) 当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，求在此变换下圆 $x^2+y^2=1$ 上的不动点.

[解] (1) 设点 $Q(x', y')$ 经此变换后的点为 $P_1(x_1, y_1)$，则

$$x_1=x'\cos\theta+y'\sin\theta=(x\cos\theta+y\sin\theta)\cos\theta+(x\sin\theta-y\cos\theta)\sin\theta$$
$$=x\cos^2\theta+x\sin^2\theta=x,$$
$$y_1=x'\sin\theta-y'\cos\theta=(x\cos\theta+y\sin\theta)\sin\theta-(x\sin\theta-y\cos\theta)\cos\theta$$
$$=y\sin^2\theta+y\cos^2\theta=y.$$

而 (x, y) 即为点 P 的坐标，故在此变换下，能将点 Q 变到点 P.

(2) 设点 $M(x_0, y_0)$ 为圆 $x^2+y^2=1$ 上的任意一点，则 $x_0^2+y_0^2=1$. 又设点 M 经此变换后的点为 $N(x_0', y_0')$，则 $x_0'=x_0\cos\theta+y_0\sin\theta\cdots①$，$y_0'=x_0\sin\theta-y_0\cos\theta\cdots②$. $①^2+②^2$，得

$$x_0'^2+y_0'^2=(x_0\cos\theta+y_0\sin\theta)^2+(x_0\sin\theta-y_0\cos\theta)^2$$
$$=x_0^2\cos^2\theta+y_0^2\sin^2\theta+x_0^2\sin^2\theta+y_0^2\cos^2\theta=x_0^2+y_0^2=1.$$

故点 N 在圆 $x^2+y^2=1$ 上. 即在此变换下，可将圆 $x^2+y^2=1$ 上的点变到同圆的圆周上.

(3) 设当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，在此变换下圆 $x^2+y^2=1$ 上的不动点为(X, Y)，则 $X^2+Y^2=1\cdots$③；且 $X=X\cos\frac{\pi}{3}+Y\sin\frac{\pi}{3}=\frac{X}{2}+\frac{\sqrt{3}Y}{2}\cdots$④，

$$Y=X\sin\frac{\pi}{3}-Y\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}X}{2}-\frac{Y}{2}\cdots⑤.$$

由④、⑤均得 $X=\sqrt{3}Y\cdots$⑥. 代入③，得$(\sqrt{3}Y)^2+Y^2=1$，$\therefore Y=\pm\frac{1}{2}$. 代入⑥，得 $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故所求的不动点为

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\text{和}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

[说明] 因为绕原点顺时针旋转 θ 角的变换所对应的矩阵为 $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$，关于 x 轴对称变换所对应的矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，而 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$，故此变换即为将一个点绕原点顺时针旋转 θ 角后，再求其关于 x 轴的对称点.

459. 试求圆 $x^2+y^2-x+2y=0$ 关于直线 l: $x-y+1=0$ 对称的圆方程.

[分析一] 即求与此圆上任一点关于直线 l 对称的点的轨迹方程.

[解一] 设圆 $x^2+y^2-x+2y=0$ 上的任一点 $P(x, y)$关于直线 l: $x-y+1=0$ 的对称点为 $P_0(x_0, y_0)$，则线段 PP_0 的中点$\left(\frac{x+x_0}{2}, \frac{y+y_0}{2}\right)$在直线 l 上，且 $PP_0\perp l$. 故 $\frac{x+x_0}{2}-\frac{y+y_0}{2}+1=0$，$\frac{y-y_0}{x-x_0}=-1$；即 $x-y=y_0-x_0-2\cdots$①，$x+y=x_0+y_0\cdots$②. 由①、②解得 $x=y_0-1\cdots$③，$y=x_0+1\cdots$④. 以③、④代入方程 $x^2+y^2-x+2y=0$，得

$$(y_0-1)^2+(x_0+1)^2-(y_0-1)+2(x_0+1)=0.$$

化简，并以 x、y代换 x_0、y_0，即得所求的方程 $x^2+y^2+4x-3y+5=0$.

[分析二] 曲线 $x^2+y^2-x+2y=0$ 为一圆，它关于直线 l 的对称图形也是一圆，其大小不变. 而决定一圆，只需决定其圆心和半径，故只要求出圆 $x^2+y^2-x+2y=0$ 的圆心关于直线 l 的对称点，以及此圆的半径，就可写出其对称曲线的方程.

［解二］ 化方程 $x^2+y^2-x+2y=0$ 为圆的标准方程，得 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{5}{4}$，故其圆心为 $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$，半径为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$．设点 $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ 关于直线 l: $x-y+1=0$ 的对称点为 (x, y)，则

$$\frac{x+\frac{1}{2}}{2}-\frac{y-1}{2}+1=0, \quad \frac{y+1}{x-\frac{1}{2}}=-1.$$

解此两方程，得 $x=-2$, $y=\frac{3}{2}$．故所求的方程为

$$(x+2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}, \quad 即 \quad x^2+y^2+4x-3y+5=0.$$

§6. 最大值、最小值

460．求圆 $x^2+y^2=1$ 的切线方程，使此切线夹在两坐标轴正半轴间的线段长最短．

［分析］ 因切线夹在两坐标轴正半轴间的线段长取决于切点的位置，故列出此长度以切点坐标为自变量的函数关系式，即可求出切点坐标及切线方程．

［解］ 设切点为 (x_1, y_1)，则切线方程为 $x_1x+y_1y=1\cdots$①．又 $x_1^2+y_1^2=1\cdots$②．切线与两坐标轴正半轴的交点为 $A\left(\frac{1}{x_1}, 0\right)$、$B\left(0, \frac{1}{y_1}\right)$．

$$\therefore \quad x_1>0,\ y_1>0. \quad |AB|=\sqrt{\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{y_1^2}}=\frac{1}{x_1y_1}\geqslant\frac{2}{x_1^2+y_1^2}=2,$$

在 $x_1=y_1$ 时等号成立．代入②，得 $x_1=y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$．故所求切线方程为

$$x+y-\sqrt{2}=0.$$

［说明］ 要求极值，均可如上找出函数关系后去求．如函数式中的自变量不止一个，则可利用不等式或利用其它关系先将其化成一元函数后再求．

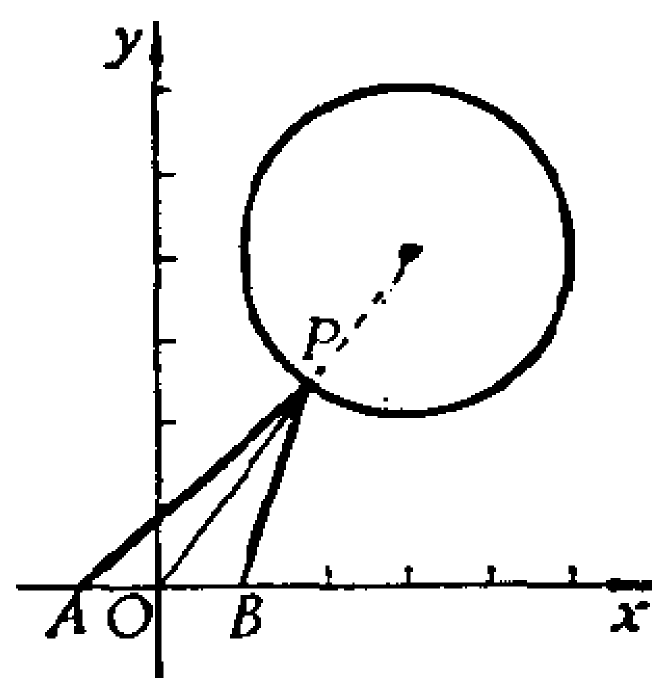
461. 若以原点为圆心，半径为1的圆与直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 相切. (1) a 与 b 的关系如何? (2) 何时乘积 ab 为最小?

［解］ (1) 将直线方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 写成 $bx+ay-ab=0$. ∵ 此直线和圆 $x^2+y^2=1$ 相切，∴ 圆心(0, 0)到这直线的距离为1，即 $\frac{|b\cdot 0+a\cdot 0-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$，故 $a^2+b^2=a^2b^2$…①.

(2) 将①式两边同除以 ab，得 $ab=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$. 故当 $a=b$ 时，乘积 ab 最小，其最小值为2.

［说明］ 本题也可如上题那样，先建立函数关系再解之.

462. 平面上有两点 $A(-1,\ 0)$、$B(1,\ 0)$，在圆周 $(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 上取一点 P，求使 AP^2+BP^2 取最小值时点 P 的坐标.



［分析一］ AP^2+BP^2 的值由点 P 的位置确定，故可设点 P 坐标为自变量，列出函数式求解.

［解一］ 设点 P 坐标为 $(3+2\cos\theta,\ 4+2\sin\theta)$，则

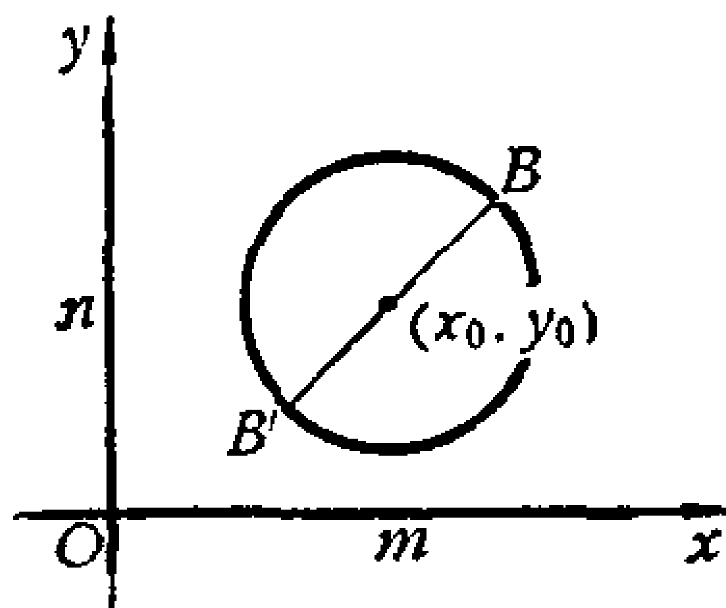
$$AP^2+BP^2=(4+2\cos\theta)^2+(4+2\sin\theta)^2+(2+2\cos\theta)^2+(4+2\sin\theta)^2$$
$$=60+24\cos\theta+32\sin\theta=60+40\left(\frac{3}{5}\cos\theta+\frac{4}{5}\sin\theta\right).$$

令 $\begin{cases}\cos\varphi=\frac{4}{5}\\ \sin\varphi=\frac{3}{5},\end{cases}$ 上式 $=60+40\sin(\theta+\varphi)$. 当 $\theta+\varphi=\frac{3}{2}\pi$，即 $\theta=\frac{3\pi}{2}-\varphi$ 时，AP^2+BP^2 取最小值20. ∵ $\sin\theta=\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right)=-\cos\varphi=-\frac{4}{5}$，$\cos\theta=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right)=-\sin\varphi=-\frac{3}{5}$. ∴ 点 P 坐标为：$x=3-\frac{6}{5}=\frac{9}{5}$，$y=4-\frac{8}{5}=\frac{12}{5}$. 即在点 $P\left(\frac{9}{5},\ \frac{12}{5}\right)$ 处 AP^2+BP^2 值最小.

［解二］ 因三角形 PAB 中 PO 为中线，得 $AP^2+BP^2=2OP^2+2OB^2$

$=2OP^2+2$, ∴ 当 OP 达到最小时, AP^2+BP^2 也同时达到最小. ∴ 点 O 与圆心(3, 4)的连线与圆的交点的坐标即所求点 P 的坐标. 解方程组
$\begin{cases} y=\frac{4}{3}x \\ (x-3)^2+(y-4)^2=4, \end{cases}$ 结合题意即得点 P 的坐标为 $\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

463. 已知一圆, 以及与此圆相离且互相垂直的两直线 m、n. 在圆周上求一点, 使此点到直线 m、n 的距离和为最大(最小).

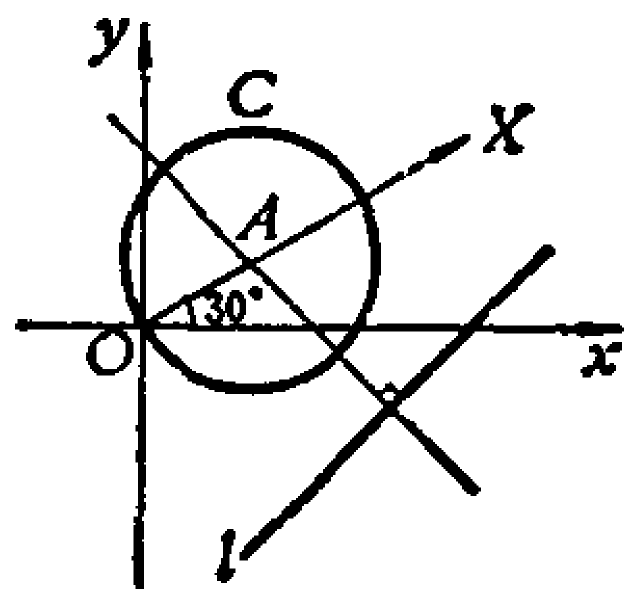


[解] 以两条互相垂直的直线为 x 轴和 y 轴并适当规定轴的正方向, 使圆的位置在坐标系中第一象限. 设圆心的坐标为 (x_0, y_0), 半径为 r. 圆上任一点的坐标为 $(x_0+r\cos\theta,\ y_0+r\sin\theta)$. 此点到两条直线 m、n 的距离和

$$d=|x_0+r\cos\theta+y_0+r\sin\theta|=x_0+y_0+\sqrt{2}r\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right).$$

∴ 当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时, d 最大; 当 $\theta=\frac{5\pi}{4}$ 时, d 最小. 即到两直线 m、n 的距离和最大的点 B 的坐标为 $\left(x_0+\frac{r}{\sqrt{2}}, y_0+\frac{r}{\sqrt{2}}\right)$, 距离和最小的点 B' 的坐标为 $\left(x_0-\frac{r}{\sqrt{2}}, y_0-\frac{r}{\sqrt{2}}\right)$.

464. 已知直角坐标系的原点与极坐标系的极点重合, 由 x 轴正向到极轴(逆时针)成 30° 角, 两坐标系的单位相同. 曲线 C 在极坐标系中方程为 $\rho=4\cos\theta$, 直线 l 在直角坐标系中方程为 $x-y=5$. 试求曲线 C 上到直线 l 的距离最近和最远的点.



[分析] 将极坐标系中曲线 C 的方程转换成直角坐标系中的方程即可解.

[解一] 曲线 $\rho=4\cos\theta$ 是圆方程, 圆心 A 的极坐标为(2, 0), 半径 $r=2$. 圆心 A 的直角坐标为 $(\sqrt{3}, 1)$, ∴ 曲线 C 的直角坐标方程为 $(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4$…①. 过圆心 A 且和直线 l 垂

直的直线方程是 $y=-x+\sqrt{3}+1\cdots$②. 解①、②得

$$\begin{cases}x=\sqrt{3}+\sqrt{2}\\y=1-\sqrt{2}\end{cases} \text{和} \begin{cases}x=\sqrt{3}-\sqrt{2}\\y=1+\sqrt{2}.\end{cases}$$

∴ 最近点坐标为$(\sqrt{3}+\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2})$; 最远点坐标为$(\sqrt{3}-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2})$.

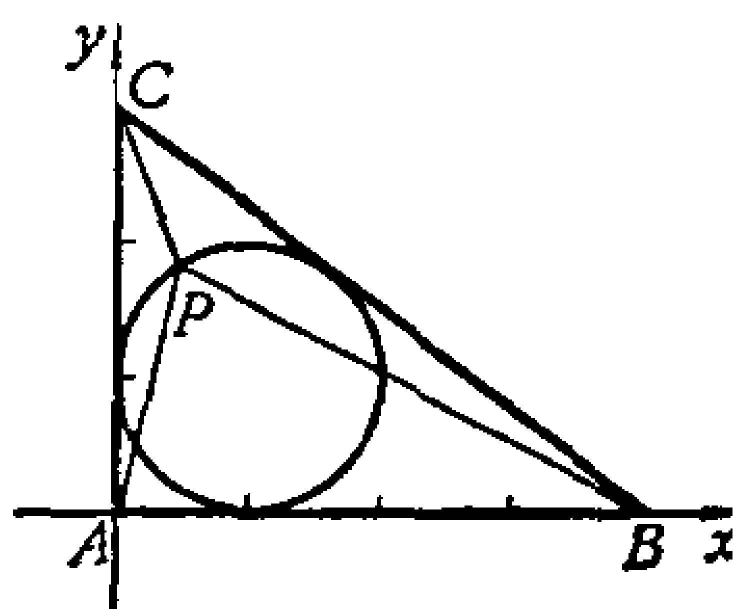
［解二］ 曲线 $\rho=4\cos\theta$ 是圆心为 $A(2,\ 0)$, 半径 $r=2$ 的圆. 在直角坐标系 xOy 中, 圆心为 $A(\sqrt{3},\ 1)$, 圆的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}+2\cos\varphi\\y=1+2\sin\varphi\end{cases}$. 于是圆上的点到直线 $x-y=5$ 的距离为

$$d=\frac{|(\sqrt{3}+2\cos\varphi)-(1+2\sin\varphi)-5|}{\sqrt{2}}=\frac{|\sqrt{3}-6+2(\cos\varphi-\sin\varphi)|}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\left|\sqrt{3}-6+2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)\right|}{\sqrt{2}}=\frac{6-\sqrt{3}-2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)}{\sqrt{2}}.$$

当 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$ 时, 圆上的点到直线的距离最小, ∴ 最近点坐标为$(\sqrt{3}+\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2})$; 当 $\varphi=\frac{3}{4}\pi$ 时, 圆上的点到直线的距离最大, ∴ 最远点坐标为$(\sqrt{3}-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2})$.

465. 已知 $\triangle ABC$ 三边长分别为 3、4、5, 点 P 是它的内切圆上一点, 求以 PA、PB、PC 为直径的三个圆面积之和的最大值和最小值.



［解］ ∵ $3^2+4^2=5^2$, ∴ $\triangle ABC$ 为直角三角形. 取直角顶点 A 为原点, 两直角边为坐标轴建立直角坐标系如图. 设 $B(4,\ 0)$、$C(0,\ 3)$, 三角形半周长为 p, 内切圆半径为 r. 则 $S_{\triangle ABC}=rp$, 即得 $r=1$. ∴ $\triangle ABC$ 的内切圆方程为

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1, \quad \text{即} \quad x^2+y^2-2x-2y+1=0.$$

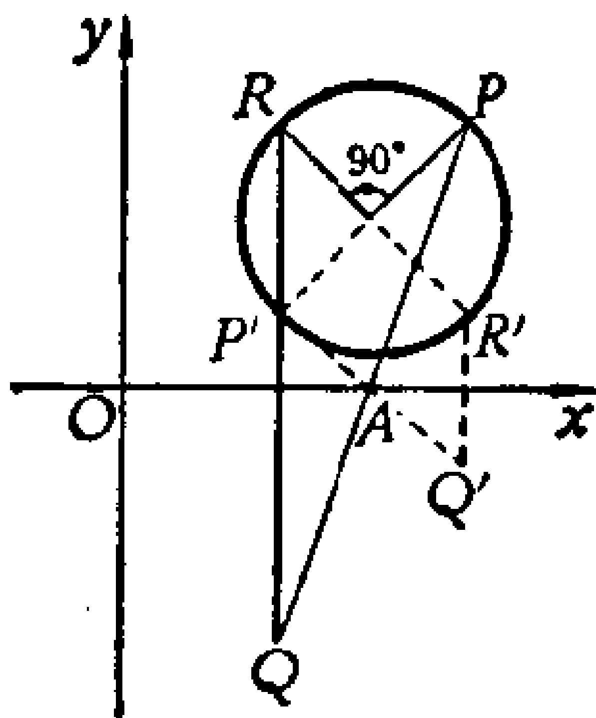
设点 P 的坐标为 $(x,\ y)$, 以 PA、PB、PC 为直径的三个圆面积之和

$$S=\frac{\pi}{4}(PA^2+PB^2+PC^2)=\frac{\pi}{4}[x^2+y^2+(x-4)^2+y^2+x^2+(y-3)^2]$$

$$=\frac{\pi}{2}(11-x).$$

$\because 0\leqslant x\leqslant 2$，$\therefore$ 当 $x=0$ 时，$S_{\max}=\dfrac{11\pi}{2}$；当 $x=2$ 时，$S_{\min}=\dfrac{9\pi}{2}$.

466. 已知点 P 是圆 C：$(x-5)^2+(y-5)^2=r^2$ $(r>0)$ 上的一点，它关于点 $A(5,\ 0)$ 的对称点为 Q. 把点 P 绕圆心 $C(5,\ 5)$ 依逆时针方向旋转 $90°$ 后，所得的点记作 R. 当点 P 在圆 C 上移动时，求 $|QR|$ 的最小值和最大值.



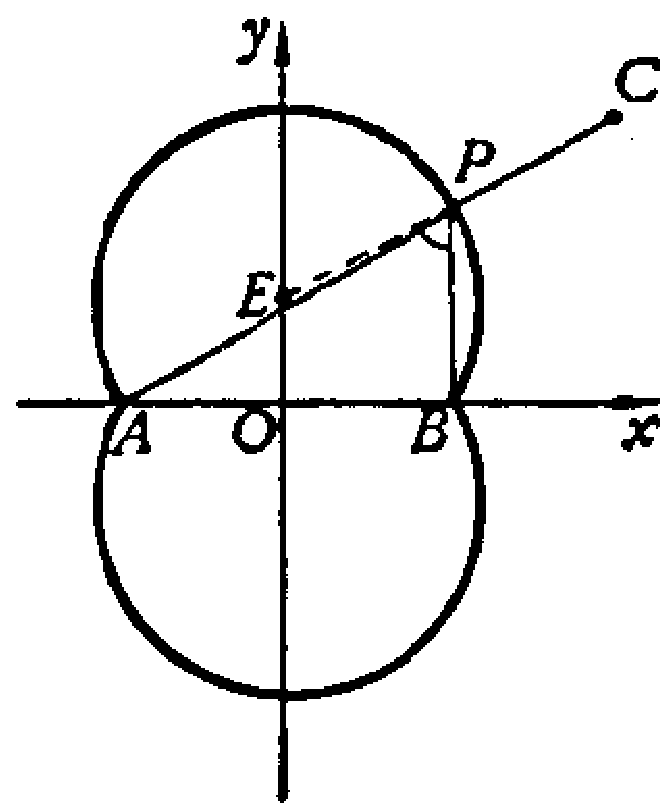
［解］ 根据圆 C 的方程，可设点 P 的坐标为 $(5+r\cos\theta,\ 5+r\sin\theta)$，则点 Q 的坐标为 $(5-r\cos\theta,\ -5-r\sin\theta)$，而点 R 的坐标是 $\left(5+r\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right),\ 5+r\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$，即 $(5-r\sin\theta,\ 5+r\cos\theta)$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad |QR|^2&=r^2(\cos\theta-\sin\theta)^2+[10+r(\cos\theta+\sin\theta)]^2\\&=r^2[(\cos\theta-\sin\theta)^2+(\cos\theta+\sin\theta)^2]\\&\quad+100+20r(\cos\theta+\sin\theta)\\&=2r^2+100+20\sqrt{2}r\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

$$\because\ r>0,\quad \therefore\ |QR|^2\leqslant 2r^2+100+20\sqrt{2}r=(\sqrt{2}r+10)^2,$$
$$|QR|^2\geqslant 2r^2+100-20\sqrt{2}r=(\sqrt{2}r-10)^2.$$

故当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$，即点 P 的坐标为 $\left(5+\dfrac{\sqrt{2}}{2}r,\ 5+\dfrac{\sqrt{2}}{2}r\right)$时，$|QR|$ 有最大值 $\sqrt{2}r+10$；当 $\theta=\dfrac{5\pi}{4}$，即点 P 的坐标为 $\left(5-\dfrac{\sqrt{2}}{2}r,\ 5-\dfrac{\sqrt{2}}{2}r\right)$时，$|QR|$ 有最小值 $|\sqrt{2}r-10|$.

467. 平面上三个定点 $A(-2\sqrt{3},\ 0)$、$B(2\sqrt{3},\ 0)$、$C(4\sqrt{3},\ 6)$，点 P 是平面上满足 $\angle APB=\dfrac{\pi}{3}$ 的一个动点. 求线段 PC 的长最短时点 P 的坐标.



［分析］ 动点 P 满足 $\angle APB=\dfrac{\pi}{3}$，故点 P 的

轨迹是以 AB 为弦、所含圆周角为 $\frac{\pi}{3}$ 的两段弓形弧，点 C 不在弧上，故弓形弧所在圆的圆心和点 C 的连线与弧的交点即为所求.

［解］ 设动点 P 的坐标为 (x, y).

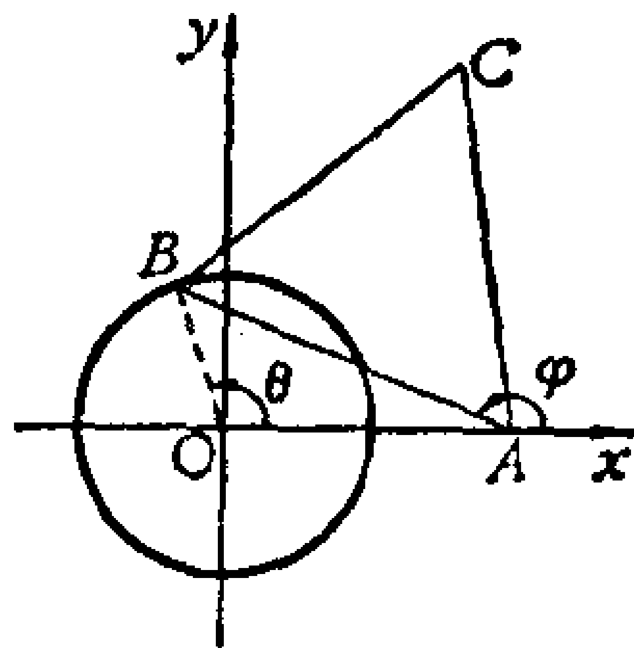
$$\because\quad \angle APB=\frac{\pi}{3},\ k_{AP}=\frac{y}{x+2\sqrt{3}},\ k_{BP}=\frac{y}{x-2\sqrt{3}},$$

$$\therefore\quad \left|\frac{k_{AP}-k_{BP}}{1+k_{AP}k_{BP}}\right|=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}.$$

将 k_{AP}、k_{BP} 值代入并化简，即得动点 P 的轨迹方程 $x^2+(y-2)^2=16$ $(y>0)$ 和 $x^2+(y+2)^2=16$ $(y<0)$. ∵ 点 C 在 x 轴上方且在弓形弧外部，∴ 使 $|PC|$ 最短的点 P 应是上半弓形弧所在圆的圆心 E 和点 C 连线与弓形弧的交点. 点 E 的坐标为 $(0,2)$，直线 CE 方程为 $x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$.

解方程组 $\begin{cases}x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0\\ x^2+(y-2)^2=16,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2\sqrt{3}\\ y=4,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2\sqrt{3}\\ y=0.\end{cases}$ 根据题意，x、y 均应取正值，故使 $|PC|$ 最短的点 P 的坐标是 $(2\sqrt{3}, 4)$.

468. 已知圆 $x^2+y^2=1$ 与一定点 $A(2, 0)$，B 为已知圆上一动点，$\triangle ABC$ 是正三角形(A、B、C 为顺时针序). 试求顶点 C 的轨迹；如点 B 在上半圆周上运动，到什么位置时，四边形 $OACB$ 的面积最大？



［解］ 设 $C(x, y)$ 为轨迹上任意一点，取 $\angle xOB=\theta$ 为参数. 点 B 的坐标为 $(\cos\theta, \sin\theta)$，$\angle xAB=\varphi$. ∵ $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$,

$$\therefore\quad x=(\overrightarrow{OC})_{Ox}=(\overrightarrow{OA})_{Ox}+(\overrightarrow{AC})_{Ox}=2+|AC|\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=2+|AB|\cos\varphi\cos\frac{\pi}{3}+|AB|\sin\varphi\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=2+\frac{1}{2}(\cos\theta-2)+\frac{\sqrt{3}}{2}(\sin\theta-0)$$

$$=\frac{1}{2}(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)+1.$$

$$y=(\overrightarrow{OC})_{Oy}=(\overrightarrow{OA})_{Oy}+(\overrightarrow{AC})_{Oy}=0+|AB|\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=|AB|\sin\varphi\cos\frac{\pi}{3}-|AB|\cos\varphi\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{1}{2}(\sin\theta-0)-\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos\theta-2)=\frac{1}{2}(\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta)+\sqrt{3}.$$

$$\therefore\quad (x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=1.$$

故所求轨迹为以$(1,\ \sqrt{3})$为圆心，1为半径之圆.

当 $0\leqslant\theta<\pi$ 时，$\because S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot 2\sin\theta=\sin\theta$, 又

$$|AB|^2=2^2+1^2-2\cdot 2\cos\theta=5-4\cos\theta,$$

$$\therefore\quad S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}(5-4\cos\theta).$$

$$S_{OACB}=2\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)+\frac{5\sqrt{3}}{4}=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{5\sqrt{3}}{4}.$$

$\therefore$ 当 $\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$, 即 $\theta=\frac{5\pi}{6}$ 时，S_{OACB} 有最大值：$S=\frac{8+5\sqrt{3}}{4}$.

§7. 其　它

469. 已知圆 C: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$. 分别求点 $P_0(x_0,\ y_0)$在圆内、圆上或圆外的条件.

［分析］ 一点在圆内、圆上或圆外，可通过点和圆心之间的距离与半径的大小比较而确定.

［解］ 由圆 C 的方程可得其圆心为 $P\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2}\right)$, 半径

$$r=\sqrt{\frac{D^2+E^2-4F}{4}}.$$

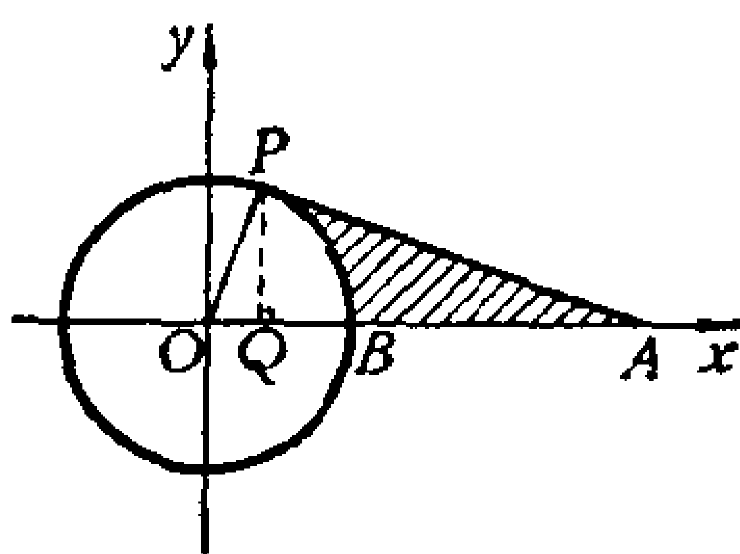
故点 $P_0(x_0,\ y_0)$在圆内的条件为 $|PP_0|<r$, 即

$$\left(x_0+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y_0+\frac{E}{2}\right)^2<\frac{D^2+E^2-4F}{4},$$

亦即 $x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F<0$. 同理可得：点 $P_0(x_0,\ y_0)$在圆上和圆外的

条件分别为 $x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F=0$ 和 $x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F>0$.

470. 如图所示，由点 $A(a,\ 0)$引圆 $x^2+y^2=r^2$ 的切线，设 P 为切点，$(a>r>0)$，线段 OA 交圆于 B. 将图形APB(图中阴影部分)和扇形OPB绕x轴旋转一周，当所产生的两个旋转体等积时，求 r、a的关系.



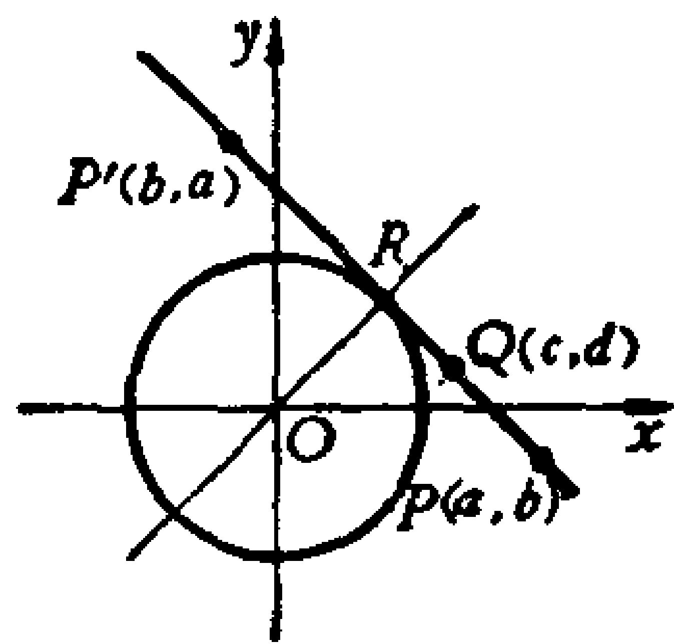
[解] 作$PQ\perp x$轴，垂足为Q. 则 $|OP|^2=|OQ|\cdot|OA|$，即 $r^2=|OQ|\cdot a$. $\therefore\ |OQ|=\frac{r^2}{a}$，$|QB|=r-|OQ|=\frac{r(a-r)}{a}$. $|PQ|^2=|OP|^2-|OQ|^2=\frac{r^2}{a^2}(a^2-r^2)$. 由扇形 OPB 绕 x 轴旋转一周产生的旋转体为一球扇形，其体积 $V=\frac{2}{3}\pi r^2|QB|=\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi r^3}{a}(a-r)$. 由直角三角形 OAP 绕 x 轴旋转一周产生的旋转体体积

$$V'=\frac{1}{3}\pi|QP|^2\cdot a=\frac{1}{3a}\pi r^2(a^2-r^2).$$

由条件可知: $V=\frac{1}{2}V'$，　$\therefore$　$\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi r^3}{a}(a-r)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3a}\pi r^2(a^2-r^2)$.

$$\because\ a>r,\quad \therefore\ 4r=a+r,\quad 即\ a=3r.$$

471. 平面上有一以原点为圆心，半径为 r 的圆，设 l 为此圆在点 $R\left(\frac{r}{\sqrt{2}},\ \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ 的切线，在 l 上取一不为切点的点 $P(a,\ b)$.



(1) 证明对于 l 上的任意一点 $Q(c,\ d)$，可找到一个适当的实数 t，将c和d表示为:

$$c=ta+(1-t)b,\quad d=(1-t)a+tb.$$

(2) 求上述点 Q 在线段 PR 上时 t 的范围.

[分析一] Q 是 PR 上一点，故可根据分点坐标公式，先将它的坐标用a、b表出.

[解一] (1) $\because$ 圆 O 的方程为 $x^2+y^2=r^2$，$\therefore$ 切线 l 的方程为 $x+y=$

$\sqrt{2}r$. ∵ 点 $P(a, b)$ 在 l 上，∴ $a+b=\sqrt{2}r$. 设 $\frac{RQ}{QP}=\lambda$, 则

$$c=\frac{\frac{\sqrt{2}r}{2}+a\lambda}{1+\lambda}=\frac{(1+2\lambda)}{2(1+\lambda)}a+\frac{1}{2(1+\lambda)}b\cdots①,$$

$$d=\frac{\frac{\sqrt{2}r}{2}+b\lambda}{1+\lambda}=\frac{1}{2(1+\lambda)}a+\frac{(1+2\lambda)}{2(1+\lambda)}b\cdots②.$$

又 ∵ $\frac{1+2\lambda}{2(1+\lambda)}+\frac{1}{2(1+\lambda)}=1$, 若设 $\frac{1+2\lambda}{2(1+\lambda)}=t$, 则 $\frac{1}{2(1+\lambda)}=1-t$. 代入 ①、②, 即得 $c=ta+(1-t)b$, $d=(1-t)a+tb$.

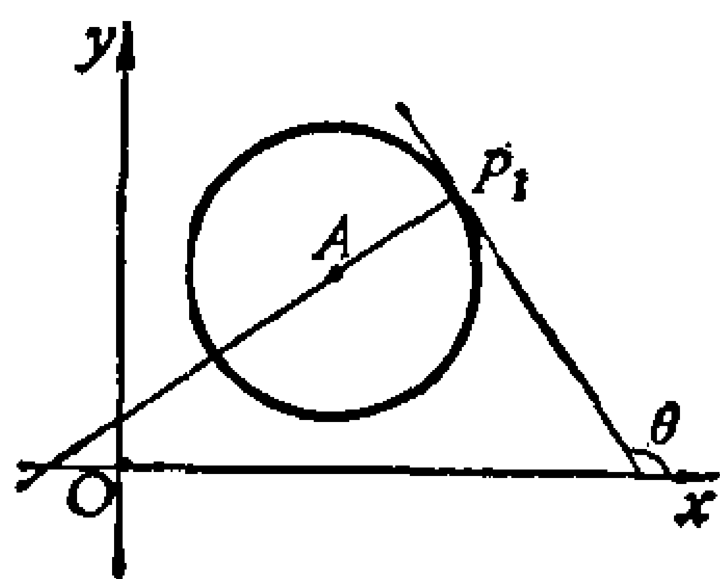
(2) ∵ 点 Q 是线段 RP 的内分点，∴ $0\leqslant\lambda<\infty$, 故 $\frac{1}{2}\leqslant t<1$; 当点 Q 重合于点 P 时，则 $t=1$. 故所求 t 的范围为 $\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1$.

［分析二］ 要用 a、b 表示直线 l 上任意一点 (c, d), 可在 l 上另找一可以用 a、b 的式子表示的定点 P', 其中最简单的是 P 关于直线 OR 的对称点 $P'(b, a)$, 而点 Q 必为 PP' 的定比分点，从而得解.

［解二］ (1) 圆 O 的方程为 $x^2+y^2=r^2$, 切点 R 与圆心 O 的连线方程为 $x-y=0$, 点 P 关于 OR 的对称点为 $P'(b,a)$, 点 R 为 PP' 的中点. 设 $PQ:QP'=(1-t):t$. ∴ $c=\frac{a+\frac{1-t}{t}b}{1+\frac{1-t}{t}}=ta+(1-t)b$, $d=\frac{b+a\cdot\frac{1-t}{t}}{1+\frac{1-t}{t}}$ $=a(1-t)+tb$. 当 t 自 $-\infty$ 逐渐增大时，点 Q 自点 P' 的上方向下(即按 P' 到 P 的方向)运动.

(2) 当 $t=\frac{1}{2}$ 时，点 Q 与切点 R 重合; 当 $t=1$ 时，点 Q 与点 P 重合. ∴ 点 Q 在连结切点 R 与点 P 所成的线段上时，t 的范围是 $\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1$.

472. 已知半径为 r 的圆在 $P_1(x_1, y_1)$ 的切线方程为 $y=x\operatorname{tg}\theta+b, \theta\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. 求圆心 A 的坐标.



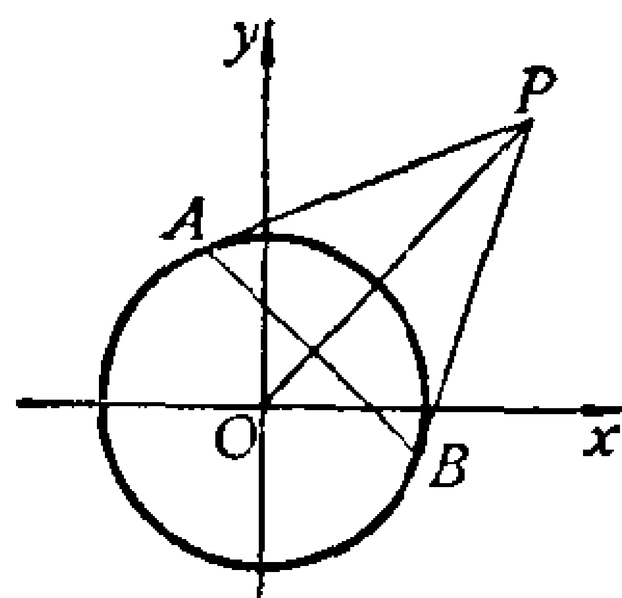
［分析］ 因圆心 A 在过切点的直径上，而过

切点的直径与切线垂直,故可得过切点直径的参数方程. 利用圆心到切点的距离等于半径,即可求圆心的坐标.

[解] 过点 P_1 的圆的切线倾角是 θ, 故过点 P_1 的圆的直径的倾角为 $\theta-\frac{\pi}{2}$, 此直径的参数方程是 $\begin{cases}x=x_1+t\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\\ y=y_1+t\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=x_1+t\sin\theta\\ y=y_1-t\cos\theta.\end{cases}$

若圆心 A 在 P_1 的下方, 则对应于点 A 的参数 $t=-r$, 点 A 的坐标为 $(x_1-r\sin\theta,\ y_1+r\cos\theta)$; 若圆心 A 在 P_1 的上方, 则点 A 对应的参数 $t=r$, 点 A 的坐标为 $(x_1+r\sin\theta,\ y_1-r\cos\theta)$.

473. 已知圆外一点 $P(x_0,\ y_0)$, 自 P 作圆 $x^2+y^2=a^2$ 的两切线. 求证点 P 和两切点组成的三角形面积



$$S=\frac{a(x_0^2+y_0^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{x_0^2+y_0^2}.$$

[分析] 计算点 P 到切点弦 AB 的距离以及切点弦 AB 的长,即可求得三角形的面积.

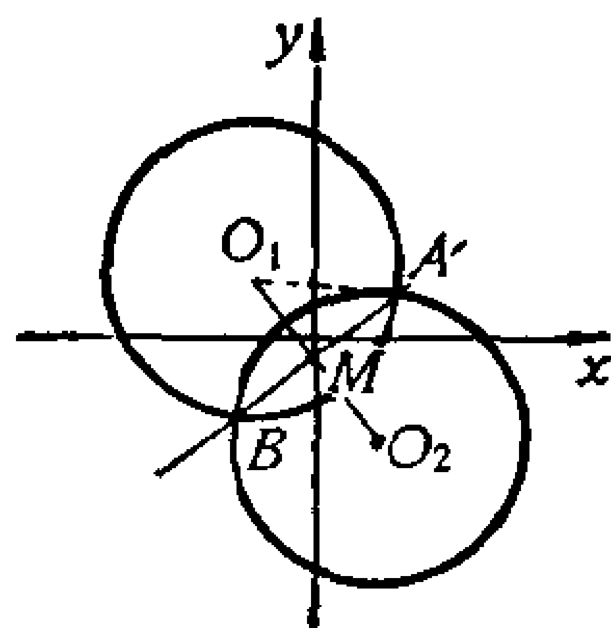
[证] 点 P 坐标为 $(x_0,\ y_0)$, 切点弦 AB 的方程为 $x_0x+y_0y-a^2=0$. 点 P 到直线的 AB 距离 $d=\frac{x_0^2+y_0^2-a^2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$, 点 O 到直线 AB 的距离

$$d'=\frac{a^2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}},$$

圆半径是 a, $\quad\therefore\quad |AB|=2\sqrt{a^2-d'^2}=\frac{2a\sqrt{x_0^2+y_0^2-a^2}}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$.

$\therefore\ \triangle PAB$ 的面积 $S=\frac{a\sqrt{x_0^2+y_0^2-a^2}}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\cdot\frac{x_0^2+y_0^2-a^2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=\frac{a(x_0^2+y_0^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{x_0^2+y_0^2}$.

474. 设半径为 4 的两等圆 O_1、O_2 相交于 $A(2,\ 1)$ 和 $B(-2,\ -2)$. 试求它们连心线的斜率与圆心距.



[分析] 根据"两圆的连心线必垂直平分公共弦"就可得解.

［解］ 直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\frac{1+2}{2+2}=\frac{3}{4}$. ∵ 连心线 $O_1O_2\perp AB$, ∴ 连心线 O_1O_2 的斜率 $k=-\frac{4}{3}$. 设 O_1O_2 和 AB 的交点为 M. ∵ O_1O_2 平分 AB, ∴ 点 M 的坐标为 $\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)$. 故 $|MA|=\frac{5}{2}$. 连 O_1A, 则

$$|O_1M|^2=|O_1A|^2-|MA|^2=4^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{39}{4}.$$

∴ $|O_1M|=\frac{\sqrt{39}}{2}$. 同理, $O_2M=\frac{\sqrt{39}}{2}$. ∴ 圆心距

$$|O_1O_2|=|O_1M|+|O_2M|=\sqrt{39}.$$

475. 实数 a、b、c 满足条件 $3(a^2+b^2)=4c^2(c\neq0)$, (1) 求证直线 $ax+by+c=0$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 交于不同的两点 P、Q; (2) 求弦 PQ 的长.

［解一］ (1) 当 $a\neq0$ 时, 由直线方程 $ax+by+c=0$ 得 $x=-\frac{by+c}{a}\cdots$①. 代入圆方程得 $(a^2+b^2)y^2+2bcy+c^2-a^2=0\cdots$②. ∵ $3(a^2+b^2)=4c^2$, 且 $c\neq0$, ∴ ② 的判别式

$$\begin{aligned}\Delta&=4b^2c^2-4(a^2+b^2)(c^2-a^2)=4\left[b^2c^2+\frac{4}{3}c^2(a^2-c^2)\right]\\&=\frac{4c^2}{3}(3b^2+4a^2-4c^2)>\frac{4c^2}{3}[3(a^2+b^2)-4c^2]=0.\end{aligned}$$

故方程 ② 有两相异的实根, 即直线 $ax+by+c=0$ 和圆 $x^2+y^2=1$ 交于不同的两点 P、Q. 当 $a=0$ 时, 由条件可知 $b\neq0$, 故此时直线方程为 $y=-\frac{c}{b}$. 代入圆方程得 $x^2=\frac{b^2-c^2}{b^2}\cdots$③. 在 $a=0$ 时, 条件 $3(a^2+b^2)=4c^2$ 即为 $3b^2=4c^2$, ∴ $b^2-c^2=\frac{1}{3}c^2>0$, ∴ 方程 ③ 也有两相异的实根. 结论 (1) 仍成立. (2) 见［解二］.

［解二］ (1) 圆 $x^2+y^2=1$ 的圆心到直线 $ax+by+c=0$ 的距离为 $d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, 根据已知条件可得

$$\sqrt{a^2+b^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}|c|\ (c\neq0),$$

$$\therefore \quad d=\frac{|c|}{\frac{2}{\sqrt{3}}|c|}=\frac{\sqrt{3}}{2}<1.$$

故直线与圆有两个不同的交点 P、Q.

(2) 设圆心 O 在直线 $ax+by+c=0$ 上的射影为 H，则

$|OH|=d=\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\quad\therefore\quad |PQ|=2\sqrt{|OP|^2-|OH|^2}=2\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1.$

476．求直线 $y=2x+1$ 被圆 $x^2+y^2-2y-1=0$ 所截的线段之长．

［解］ 设直线 $y=2x+1$ 和圆 $x^2+y^2-2y-1=0$ 的交点坐标为 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)，则 $y_1=2x_1+1$，$y_2=2x_2+1$．故直线被圆所截的线段长

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}, \quad 即 \quad d=\sqrt{5(x_2-x_1)^2}\cdots①.$$

以 $y=2x+1$ 代入圆方程并化简，得 $5x^2-2=0$．$\therefore x_1=\sqrt{\frac{2}{5}}$，$x_2=-\sqrt{\frac{2}{5}}$．代入①式，即得 $d=2\sqrt{2}$．

［解二］ 圆 $x^2+y^2-2y-1=0$ 即 $x^2+(y-1)^2=2$．$\because$ 圆心 $(0, 1)$ 到直线 $y=2x+1$ 的距离为零，$\therefore$ 所截线段之长即为直径 $2\sqrt{2}$．

477．求两已知圆 C_1: $(x-a)^2+y^2=a^2$ 和 C_2: $x^2+(y-b)^2=b^2$ 的公共弦的长度 $(a>0, b>0)$．

［解一］ 设两圆的交点为 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2)．由圆 C_1 的方程得 $x^2+y^2-2ax=0\cdots①$，由圆 C_2 的方程得 $x^2+y^2-2by=0\cdots②$．①－②: $y=\frac{a}{b}x\cdots③$．代入①，得 $(a^2+b^2)x^2-2ab^2x=0$．$\therefore x_1=0$，$x_2=\frac{2ab^2}{a^2+b^2}$．代入③，得 $y_1=0$，$y_2=\frac{2a^2b}{a^2+b^2}$．$\therefore$ 两圆公共弦的长度为

$$\sqrt{x_2^2+y_2^2}=\frac{2ab\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}.$$

［解二］ 设圆 C_1、C_2 相交于 P、Q 两点，M 为公共弦 PQ 的中点．由圆 C_1 的方程可知，其圆心 O_1 的坐标为 $(a, 0)$，半径长 $|O_1P|=a$．将两圆方程相减，得 PQ 的方程为 $ax-by=0$．$\therefore |O_1M|=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$．

又 $\because O_1M\perp PQ$，故 $\left(\frac{1}{2}|PQ|\right)^2=|PM|^2=|O_1P|^2-|O_1M|^2$，即

$$\frac{|PQ|^2}{4}=a^2-\frac{a^4}{a^2+b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

$\therefore$ 两圆公共弦的长度 $|PQ|=\dfrac{2ab\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}$.

[说明] 求两圆公共弦的长度，一般常用以上两种方法.

478. 求两圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ 和 $(x-b)^2+(y-a)^2=c^2$ $(a\neq b)$ 的公共弦的长度，并求这两圆相切的条件.

[解] 设两圆的交点坐标为 (x_1, y_1)、(x_2, y_2). 将两圆方程相减，得 $y=x$, 代入方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$, 得 $2x^2-2(a+b)x+a^2+b^2-c^2=0$ …①. 当其判别式大于零时，即 $2c^2>(a-b)^2$ 时，有 $x_1+x_2=(a+b)$, $x_1\cdot x_2=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$. 从而得

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=2c^2-(a-b)^2.$$

又 $\because$ 两圆交点在直线 $y=x$ 上，$\therefore$ $y_1=x_1$, $y_2=x_2$. 故这两圆的公共弦的长度 $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{2(x_1-x_2)^2}=\sqrt{2[2c^2-(a-b)^2]}$. 当方程 ① 的判别式等于零时，两圆相切. 故所求的条件为 $2c^2=(a-b)^2$.

[说明] 也可从公共弦长为零得解.

479. 问 c 取何值时，圆 $x^2+y^2+x-6y+c=0$ 与直线 $x+2y-3=0$ 的两交点 P、Q 满足 $OP\perp OQ$, 这里 O 是坐标原点.

[解一] 设点 P 和点 Q 的坐标分别为 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2). 由直线方程得 $x=3-2y$…①. 代入圆方程，得 $(3-2y)^2+y^2+(3-2y)-6y+c=0$, 即

$$5y^2-20y+12+c=0. \quad \therefore \quad y_1+y_2=4,\ y_1\cdot y_2=\frac{12+c}{5}.$$

由 ① 得: $\qquad x_1=3-2y_1, \quad x_2=3-2y_2.$

$$\therefore \quad x_1\cdot x_2=(3-2y_1)(3-2y_2)=9-6(y_1+y_2)+4y_1y_2=\frac{4c-27}{5}.$$

$$\because \quad OP\perp OQ, \quad \therefore \quad \frac{y_1y_2}{x_1x_2}=-1. \quad 即 \quad \frac{12+c}{4c-27}=-1. \quad \therefore \quad c=3.$$

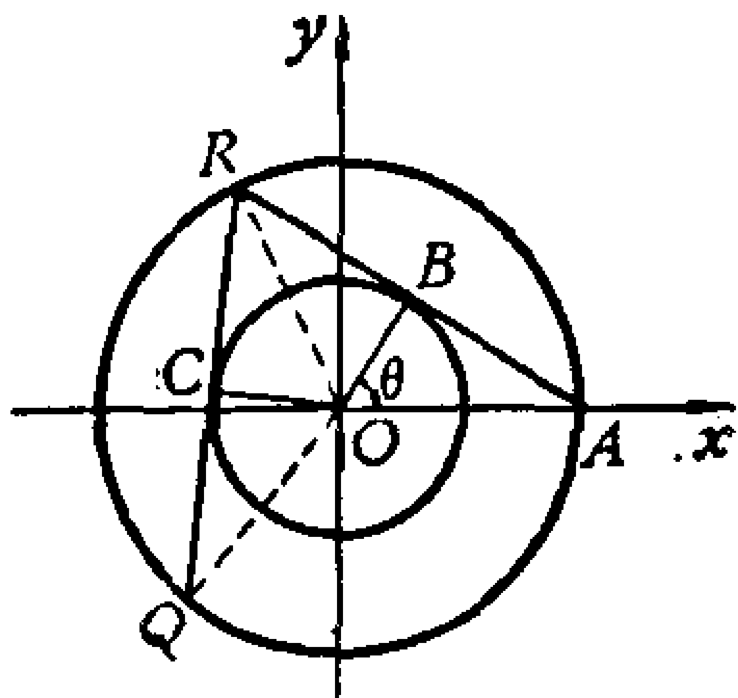
[解二] 根据(3.120), OP、OQ 两直线的方程为

$$x^2+y^2+(x-6y)\left(\frac{x+2y}{3}\right)+c\left(\frac{x+2y}{3}\right)^2=0,$$

即
$$\left(\frac{4}{3}+\frac{c}{9}\right)x^2+\left(\frac{4c}{9}-\frac{4}{3}\right)xy+\left(\frac{4c}{9}-3\right)y^2=0.$$

$\because\ OP\perp OQ,\quad \therefore\ \left(\frac{4}{3}+\frac{c}{9}\right)+\left(\frac{4c}{9}-3\right)=0,\quad \therefore\ c=3.$

480. 已知单位圆 $x^2+y^2=1$ 与 x 轴交于点 $A(1,\ 0)$，自 A 作圆 $x^2+y^2=r^2$ $(0<r<1)$ 的切线交单位圆于点 R，再自点 R 作圆 $x^2+y^2=r^2$ 的切线，与单位圆交于点 Q. 求点 Q 的坐标.



［分析］ 如图设 $\angle AOB=\theta$，根据切线性质可知 $\angle BOR=\angle ROC=\angle COQ=\theta$. 故点 Q 坐标可求.

［解］ 如图，设 $\angle AOB=\theta$，则 $\angle AOQ=4\theta$，($\angle AOQ$ 为 OA 按逆时针向转到 OQ 所形成的角). $\therefore$ 点 Q 坐标为 $(\cos 4\theta,\ \sin 4\theta)$. 而 $OA=1$, $OB=r$, $\therefore \cos\theta=r$, $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2r^2-1$,

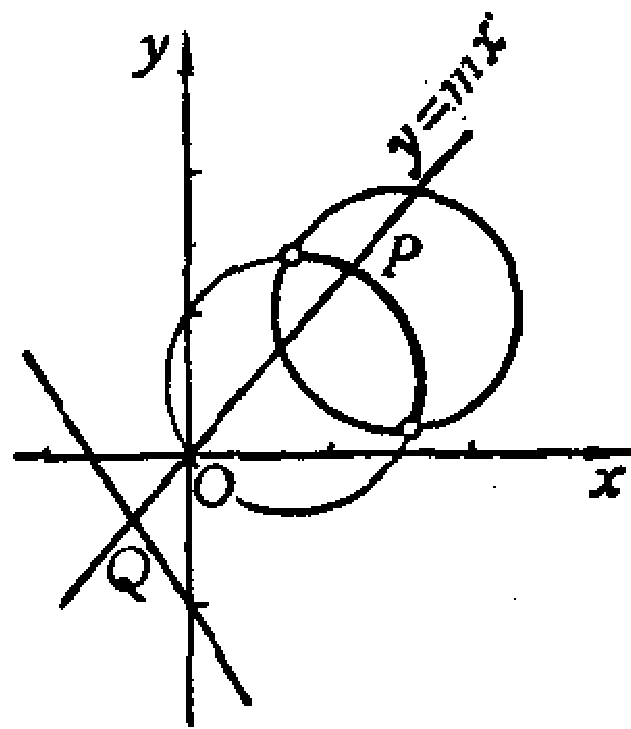
$$\cos 4\theta=2\cos^2 2\theta-1=2(2r^2-1)^2-1=8r^4-8r^2+1.$$

$$\sin\theta=\sqrt{1-r^2},\quad \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2r\sqrt{1-r^2},$$

$$\sin 4\theta=2\sin 2\theta\cos 2\theta=4r(2r^2-1)\sqrt{1-r^2}.$$

$\therefore$ 点 Q 坐标为 $(8r^4-8r^2+1,\ 4r(2r^2-1)\sqrt{1-r^2})$.

481. 对于坐标平面上的圆 $x^2+y^2-6x-4y+10=0\cdots$①，直线 $y=mx\cdots$②，直线 $3x+2y+4=0\cdots$③，回答下列问题：(1) 圆①和直线②交于不同的两点，求 m 的取值范围；(2) 圆①和直线②的两个交点连线的中点为 P，求 m 在(1)中求得的范围内变动时，点 P 的轨迹；(3) 设 O 为原点，直线②、③的交点是 Q，求 $|OP|\cdot|OQ|$ 的值.



［分析］ (1) 根据曲线和方程的关系，只需求出由①、②组成的方程组有两组不同实数解的条件即可；(2) 点 P 的坐标可根据条件用含 m 的式子表示，消去 m，即得其轨迹方程；(3) 点 Q 的坐标也可用含 m 的式子表示，故 $|OP|\cdot|OQ|$ 的值可求.

［解］ (1) 以②代入①，得 $(m^2+1)x^2-2(2m+3)x+10=0\cdots$④.

∵ 圆 ① 和直线 ② 交于不同的两点，∴ $(2m+3)^2-10(m^2+1)>0$，即

$$6m^2-12m+1<0. \quad \therefore \quad \frac{6-\sqrt{30}}{6}<m<\frac{6+\sqrt{30}}{6}.$$

(2) 设点 P 的坐标为(x, y)，则利用韦达定理由方程 ④ 得 $x=\frac{2m+3}{1+m^2}$ …⑤. 显然，点 P 在圆 ① 内，故 $x\neq0$. 由 ② 得 $m=\frac{y}{x}$，代入 ⑤ 式，化简得 $x^2+y^2-3x-2y=0$…⑥. ∴ m 在(1)中求得的范围变动时，点 P 的轨迹为圆 ⑥ 在圆 ① 内的那段弧(端点除外).

(3) 由于点 P、Q 都在直线 $y=mx$ 上，故可设其坐标分别为(x_1, mx_1)、(x_2, mx_2). 由 ⑤ 得 $x_1=\frac{2m+3}{m^2+1}$，② 代入 ③，得 $x_2=\frac{-4}{2m+3}$.

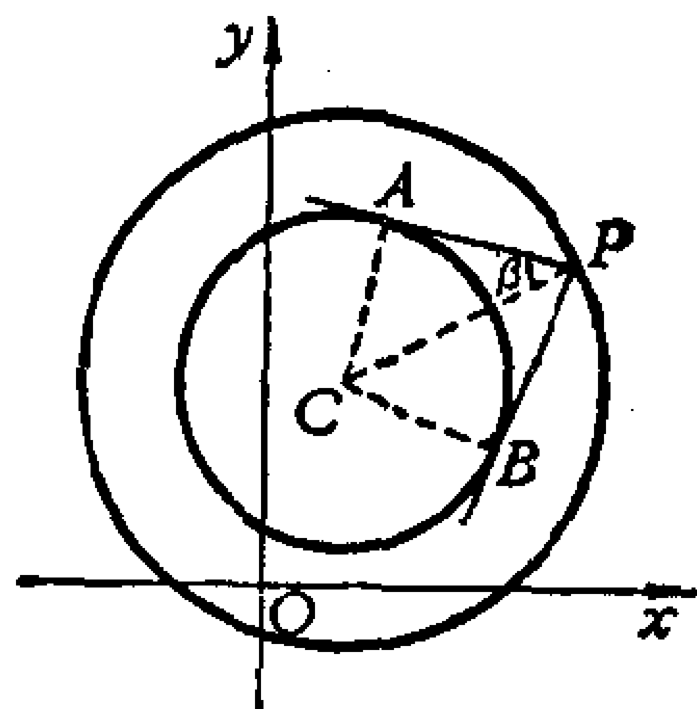
$$\therefore \quad |OP|\cdot|OQ|=\sqrt{(m^2+1)^2(x_1x_2)^2}=4.$$

§8. 证 明 题

482. 从圆 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ 上任意一点引圆

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c\sin^2\alpha+(g^2+f^2)\cos^2\alpha=0$$

的两切线$(0°<\alpha<90°)$，求证两切线的夹角为 2α.



[分析] 由于圆外一点 P 向圆所引的两切线夹角之半的余弦等于点 P 到此圆的切线长与点 P 到此圆心距离之比，故本题可通过计算切线的长度来证明.

[证] 从已知圆的方程可看出此两圆为同心圆，它们的半径分别为：$r_1=\sqrt{g^2+f^2-c}$ 和 $r_2=\sqrt{g^2+f^2-c}\sin\alpha$，∴ $r_1>r_2$. 在圆 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ 上任取一点 $P(x_1, y_1)$，则 $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1=-c$…①. 根据公式(4.31)，切线 PA 的长

$$|PA|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c\sin^2\alpha+(g^2+f^2)\cos^2\alpha}\cdots②.$$

① 代入 ②，得

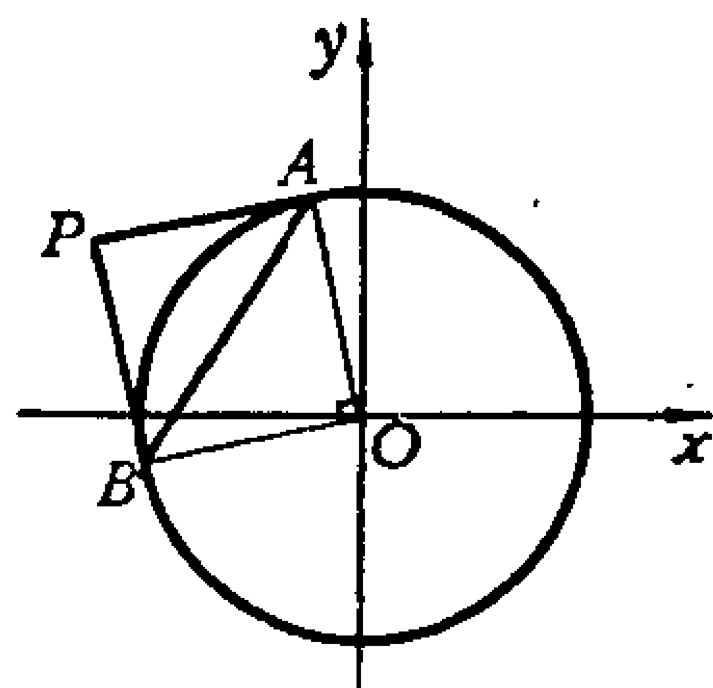
$$|PA|=\sqrt{c(\sin^2\alpha-1)+(g^2+f^2)\cos^2\alpha}=\sqrt{(g^2+f^2-c)\cos^2\alpha}$$
$$=\sqrt{g^2+f^2-c}\cos\alpha.$$

又，$|PC|=r_1=\sqrt{g^2+f^2-c}$. 设 $\angle APC=\beta$, 则

$$\cos\beta=\frac{|PA|}{|PC|}=\frac{\sqrt{g^2+f^2-c}\cos\alpha}{\sqrt{g^2+f^2-c}}=\cos\alpha.$$

$\because\ 0°<\alpha<90°,\ 0°<\beta<90°,\ \therefore\ \beta=\alpha,\ \therefore\ \angle APB=2\alpha.$

483. 自圆外一点 $P(x_0, y_0)$ 引圆 $x^2+y^2=r^2$ 的两切线，求证切点弦在圆心张直角的条件为 $x_0^2+y_0^2=2r^2$.



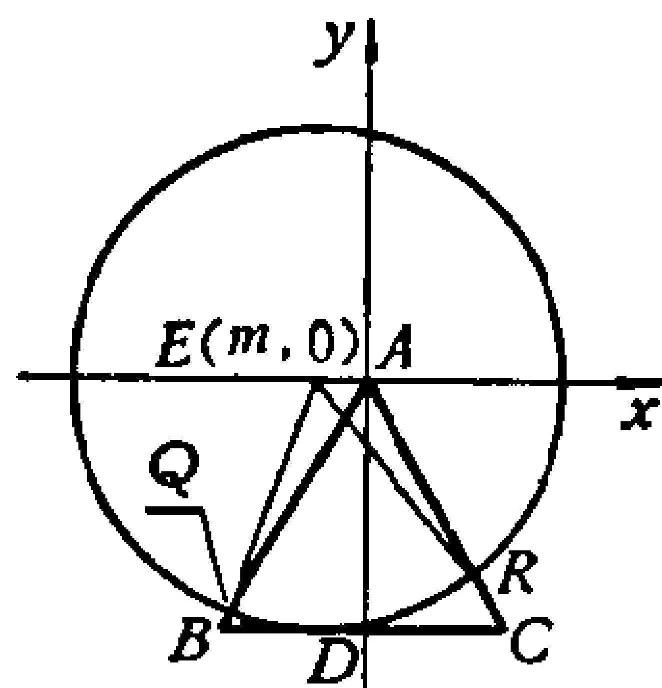
〔分析〕 本题即为证两切点和原点连线互相垂直的条件，故可利用过原点两直线互相垂直的充要条件(3.113).

〔证〕 自点 $P(x_0, y_0)$ 引圆的两切线的切点弦为 $x_0x+y_0y=r^2$, 两切点与圆心 O 的连线 AO、BO 的方程为: $x^2+y^2-r^2\left(\frac{x_0x+y_0y}{r^2}\right)^2=0$(参见第257题)，即

$$(x_0^2-r^2)x^2+2x_0y_0xy+(y_0^2-r^2)y^2=0.$$

$\because AB$ 在原点 O 张直角，$\therefore x_0^2-r^2+y_0^2-r^2=0$, 即 $x_0^2+y_0^2=2r^2$.

484. 半径等于某个正三角形高的圆在这个正三角形的一边上滚动. 证明三角形两边截圆的弧总等于 $60°$.



〔分析〕 只需证明此弧所对的弦之长总等于半径，故可从求这两边和圆的交点坐标着手.

〔证〕 取正 $\triangle ABC$ 的顶点 A 为原点，BC 边上的高 DA 所在直线为 y 轴，建立直角坐标系. 则两边 AB、AC 的直线方程分别为: $\sqrt{3}x-y=0$, $\sqrt{3}x+y=0$. 若正 $\triangle ABC$ 的高为 r, 则与边 BC 相切而滚动的圆方程为 $(x-m)^2+y^2=r^2$. 设圆与 AB、AC 分别交于 Q、R 两点，则 Q、R 两点的横坐标 x_Q、x_R 为方程 $(x-m)^2+3x^2=r^2$, 即 $4x^2-2mx+m^2-r^2=0$ 的根.

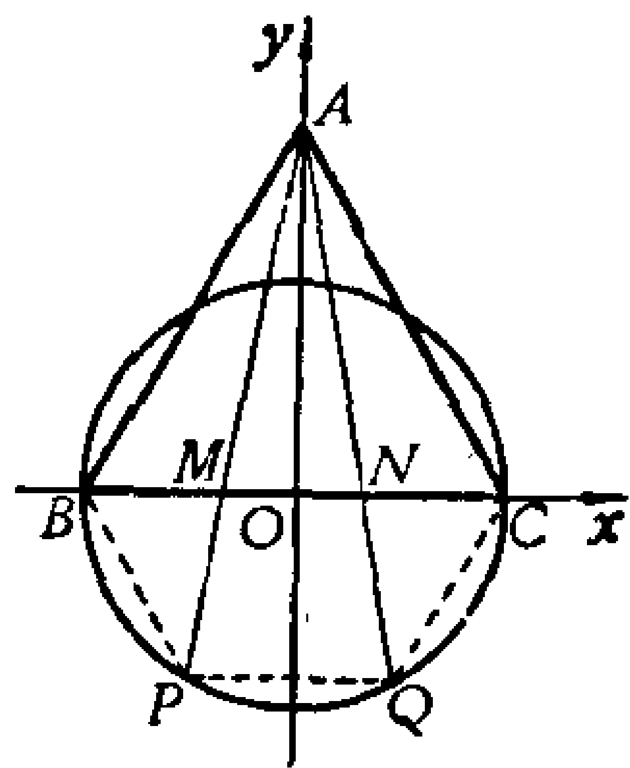
$$\therefore\ x_Q+x_R=\frac{m}{2},\ x_Qx_R=\frac{m^2-r^2}{4}.$$

又，
$$y_Q=\sqrt{3}x_Q,\quad y_R=-\sqrt{3}x_R,$$

$$|RQ|^2=(x_Q-x_R)^2+(y_Q-y_R)^2=x_Q^2-2x_Qx_R+x_R^2+3(x_Q^2+2x_Qx_R+x_R^2)$$
$$=4(x_Q^2+x_Qx_R+x_R^2)=4[(x_Q+x_R)^2-x_Qx_R]$$
$$=4\left[\frac{m^2}{4}-\frac{m^2-r^2}{4}\right]=r^2.$$

$\therefore |RQ|=r$. 故 RQ 在圆心所张的角恒为 $60°$.

485. 正三角形 ABC, 以 BC 为直径作一圆, M、N 为 BC 的三等分点, 连 AM、AN 并延长与圆 O 交于点 P、Q. 求证 $\overset{\frown}{BP}=\overset{\frown}{PQ}=\overset{\frown}{QC}$.



[分析] 欲证 $\overset{\frown}{BP}=\overset{\frown}{PQ}=\overset{\frown}{QC}$, 只需证明 $|PB|=|PQ|=|QC|$.

[证] 以圆心 O 为原点, BC 边所在直线为 x 轴, $|OC|$ 为单位长度建立坐标系. 则圆方程为 $x^2+y^2=1$, 点 C、B、A 坐标分别为 $(1, 0)$、$(-1, 0)$、$(0, \sqrt{3})$; 点 M、N 坐标分别为 $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$、$\left(\frac{1}{3}, 0\right)$. 直线 AM 的方程为 $y=3\sqrt{3}x+\sqrt{3}$, 和圆方程 $x^2+y^2=1$ 联立, 解得

$$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases}x=-\dfrac{1}{7}\\ y=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}.\end{cases}$$

$\because$ 点 P 在 x 轴下方, $\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. $\because$ 点 P、Q 以 y 轴为对称, $\therefore$ 点 Q 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$\because \quad |PB|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1, \quad |PQ|=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$
$$|QC|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1.$$

$\therefore |PB|=|PQ|=|QC|$, 故 $\overset{\frown}{BP}=\overset{\frown}{PQ}=\overset{\frown}{QC}$.

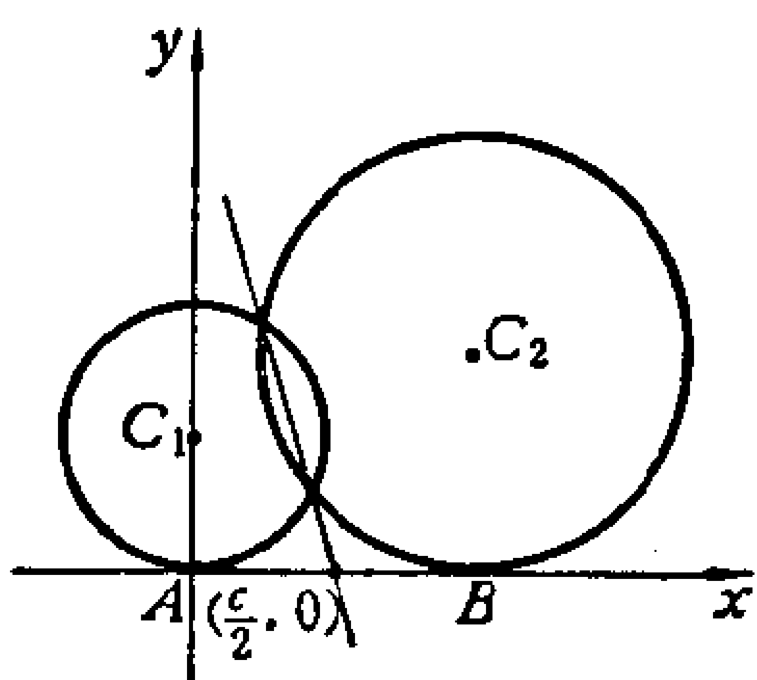
486. 求证两圆的公共弦所在直线平分它们的公切线.

[分析] 由于求两圆的公切线较求它们的连心线困难, 故以一个切点为

原点，以两圆的公切线为 x 轴建立直角坐标系.

［证］ 设直线 AB 分别切圆 C_1、C_2 于 A、B. 以 A 为原点、AB 为 x 轴建立直角坐标系，并设圆 C_1 的方程为 $x^2+y^2-2ay=0\cdots$①，圆 C_2 的方程为

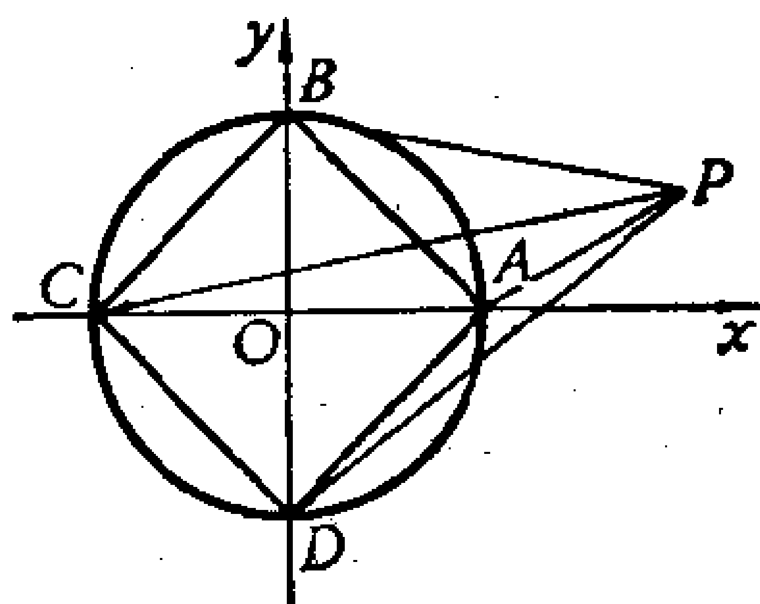
$$x^2+y^2-2cx-2by+c^2=0\cdots②.$$



则点 A、B 的坐标分别为$(0,\ 0)$和$(c,\ 0)$，其中点为$\left(\frac{c}{2},\ 0\right)$. ①－②，得两圆的公共弦所在的直线方程 $2cx+2(b-a)y-c^2=0$. 以 $x=\frac{c}{2}$，$y=0$ 代入方程的左端，得 $2c\cdot\frac{c}{2}+2(b-a)0-c^2=0$. 故点$\left(\frac{c}{2},\ 0\right)$在直线 $2cx+2(b-a)y-c^2=0$ 上，即两圆的公共弦所在直线平分它们的公切线.

487. 在圆 O 的内接正方形 $ABCD$ 所在平面上取一点 P，连 PA、PB、PC 和 PD. 求证：

$$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2.$$



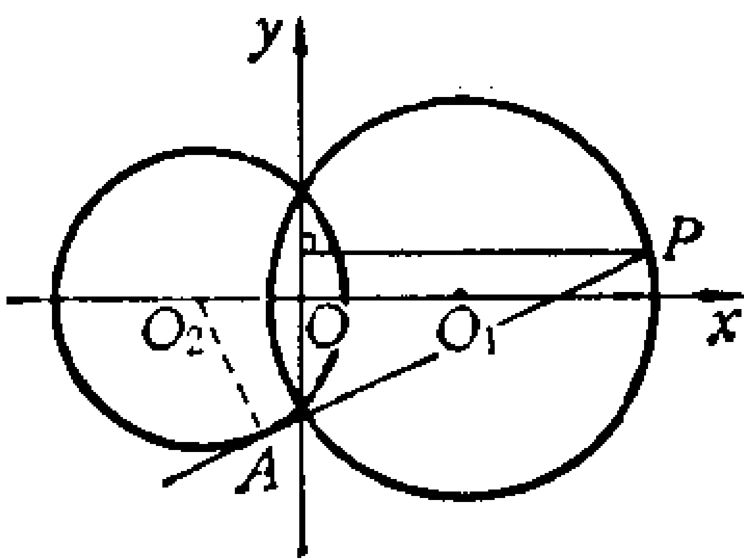
［证］ 以圆心 O 为原点，OA 为 x 轴正半轴，建立直角坐标系，设圆 O 的方程为 $x^2+y^2=r^2$. 点 A、B、C、D 四点的坐标分别为$(r,\ 0)$、$(0,\ r)$、$(-r,0)$、$(0,\ -r)$. 又设点 P 坐标为 $P(x_1,y_1)$，则

$$PA^2+PC^2=(x_1-r)^2+y_1^2+(x_1+r)^2+y_1^2=2x_1^2+2y_1^2+2r^2;$$

$$PB^2+PD^2=x_1^2+(y_1-r)^2+x_1^2+(y_1+r)^2=2x_1^2+2y_1^2+2r^2.$$

$$\therefore\quad PA^2+PC^2=PB^2+PD^2.$$

488. 求证：自一圆上的任意一点到另一圆的切线长的平方，等于此点到两圆根轴的距离与圆心距的乘积的两倍.



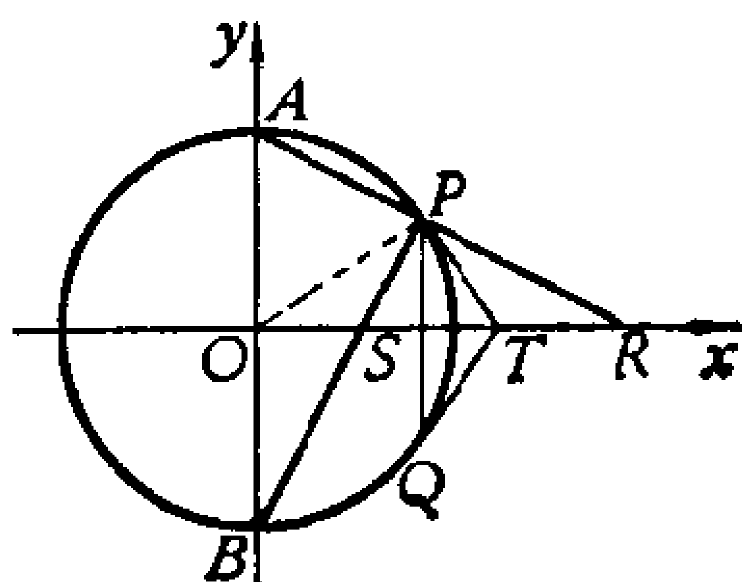
［证］ 以两圆的连心线为 x 轴，根轴为 y 轴建立直角坐标系如图. 则可设圆 O_1 为 $x^2+y^2-2\lambda_1x+h=0$，圆 O_2 为 $x^2+y^2-2\lambda_2x+h=0$. 于是圆心距 $|O_1O_2|=|\lambda_1-\lambda_2|$. 设点 $P(x_1,\ y_1)$为圆 O_1 上的任意一点（在圆 O_2 外，否则无切线可言），则 P 到圆 O_2 的切线长的平方为 $|PA|^2=x_1^2+y_1^2-2\lambda_2x_1+h\cdots$①；且 $x_1^2+y_1^2-2\lambda_1x_1+h=0$，即 $x_1^2+y_1^2+h=2\lambda_1x_1$. 代入①，

得$|PA|^2=2\lambda_1x_1-2\lambda_2x_1=2x_1(\lambda_1-\lambda_2)$. 由此可知$x_1(\lambda_1-\lambda_2)>0$. 又点$P$到根轴(即$y$轴)的距离$d=|x_1|$,

$$\therefore\quad 2d|O_1O_2|=2|x_1|\cdot|\lambda_1-\lambda_2|=2|x_1(\lambda_1-\lambda_2)|=2x_1(\lambda_1-\lambda_2).$$

故点P到圆O_2的切线长平方等于此点到两圆根轴的距离与圆心距的乘积的两倍.

489. 过圆上两点P、Q的切线相交于点T,自点P至平行于PQ的直径两端各作一直线,这两条直线分别交垂直于PQ的直径所在直线于点R、S. 求证:$|RT|=|ST|$.



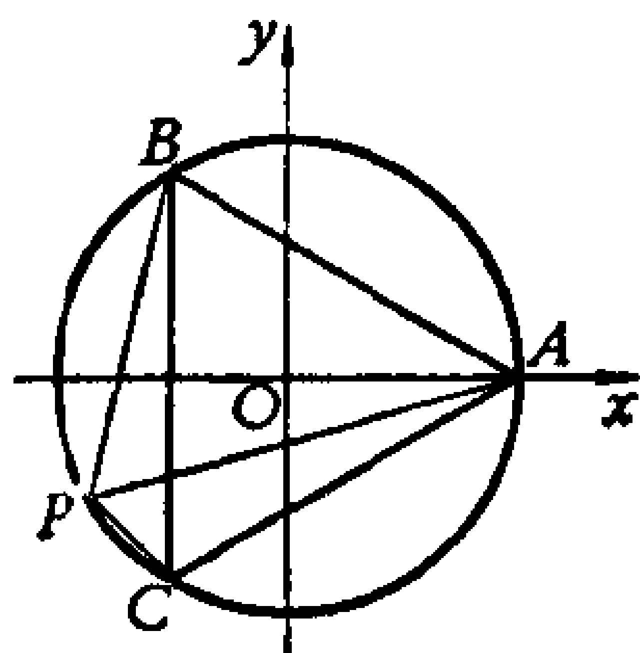
[证] 以圆心为原点,垂直于弦PQ的直线为x轴,建立直角坐标系. 设圆半径为1,则$A(0,1)$、$B(0,-1)$. 又设点$P(\cos\theta,\sin\theta)$,则切线PT的方程为$x\cos\theta+y\sin\theta-1=0$. $\because T$在x轴上,$\therefore$点T坐标为$\left(\frac{1}{\cos\theta},0\right)$. $\because PA$的方程是$x(1-\sin\theta)+y\cos\theta-\cos\theta=0$,且$R$在$x$轴上,$\therefore$点$R$坐标为$\left(\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta},0\right)$. $\because PB$的方程是$x(1+\sin\theta)-y\cos\theta-\cos\theta=0$,且点$S$在$x$轴上,$\therefore$点$S$坐标为$\left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta},0\right)$.

$$\therefore\quad |RT|=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}=\operatorname{tg}\theta;\quad |ST|=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\operatorname{tg}\theta.$$

$$\therefore\quad |RT|=|ST|.$$

[说明] 将圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$上点的坐标设作$(a+r\cos\theta,\ b+r\sin\theta)$($\theta$为参数)是一种常用的方法. 尤其当圆心在原点时,将圆上一点设为$(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$更为方便.

490. 圆内接正三角形ABC,在BC弧上任取一点P. 求证:$|PA|=|PB|+|PC|$.



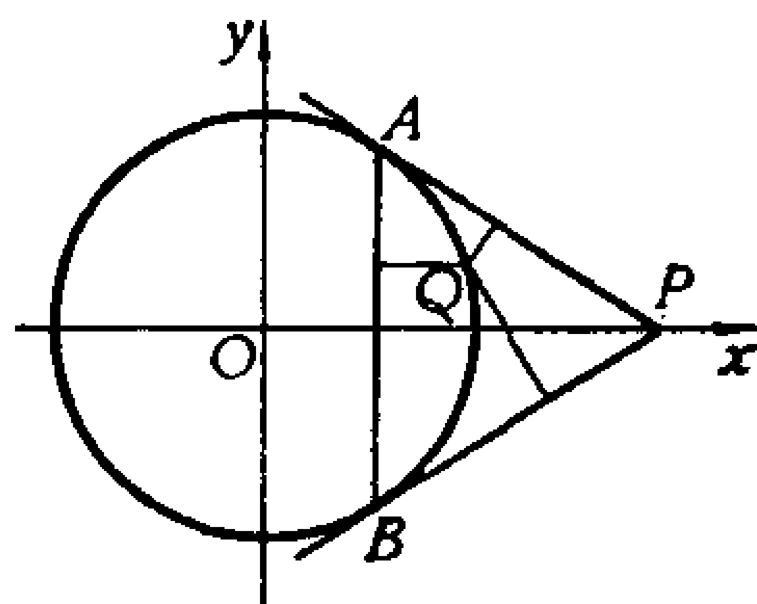
[证] 建立直角坐标系如图. 设圆半径为1,点A坐标为$(1,0)$,则点B坐标为$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,点$C$坐标为$\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 设点$P$坐标为$(\cos\theta,\sin\theta)$,其中$\frac{2\pi}{3}<\theta<\frac{4\pi}{3}$.

$$\because \quad |PA|=\sqrt{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta}=\sqrt{2-2\cos\theta}=2\sin\frac{\theta}{2},$$

$$\begin{aligned}|PB|+|PC|&=\sqrt{\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\\&\quad+\sqrt{\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\\&=\sqrt{2-2\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)}+\sqrt{2-2\cos\left(\frac{4\pi}{3}-\theta\right)}\\&=2\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)\quad\left(\because\ \frac{2\pi}{3}<\theta<\frac{4\pi}{3}\right)\\&=4\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=2\sin\frac{\theta}{2}.\end{aligned}$$

$$\therefore \quad |PA|=|PB|+|PC|.$$

491. 已知圆的一条弦和过此弦两端点的圆的两条切线，求证圆上任一点到此弦的距离是该点到两切线距离之比例中项.



［证一］ 以圆心 O 为原点，圆心 O 与两切线的交点 P 的连线为 x 轴，建立直角坐标系. 设圆方程为 $x^2+y^2=r^2$，切点坐标为 $A(x_0, y_0)$、$B(x_0, -y_0)$，则弦 AB 所在直线方程是 $x-x_0=0$，两切线 PA、PB 的方程分别是 $x_0x+y_0y=r^2$，$x_0x-y_0y=r^2$. 若圆上任一点 $Q(x_1, y_1)$，则 Q 到切点弦 AB 的距离是 $|x_1-x_0|$，Q 到两切线的距离之积为:

$$\begin{aligned}&\frac{|x_0x_1+y_0y_1-r^2|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\cdot\frac{|x_0x_1-y_0y_1-r^2|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=\frac{|(x_0x_1-r^2)^2-(y_0y_1)^2|}{x_0^2+y_0^2}\\&=\frac{|(x_0^2x_1^2-2x_0x_1r^2+r^4)-(r^2-x_0^2)(r^2-x_1^2)|}{r^2}=\frac{r^2(x_0-x_1)^2}{r^2}\\&=|x_1-x_0|^2.\end{aligned}$$

$\therefore$ 圆上任一点到切点弦的距离是该点到两切线距离的比例中项.

［证二］ 建立坐标系如前. 设 $A(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$、$B(r\cos\alpha,\ -r\sin\alpha)$、$Q(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$，则 PA 的方程为 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-r=0\cdots$①，$PB$ 的方程为 $x\cos\alpha-y\sin\alpha-r=0\cdots$②，$AB$ 的方程为 $x-r\cos\alpha=0\cdots$③. 点 Q 到

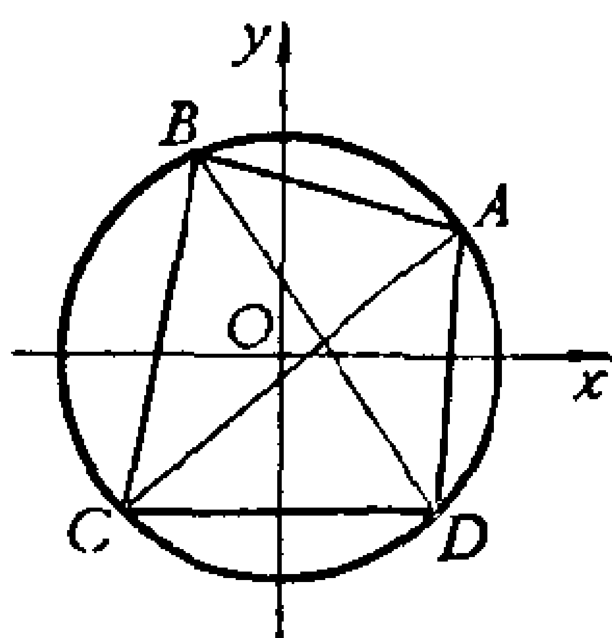
PA、PB、PC 的距离分别是:

$$d_1=|r\cos\theta\cos\alpha+r\sin\theta\sin\alpha-r|=r|1-\cos(\theta-\alpha)|=2r\sin^2\frac{\theta-\alpha}{2};$$

$$d_2=|r\cos\theta\cos\alpha-r\sin\theta\sin\alpha-r|=r|1-\cos(\theta+\alpha)|=2r\sin^2\frac{\theta+\alpha}{2};$$

$$d_3=|r\cos\theta-r\cos\alpha|=2r\left|\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2}\right|.$$

$$\therefore\quad d_1d_2=d_3^2.$$



492. 已知圆内接四边形 $ABCD$, 求证: $|AC|\cdot|BD|=|AB|\cdot|CD|+|AD|\cdot|BC|$.

[证] 以圆心为原点建立直角坐标系如图. 设圆半径为1. 令 $A(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$、$B(\cos\beta,\ \sin\beta)$、$C(\cos\gamma,\ \sin\gamma)$、$D(\cos\delta,\ \sin\delta)$, 其中 $0<\alpha<\beta<\gamma<\delta<2\pi$. 则

$$|AB|=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2}$$
$$=\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}+4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

同理: $|BC|=2\sin\dfrac{\gamma-\beta}{2}$, $|CD|=2\sin\dfrac{\delta-\gamma}{2}$, $|DA|=2\sin\dfrac{\delta-\alpha}{2}$,

$$|AC|=2\sin\frac{\gamma-\alpha}{2},\quad |BD|=2\sin\frac{\delta-\beta}{2}.$$

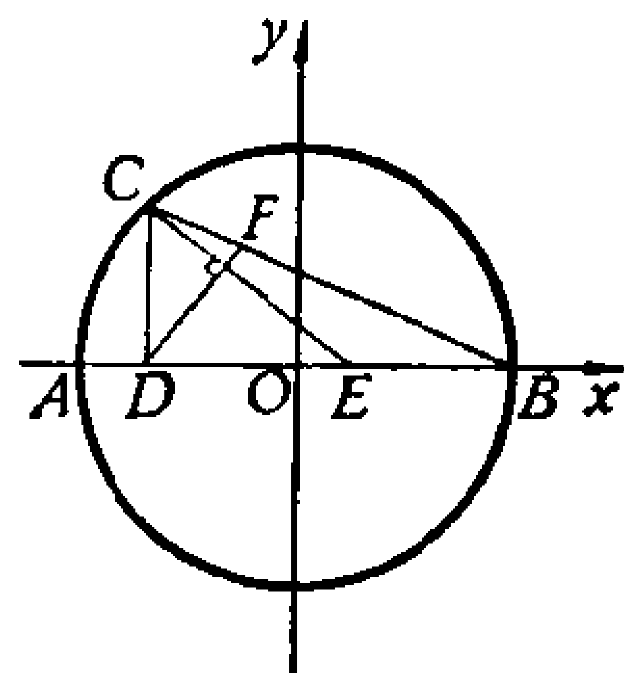
$$\therefore\quad |AB|\cdot|CD|+|BC|\cdot|DA|$$
$$=4\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\delta-\gamma}{2}+4\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\delta-\alpha}{2}$$
$$=2\left(\cos\frac{\beta-\alpha-\delta+\gamma}{2}-\cos\frac{\beta-\alpha+\delta-\gamma}{2}+\cos\frac{\gamma-\beta-\delta+\alpha}{2}\right.$$
$$\left.-\cos\frac{\gamma-\beta+\delta-\alpha}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\beta-\alpha-\delta+\gamma}{2}-\cos\frac{\gamma-\beta+\delta-\alpha}{2}\right)$$
$$=4\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\delta-\beta}{2}=|AC|\cdot|BD|.$$

[说明] 本题即平面几何中著名的托勒密(Ptolemaeus)定理.

493. 自圆 O 上一点 C 向圆之直径 AB 引垂线, 垂足为 D, AB 上一点 E, 过 D 引 CE 的垂线与 BC 交于 F. 求证:

$$\frac{AD}{DE}=\frac{CF}{FB}.$$

［分析］ 设 $\frac{CF}{FB}=\lambda$, 则点 F 坐标可以确定. 根据 DF 和 CE 垂直, 可列出 λ 满足的方程, 解出 λ 即可证明.



［证］ 以已知圆圆心 O 为原点, 直径 AB 所在直线为 x 轴建立直角坐标系, 并设圆 O 半径为 1, 则点 A、B 的坐标分别为 $(-1, 0)$、$(1, 0)$. 设点 C 坐标为 $(\cos\theta, \sin\theta)$, 则点 D 坐标为 $(\cos\theta, 0)$. 又设点 E 坐标为 $(a, 0)$, $\frac{CF}{FB}=\lambda$, 则点 F 坐标为 $x=\frac{\cos\theta+\lambda}{1+\lambda}$, $y=\frac{\sin\theta}{1+\lambda}$. 直线 DF 的斜率 $k_1=\frac{\sin\theta}{\lambda(1-\cos\theta)}$; 直线 CE 的斜率 $k_2=\frac{\sin\theta}{\cos\theta-a}$. $\because DF\perp CE$,

$$\therefore \quad \frac{\sin\theta}{\lambda(1-\cos\theta)}=\frac{a-\cos\theta}{\sin\theta}, \quad \lambda=\frac{\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)(a-\cos\theta)}=\frac{1+\cos\theta}{a-\cos\theta}.$$

而
$$\frac{AD}{DE}=\frac{\cos\theta+1}{a-\cos\theta}, \quad \therefore \quad \frac{AD}{DE}=\frac{CF}{FB}.$$

［分析二］ 利用第 324 题, 直接计算 $\frac{AD}{DE}$ 和 $\frac{CF}{FB}$, 可简化证明.

［证二］ 建立坐标系, 并假设各点坐标如前, 则 $\frac{AD}{DE}=\frac{\cos\theta+1}{a-\cos\theta}$. 而 $\because DF\perp CE$, 故其方程为 $y=\frac{a-\cos\theta}{\sin\theta}(x-\cos\theta)$, 即

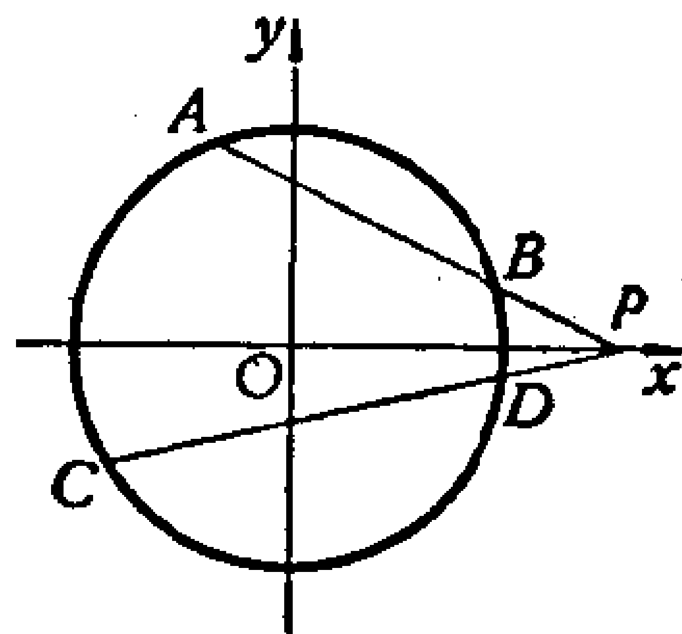
$$(a-\cos\theta)x-y\sin\theta-\cos\theta(a-\cos\theta)=0.$$

$$\therefore \quad \frac{CF}{FB}=-\frac{(a-\cos\theta)\cos\theta-\sin^2\theta-\cos\theta(a-\cos\theta)}{(a-\cos\theta)-\cos\theta(a-\cos\theta)}$$
$$=\frac{\sin^2\theta}{(a-\cos\theta)(1-\cos\theta)}=\frac{\cos\theta+1}{a-\cos\theta},$$

(参见第 324 题). 故 $\frac{AD}{DE}=\frac{CF}{FB}$.

494. 圆的两弦 AB、CD 所在直线相交于 P. 求证:

$$|PA|\cdot|PB|=|PC|\cdot|PD|.$$

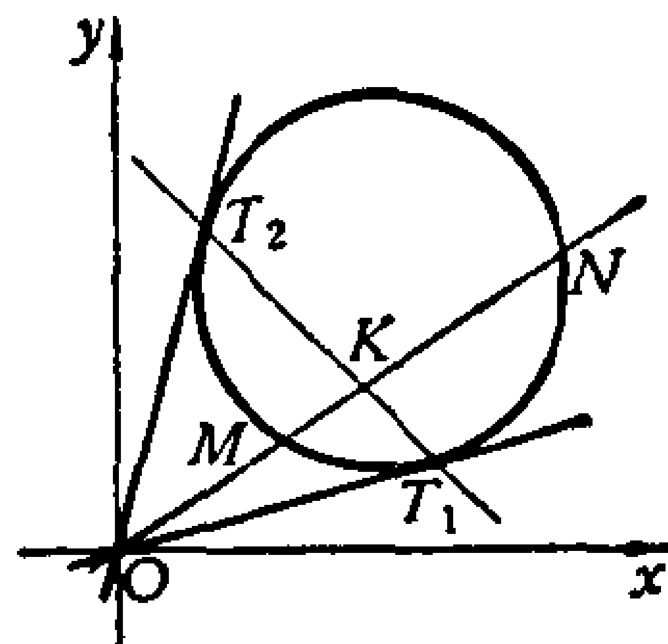


［证］ 以圆心为原点, 圆心到两弦交点 P 的连线为 x 轴, 建立直角坐标系. 设圆半径为 r, 则圆方程为 $x^2+y^2=r^2\cdots$①. 设点 P 坐标为 $(a, 0)$, 则弦 AB 所在直线方程可用参数

式表示$\begin{cases}x=a+t\cos\theta\\ y=t\sin\theta\end{cases}$…②. ②代入①，得 $t^2+2at\cos\theta+a^2-r^2=0$. 根据参数 t 的几何意义可知 $|PA|\cdot|PB|=|t_1\cdot t_2|=|a^2-r^2|$. 同理可证 $|PC|\cdot|PD|=|a^2-r^2|$. $\therefore |PC|\cdot|PD|=|PA|\cdot|PB|$.

［说明］ 本题结论对交点 P 在圆外、圆上和圆内都适合，即圆幂定理.

495. 已知圆 C: $(x-2)^2+(y-2)^2=2$. (1) 过原点 O 引圆 C 的切线，求切线的斜率；(2) 设(1)中两切点为 T_1、T_2，求直线 T_1T_2 的方程；(3) 过原点 O 引任一直线 l 交圆 C 于 M、N，交直线 T_1T_2 于 K，并设 OM、ON 和 OK 的长度分别为 t_1、t_2、t_3. 求证：$\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}=\dfrac{2}{t_3}$.



［解］ (1) 设切线的斜率为 k，则其切线方程为 $y=kx$. 代入圆 C 的方程，得

$$(1+k^2)x^2-4(1+k)x+6=0\cdots①.$$

$\because$ 直线 $y=kx$ 是圆 C 的切线，$\therefore 4(1+k)^2-6(1+k^2)=0$，即 $k^2-4k+1=0$. $\therefore k=2\pm\sqrt{3}$. 故过原点 O 所引圆 C 的切线的斜率为 $2+\sqrt{3}$ 或 $2-\sqrt{3}$.

(2) $\because$ 原点关于圆 $(x-2)^2+(y-2)^2=2$ 的切点弦方程为

$$0\cdot x+0\cdot y-2(x+0)-2(y+0)+6=0,$$

故 T_1T_2 的方程为 $x+y-3=0$.

(3) 设直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=t\cos\theta\\ y=t\sin\theta\end{cases}$($t$ 为参数). $\because$ 直线 l 和圆 C 相交，故由上述方程和圆 C 的方程所得的关于 t 的二次方程 $t^2-4(\cos\theta+\sin\theta)t+6=0$ 必有两实根 t_1、t_2，且 $t_1=|OM|$，$t_2=|ON|$. $\because t_1+t_2=4(\cos\theta+\sin\theta)$，$t_1\cdot t_2=6$. $\therefore \dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}=\dfrac{t_1+t_2}{t_1t_2}=\dfrac{2}{3}(\cos\theta+\sin\theta)$. 又以$\begin{cases}x=t\cos\theta\\ y=t\sin\theta\end{cases}$代入直线 T_1T_2 的方程 $x+y-3=0$，得 $t(\cos\theta+\sin\theta)=3$. 此方程的根 t_3 即为 OK 的长度，$\therefore \dfrac{2}{t_3}=\dfrac{2}{3}(\cos\theta+\sin\theta)$. 故 $\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}=\dfrac{2}{t_3}$.

496. 若三个圆：$x^2+y^2-2\lambda_1x=r^2$，$x^2+y^2-2\lambda_2x=r^2$，

$x^2+y^2-2\lambda_3x=r^2$(λ_1、λ_2、λ_3均为正数)的圆心到原点的距离成等比数列，从圆 $x^2+y^2=r^2$ 的左半圆上任一点引三圆的切线，其长分别为 t_1、t_2、t_3．求证：t_1、t_2、t_3 也成等比数列．

[分析] 根据切线长公式写出圆 $x^2+y^2=r^2$ 的左半圆上的任一点分别到三圆的切线长，即可根据已知条件验证之．

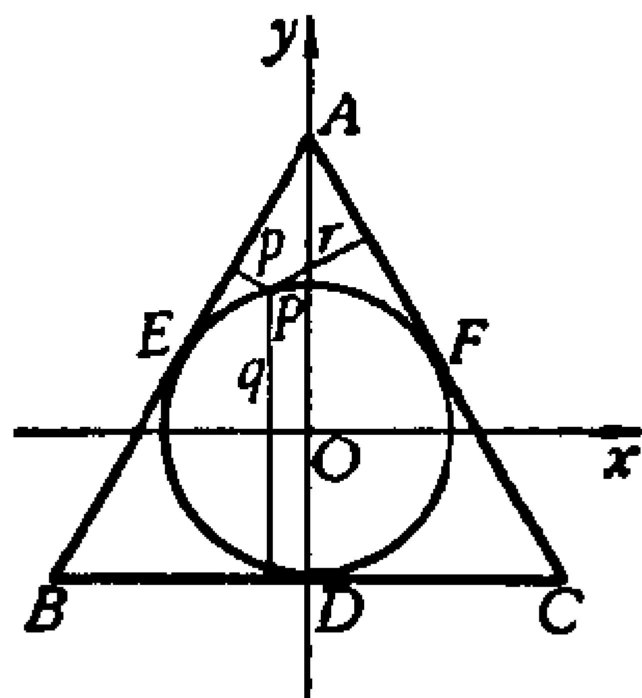
[证] 三个圆的圆心分别是$(\lambda_1, 0)$、$(\lambda_2, 0)$、$(\lambda_3, 0)$，圆心到原点距离分别是 λ_1、λ_2、λ_3．设点(x_1, y_1)为圆 $x^2+y^2=r^2$ 的左半圆上的任一点，则 $x_1<0$，且 $x_1^2+y_1^2=r^2$．根据切线长公式(4.31)得 $t_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2-2\lambda_1x_1-r^2}=\sqrt{-2\lambda_1x_1}$．同理，$t_2=\sqrt{-2\lambda_2x_1}$；$t_3=\sqrt{-2\lambda_3x_1}$．又已知 $\lambda_2^2=\lambda_1\cdot\lambda_3$．

$$\therefore\quad t_1\cdot t_3=\sqrt{-2\lambda_1x_1}\cdot\sqrt{-2\lambda_3x_1}=\sqrt{4\lambda_1\lambda_3x_1^2}=-2\lambda_2x_1;$$

$$t_2^2=-2\lambda_2x_1.\qquad\therefore\quad t_1\cdot t_3=t_2^2,$$

即 t_1、t_2、t_3 成等比数列．

497．设正三角形 ABC 的内切圆与三边的切点分别为 D、E、F．若 $\overset{\frown}{EF}$ 上任一点 P 到三边的距离分别为 p、q、r．求证：$p^{\frac{1}{2}}+r^{\frac{1}{2}}=q^{\frac{1}{2}}$．



[分析] 因题断涉及一点到正三角形三边的距离，故宜以正三角形中心为原点，一顶点位于 y 轴上建立直角坐标系，则三边的方程可直接写成法线式．

[证] 取正三角形 ABC 的中心为原点，顶点 A 位于 y 轴上，设 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为单位长度，则三边 AC、AB、BC 的方程为

$$x\cos\frac{\pi}{6}+y\sin\frac{\pi}{6}=1\cdots①,$$

$$x\cos\frac{5\pi}{6}+y\sin\frac{5\pi}{6}=1\cdots②,\ x\cos\frac{3\pi}{2}+y\sin\frac{3\pi}{2}=1\cdots③.$$

点 P 的坐标为$(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\theta\in\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right)$．

$$r^{\frac{1}{2}}=\left|\cos\theta\cos\frac{\pi}{6}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{6}-1\right|^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[1-\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{12}\right);$$

$$p^{\frac{1}{2}}=\left|\cos\theta\cos\frac{5\pi}{6}+\sin\theta\sin\frac{5\pi}{6}-1\right|^{\frac{1}{2}}=\left[1-\cos\left(\theta-\frac{5\pi}{6}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\theta}{2}\right),\quad\left(\because\quad\theta\in\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right)\right);$$

$$q^{\frac{1}{2}}=\left|\cos\theta\cos\frac{3\pi}{2}+\sin\theta\sin\frac{3\pi}{2}-1\right|^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[1-\cos\left(\theta-\frac{3\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right).$$

$$\therefore\quad p^{\frac{1}{2}}+r^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\left[\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=q^{\frac{1}{2}}.$$

498. 过定点 $M(x_1,\ y_1)$ 的两圆与两坐标轴相切，它们的半径分别为 r_1、r_2，求证：$r_1\cdot r_2=x_1^2+y_1^2$.

［证］ 先证点 $M(x_1,\ y_1)$ 在第一象限的情形．半径为 r 的圆，若与坐标轴相切则其方程为 $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$，即 $x^2+y^2-2(x+y)r+r^2=0$. $\because$ 圆过点 M，$\therefore$ $r^2-2r(x_1+y_1)+x_1^2+y_1^2=0\cdots$①，此为 r 的二次方程，其判别式为 $\Delta=4(x_1+y_1)^2-4(x_1^2+y_1^2)=8x_1y_1$. $\because$ $x_1>0$, $y_1>0$, $\therefore$ $\Delta>0$. 故方程 ① 有两个实根 r_1、r_2，即两圆的半径．根据韦达定理，$r_1\cdot r_2=x_1^2+y_1^2$. 同理可证 M 在第二、三、四象限的情形．如果点 M 位于坐标轴上，则 $\Delta=0$，$r_1=r_2=|x_1|$ $(y_1=0)$，或 $|y_1|$ $(x_1=0)$. $r_1\cdot r_2=x_1^2+y_1^2$ 显然也成立．

499. 圆心不共线的三圆，每两圆有一根轴，则此三根轴共点．

［证］ 设三圆方程为：$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$，$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$，$x^2+y^2+D_3x+E_3y+F_3=0$. 则三根轴方程为 l_1：$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0$，$l_2$：$(D_2-D_3)x+(E_2-E_3)y+F_2-F_3=0$，$l_3$：$(D_3-D_1)x+(E_3-E_1)y+F_3-F_1=0$. 三式相加，左边恒等于零，故

$$-[(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2]$$
$$=[(D_2-D_3)x+(E_2-E_3)y+F_2-F_3]$$
$$+[(D_3-D_1)x+(E_3-E_1)y+(F_3-F_1)]\cdots①.$$

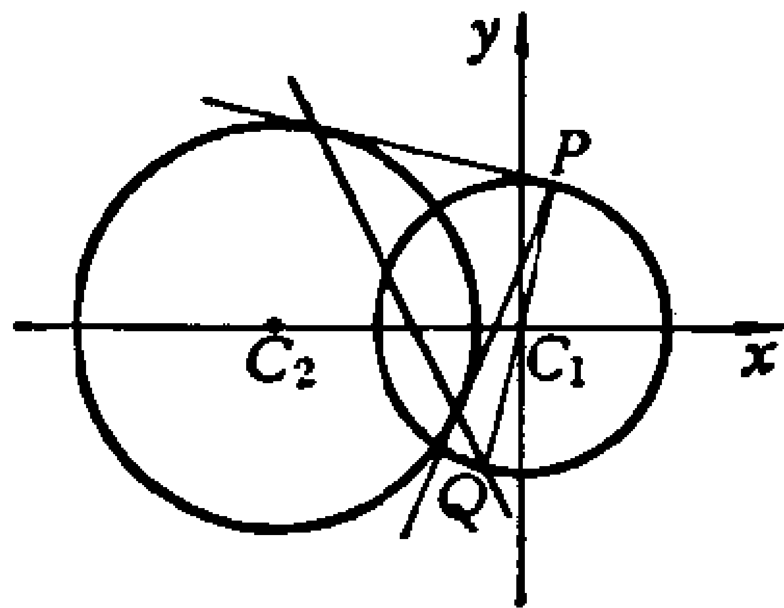
∵ 三圆心不共线，∴ l_2 与 l_3 相交. 由①知 l_1 过 l_2 和 l_3 的交点，即三根轴交于一点. 此点称三圆的根心.

500. 试求圆系 $x^2+y^2+6x-5+k(x^2+y^2+6y-7)=0$ 中圆心在直线 $x-y=4$ 上的圆方程. 并证明圆系中诸圆圆心均在同一直线上.

[解] 由原方程整理得 $(1+k)(x^2+y^2)+6x+6ky-(5+7k)=0\cdots$①，故其圆心坐标为：$x=-\dfrac{3}{1+k}\cdots$②，$y=-\dfrac{3k}{1+k}\cdots$③. 以②、③代入方程 $x-y=4$，得 $-\dfrac{3}{1+k}+\dfrac{3k}{1+k}=4$. 解得 $k=-7$. 代入①，并化简为 $x^2+y^2-x+7y-\dfrac{22}{3}=0$. 此即已知圆系中圆心在直线 $x-y=4$ 上的圆方程.

圆系中诸圆圆心轨迹的参数方程，即为方程②、③. 从中消去参数 k，得 $x+y+3=0$. 故其圆心在同一直线上.

501. 已知两圆 C_1、C_2 互相直交，求证：圆 C_1 上的任一点 P 关于圆 C_2 的极线必过圆 C_1 的过点 P 的直径的另一端点.



[分析] 利用两圆直交的充要条件(参见第 432 题)，并根据直径两端点关于圆心成中心对称，即可得证.

[证] 以圆 C_1 的圆心为原点，两圆连心线为 x 轴建立直角坐标系. 设圆 C_1 的方程为 $x^2+y^2=r^2$，其上任一点 P 的坐标为 $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$，则过点 P 的圆 C_1 的直径的另一端点 Q 的坐标必为 $(-r\cos\theta,\ -r\sin\theta)$. 又设圆 C_2 的方程为 $x^2+y^2-2\lambda x-h=0$，∵ 两圆 C_1、C_2 直交，∴ $-h-r^2=0$，即 $-h=r^2$. 故点 P 关于圆 C_2 的极线方程为

$$xr\cos\theta+yr\sin\theta-\lambda(x+r\cos\theta)+r^2=0\cdots①.$$

∵ 当 $x=-r\cos\theta$，$y=-r\sin\theta$ 时，①式的左端：

$$xr\cos\theta+yr\sin\theta-\lambda(x+r\cos\theta)+r^2$$
$$=-r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta-\lambda(-r\cos\theta+r\cos\theta)+r^2=0.$$

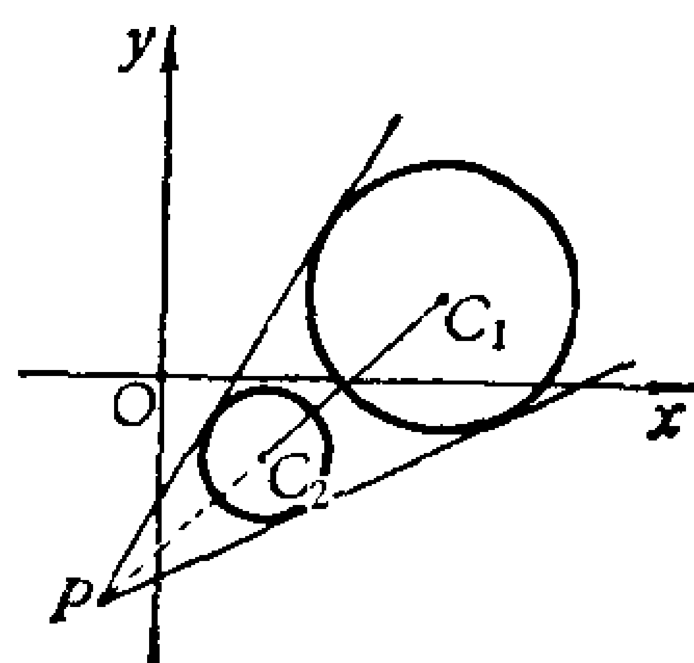
∴ 点 Q 在直线①上，即点 P 关于圆 C_2 的极线过圆 C_1 的过点 P 的直径

的另一端点.

502. 已知两互相直交的共轴圆系,求证其中一个圆系中圆的中心必在另一圆系的根轴上.

[证] 建立坐标系,使 y 轴为一圆系的公共根轴,圆心在 x 轴上,其方程为 $x^2+y^2-2\lambda_1x+F=0\cdots$①,则与①直交的共轴圆系方程为 $x^2+y^2-2\lambda_2y-F=0\cdots$②. ①的中心为 $C(\lambda_1, 0)$,根轴为 y 轴; ②的中心为 $D(0, \lambda_2)$,根轴为 x 轴. ∴ 点 C 在②的根轴上,点 D 在①的根轴上.

503. 求证:半径不相等的两圆的两外公切线与连心线交于一点.

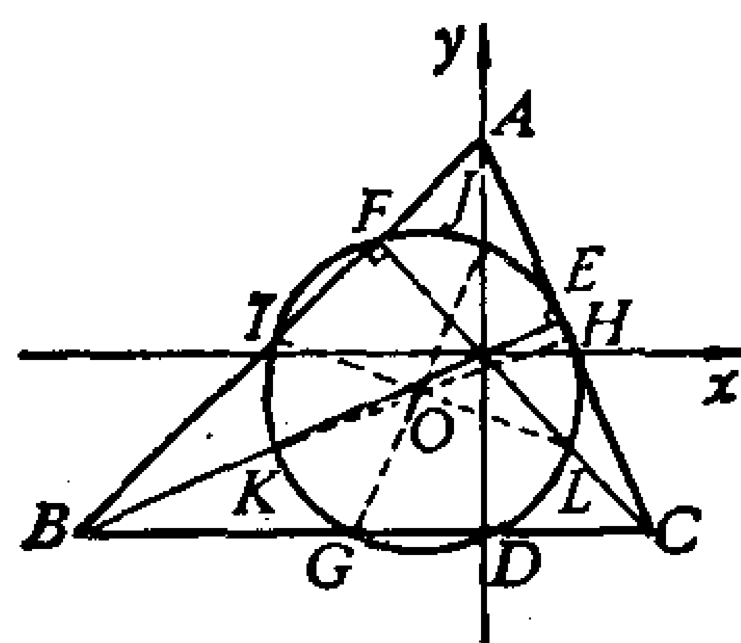


[证] 建立直角坐标系,使两圆的圆心分别为 $C_1(g_1, f_1)$、$C_2(g_2, f_2)$,相应的半径为 r_1、r_2. 设这两圆的任一外公切线为 $ax+by+c=0$,此外公切线交连心线 C_1C_2 于 P. 据第 324 题,有

$$\frac{C_1P}{PC_2}=-\frac{ag_1+bf_1+c}{ag_2+bf_2+c}=-\frac{\dfrac{ag_1+bf_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}}{\dfrac{ag_2+bf_2+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}}$$

($\sqrt{a^2+b^2}$ 前的±号按化直线方程 $ax+bx+c=0$ 为法线式时的取法取之),即 $\frac{C_1P}{PC_2}=-\frac{r_1}{r_2}$. ∵ $\frac{C_1P}{PC_2}$ 的值为与 a、b、c 无关的一定值,∴ 两外公切线和连心线相交于同一点.

504. 证明:三角形三边的中点、三高的垂足,垂心与顶点连接线段的三个中点,这九个点共圆.



[分析] 由于九个点中有三个是垂心与顶点连线的中点,故以垂心为原点、一高为 y 轴建立直角坐标系,易于计算各点的坐标. 然后证明分别过三个点的三圆重合即可.

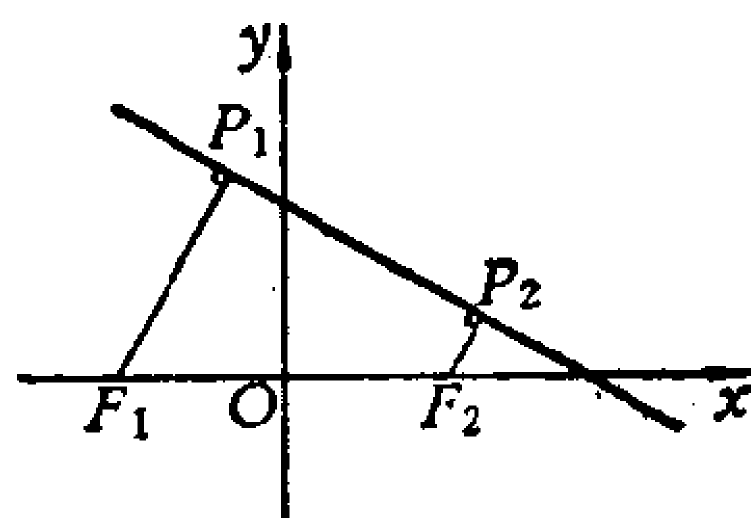
[证] 以垂心为原点、$\triangle ABC$ 的一高 AD 所在直线为 y 轴建立直角坐标系,并设 A、B、C 的坐标分别为 $(0, 2a)$、$(2b, 2d)$、$(2c, 2d)$,则三边的中点坐标分别为 $G(b+c, 2d)$、$H(c, a+d)$、$I(b, a+d)$;垂心与三顶点连线的中点分别为 $J(0, a)$、$K(b, d)$、$L(c, d)$.

∵ AD、BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的三条高，∴ $\triangle JGD$、$\triangle KHE$、$\triangle LIF$ 都是直角三角形. 故它们的外接圆直径分别为 JG、KH、LI. 又因这三条线段的中点坐标均为 $\left(\frac{b+c}{2}, \frac{a+2d}{2}\right)$，故三外接圆的圆心重合. 而 $|JG|^2=(b+c)^2+(2d-a)^2$，$|KH|^2=|LI|^2=(b-c)^2+a^2$. 且从 $BE\perp AC$ 可得 $d(2d-2a)+b\cdot 2c=0$，即 $a=\frac{d^2+bc}{d}$. 故

$$|JG|^2-|KH|^2=(b+c)^2+(2d-a)^2-(b-c)^2-a^2$$
$$=4(bc+d^2-ad)=0.$$

∴ $|JG|=|KH|=|LI|$，即三圆的直径相等. 由此可得 $\triangle JGD$、$\triangle KHE$、$\triangle LIF$ 的三外接圆重合，∴ J、G、D、K、H、E、L、I、F 九点共圆.

505. **已知动直线关于两定点的离差之积为定值，试证两定点在动直线上的射影共圆.**



［分析］ 分别求出两定点在动直线上的射影的轨迹方程，便可得证.

［证］ 建立直角坐标系，使两定点坐标是 $F_1(-a, 0)$ 与 $F_2(a, 0)$，设动直线方程为 $x\cos\omega+y\sin\omega=p$ …①，其中 ω、p 为参数. 设动直线关于两定点的离差之积为定值 k，则 $(a\cos\omega-p)(-a\cos\omega-p)=k$，即 $p^2=a^2\cos^2\omega+k$ …②. 从 $(a, 0)$ 向动直线 ① 所作垂线的方程为 $(x-a)\sin\omega-y\cos\omega=0$，即 $x\sin\omega-y\cos\omega=a\sin\omega$ …③. ①^2+③^2，并利用 ② 式得

$$x^2+y^2=p^2+a^2\sin^2\omega=p^2+a^2-a^2\cos^2\omega=a^2+k.$$

只要把 a 改成 $-a$，同样可证得定点 $(-a, 0)$ 到动直线的射影均在圆 $x^2+y^2=a^2+k$ 上，($k<-a^2$ 时，由 ② 可知这样的动直线不存在).

506. **设一动圆经过两直线的交点 O，并在此两直线上截取弦 OP、OQ，满足 $m\cdot OP+n\cdot OQ=1$，求证此动圆恒过另一定点.**

［分析］ 建立直角坐标系，并假设两动点 P、Q 的坐标后，求出过点 O、P、Q 的圆方程，即可证明.

［证］ 取两直线的交点 O 为原点，一直线为 x 轴建立直角坐标系，设两直线的夹角为 α $(0<\alpha<\pi)$，$OP=a$，$OQ=b$，动圆方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey=0$. ∵ 圆过点 $P(a, 0)$、$Q(b\cos\alpha, b\sin\alpha)$，

$$\therefore\quad D=-a,\quad E=\frac{a\cos\alpha-b}{\sin\alpha}.$$

但 $ma+nb=1$, $\therefore a=\dfrac{1-nb}{m}$. $\therefore$ 动圆方程为

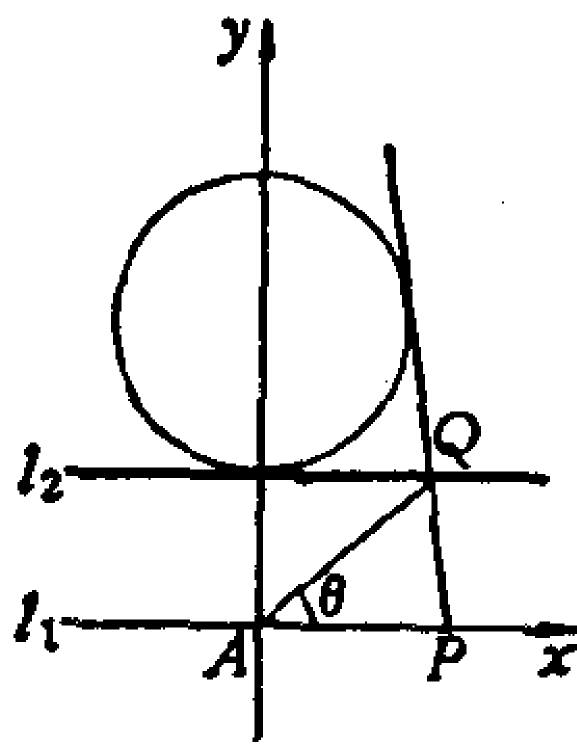
$$x^2+y^2-\frac{(1-nb)}{m}x+\left[\frac{1-nb}{m}\operatorname{ctg}\alpha-b\csc\alpha\right]y=0,$$

即
$$x^2+y^2-\frac{1}{m}x+\frac{1}{m}y\operatorname{ctg}\alpha+b\left[\frac{n}{m}x-\left(\frac{n}{m}\operatorname{ctg}\alpha+\csc\alpha\right)y\right]=0,$$

其中 b 为参数. $\therefore$ 此圆必过 $\begin{cases}x^2+y^2-\dfrac{1}{m}x+\dfrac{1}{m}y\operatorname{ctg}\alpha=0\\ \dfrac{n}{m}x-\left(\dfrac{n}{m}\operatorname{ctg}\alpha+\csc\alpha\right)y=0\end{cases}$ 的两交点.

由于 m、n、α 均为定值，故两交点为定点，其中之一为原点. $\therefore$ 此动圆恒过另一定点.

507. **有两平行线 l_1、l_2, 在 l_1 上有一定点 A, 于 l_1、l_2 上各取一动点 P、Q, 使 $\angle QPA=2\angle QAP$, 求证直线 PQ 恒切于一定圆.**



［分析］ 建立适当的坐标系，求出动直线 PQ 的方程，并将其化为 $(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta=r$ 的形式，即可得证(参见第 509 题［说明］).

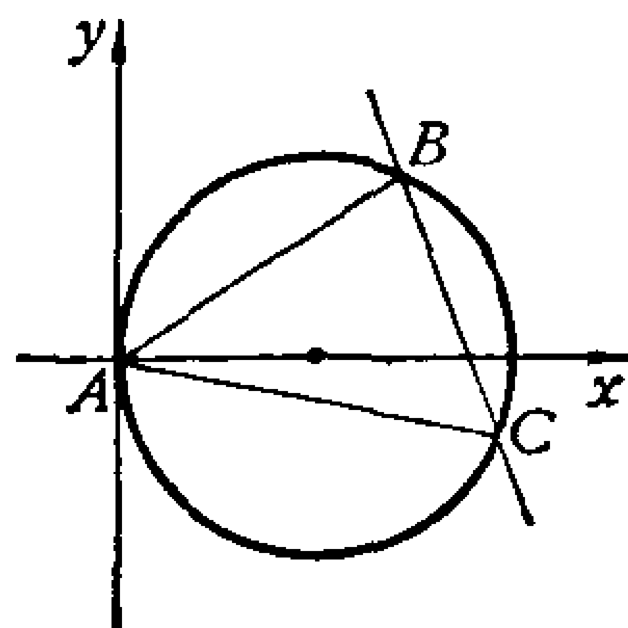
［证］ 取定点 A 为原点，l_1 为 x 轴，建立直角坐标系. 设 l_1、l_2 之间的距离为 a, 令 $\angle QAP=\theta$, 则点 Q 的坐标为 $Q(a\operatorname{ctg}\theta,\ a)$. $\because$ $\angle QPA=2\angle QAP=2\theta$, $\therefore$ 直线 PQ 的方程为 $y-a=\operatorname{tg}(\pi-2\theta)(x-a\operatorname{ctg}\theta)$, 即 $(y-2a)\cos 2\theta+x\sin 2\theta=a$, $\therefore$ 直线 PQ 与定圆 $x^2+(y-2a)^2=a^2$ 相切.

508. **已知: $a+b=-\operatorname{ctg}\theta$, $ab=-\csc\theta$, $a\neq b$, 试证不论 θ 怎样变化，过两点 $(a,\ a^2)$、$(b,\ b^2)$ 的直线常与一个定圆相切.**

［证］ 过两点 $(a,\ a^2)$、$(b,\ b^2)$ 的直线方程为 $y-a^2=\dfrac{a^2-b^2}{a-b}(x-a)$, 即 $y-a^2=(a+b)x-a^2-ab$, $y=-x\operatorname{ctg}\theta+\csc\theta$. $\therefore$ $x\cos\theta+y\sin\theta=1$. 不论 θ 怎样变化，此直线常与单位圆 $x^2+y^2=1$ 相切.

509. **自定圆上一定点 A 作不重合的两弦 AB、AC, 若此两**

弦长之积$|AB|\cdot|AC|=k$(定值)，求证直线BC恒切于一定圆.



［分析一］ 根据两弦长之积为定值求出BC的方程,再证它和一定点的距离为定值,即可证得本题.

［证一］ 以A为原点，定圆的半径为单位长度，过点A的直径所在直线为x轴建立直角坐标系，则此定圆的参数方程为$\begin{cases}x=1+\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$ $(-\pi<\theta\leqslant\pi)$. 设点$B$的坐标为$(1+\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ $(\alpha\in(-\pi,\ \pi))$，则

$$|AB|^2=(1+\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha=2(1+\cos\alpha)=4\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

$$\because\ \frac{\alpha}{2}\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right),\quad \therefore\ |AB|=2\cos\frac{\alpha}{2}.$$

又设点C的坐标为$(1+\cos\beta,\ \sin\beta)(\beta\in(-\pi,\ \pi))$，同理可得

$$|AC|=2\cos\frac{\beta}{2}.\quad \because\ |AB|\cdot|AC|=k,\quad \therefore\ \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=\frac{k}{4}\cdots①.$$

又直线BC的方程为

$$(\cos\alpha-\cos\beta)(y-\sin\alpha)=(\sin\alpha-\sin\beta)[x-(1+\cos\alpha)],$$

经整理,得

$$(\sin\alpha-\sin\beta)x-(\cos\alpha-\cos\beta)y-(\sin\alpha-\sin\beta)-\sin(\alpha-\beta)=0,$$

即 $$2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left[x\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+y\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]=0.$$

显然，$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\neq0$, 否则$B$、$C$重合,不合题意. 故$BC$的方程为

$$x\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+y\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=0.$$

由①可得$x\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+y\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{k}{2}=0$, 此即法线长为$\frac{k}{2}$的直线的法线式方程. 故可知直线$BC$恒切于定圆$x^2+y^2=\frac{k^2}{4}$.

［分析二］ 如取极坐标系，根据第410题结果可得$B(\rho_1,\ \alpha)$、$C(\rho_2,\ \beta)$的连线方程，运用条件$|AB|\cdot|AC|=k$, 即$|\rho_1\cdot\rho_2|=k$, 简化BC的方程即可得证.

［证二］ 取点 A 为极点，过 A 的直径为极轴，建立极坐标系. 令定圆半径为单位长度，则定圆方程为 $\rho=2\cos\theta$; 设 B、C 两点的极坐标为(ρ_1, α)、(ρ_2, β)，则 $\rho_1=AB=2\cos\alpha$, $\rho_2=AC=2\cos\beta$. 根据第410题结果可得直线 BC 的方程为 $\rho\cos(\theta-\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta$. $\because |AB|\cdot|AC|=k$, $\therefore \rho\cos(\theta-\alpha-\beta)=\dfrac{k}{2}$. 故直线恒与定圆 $x^2+y^2=\dfrac{k^2}{4}$ 相切.

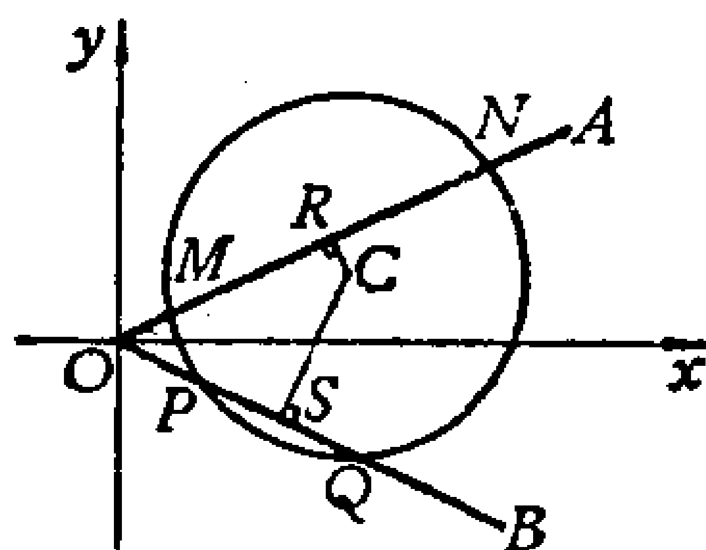
［说明］ 证明一动直线恒切于一定圆，可如本题一样，写出动直线方程，并将其化成如:

$$(x-x_0)\cos\alpha+(y-y_0)\sin\alpha-p=0 \quad 或 \quad \rho\cos(\theta-\alpha-\beta)=r$$

的形式，则此直线恒切于定圆

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=p^2 \quad (p>0), \quad 或 \quad x^2+y^2=r^2.$$

510. 求证：在已知角的两边各截得不同定长之弦的圆，其圆心到内外角平分线的距离之积为定值.



［分析］ 由于一个角的内外角平分线互相垂直，故可取此角的内外角平分线所在的直线为坐标轴建立坐标系.

［证］ 以已知角 $\angle AOB$ 的内外角平分线所在直线分别为 x、y 轴建立直角坐标系如图. 设 OA、OB 两直线的方程各为 $kx+y=0$ 和 $kx-y=0$; 符合条件的圆的圆心为(x, y)，半径为 r; 在 OA 上截得定长的弦$|MN|=2a$, 在 OB 上截得定长之弦$|PQ|=2b$; 则圆心到此角的内外角平分线的距离之积即为$|xy|$. 作$CR\perp MN$, $CS\perp PQ$, R、S 为垂足，则 $r^2=|CR|^2+|RN|^2=|CS|^2+|SQ|^2$, 即

$$\frac{(kx+y)^2}{1+k^2}+a^2=\frac{(kx-y)^2}{1+k^2}+b^2.$$

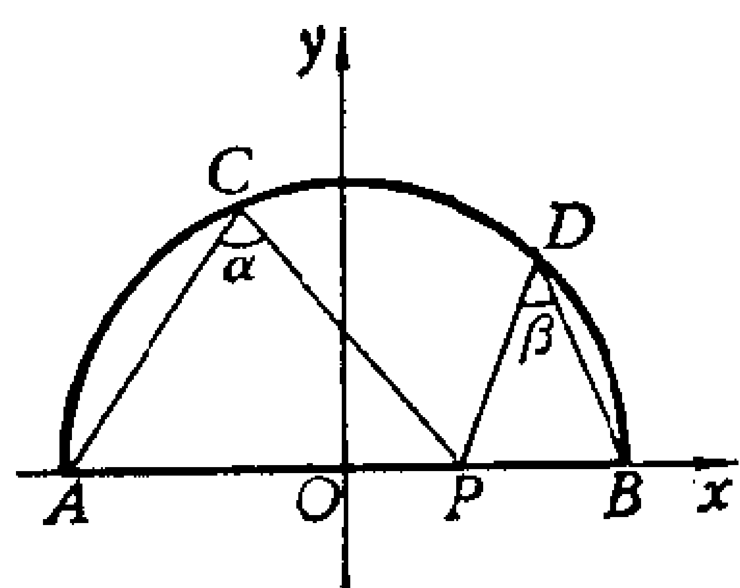
化简得 $\dfrac{4kxy}{1+k^2}=b^2-a^2$. $\therefore |xy|=(1+k^2)\dfrac{|b^2-a^2|}{4|k|}$ 为定值.

［说明］ (1) 涉及已知角的内、外角平分线的问题，取其内、外角平分线为 x、y 轴建立直角坐标系，可以简化计算.

(2) 本题如改为: "求在已知角两边截得定长之弦的圆的中心的轨迹"，则轨迹方程为 $xy=\pm(1+k^2)\left|\dfrac{b^2-a^2}{4k}\right|$. 解法基本不变.

511. 半圆的直径为 AB, 圆弧上定点 C、D, AB 上一动点

P 满足 $\angle ACP=\alpha$, $\angle BDP=\beta$, 求证 $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$ 为定值.



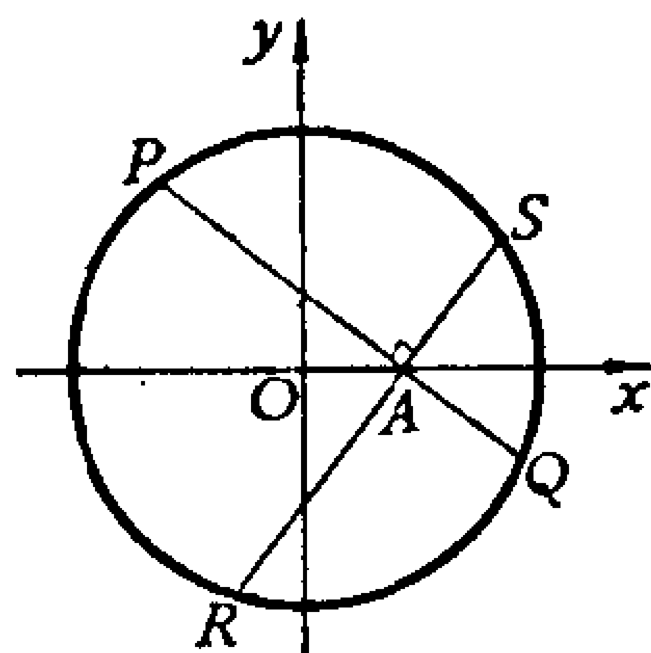
［证］ 以直径 AB 所在直线为 x 轴, 圆心 O 为原点建立直角坐标系, 设半圆的方程为 $x^2+y^2=r^2(y\geqslant 0)$, 定点为 $C(x_C, y_C)$、$D(x_D, y_D)$, 动点为 $P(x_0, 0)$, 则

$$k_{PC}=\frac{y_C}{x_C-x_0},\quad k_{PD}=\frac{y_D}{x_D-x_0},\quad k_{AC}=\frac{y_C}{x_C+r},\quad k_{BD}=\frac{y_D}{x_D-r}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=\frac{k_{PC}-k_{AC}}{1+k_{PC}\cdot k_{AC}}\cdot\frac{k_{BD}-k_{PD}}{1+k_{BD}k_{PD}}=\frac{y_C\cdot y_D}{(r+x_C)(r-x_D)}.$$

与点 P 坐标 x_0 无关, 故 $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$ 为定值.

512. 圆 O 内一定点 A, 过 A 任作两互相垂直的弦, 求证这两弦长的平方和为定值.



［证一］ 以圆心 O 为原点, OA 所在直线为 x 轴建立直角坐标系, 设圆方程为 $x^2+y^2=r^2$, 定点 A 坐标为$(x_0, 0)$. 任作两互相垂直的弦 PAQ 和 RAS, 当斜率 $k=\operatorname{tg}\alpha$ 存在时, 两弦所在直线方程为 $y=k(x-x_0)$和 $y=-\frac{1}{k}(x-x_0)$, 代入圆方程得 $(1+k^2)x^2-2k^2x_0x+k^2x_0^2-r^2=0$, 它的两根 x_1、x_2 即为 P、Q 两点的横坐标. $|PQ|=\left|\frac{x_1-x_2}{\cos\alpha}\right|=|x_1-x_2|\sqrt{1+k^2}$, 而

$$|x_1-x_2|^2=\left(\frac{2k^2x_0}{1+k^2}\right)^2-4\,\frac{k^2x_0^2-r^2}{1+k^2}=\frac{4(r^2+r^2k^2-k^2x_0^2)}{(1+k^2)^2},$$

$\therefore PQ^2=\frac{4(r^2+r^2k^2-k^2x_0^2)}{1+k^2}$. 同样可得 $RS^2=\frac{4(k^2r^2+r^2-x_0^2)}{1+k^2}$.

$$\therefore\quad PQ^2+RS^2=\frac{4}{1+k^2}[r^2+r^2k^2-k^2x_0^2+k^2r^2+r^2-x_0^2]=4(2r^2-x_0^2).$$

当 k 不存在时, $PQ^2+RS^2=(2r)^2+4(r^2-x_0^2)=4(2r^2-x_0^2)$. 即两弦平方和为定值 $4(2r^2-x_0^2)$.

［证二］ 建立直角坐标系如前, 圆方程为 $x^2+y^2=r^2$, 过定点 $A(x_0, 0)$ 互相垂直的两弦方程分别为: $\begin{cases}x=x_0+t\cos\theta\\ y=t\sin\theta\end{cases}$ (θ 为该弦的倾角), 和

$$\begin{cases} x=x_0+t\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=x_0-t\sin\theta \\ y=t\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=t\cos\theta. \end{cases}$$ 代入圆方程得:

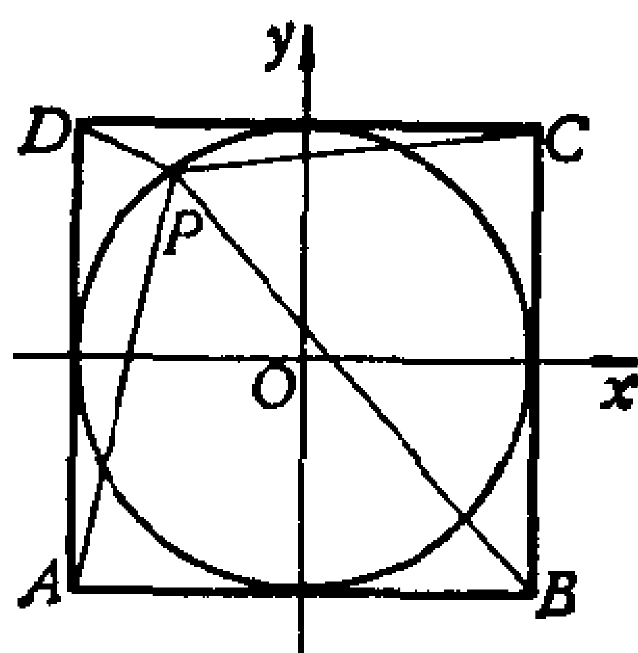
$t^2+2x_0t\cos\theta+x_0^2-r^2=0\cdots$①, $t^2-2x_0t\sin\theta+x_0^2-r^2=0\cdots$②.

它们的根分别为 t_1、t_2、t_3、t_4, 故

$$\begin{aligned}|PQ|^2+|RS|^2&=(t_1-t_2)^2+(t_3-t_4)^2=(t_1+t_2)^2-4t_1t_2+(t_3+t_4)^2-4t_1t_2\\&=4x_0\cos^2\theta-4(x_0^2-r^2)+4x_0^2\sin^2\theta-4(x_0^2-r^2)\\&=4(2r^2-x_0^2).\end{aligned}$$

[说明] 涉及线段长度的问题,利用直线的参数式去解,常较简便.

513. 已知点 P 是正方形 $ABCD$ 内切圆上一点, $\angle APC=\alpha$, $\angle BPD=\beta$, 求证: $\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta=8$.

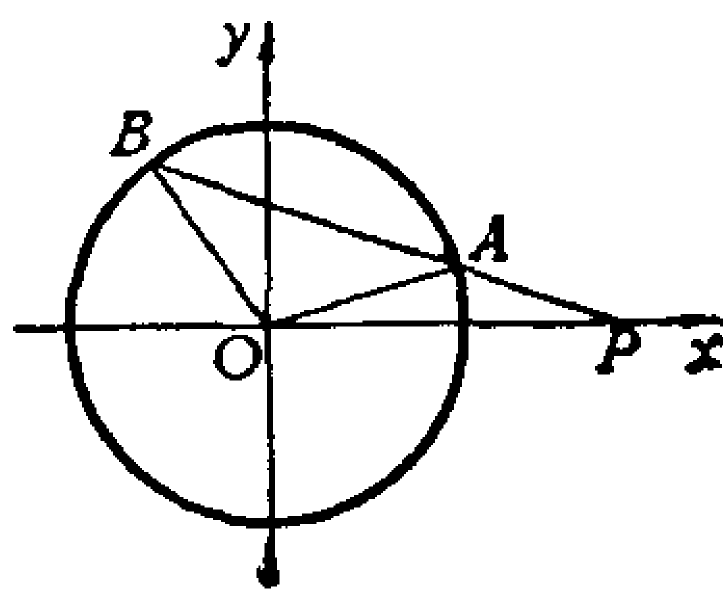


[证] 如图建立直角坐标系,设圆方程为 $x^2+y^2=r^2$, 正方形四顶点为 $A(-r,\ -r)$、$B(r,\ -r)$、$C(r,\ r)$、$D(-r,\ r)$, 点 P 坐标为$(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$. 直线 PA 的斜率 $k_1=\dfrac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta}$, 直线 PB 的斜率 $k_2=\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta-1}$, 直线 PC 的斜率 $k_3=\dfrac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}$, 直线 PD 的斜率 $k_4=\dfrac{\sin\theta-1}{1+\cos\theta}$. $\mathrm{tg}^2\alpha=\left(\dfrac{k_3-k_1}{1+k_1k_3}\right)^2=4(\cos\theta-\sin\theta)^2$,

$$\mathrm{tg}^2\beta=\left(\frac{k_4-k_2}{1+k_2k_4}\right)^2=4(\cos\theta+\sin\theta)^2,$$

$$\therefore\quad \mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta=4[(\cos\theta-\sin\theta)^2+(\cos\theta+\sin\theta)^2]=8.$$

514. 由定圆 O 外一定点 P 引任意割线 PAB(不过圆心 O), 求证 $\mathrm{tg}\dfrac{1}{2}\angle AOP\cdot\mathrm{tg}\dfrac{1}{2}\angle BOP$ 为定值.



[分析] 因为一个角的半角的正切可用此角的正弦和余弦表示, 所以如图建立直角坐标系后, $\mathrm{tg}\dfrac{1}{2}\angle AOP$、$\mathrm{tg}\dfrac{1}{2}\angle BOP$ 仅分别与点 A、B 的坐标有关, 因而用 $\angle AOP$ 和 $\angle BOP$ 表示这两点的坐标后即可得证.

[证] 以圆心O为原点，OP为x轴，并以定圆半径为单位长度建立坐标系。令定点P的坐标为$(a, 0)$，则直线PAB的方程为$y=k(x-a)\cdots$①。$\because$直线PAB不过圆心O，故$k\neq0$。设$\angle POA=\alpha$，$\angle POB=\beta$，则点A、B的坐标可分别表示为$(\cos\alpha, \sin\alpha)$和$(\cos\beta, \sin\beta)$。$\because$点A在直线PAB上，$\therefore \sin\alpha=k(\cos\alpha-a)$，即$\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=k\left(\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}-a\right)$，化简得$k(a+1)\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+k(a-1)=0$。同理有$k(a+1)\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+k(a-1)=0$。故$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$、$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$为方程$k(a+1)X^2+2X+k(a-1)=0$的两根，$\therefore \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{a-1}{a+1}$，即$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\angle AOP\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2}\angle BOP=\frac{a-1}{a+1}$为定值。

515. 证明方程：$\rho^2\cos\theta-a\rho\cos2\theta-2a^2\cos\theta=0$ 表示一直线和一圆。

[证] $\because$

$$\begin{aligned}&\rho^2\cos\theta-a\rho\cos2\theta-2a^2\cos\theta\\=&\rho^2\cos\theta-a\rho(2\cos^2\theta-1)-2a^2\cos\theta\\=&(\rho\cos\theta+a)(\rho-2a\cos\theta)=0.\end{aligned}$$

$\therefore$原方程表示一直线$\rho\cos\theta=-a$和一圆$\rho=2a\cos\theta$。

516. 试用解析法证明一直线与圆的交点不能多于两点。

[证] 取圆心为原点建立直角坐标系，设圆方程为$x^2+y^2=r^2$，直线方程为$Ax+By+C=0$。一个二元一次方程与一个二元二次方程组成的二元二次方程组至多只有两组实数解，故直线与圆的交点不能多于两点。

[说明] 用同样方法容易证明圆锥曲线与直线的交点不能多于两点。

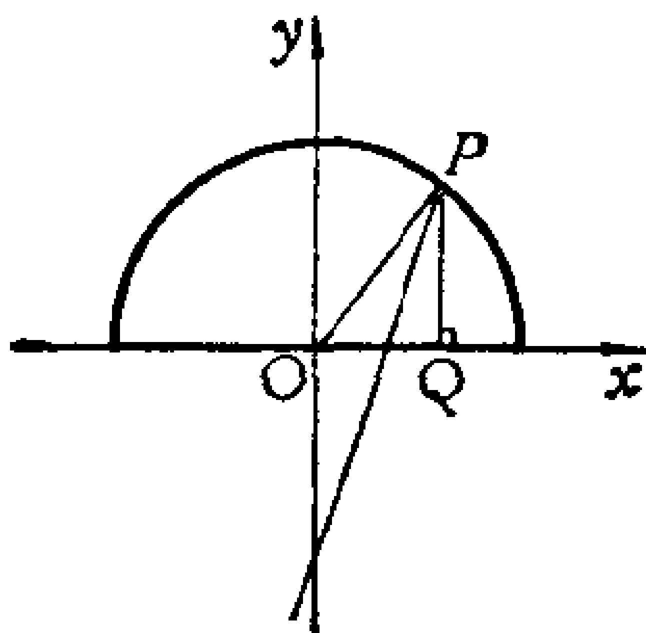
517. 已知两点$A(0, 1)$、$B(p, q)$，以AB为直径的圆交x轴于$(x_1, 0)$、$(x_2, 0)$两点，求证：x_1、x_2是方程$x^2-px+q=0$的两个根。

[证] 以AB为直径的圆方程为$(x-0)(x-p)+(y-1)(y-q)=0$，故圆与x轴交点的横坐标满足方程$x^2-px+q=0$。$\therefore x_1$、x_2是方程$x^2-px+q=0$的两个根。

[说明] 根据本题结论，可得一元二次方程$x^2+px+q=0$的几何解法

如下：以 $A(0,\ 1)$、$B(-p,\ q)$ 为直径作圆，此圆在 x 轴上的两截距 x_1、x_2 即此一元二次方程的两个实根；如圆与 x 轴相切，方程有两相等的实根；如圆与 x 轴不相交，则方程无实根.

518. 自以 O 为圆心的半圆上任取一点 P，作直径的垂线 PQ，Q 为垂足. 求证 $\angle OPQ$ 的平分线必过一定点.



［证］ 以 O 为原点，半圆的直径所在直线为 x 轴建立直角坐标系如图. 设半圆的半径为 r，$\angle QOP=\theta$（θ 为参数），则 OP 的方程为 $y\cos\theta=x\sin\theta$，即 $x\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+y\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=0$； PQ 的方程为 $x-r\cos\theta=0$. $\because$ $\angle OPQ$ 的平分线上的点与点 $(0,\ -1)$ 总在直线 OP 的同旁，且和原点总在直线 PQ 的同旁，故其角平分线方程为

$$-(x-r\cos\theta)=-\left[x\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+y\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

化简得 $(1+\sin\theta)x-\cos\theta(y+r)=0$. 此即为过定点 $(0,\ -r)$ 的直线系方程，故 $\angle OPQ$ 的平分线过定点 $(0,\ -r)$.

519. 一定圆和两定点 M、N，过 M、N 的任一圆和定圆交于 P、Q，求证直线 PQ 必过定点.

［分析］ 建立直角坐标系后，根据定圆和过点 M、N 的圆的方程求出两圆公共弦所在直线 PQ 的方程，便可证明.

［证］ 取 M、N 所在直线为 x 轴，MN 的中点 O 为原点建立直角坐标系. 设 M、N 的坐标分别为 $M(a,\ 0)$、$N(-a,\ 0)$，定圆方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$…①，过 M、N 的任意圆方程为 $x^2+y^2+\lambda y-a^2=0$…②（其中 λ 为参数）. 直线 PQ 即圆①与②的公共弦 $Dx+(E-\lambda)y+F+a^2=0$. $\therefore$ PQ 必过定点 $K\left(-\frac{a^2+F}{D},\ 0\right)$.

520. 在平面上，如果一个圆的圆心的坐标 x、y 中至少有一个是无理数，求证圆上至多有两个其坐标都是有理数的点.

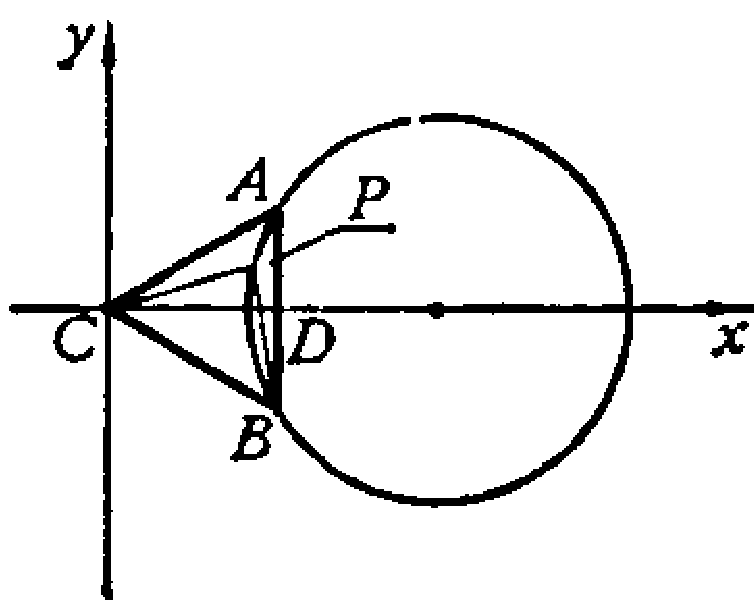
［证］ 设此圆方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，如果圆上有三个点 $A_i(x_i,\ y_i)$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ 的坐标 x_i、y_i 都是有理数，代入圆方程得：

$$\begin{cases} x_1^2+y_1^2+Dx_1+Ey_1+F=0 \\ x_2^2+y_2^2+Dx_2+Ey_2+F=0 \cdots ① \\ x_3^2+y_3^2+Dx_3+Ey_3+F=0 \end{cases}.$$

∵ 同圆上任意三个不同点不共线，∴ $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. 故关于 D、E、F 的线性方程组 ① 有唯一解，且 D、E、F 都是有理数. 故此圆的圆心坐标 $-\frac{D}{2}$、$-\frac{E}{2}$ 也都是有理数，与题设圆心坐标中至少有一个是无理数相矛盾. 所以圆上坐标都是有理数的点至多只有两个.

§9. 轨　迹　题

521. 一动点到一等边三角形 ABC 两顶点 A、B 的距离的平方和等于它到顶点 C 的距离平方，求此动点的轨迹.



［解］ 取点 C 为原点，高 CD 所在直线为 x 轴建立直角坐标系如图. 设 $D(h, 0)$，则 $A\left(h, \frac{\sqrt{3}}{3}h\right)$、$B\left(h, -\frac{\sqrt{3}}{3}h\right)$. 设 $P(x, y)$为轨迹上任意一点，则 $x^2+y^2=(x-h)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}h\right)^2+(x-h)^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{3}h\right)^2$. 化简得 $(x-2h)^2+y^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}h\right)^2$. ∴ 动点 P 的轨迹是以 $(2h, 0)$ 为圆心、等边三角形边长 $\frac{2\sqrt{3}}{3}h$ 为半径的圆.

522. 一直线上顺次有四个已知点 A、B、C、D，P 为直线外一动点，若 $\angle APB=\angle CPD$，试求点 P 的轨迹.

［解］ 取这直线为 x 轴，建立直角坐标系. 设 $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$, $OD=d$, $P(x, y)$为轨迹上任意一点，则

$$\operatorname{tg}\angle APB=\frac{(a-b)y}{(x-a)(x-b)+y^2},\quad \operatorname{tg}\angle CPD=\frac{(c-d)y}{(x-c)(x-d)+y^2}.$$

∴ 所求轨迹方程为 $\dfrac{(a-b)y}{(x-a)(x-b)+y^2}=\dfrac{(c-d)y}{(x-c)(x-d)+y^2}$.

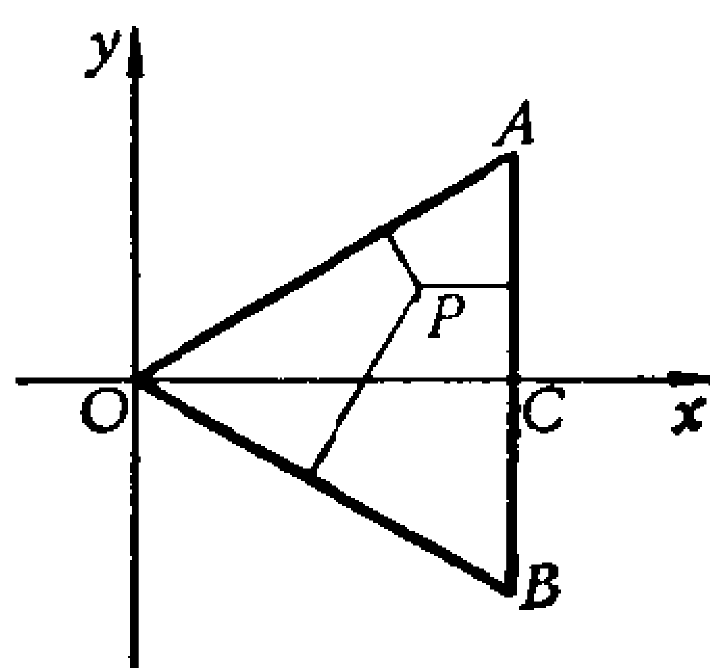
∵ 点 P 不在 x 轴上，∴ $y\neq0$. 故轨迹方程为

$$(a-b-c+d)(x^2+y^2)-2(ad-bc)x+cd(a-b)-ab(c-d)=0.$$

当 $AB\neq CD$ 时，轨迹为圆. 当 $AB=CD$ 时，$a-b=c-d$，即 $a-b-c+d=0$，轨迹为直线 $2(ad-bc)x+(a-b)(ab-cd)=0$.

523. 一动点到正三角形三边的距离的平方和是常数，试求动点的轨迹.

［解］ 取正三角形一顶点 O 为原点，过 O 的高 OC 所在直线为 x 轴建立直角坐标系如图. 设 $OC=h$，则三角形三边的方程为 $x-\sqrt{3}y=0$，$x+\sqrt{3}y=0$，$x=h$. 设 $P(x, y)$ 为轨迹上任意一点，则



$$\left(\frac{x-\sqrt{3}y}{2}\right)^2+\left(\frac{x+\sqrt{3}y}{2}\right)^2+(x-h)^2=m^2$$

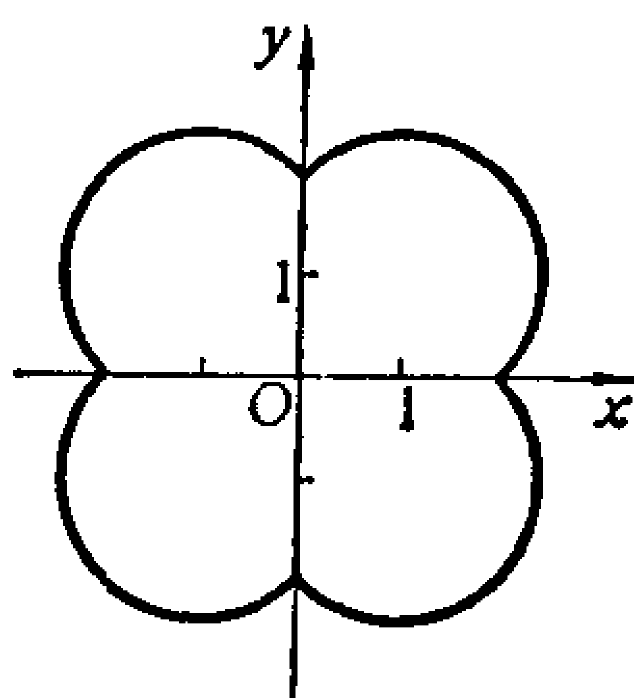
(m 为非负常数).

化简得

$$\left(x-\frac{2}{3}h\right)^2+y^2=\frac{2}{3}\left(m^2-\frac{1}{3}h^2\right).$$

当 $m>\dfrac{\sqrt{3}}{3}h$ 时，所求点轨迹是圆心在 $\left(\dfrac{2h}{3}, 0\right)$ 的圆；当 $m=\dfrac{\sqrt{3}}{3}h$ 时，轨迹是点圆；当 $m<\dfrac{\sqrt{3}}{3}h$ 时，轨迹是虚圆.

524. 一动点到两坐标轴的距离之和的两倍等于此点到原点距离的平方，求动点 P 的轨迹，并作出轨迹的图象.



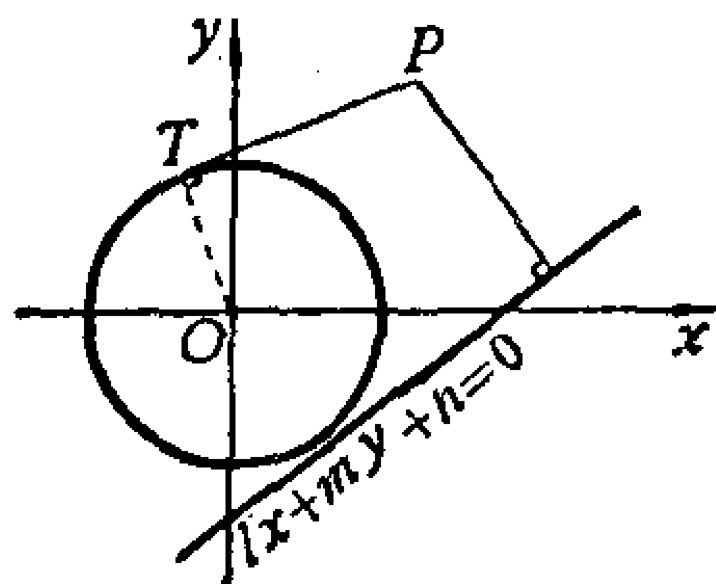
［解］ 设 $P(x, y)$ 为轨迹上任意一点，则

$$2(|x|+|y|)=x^2+y^2.$$

当 $x\geqslant0$ 且 $y\geqslant0$ 时，方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$，轨迹为圆心在 $(1, 1)$，半径为 $\sqrt{2}$ 的圆在第一象限的部分；当 $x\leqslant0$ 且 $y\geqslant0$ 时，方程为 $(x+1)^2+(y-1)^2=2$；当 $x\leqslant0$ 且 $y\leqslant0$ 时，方程为 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$；当 $x\geqslant0$ 且 $y\leqslant0$ 时，方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$；轨迹分别是第二、第三、第四象限

内的圆弧．点 P 轨迹如图所示．

525．一动点到圆 $x^2+y^2=a^2$ 的切线长的平方等于它到定直线 $lx+my+n=0$ 的距离的 c 倍($c>0$)，求动点的轨迹．



［解］ 设 $P(x, y)$为轨迹上任意一点，则

$$x^2+y^2-a^2=c\cdot\frac{|lx+my+n|}{\sqrt{l^2+m^2}}.$$

两边平方，再分解因式得

$$\left[x^2+y^2-a^2-\frac{c(lx+my+n)}{\sqrt{l^2+m^2}}\right]\cdot\left[x^2+y^2-a^2+\frac{c(lx+mx+n)}{\sqrt{l^2+m^2}}\right]=0.$$

即 $$\left(x-\frac{cl}{2\sqrt{l^2+m^2}}\right)^2+\left(y-\frac{cm}{2\sqrt{l^2+m^2}}\right)^2=a^2+\frac{c^2}{4}+\frac{cn}{\sqrt{l^2+m^2}},$$

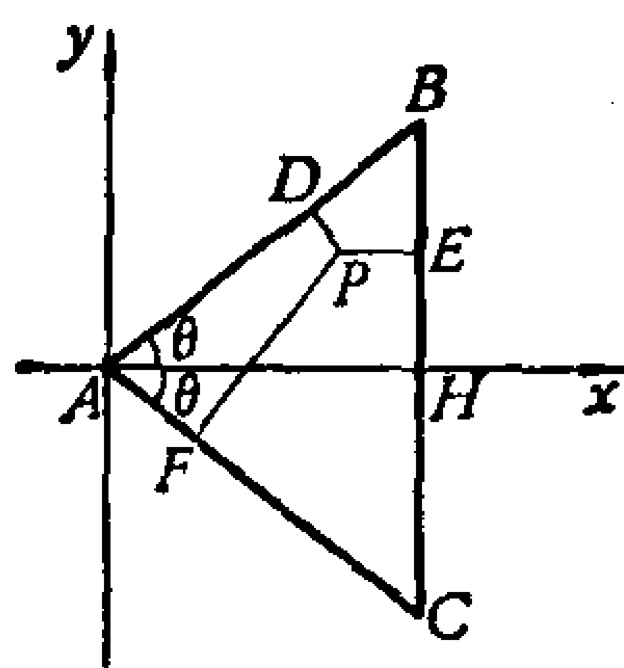
或 $$\left(x+\frac{cl}{2\sqrt{l^2+m^2}}\right)^2+\left(y+\frac{cm}{2\sqrt{l^2+m^2}}\right)^2=a^2+\frac{c^2}{4}-\frac{cn}{\sqrt{l^2+m^2}}.$$

∴ 动点轨迹是分别以

$$\left(\frac{cl}{2\sqrt{l^2+m^2}}, \frac{cm}{2\sqrt{l^2+m^2}}\right)、\left(-\frac{cl}{2\sqrt{l^2+m^2}}, -\frac{cm}{2\sqrt{l^2+m^2}}\right)$$

为圆心，以 $\sqrt{a^2+\frac{c^2}{4}+\frac{cn}{\sqrt{l^2+m^2}}}$、$\sqrt{a^2+\frac{c^2}{4}-\frac{cn}{\sqrt{l^2+m^2}}}$ 为半径的两圆在已知圆 $x^2+y^2=a^2$ 外的部分．

526．在等腰三角形 ABC 中，顶角 $\angle BAC=2\theta$，高 $|AH|=h$．在 $\triangle ABC$ 内部有点 P 到三边 AB、BC、AC 的距离分别为 $|PD|$、$|PE|$、$|PF|$，如果满足下列条件：(1) $|PD|\cdot|PF|=|PE|^2$，(2) $|PD|+|PE|=|PF|$，求点 P 的轨迹．



［解］ 取 A 为原点，AH 为 x 轴，建立直角坐标系如图．则 AB 方程为

$$x\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+y\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

AC 方程为

$$x\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+y\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=0.$$

设 $P(x, y)$为轨迹上任意一点．∵ P 与$(0, -1)$在直线 AB 的同侧，

$$\therefore \quad |PD| = -(-x\sin\theta + y\cos\theta).$$

又 $\because$ P 与 $(0, -1)$ 在直线 AC 的异侧，$\therefore$ $|PF| = x\sin\theta + y\cos\theta$. $\because$ P 在 BC 左边，$\therefore$ $|PE| = h - x$.

(1) $\because$ $|PD|\cdot|PF| = |PE|^2$, $\therefore$ $(x\sin\theta - y\cos\theta)(x\sin\theta + y\cos\theta) = (h-x)^2$. 整理得 $(x - h\sec^2\theta)^2 + y^2 = h^2\sec^2\theta\cdot\operatorname{tg}^2\theta$. $\therefore$ 所求点的轨迹是以 $(h\sec^2\theta, 0)$ 为圆心，以 $h\sec\theta\operatorname{tg}\theta$ 为半径的圆在 $\triangle ABC$ 内的一段圆弧。

(2) $\because$ $|PD| + |PE| = |PF|$, $\therefore$ $x\sin\theta - y\cos\theta + h - x = x\sin\theta + y\cos\theta$, 即 $x + 2y\cos\theta - h = 0$. 这时，点 P 轨迹是直线在 $\triangle ABC$ 内的一段线段.

527. 求到两定点的距离之比为定值 k 的点的轨迹，$(k>0)$.

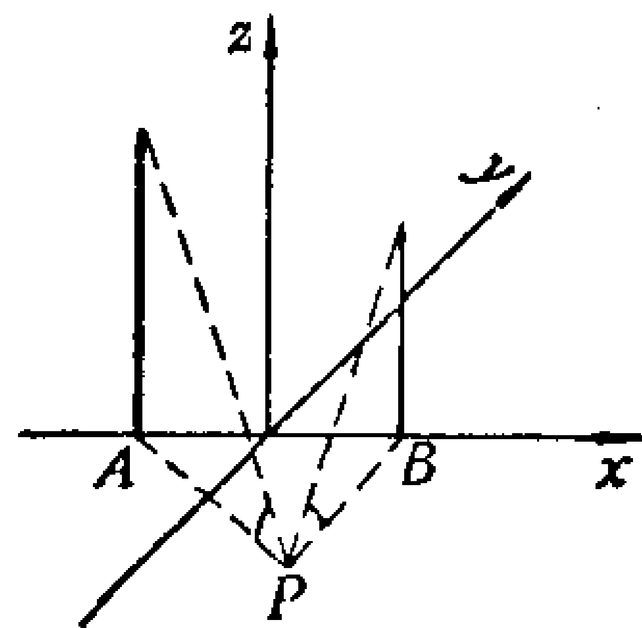
［解］ 建立直角坐标系，使两定点坐标为 $(-a, 0)$、$(a, 0)$, $a>0$. 设 $P(x, y)$ 为轨迹上任意一点，则 $\sqrt{(x+a)^2+y^2} : \sqrt{(x-a)^2+y^2} = k \cdots$①, 或 $\sqrt{(x-a)^2+y^2} : \sqrt{(x+a)^2+y^2} = k \cdots$②. 由①得 $(1-k^2)x^2 + 2a(1+k^2)x + (1-k^2)a^2 + (1-k^2)y^2 = 0$. 当 $k\neq 1$ 时，轨迹为圆心在 $\left(-\dfrac{1+k^2}{1-k^2}a, 0\right)$, 半径为 $2a\left|\dfrac{k}{1-k^2}\right|$ 的圆；当 $k=1$ 时，轨迹为直线 $x=0$. 由②得

$$(1-k^2)x^2 - 2a(1+k^2)x + (1-k^2)a^2 + (1-k^2)y^2 = 0.$$

当 $k\neq 1$ 时，轨迹为圆心在 $\left(\dfrac{1+k^2}{1-k^2}a, 0\right)$, 半径为 $2a\left|\dfrac{k}{1-k^2}\right|$ 的圆；当 $k=1$ 时，轨迹为直线 $x=0$.

［说明］ 当 $k\neq 1$ 时，此轨迹也称为阿波罗尼斯(Apollonius)圆.

528. 高 h 和 k 的两根旗杆竖在水平面上相隔 $2a$ 单位，求平面上对杆顶仰角相等的点的集合.



［分析］ 先在平面上建立直角坐标系，然后利用旗杆垂直于水平面，将仰角相等转化为点 P 应满足的轨迹条件解之.

［解］ 建立直角坐标系，使旗杆底部的坐标为 $A(-a, 0)$ (h 杆底部) 和 $B(a, 0)$ (k 杆底部). 设平面上一点 $P(x, y)$ 对两杆顶的仰角相等，则 $\dfrac{h}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} = \dfrac{k}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}$. 化简得 $(k^2-h^2)x^2 + 2ax(k^2+h^2) + y^2(k^2-h^2) + a^2(k^2-h^2) = 0$. $k\neq h$ 时，

满足条件的点集是圆. $k=h$ 时，方程变成 $x=0$，即满足条件的点在 y 轴上.

529. 一动点到两同心圆的切线长之比等于两圆半径之比. 试求这动点的轨迹.

［解］ 建立直角坐标系，使两同心圆的方程分别为 $x^2+y^2=a^2$ 和 $x^2+y^2=b^2$. 设动点坐标为 (x, y)，则此点到两圆之切线长应分别为 $\sqrt{x^2+y^2-a^2}$ 和 $\sqrt{x^2+y^2-b^2}$. 根据题意有 $\frac{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{\sqrt{x^2+y^2-b^2}}=\frac{a}{b}$，化简得 $x^2+y^2=0$. 只有原点坐标适合此方程，但原点在圆内，不可能引圆的切线，故动点无轨迹.

530. 一动点至两同心圆的切线长之比等于两半径的反比. 试求这动点的轨迹.

［解］ 建立直角坐标系，使两同心圆的方程分别为 $x^2+y^2=a^2$ 和 $x^2+y^2=b^2$. 设动点的坐标为 (x, y)，则根据题意有 $\frac{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{\sqrt{x^2+y^2-b^2}}=\frac{b}{a}$，化简得 $x^2+y^2=a^2+b^2$. 故所求轨迹为和两圆同心的另一同心圆，其半径的平方等于两圆半径的平方和.

531. M 是圆 O_1、圆 O_2 外的一点，由 M 作两圆的切线 MT_1、MT_2，且 $|MT_1|=|MT_2|$. 求点 M 的轨迹.

［解］ 建立直角坐标系，使圆 O_1、圆 O_2 的方程分别为 $x^2+y^2=a^2$ 和 $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=b^2$. 设点 M 的坐标为 (x, y)，$\because$ 点 M 在圆 O_1 外，$\therefore$ $|MT_1|^2=x^2+y^2-a^2$. 同理，$|MT_2|^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-b^2$. $\because$ $|MT_1|=|MT_2|$，$\therefore$ $x^2+y^2-a^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-b^2$. 化简得 $2\alpha x+2\beta y-\alpha^2-\beta^2-a^2+b^2=0$. 故所求的轨迹为直线，即两圆的根轴. 若两圆相切，则不包括其切点；若两圆相交，则为根轴在两圆外的部分.

532. 设动点 P 到圆 C_1: $x^2+y^2=a^2$ 的切线长等于到圆 C_2: $(x-a)^2+y^2=a^2$ 的切线长的四倍，证明：(1) 点 P 的轨迹为圆 C_3: $15x^2+15y^2-32ax+a^2=0$ 的一部分；(2) 圆 C_3 过两圆 C_1 与 C_2 的交点；(3) 圆 C_1 与 C_3 的圆心距等于圆 C_2 与 C_3 的圆心距的 16 倍.

[证] (1) 设动点P的坐标为(x, y)，则根据题设条件有

$$\sqrt{x^2+y^2-a^2}=4\sqrt{(x-a)^2+y^2-a^2}.$$

化简即得$15x^2+15y^2-32ax+a^2=0$. 所求轨迹为此圆在两已知圆以外的部分.

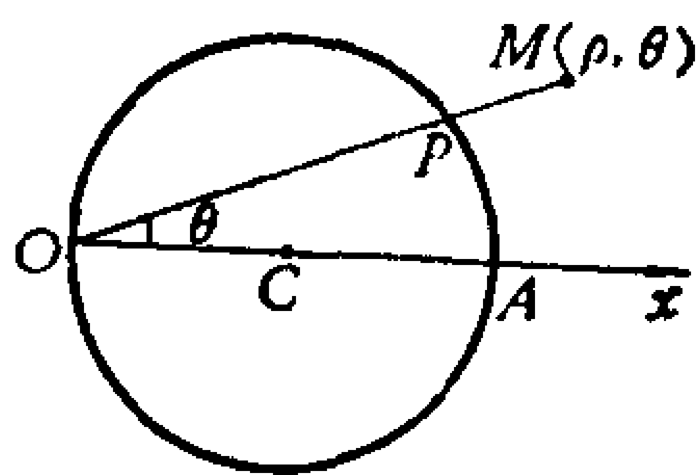
(2) ∵ 当$\lambda^2+\mu^2\neq 0$时，$\lambda(x^2+y^2-a^2)+\mu[(x-a)^2+y^2-a^2]=0$是过圆$C_1$、$C_2$两交点的圆系方程，而$\lambda=-1$，$\mu=16$时，此方程即为圆$C_3$的方程$15x^2+15y^2-32ax+a^2=0$，故圆$C_3$也过圆$C_1$、$C_2$的两交点$A\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$、$B\left(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$.

(3) 圆C_1的圆心为$O_1(0, 0)$，圆C_2的圆心为$O_2(a, 0)$. 化圆C_3的方程为$\left(x-\frac{16}{15}a\right)^2+y^2=\frac{241}{225}a^2$，∴ 其圆心$O_3$的坐标为$\left(\frac{16}{15}a, 0\right)$.

于是$|O_1O_3|=\left|\frac{16}{15}a-0\right|=\frac{16}{15}|a|$，$|O_2O_3|=\left|\frac{16}{15}a-a\right|=\frac{1}{15}|a|$.

$$\therefore\quad |O_1O_3|=16|O_2O_3|.$$

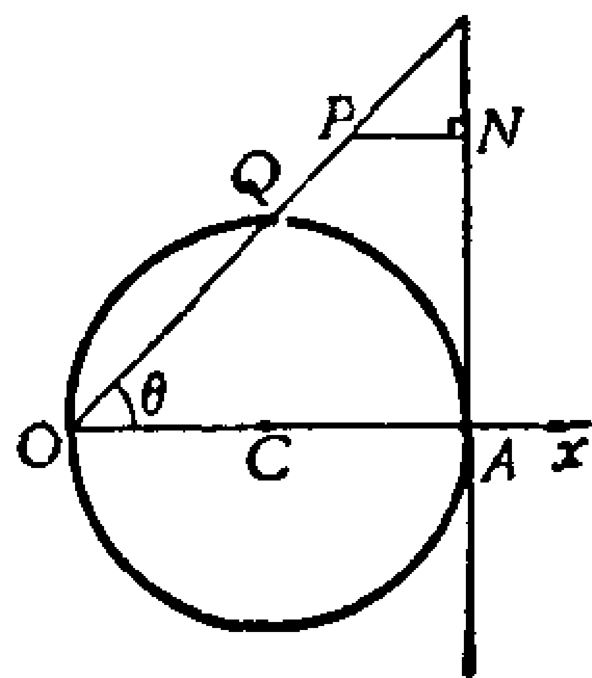
533. OA为圆C的直径，P为圆C上任一点，在OP延长线上取一点M，使$OP\cdot OM=k$为定值，求点M的轨迹.



[解] 以O为极点，射线OA为极轴建立极坐标系. 设$|OA|=a$，则圆C的方程为$\rho=a\cos\theta$. 设点P的坐标为(ρ_0, θ_0)，点M的坐标为(ρ, θ)，则$\rho_0=a\cos\theta_0\cdots$①，$\theta=\theta_0\cdots$②，$\rho\rho_0=k\cdots$③. 由①、②、③得$\rho\cos\theta=\frac{k}{a}$.

故所求的轨迹为过点$\left(\frac{k}{a}, 0\right)$且垂直于极轴的直线.

534. OA是半径为a的圆C的定直径，AN是圆C的切线. 连接O和圆上一点Q，在直线OQ上取一点P，使$|PQ|$等于P到AN的距离$|PN|$. 求点P的轨迹.

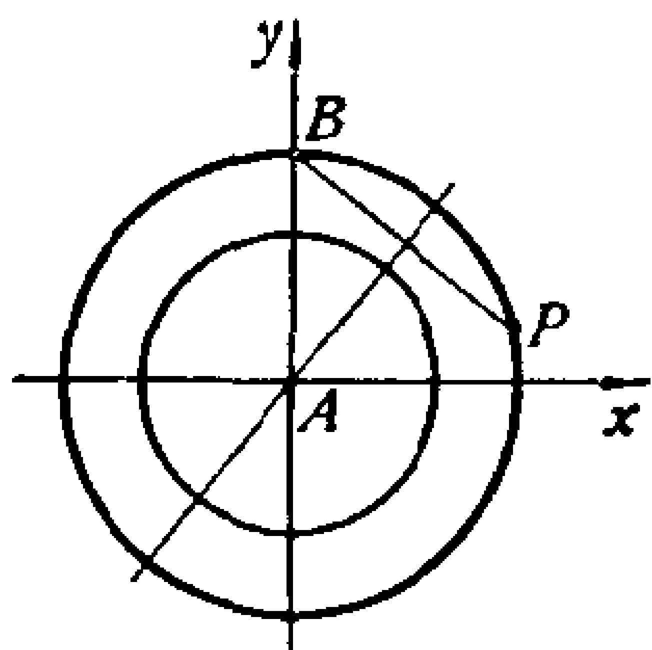


[分析] 由于点P、Q、O在一直线上，且轨迹条件涉及线段的长度，故考虑用极坐标解之.

[解] 以O为极点，射线OA为极轴建立极坐标

系如图. 则圆 C 的方程为 $\rho=2a\cos\theta$. 设点 Q 的坐标为 (ρ_0, θ_0), 点 P 的坐标为 (ρ, θ). $\because |PQ|=|PN|$, $\therefore |\rho-\rho_0|=|2a-\rho\cos\theta|\cdots$①. 又 $\rho_0=2a\cos\theta_0\cdots$②, $\theta_0=\theta\cdots$③. 将②、③代入①, 并将其两边平方, 化简得 $(\rho^2-4a^2)\sin^2\theta=0$. 故点 P 的轨迹为以 O 为圆心、$2a$ 为半径的圆和直线 OA.

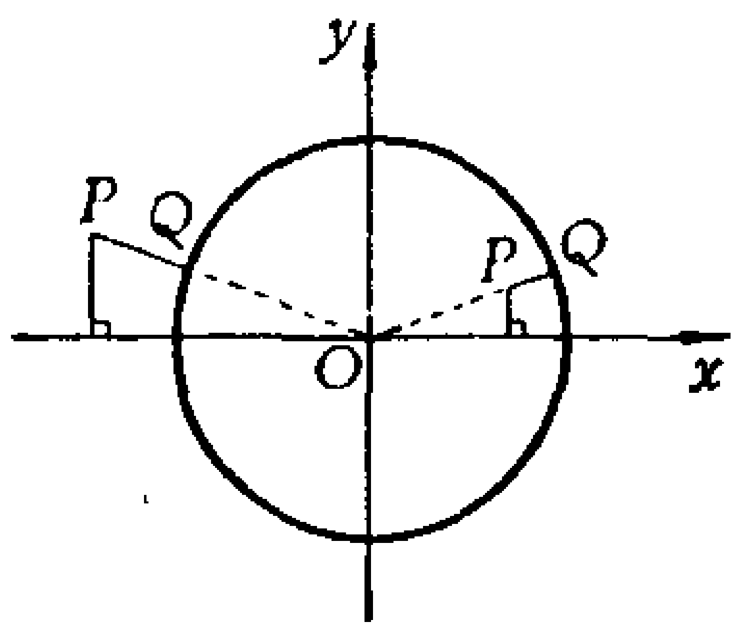
535. 已知两定点 A、B, 和以 A 为圆心的一个定圆. 取异于 B 的点 P, 且使线段 BP 的垂直平分线等分圆 A 的面积, 试求点 P 的轨迹.



[分析] 由于 BP 的中垂线等分圆 A 的面积, 即此直线过圆心 A, 故 $|AB|=|AP|$. 由此即可求得轨迹方程.

[解] 取 A 为原点, AB 方向为 y 轴正向, 建立直角坐标系如图. 设点 B 的坐标为 $(0, b)$, 则 $b>0$; 动点 P 的坐标为 (x, y). $\because$ BP 的垂直平分线平分圆 A 的面积, $\therefore$ 圆心 A 在 BP 的垂直平分线上, 故 $|AP|=|AB|$, 即 $x^2+y^2=b^2$. 故点 P 的轨迹为一与定圆 A 同心, 且半径等于 A、B 之间距离的一个圆. 但因点 P 异于 B, 故不包括点 B.

536. 一动点 P 到定圆 $x^2+y^2=r^2$ 的最短距离等于它到 x 轴的距离, 求动点的轨迹.



[分析] 当点 P 在圆 O 内时, 它到圆的最短距离为 $r-|OP|$, 否则为 $|OP|-r$. 据此将轨迹条件解析化, 即得轨迹方程.

[解] 设点 P 的坐标为 (x, y). 当点 P 在圆内时, 它到圆的最短距离 $|PQ|=r-|OP|=r-\sqrt{x^2+y^2}$. 由题意可得 $|y|=r-\sqrt{x^2+y^2}\cdots$①; 当点 P 在圆外时, 则 $|PQ|=|OP|-r$. 由题意可得 $|y|=\sqrt{x^2+y^2}-r\cdots$②. 当点 P 在圆上, 轨迹为 $(-r, 0)$、$(r, 0)$, 同样满足①、②. 显然方程①、②与方程 $y^2=(r-\sqrt{x^2+y^2})^2\cdots$③同解. 将方程③化简, 得 $x^4+r^4=2r^2x^2+4r^2y^2$, 即 $(x^2-r^2-2ry)(x^2-r^2+2ry)=0$. 故动点的轨迹为两抛物线

$$x^2=2r\left(y+\frac{r}{2}\right) \quad 和 \quad x^2=-2r\left(y-\frac{r}{2}\right).$$

537. 一动点到一定点 F' 的距离等于到一定圆周的最短距离，试求动点的轨迹方程.

［解］ 设定圆圆心为 F，半径为 $2r$；取定点 F' 与 F 的连线为 x 轴，FF' 的中点 O 为原点，建立直角坐标系. 设 F、F' 的坐标分别为 $F(c, 0)$、$F'(-c, 0)$，$P(x, y)$ 为轨迹上任意一点.

(1) F' 在定圆之内 $(0<c<r)$，FP 交圆于点 Q（图 1).

$$\because \quad |PF|+|PF'|=|PF|+|PQ|=2r,$$

$$\therefore \quad \sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2r \cdots ①.$$

$$\because \quad [(x+c)^2+y^2]-[(x-c)^2+y^2]=4cx \cdots ②,$$

$\therefore$ ② ÷ ①，得 $\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\dfrac{2cx}{r} \cdots ③.$

①+③，得 $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=r+\dfrac{cx}{r}$，即 $\dfrac{x^2}{r^2}+\dfrac{y^2}{r^2-c^2}=1.$

故轨迹为椭圆.

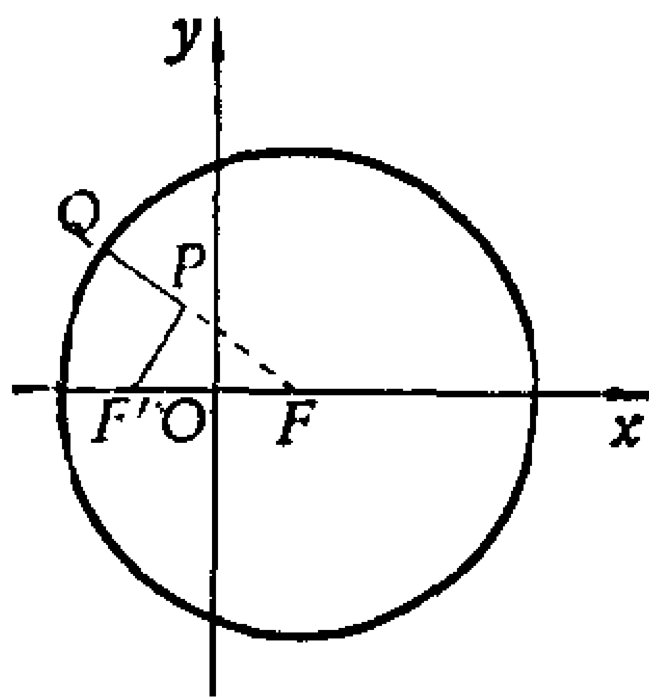


图 1

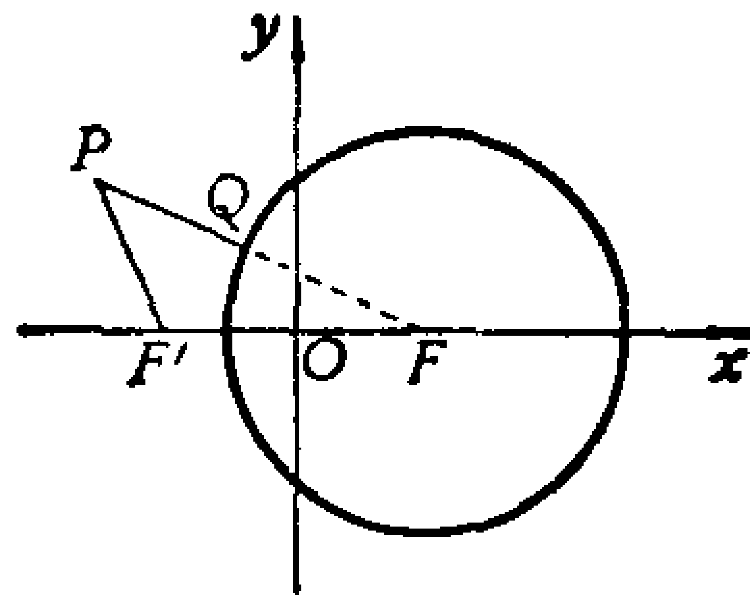


图 2

(2) F' 在定圆之外 $(0<r<c)$，FP 交圆于点 Q（图 2).

$$\because \quad |PF|-|PF'|=|PF|-|PQ|=2r,$$

$$\therefore \quad \sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2r \cdots ①.$$

$$\because \quad [(x-c)^2+y^2]-[(x+c)^2+y^2]=-4cx \cdots ②,$$

$\therefore$ ②÷①，得 $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=-\dfrac{2cx}{r} \cdots ③.$

①+③，得 $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=r-\dfrac{cx}{r}$，即 $\dfrac{x^2}{r^2}-\dfrac{y^2}{c^2-r^2}=1.$

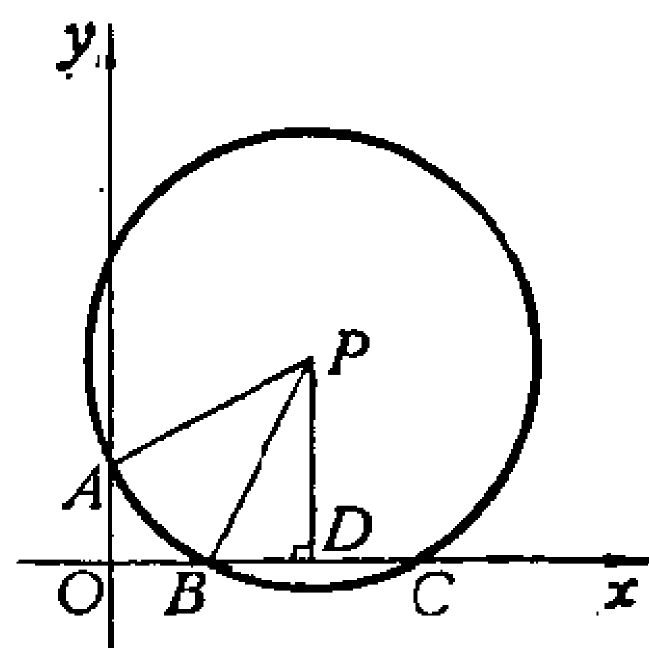
故轨迹为此双曲线的左半支.

(3) F' 在定圆上 ($c=r$).

$\because\quad \sqrt{(x-r)^2+y^2}\pm\sqrt{(x+r)^2+y^2}=2r,\quad \therefore\quad y=0$ (但 $x\leqslant r$).
即轨迹为 x 轴在 F 点左侧的射线.

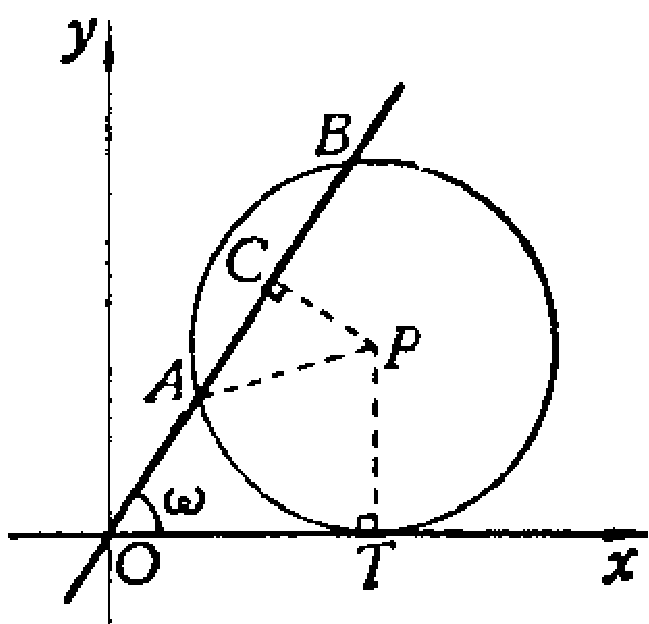
[说明] 在学过椭圆、双曲线之后,本题根据椭圆、双曲线的定义与轨迹条件: $|PF|+|PF'|=2r$; $|PF|-|PF'|=2r$, 可立即写出轨迹方程. 在这类轨迹问题中,适当选取坐标系,可使解的过程简化.

538. 求过定点 $A(0, a)$, 且在 x 轴上截得的弦长为 $2a$ 的动圆圆心的轨迹.



[解] 如图设 $P(x, y)$为轨迹上任意一点. 动圆在 x 轴上截得的弦 $BC=2a$, D 为 BC 的中点, 则 $BD=a$, 且$|PB|^2-|BD|^2=|PD|^2$; 而$|PA|=|PB|$, 故$|PA|^2-|BD|^2=|PD|^2$, 即 $x^2+(y-a)^2-a^2=y^2$, 化简得 $x^2=2ay$. $\therefore$ 所求轨迹是以原点为顶点,开口向上的抛物线.

539. 一动圆与 x 轴相切, 且在过原点、倾角为 ω 的直线上截得弦长为定值 $2l$. 求证动圆中心的轨迹方程为 $x^2-y^2-2xy\operatorname{ctg}\omega+l^2\csc^2\omega=0$.



[证] 设所求动圆圆心为 $P(x_0, y_0)$, 圆 P 与过原点、倾角为 ω 的直线交于 A、B, 过 P 作 $PT\perp Ox$ 轴, 垂足为 T, PC 为弦 AB 的弦心距, 连 AP. 则在直角 $\triangle PAC$ 中,

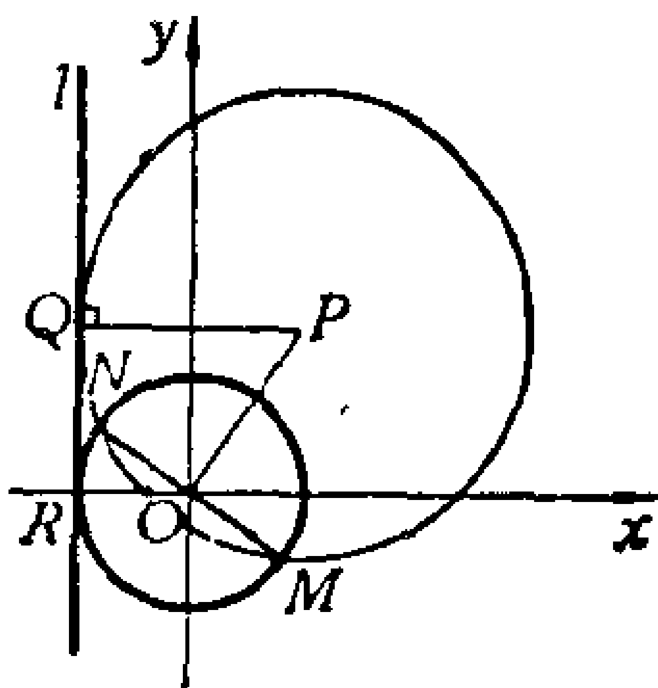
$$|PA|=|PT|=|y_0|,\quad |AC|=\frac{1}{2}|AB|=l.$$

直线 AB 方程为 $\quad x\cos\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)+y\sin\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)=0,$

$$\therefore\quad |PC|=|-x_0\sin\omega+y_0\cos\omega|;$$

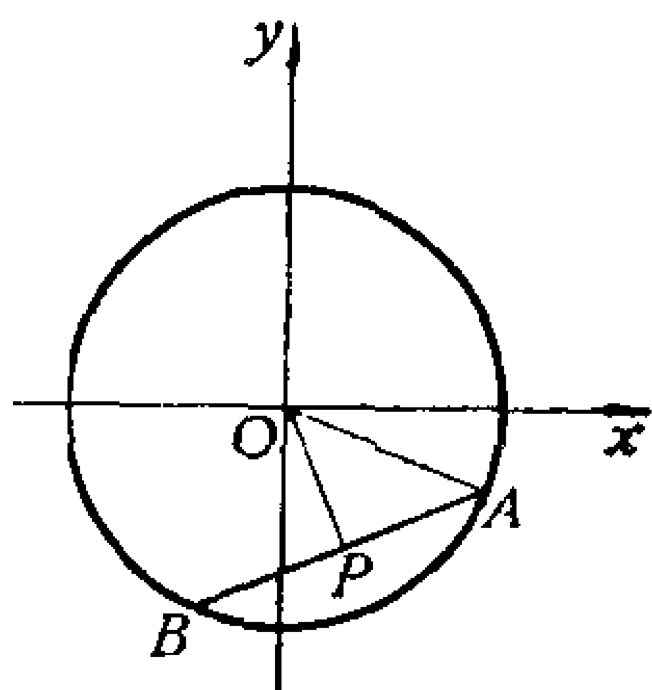
$\because\quad |PA|^2=|PC|^2+|AC|^2,\quad \therefore\quad y_0^2=l^2+(-x_0\sin\omega+y_0\cos\omega)^2.$
以(x, y)代(x_0, y_0)并化简,即得 $x^2-y^2-2xy\operatorname{ctg}\omega+l^2\csc^2\omega=0$.

540. 已知与一定直线 l 相切的定圆 O, 过圆 O 的动直径两端 M、N 又作圆 P, 并与直线 l 相切. 求动圆圆心 P 的轨迹.



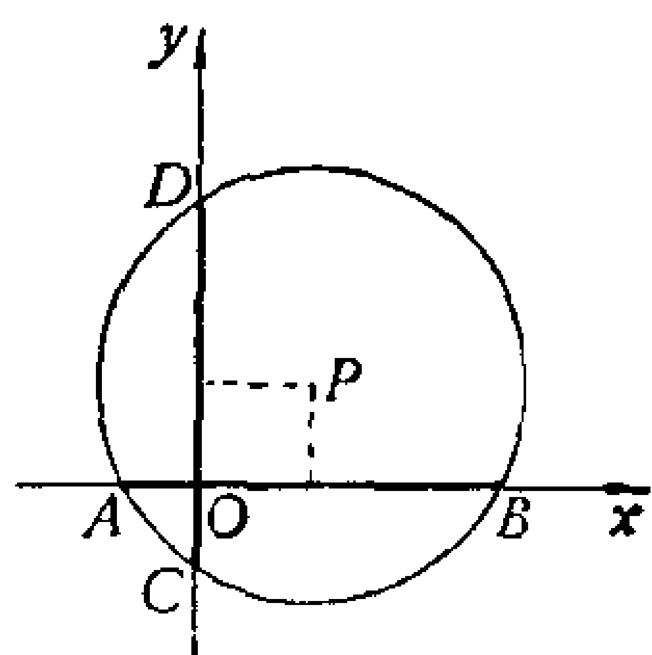
［解］ 取O为原点，定直线l与定圆O的切点R与O的连线为x轴，建立直角坐标系如图. 设$P(x, y)$为轨迹上任意一点，圆O半径为r，切点R的坐标为$(-r, 0)$. ∵ 动圆P过圆O的动直径的两端M、N，∴ $OP\perp MN$. $Q(-r, y)$为圆P与l的切点，则$|OP|^2+|OM|^2=|PM|^2=|PQ|^2$，即 $x^2+y^2+r^2=(x+r)^2$，$y^2=2rx$. ∴ 点P的轨迹是抛物线.

541. 求圆$x^2+y^2=r^2$内长度为定值l的弦的中点P的轨迹.



［解］ 设$P(x, y)$为圆$x^2+y^2=r^2$内长度为定值l的弦AB的中点，则$OP\perp AB$. ∵ $|OP|^2+|PA|^2=|OA|^2$，∴ $x^2+y^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2=r^2$. 即$x^2+y^2=r^2-\frac{l^2}{4}$. 故当圆半径$r>\frac{l}{2}$时，所求轨迹为一圆；当$r=\frac{l}{2}$时，轨迹为一点，即原点；当$r<\frac{l}{2}$时，轨迹不存在.

542. 长为a、b的两线段AB、CD，分别在x、y轴上滑动，且A、B、C、D四端点共圆. 试求此动圆的圆心P的轨迹.



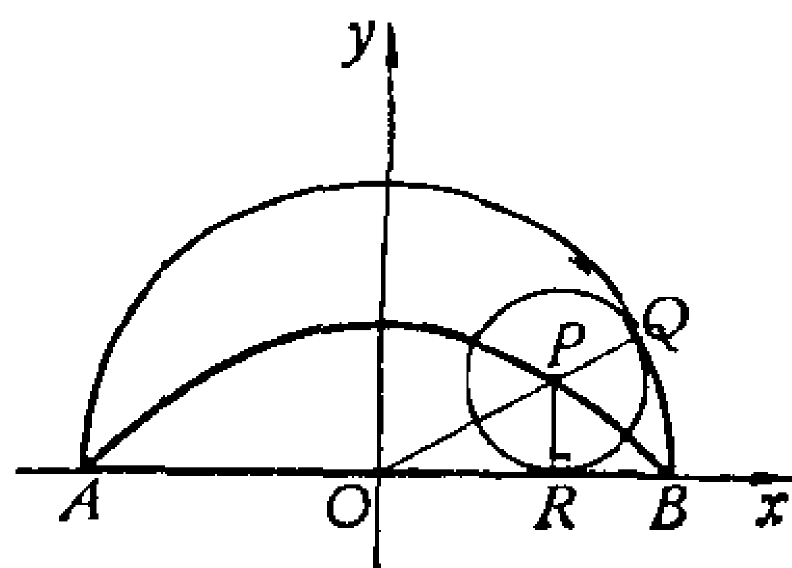
［解］ 设$P(x, y)$为轨迹上任意一点. 由已知$AB=a$，$CD=b$. ∴ A、B、C、D的坐标分别为$\left(x-\frac{a}{2}, 0\right)$、$\left(x+\frac{a}{2}, 0\right)$、$\left(0, y-\frac{b}{2}\right)$、$\left(0, y+\frac{b}{2}\right)$.
∵ A、B、C、D四点共圆，∴ 根据圆幂定理$|OA|\cdot|OB|=|OC|\cdot|OD|$，即

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)\left(x+\frac{a}{2}\right)=\left(y-\frac{b}{2}\right)\left(y+\frac{b}{2}\right),$$

得$x^2-y^2=\frac{1}{4}(a^2-b^2)$. 故所求轨迹是等轴双曲线.

543. 已知半圆O，求所有与半圆直径AB相切，且和半圆内切的动圆圆心P的轨迹.

［分析］ 因为两圆内切，两圆心和切点共线，且圆心距等于两半径之差，



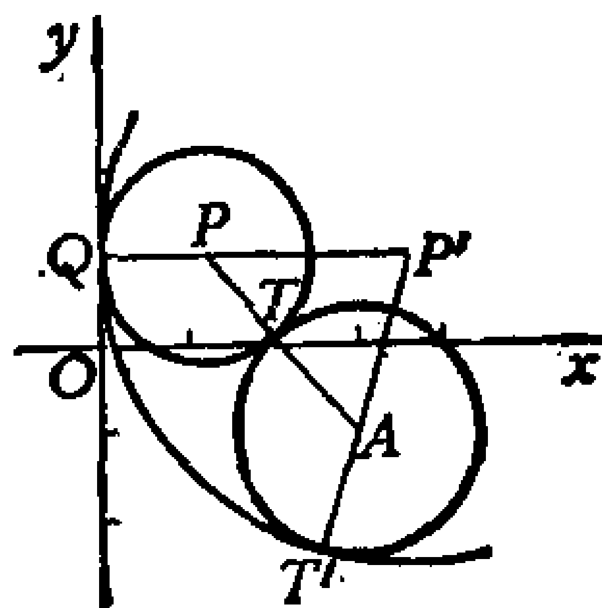
由此便可将轨迹条件转化成动点到圆心 O 的距离与到 AB 的距离之和等于圆 O 的半径.

［解］ 取 O 为原点，半圆的直径 AB 所在直线为 x 轴建立直角坐标系如图. 设半圆的半径为 r, $P(x, y)$ 为轨迹上任意一点，则 $|OP|+|PR|=|OQ|=r$, $\therefore \sqrt{x^2+y^2}+y=r$, $(y\geqslant 0)$.

$$\text{即}\quad x^2=-2r\left(y-\frac{r}{2}\right)\quad (y\geqslant 0).$$

轨迹是顶点在 $\left(0, \frac{r}{2}\right)$, 开口向下，起迄于 A、B 的抛物线弧.

544. 试求与 y 轴及圆 $x^2+y^2-12x+4y+31=0$ 都相切的诸圆圆心的轨迹.



［分析］ 已知圆方程经配方后可得圆心、半径，再利用两圆相切时圆心距与两圆半径之关系，即可求得.

［解］ 由 $x^2+y^2-12x+4y+31=0$ 得已知圆 A 的标准方程为 $(x-6)^2+(y+2)^2=3^2$.

设 $P(x, y)$ 为与 y 轴相切，并和圆 A 外切于点 T 的任一圆圆心.

$$|PT|=|PQ|=|x|,\quad |AT|=3.$$

$$\because\quad |PA|=|PT|+|AT|,\quad \therefore\quad \sqrt{(x-6)^2+(y+2)^2}=|x|+3,$$

即 $(y+2)^2=12x+6|x|-27$. 根据题意，$x\geqslant 0$, 故方程为 $(y+2)^2=18\left(x-\frac{3}{2}\right)$, 表示顶点在 $\left(\frac{3}{2}, -2\right)$, 开口向右的抛物线.

同理，设 $P'(x, y)$ 为与 y 轴相切，并和圆 A 内切的任一圆圆心，则

$$\sqrt{(x-6)^2+(y+2)^2}=|x|-3.$$

$\because x\geqslant 0$, 故得 $(y+2)^2=6\left(x-\frac{9}{2}\right)$, 表示顶点在 $\left(\frac{9}{2}, -2\right)$, 开口向右的抛物线. 综上所述，所求轨迹由两抛物线 $(y+2)^2=18\left(x-\frac{3}{2}\right)$ 与 $(y+2)^2=6\left(x-\frac{9}{2}\right)$ 组成.

545. 求与两已知圆直交的圆的中心轨迹.

［分析］ 由于直交两圆的连心线和过交点的两半径组成一直角三角形，

故可得动圆的圆心、半径与已知圆的圆心、半径之间的关系.

［解］ 建立直角坐标系，使两已知圆的方程为：

$$x^2+y^2+2g_ix+2f_iy+c_i=0 \quad (i=1,\ 2).$$

设动圆的圆心为$(x,\ y)$，半径为r. 由于它和两已知圆直交，故有

$$(x+g_i)^2+(y+f_i)^2=g_i^2+f_i^2-c_i+r^2.$$

当$i=1$时，化简得 $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1-r^2=0$;

当$i=2$时，化简得 $x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2-r^2=0$.

两式相减，消去参数r，得 $2(g_1-g_2)x+2(f_1-f_2)y+c_1-c_2=0$.

故所求轨迹为一直线.

［说明］ 此轨迹即两已知圆的根轴. 由此可知，与三已知圆直交的圆的圆心，即三已知圆的根心(见第499题).

546. 极坐标平面中的极点为O, $A(a,\ 0)$是定点$(a>0)$. 点P在保持$\angle OPA=\frac{\pi}{3}$的条件下变动. 在线段OP的延长线上取点Q，使$|PQ|=|PA|$. 求点Q的轨迹.

［解］ 设点Q的坐标为$(\rho,\ \theta)$，这里$\rho>0$. 连AQ，$\because |PQ|=|PA|$，$\therefore \angle PAQ=\angle AQP=\frac{\pi}{6}$. 当点$P$在极轴所在直线的上方时(图1)，$\angle AOQ=\theta$. 根据正弦定理得

$$\frac{|OQ|}{\sin\angle QAO}=\frac{|OA|}{\sin\angle Q}，即\ \rho\sin\frac{\pi}{6}=a\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right).$$

化简得$\rho=a(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)$. 其轨迹为圆$\rho=a(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)$在极轴所在直线上方的一段圆弧.

当点P在极轴所在直线的下方时(图2)，$\angle AOQ=2\pi-\theta$. 同理可得

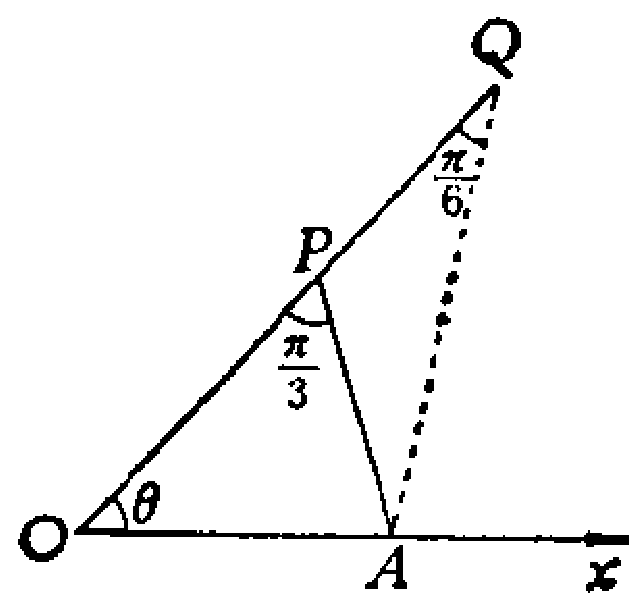


图 1

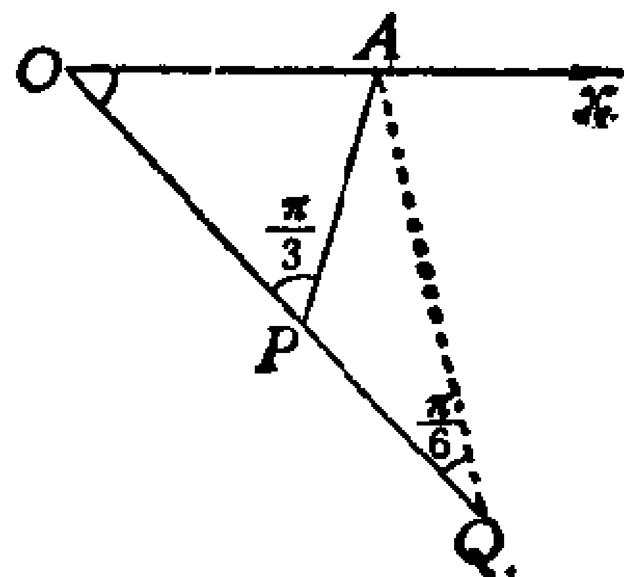
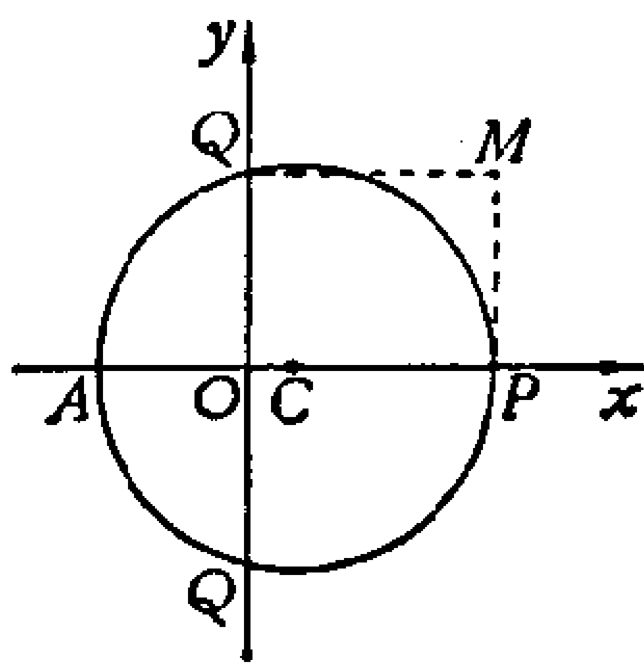


图 2

$\rho\sin\frac{\pi}{6}=a\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)$. 化简得 $\rho=a(-\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)$. 其轨迹为圆 $\rho=a(-\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)$在极轴所在直线下方的一段圆弧.

故点 Q 的轨迹是以线段 OA 为弦，张角为 $\frac{\pi}{6}$ 的两段弓形弧.

547. 圆心在 x 轴上的动圆过点 $A(-3, 0)$，和 x 轴相交于另一点 P，和 y 轴相交于点 Q. 求以点 P 的横坐标为横坐标，以点 Q 的纵坐标为纵坐标的点 M 的轨迹方程.



[分析] 由于点 M 的位置决定于动圆的位置，而动圆的圆心又在横轴上，故圆心的横坐标 λ 确定后，P、Q 两点的坐标也随之而定，从而点 M 的坐标即可用参数 λ 的式子表出.

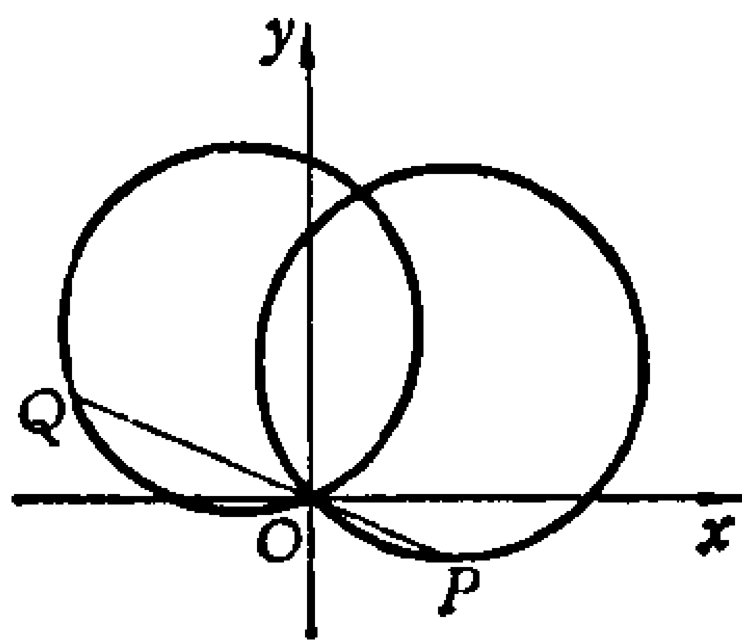
[解] 设动圆的圆心为 $C(\lambda, 0)$. ∵ C 是线段 AP 的中点，∴ 点 P 的横坐标 $x_P=2\lambda+3$. 又圆 C 的方程为

$$(x-\lambda)^2+y^2=(\lambda+3)^2, \quad \text{即} \quad x^2+y^2-2\lambda x=6\lambda+9.$$

当 $x=0$ 时，解得 $y^2=6\lambda+9$. ∴ 点 Q 的纵坐标 $y_Q=\pm\sqrt{6\lambda+9}$. (显然 $6\lambda+9\geqslant0$, 否则动圆和 y 轴无交点). 设点 M 的坐标为 (x, y)，则 $x=2\lambda+3$, $y=\pm\sqrt{6\lambda+9}$. 消去 λ，得 $y^2=3x$. 此即所求的轨迹方程.

[说明] 在选择参数时，应视具体情况而定，一般应选择能较方便地用来表示出动点坐标的变量作为参数.

548. 过两已知圆交点 O 的直线与两圆再交于 P、Q. 求线段 PQ 中点的轨迹方程.



[分析] 线段的中点取决于它的两个端点，故可先研究过点 O 的动直线和两已知圆的交点 P、Q.

[解] 以两已知圆的交点 O 为原点建立直角坐标系. 设两已知圆的方程分别为:

$$x^2+y^2-2x_1x-2y_1y=0\cdots① \quad \text{和} \quad x^2+y^2-2x_2x-2y_2y=0\cdots②.$$

过点 O 的动直线方程为 $y=\lambda x\cdots③$. 以 ③ 代入 ①、②，分别求得点 P 和点 Q 的横坐标为: $x_P=\frac{2(x_1+\lambda y_1)}{1+\lambda^2}$, $x_Q=\frac{2(x_2+\lambda y_2)}{1+\lambda^2}$. 设线段 PQ 中点的

坐标为(x, y)，则$x=\dfrac{x_1+x_2+\lambda(y_1+y_2)}{1+\lambda^2}$…④. 由③解得$\lambda$代入④，得

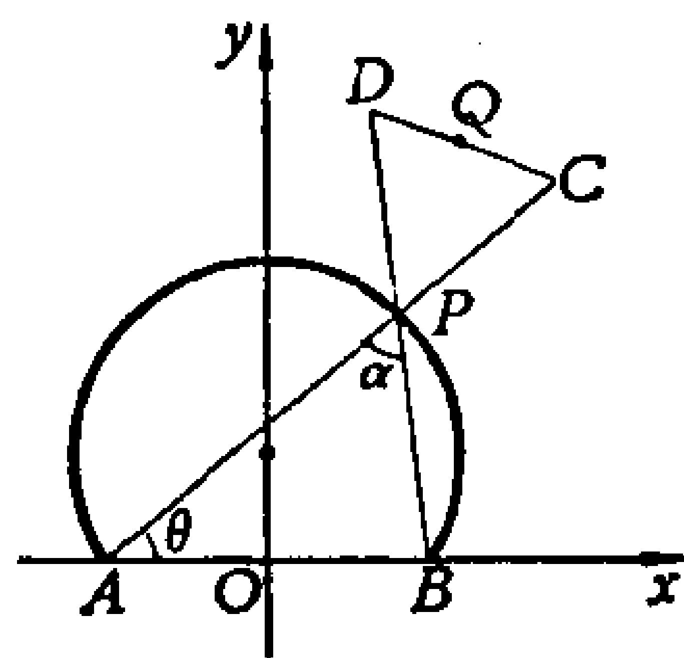
$$x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y=0\cdots⑤.$$

当动直线的斜率不存在时，它的方程为$x=0$，则$y_P=2y_1$，$y_Q=2y_2$.
∴ 线段PQ中点坐标为$(0, y_1+y_2)$，仍满足方程⑤，故所求的轨迹方程为

$$x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y=0.$$

[说明] 当过定点的动直线有可能垂直x轴时，不能简单地用点斜式来表示这条动直线，还应考虑当其垂直于x轴时的情况.

549. 定弓形弧$\overset{\frown}{AB}$上一动点P，连接AP并延长至C，使$|AC|=2a$；连接BP并延长至D，使$|BD|=2b$. 求线段CD中点的轨迹方程.



[分析] 线段CD的中点由定弓形弧$\overset{\frown}{AB}$上的动点P而决定. 点P的位置又随$\angle BAP$的大小而变化，故可取$\angle BAP$为参数解之.

[解] 如图建立直角坐标系，设点A、B、C、D的坐标分别为$(-c, 0)$、$(c, 0)$、(x_C, y_C)、(x_D, y_D)；$\angle APB$为定角α；线段CD的中点Q的坐标为(x, y)；并取$\angle BAP=\theta$为参数. 于是$x_C+c=2a\cos\theta$, $y_C=2a\sin\theta$. 又$\angle xBP=\theta+\alpha$, ∴ $x_D-c=2b\cos(\theta+\alpha)$, $y_D=2b\sin(\theta+\alpha)$. 又$x=\dfrac{x_C+x_D}{2}=a\cos\theta+b\cos(\theta+\alpha)$…①,
$y=\dfrac{y_C+y_D}{2}=a\sin\theta+b\sin(\theta+\alpha)$…②. ①^2+②^2，得

$$x^2+y^2=a^2+b^2+2ab[\cos\theta\cos(\theta+\alpha)+\sin\theta\sin(\theta+\alpha)],$$

即
$$x^2+y^2=a^2+b^2+2ab\cos\alpha.$$

此即所求的轨迹方程，其中$y\geqslant 0$.

550. 设O为不在已知圆A上的一定点，过O的任意直线交圆A于P_1、P_2，在线段P_1P_2上取一点Q，使(1) OQ等于OP_1、OP_2的等差中项；(2) OQ等于OP_1、OP_2的等比中项；(3) OQ等于OP_1、OP_2的调和中项. 试求每一种情况下，点Q的轨迹.

[分析] 利用直线参数方程中t的几何意义，或极坐标中ρ的几何意义，三个轨迹都不难求得. 第(1)题的结果也可由平面几何知识直接求得.

由 OQ 是 OP_1 与 OP_2 的等差中项知，$AQ\perp P_1P_2$，故点 Q 轨迹是以 OA 为直径的圆在已知圆内的一段弧.

[解一] 取定圆圆心 A 为原点，圆心与定点连线为 x 轴，建立直角坐标系如图. 设已知圆方程为 $x^2+y^2=r^2$，定点 O 坐标为 $(a, 0)$，点 Q 坐标为 (x, y). 过点 O，倾角为 α 的直线方程为 $\begin{cases} x=a+t\cos\alpha \\ y=t\sin\alpha \end{cases}$（$t$ 为参数）…①，代入圆方程得

$$t^2+2at\cos\alpha+a^2-r^2=0\cdots②.$$

(1) 若 OQ 等于 OP_1、OP_2 的等差中项，则 $t_Q=\dfrac{t_1+t_2}{2}=-a\cos\alpha$，代入①，得 $\begin{cases} x=a\sin^2\alpha\cdots③ \\ y=-\dfrac{1}{2}a\sin2\alpha\cdots④. \end{cases}$ 由③得 $x-\dfrac{a}{2}=-\dfrac{1}{2}a\cos2\alpha\cdots⑤$，从④、⑤消去 α，得 $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{a^2}{4}$. 故点 Q 的轨迹是以 $\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$ 为圆心，$\dfrac{|a|}{2}$ 为半径的圆在定圆 A 内的部分弧（图 1）.

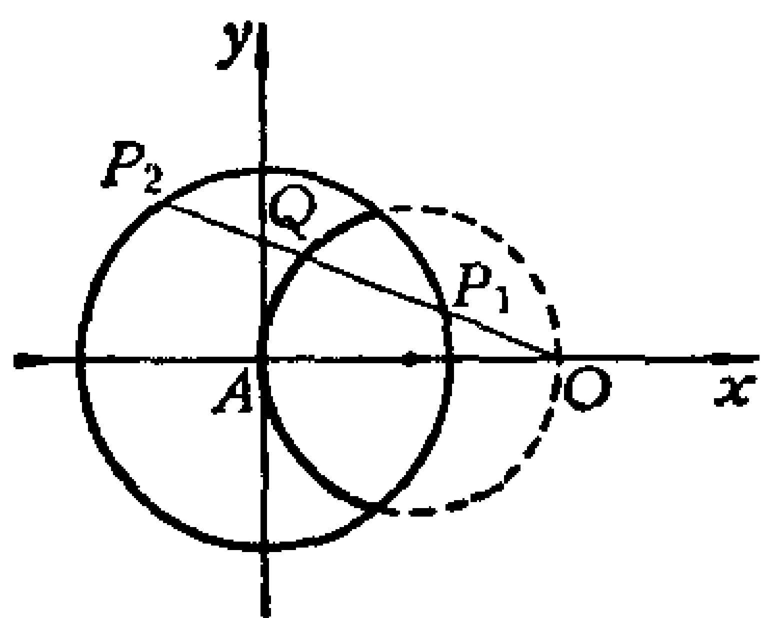


图 1

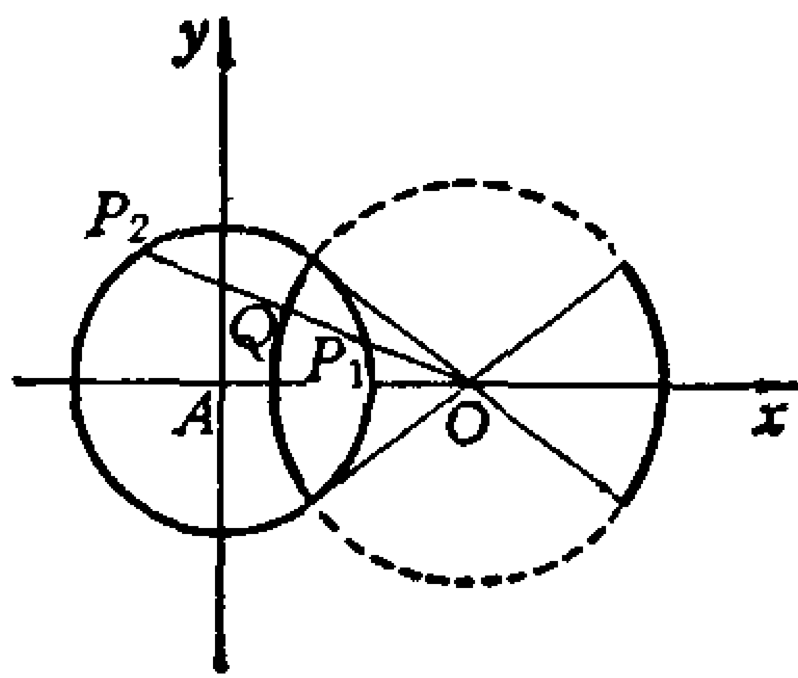


图 2

(2) 若 OQ 等于 OP_1、OP_2 的等比中项，由②知 $t_Q^2=t_1t_2=a^2-r^2$. 代入①消去 α，得 $(x-a)^2+y^2=a^2-r^2$. 故点 Q 的轨迹是以 $(a, 0)$ 为圆心，以 $\sqrt{a^2-r^2}$ 为半径的圆在定圆 A 内与定圆外的两段弧，此两段弧关于点 O 对称（图 2）. 当定点在圆内时，无轨迹.

(3) 若 OP 等于 OP_1、OP_2 的调和中项，则

$$\frac{2}{t_Q}=\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{t_1+t_2}{t_1t_2}=\frac{-2a\cos\alpha}{a^2-r^2}, \quad \therefore \quad t_Q=\frac{r^2-a^2}{a\cos\alpha}.$$

代入①，得点 Q 的参数方程 $\begin{cases} x=a+\dfrac{r^2-a^2}{a}\cdots⑥ \\ y=\dfrac{r^2-a^2}{a}\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdots⑦ \end{cases}$（$\alpha$ 为参数）. ∵⑥式

即是 $x=\frac{r^2}{a}$，故当定点 O 在圆外时，点 Q 的轨迹是直线 $x=\frac{r^2}{a}$ 在已知圆内的部分(图 3)．当定点 O 在圆内时，点 Q 的轨迹为在圆外的直线 $x=\frac{r^2}{a}$．

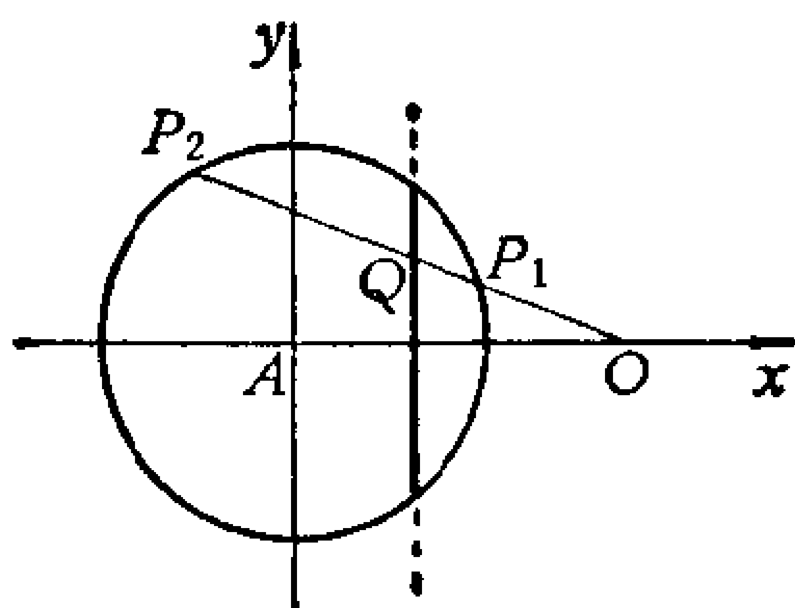


图 3

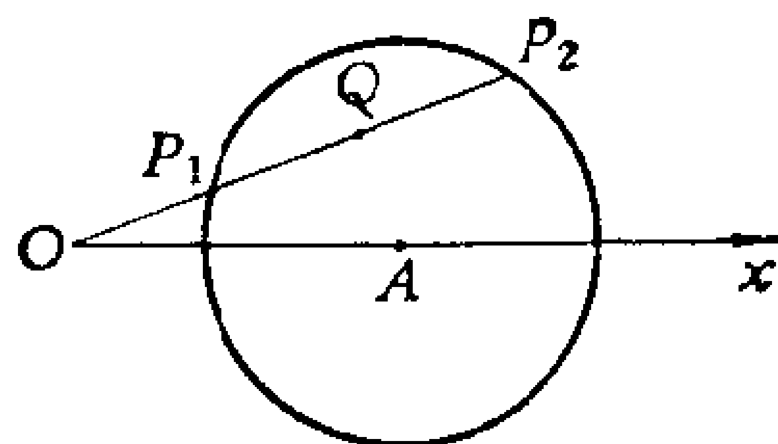


图 4

［解二］ 以 O 为极点，射线 OA 为极轴建立极坐标系(图 4)．A 的极坐标为 $(a,0)$．设定圆 A 的半径为 r，则它的极坐标方程为 $\rho^2-2a\rho\cos\theta+a^2-r^2=0$．设 P_1、P_2、Q 的极坐标分别为 (ρ_1,θ)、(ρ_2,θ)、(ρ,θ)．

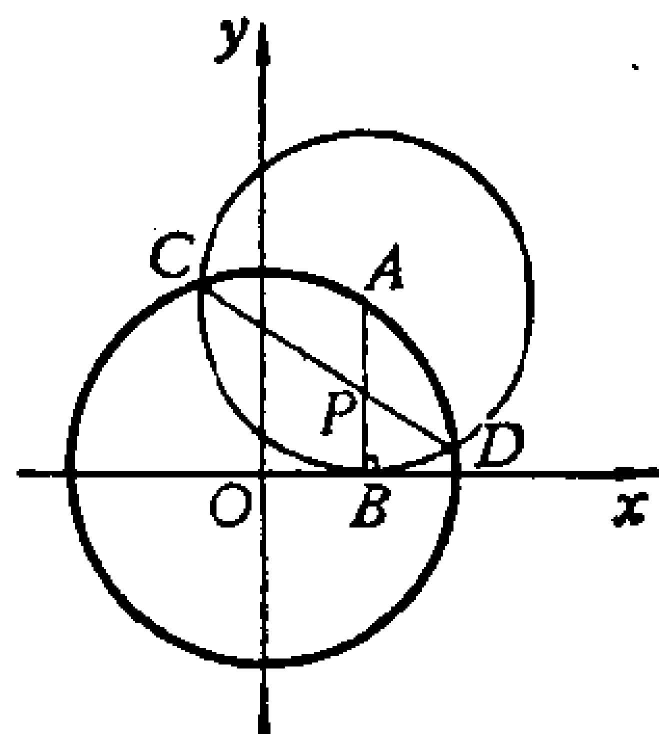
(1) 由题意，$2\rho=\rho_1+\rho_2=2a\cos\theta$．$\therefore\ \rho=a\cos\theta$，即点 Q 轨迹为圆 $\rho=a\cos\theta$ 在已知圆内的部分．

(2) 由 $\rho^2=\rho_1\rho_2=a^2-r^2$，得 $\rho=\sqrt{a^2-r^2}$，故点 Q 的轨迹是以 O 为圆心，$\sqrt{a^2-r^2}$ 为半径的圆在已知圆内与圆外的两段弧，当定点在圆内时，无轨迹．

(3) 由 $\frac{2}{\rho}=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2}=\frac{2a\cos\theta}{a^2-r^2}$，得 $a\rho\cos\theta=a^2-r^2$．表明点 Q 的轨迹是一直线在已知圆内的部分．当定点在圆内时，轨迹为在圆外的一直线．

［说明］ 若定曲线不是圆，而是椭圆等二次曲线，也可用类似方法解决．

551．A 是圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 上的任一点，$AB\perp x$ 轴，交 x 轴于 B．以 A 为圆心，以 $|AB|$ 为半径的圆交已知圆于 C、D．连结 C、D 交 AB 于 P．当点 A 在已知圆上运动时，求点 P 的轨迹方程．



［分析］ 因为动圆的圆心 A 确定后，AB、CD

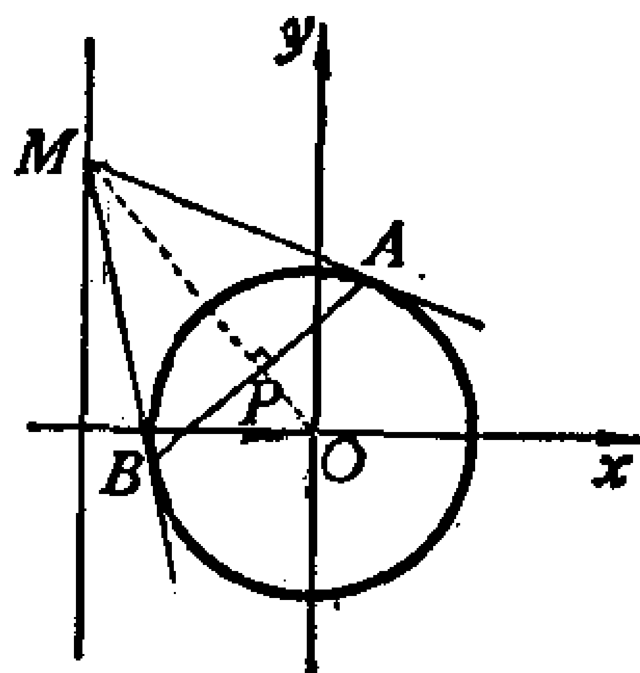
两直线皆可确定. 从而点 P 的位置也随之而定，故可选择点 A 的坐标为参数.

［解］ 设点 A 的坐标为 (a, b)，则圆 A 的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$，即 $x^2+y^2-2ax-2by+a^2=0$；又圆 O 的方程为 $x^2+y^2=r^2$. 两式相减，得 $2ax+2by=r^2+a^2$，此即 CD 的方程. 解方程组

$$\begin{cases} 2ax+2by=r^2+a^2 \\ x=a, \end{cases} \quad 得 \quad \begin{cases} x=a \\ y=\dfrac{r^2-a^2}{2b}. \end{cases}$$

此即点 P 的坐标. ∵ A 在圆上，∴ $a^2+b^2=r^2$. 代入上式，得 $x=a$，$2y=b$. 消去 a、b，得 $x^2+4y^2=r^2$. 此即点 P 的轨迹方程.

552. 从一定直线上一动点引已知圆的两切线，求其切点弦的中点轨迹.



［分析］ 弦的中点即为圆心向此弦所引垂线的垂足，故本题可化为求切点弦和它的过圆心的垂线的交点轨迹.

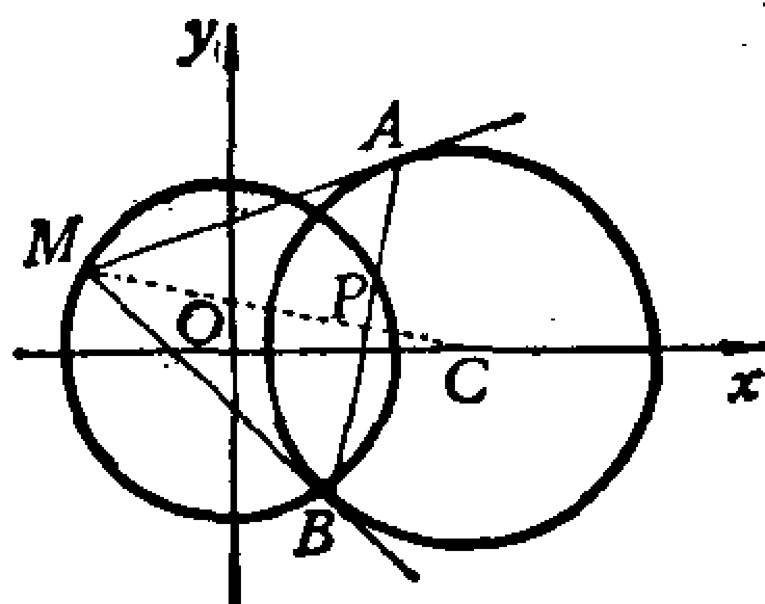
［解］ 以已知圆的圆心为原点，平行于定直线的直线为 y 轴建立直角坐标系如图. 使已知圆的方程为 $x^2+y^2=a^2$，定直线的方程为 $x=b$. 设点 $M(b, y_0)$ 为定直线上的动点，则其切点弦 AB 所在直线的方程为 $bx+y_0y=a^2$…①. 作 $OP\perp AB$，垂足为 P，则点 P 即为 AB 的中点，且 OP 的方程为 $y_0x=by$…②. 由①、②消去参数 y_0，得

$$x^2+y^2-\frac{a^2}{b}x=0, \quad 即 \quad \left(x-\frac{a^2}{2b}\right)^2+y^2=\left(\frac{a^2}{2b}\right)^2 \cdots ③.$$

故当定直线不过圆心 O，即 $b\neq 0$ 时，所求轨迹为圆③在已知圆内的部分；当 $b=0$ 时，所求轨迹即为 y 轴在已知圆内的部分.

［说明］ 实际上，所求的轨迹即为定直线关于已知圆的反演图形或其一部分.

553. 从圆 $x^2+y^2=a^2$ 上任意一点 M 作圆 $(x-c)^2+y^2=b^2$ 的两切线，求两切点连线中点的轨迹方程.



［解］ 设点 M 为圆 O: $x^2+y^2=a^2$ 上的任意

一点，其坐标为(u, v)，则$u^2+v^2=a^2\cdots$①. 自点M向圆C：$(x-c)^2+y^2=b^2$引两切线，切点为A、B，则A、B连线的方程为$(u-c)(x-c)+vy=b^2\cdots$②. 过圆心C作$CP\perp AB$，P为垂足，则P即为AB的中点，且CP的方程为$vx-(u-c)y=vc$，即$(u-c)y-v(x-c)=0\cdots$③. 解②、③，得

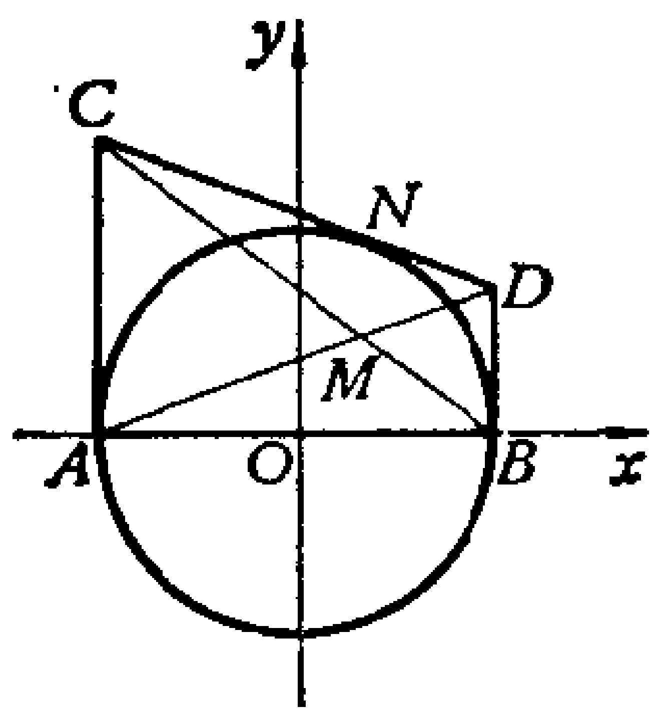
$$v=\frac{b^2y}{(x-c)^2+y^2},\quad u=\frac{b^2(x-c)}{(x-c)^2+y^2}+c.$$

代入①，即得 $(a^2-c^2)[y^2+(x-c)^2]=2b^2c(x-c)+b^4\cdots$④.

当圆O在圆C的内部时，轨迹不存在. 在$a^2\neq c^2$时，轨迹为方程④所表示的圆在圆$(x-c)^2+y^2=b^2$内部的一段圆弧；在$a^2=c^2$时，为直线$x=\frac{2c^2-b^2}{2c}$在圆$(x-c)^2+y^2=b^2$内部的一条线段.

［说明］ 本题所求的轨迹即为圆$x^2+y^2=a^2$关于圆$(x-c)^2+y^2=b^2$的反演图形或其部分.

554. AB是单位圆O的直径，N是圆上的动点，过N的切线与过A、B的切线分别交于C和D两点. 求梯形$ABDC$的对角线AD和BC的交点M的轨迹方程.



［分析］ 切点N的位置决定后，C、D两点的位置也可确定，从而点M的位置也随之而定，故可选择点N的坐标为参数解之.

［解］ 以圆心O为原点、AB为x轴建立直角坐标系如图，则圆O的方程为$x^2+y^2=1$. 设点N的坐标为(x_0, y_0)，则过点N的圆O的切线方程为$x_0x+y_0y=1$. 显然$y_0\neq 0$，故点D的坐标为方程组$\begin{cases}x_0x+y_0y=1\\x=1\end{cases}$的解：$\left(1, \frac{1-x_0}{y_0}\right)$；点$C$的坐标为方程组$\begin{cases}x_0x+y_0y=1\\x=-1\end{cases}$的解：$\left(-1, \frac{1+x_0}{y_0}\right)$.

$\therefore$ 直线AD的方程是$y=\frac{1-x_0}{2y_0}(x+1)\cdots$①. 直线$BC$的方程是$y=\frac{1+x_0}{-2y_0}(x-1)\cdots$②. ①×②，得$y^2=\frac{1-x_0^2}{-4y_0^2}(x^2-1)\cdots$③. $\because$ 点N在圆O上，$\therefore 1-x_0^2=y_0^2$. 代入③，即得所求的轨迹方程$x^2+4y^2=1$.

［说明］ 在求得动点坐标和参数的关系式后，如能直接由此消去参数，则不必先求出x、y的参数表达式. 这样可简化求解的过程.

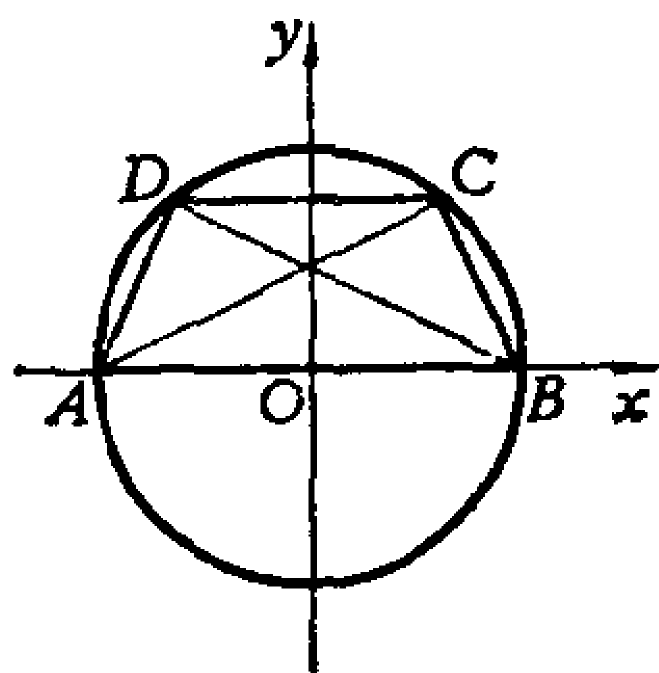
555. $\triangle ABC$ 顶点 A 的坐标为 $(0, 6)$，它的对边 BC 沿着 x 轴滑动，并且 BC 的长度等于 3（A、B、C 为逆时针序）．试求 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心的轨迹．

［解］ 取点 B 横坐标 t 为参数，则 $B(t, 0)$，$C(t+3, 0)$．动线段 AB 的垂直平分线方程为

$$x^2+(y-6)^2=(x-t)^2+y^2,\quad 即\quad -12y+36=-2tx+t^2\cdots①;$$

BC 的垂直平分线方程为 $x=t+\frac{3}{2}\cdots②$．由①、②消去 t，即得 $\triangle ABC$ 外接圆圆心 $P(x, y)$ 的轨迹方程 $x^2=12\left(y-\frac{45}{16}\right)$．轨迹是顶点在 $\left(0,\frac{45}{16}\right)$，开口向上的抛物线．

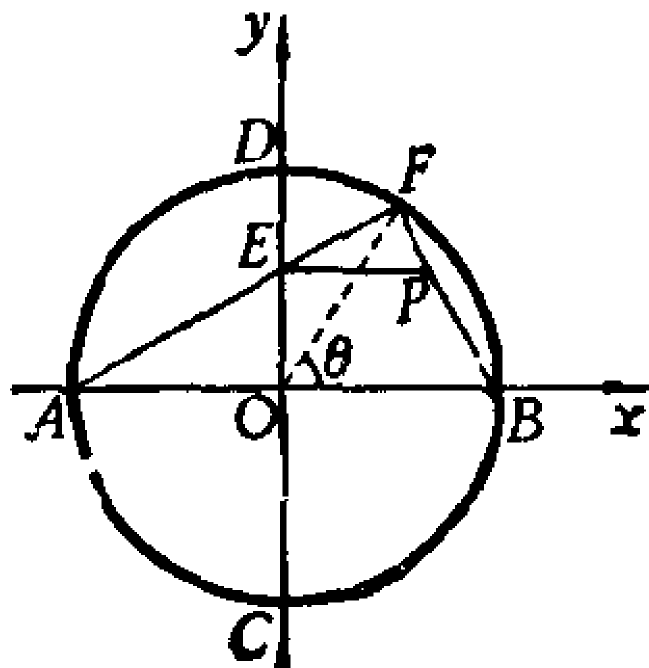
556. 求定圆中以定直径为底的内接梯形对角线交点的轨迹．



［分析］ 在建立直角坐标系后，可看出，动点的坐标决定于弦 CD 的纵截距，故可选它作为参数解之．

［解］ 以定直径 AB 所在直线为 x 轴，以定圆圆心 O 为原点建立直角坐标系，设定圆方程为 $x^2+y^2=r^2$．四边形 $ABCD$ 是定圆中以直径 AB 为底的任意内接梯形，故 $CD\parallel AB$，即 $CD\perp Oy$．∴ 点 C、D 关于 y 轴对称．设点 C 的坐标为 (x_0, y_0)，则点 D 的坐标为 $(-x_0, y_0)$．显然 $y_0\neq 0$．直线 AC 的方程是 $y(x_0+r)=y_0(x+r)$；直线 BD 的方程是 $-y(x_0+r)=y_0(x-r)$．两式相加，得 $2y_0x=0$．∵ $y_0\neq 0$，∴ $x=0$．故所求轨迹为垂直于定直径的一条直径（不包括两端点和圆心）．

557. AB、CD 是半径为 a 的定圆 O 的两互相垂直的直径．作动弦 AF 交 CD 于 E，引 $EP\parallel AB$，且交 BF 于 P．求点 P 的轨迹方程．



［分析一］ 由于点 F 确定后，点 E、点 P 也随之而定，而点 F 的位置又决定于 $\angle BOF$ 的值，故可选择 $\theta=\angle BOF$ 为参数解之．

［解一］ 以直线 AB、CD 分别为 x、y 轴建立直角坐标系如图，则圆 O 的方程为 $x^2+y^2=a^2$．设

$\angle BOF=\theta$，取θ为参数，则点F的坐标为$(a\cos\theta, a\sin\theta)$．直线$AF$的方程为$y(\cos\theta+1)=(x+a)\sin\theta\cdots$①，$BF$的方程为$y(\cos\theta-1)=(x-a)\sin\theta\cdots$②．以$x=0$代入①，解得点$E$的坐标：$\left(0, \dfrac{a\sin\theta}{\cos\theta+1}\right)$．$\because EP\parallel AB$，$\therefore$直线$EP$的方程为$y(\cos\theta+1)=a\sin\theta\cdots$③．②×③，得$y^2(\cos^2\theta-1)=a(x-a)\sin^2\theta$，即$y^2=-a(x-a)$．此即所求的轨迹方程(其中$0\leqslant x\leqslant a$)．

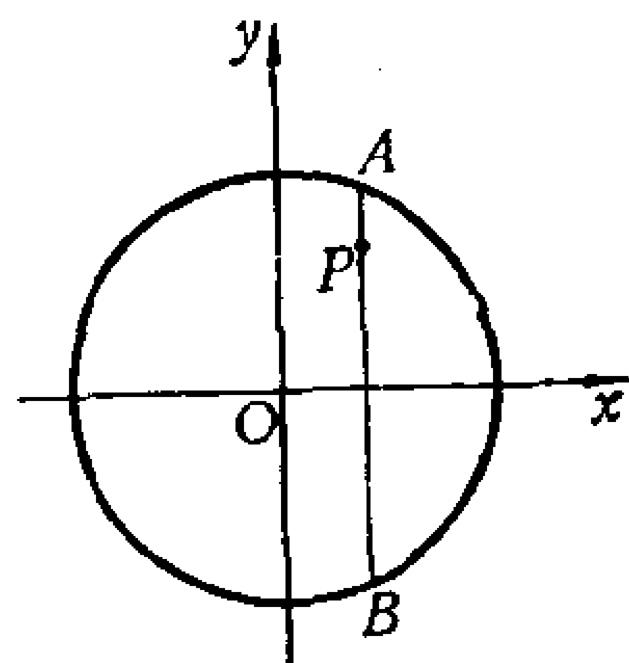
［分析二］ 因为$AF\perp BF$，若AF的斜率已知，则点E的坐标和BF的斜率均能求得，从而点P的坐标也可得，故也可选择AF的斜率为参数解之．

［解二］ 如［解一］建立直角坐标系，则圆方程仍为$x^2+y^2=a^2$．设AF的斜率为k，则其方程为$y=k(x+a)$，点E坐标为$(0, ka)$．故点P的纵坐标$y=ka\cdots$①．又$\because BF\perp AF$，$\therefore BF$的方程为$x+ky-a=0\cdots$②．①代入②，得$x=a(1-k^2)\cdots$③．由①、③消去k，得$y^2=-a(x-a)$(其中$0\leqslant x\leqslant a$)．此即所求的轨迹方程．

［说明］ (1)［解一］利用参数方程表示圆上的点，是解决有关圆的问题时一种有效的方法．

(2) 在本题中，由于点E为定圆直径CD上的点，故轨迹方程中的变量要有限制．

558．圆$x^2+y^2=r^2$的弦AB垂直于x轴，P为AB上的一点，且$|AP|\cdot|BP|=a^2$ ($|a|\leqslant r$)为定值．求点P的轨迹．



［解］ 设点P的坐标为(x, y)，点A的坐标为$(r\cos\theta, r\sin\theta)$，则点$B$的坐标为$(r\cos\theta, -r\sin\theta)$．$\because AB\perp x$轴，$\therefore x=r\cos\theta\cdots$①．$|AP|=|r\sin\theta-y|$，$|BP|=|y+r\sin\theta|$；又

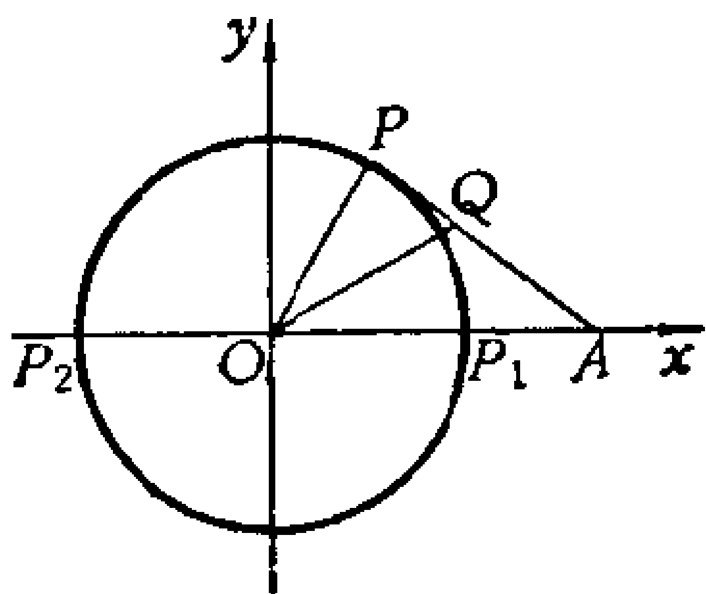
$$|AP|\cdot|BP|=a^2;\quad \therefore\quad |(r\sin\theta-y)(y+r\sin\theta)|=a^2.$$

$\because |r\sin\theta|\geqslant|y|$，$\therefore r^2\sin^2\theta=a^2+y^2\cdots$②．①^2+②，得$x^2+y^2=r^2-a^2$．故点$P$的轨迹是以原点为圆心，$\sqrt{r^2-a^2}$为半径的圆．

559．直角坐标平面上有定圆$x^2+y^2=r^2$，和定点$A(a, 0)$，

$(a>r)$. P 为定圆上任意一点，作 $\angle AOP$ 的平分线交 AP 于 Q. 求点 Q 的轨迹.

[分析一] 因为 OQ 是角平分线，根据角平分线的性质可知点 Q 内分线段 AP 成定比 $a:r$. 由此即可求得动点 Q 的轨迹.

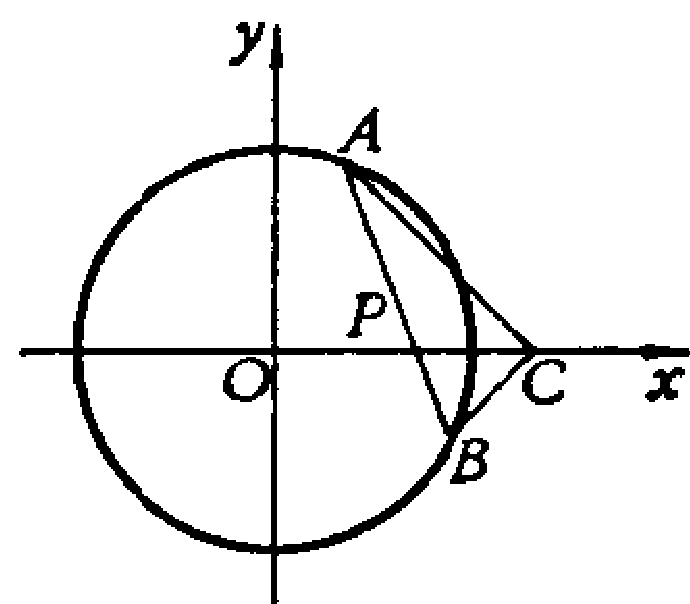


[解一] 当点 P 不在 x 轴上时，$\because OQ$ 是 $\angle AOP$ 的角平分线，$\therefore \frac{AQ}{QP}=\frac{|OA|}{|OP|}=\frac{a}{r}$. 设点 P 的坐标为 $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$，点 Q 的坐标为 $(x,\ y)$，则 $x=\frac{ra(1+\cos\theta)}{a+r}$, $y=\frac{ra\sin\theta}{a+r}$; 即 $\frac{ar\cos\theta}{a+r}=x-\frac{ar}{a+r}\cdots$①, $\frac{ar\sin\theta}{a+r}=y\cdots$②. ①^2+②^2, 得 $\left(x-\frac{ar}{a+r}\right)^2+y^2=\left(\frac{ar}{a+r}\right)^2$. 故其轨迹为圆. 当点 P 重合于 P_1 时，轨迹为一线段 P_1A; 当点 P 重合于 P_2 时，点 Q 重合于原点.

[分析二] $\triangle AOP$ 是一个已知两边长度的三角形，而 OQ 为这两边夹角的平分线，因此利用面积关系，即可得到这两边的夹角与此角平分线 OQ 长度之间的关系. 采用极坐标解之.

[解二] 设点 Q 的坐标为 $(\rho,\ \theta)$，则 $\angle AOP=2\theta$. $\because S_{\triangle AOP}=S_{\triangle AOQ}+S_{\triangle QOP}$, 即 $ar\sin 2\theta=a\rho\sin\theta+r\rho\sin\theta$. 当 $\theta\neq n\pi$ 时，得 $\rho=\frac{2ar}{a+r}\cos\theta$, 轨迹为一圆; 当 $\theta=2n\pi$ 时，点 P 重合于点 P_1, 轨迹为一线段 P_1A; 当 $\theta=(2n+1)\pi$ 时，点 Q 重合于原点.

560. 求圆 $x^2+y^2=a^2$ 在定点 $C(c,\ 0)$ 张直角之弦的中点轨迹 $(|c|\neq|a|)$.



[解] 设圆 $x^2+y^2=a^2$ 在定点 C 张直角之弦为 AB, 其中点 P 的坐标为 $(x,\ y)$. 点 A、B 的坐标分别为 $(a\cos\alpha,\ a\sin\alpha)$ 和 $(a\cos\beta,\ a\sin\beta)$，则

$x=\frac{a}{2}(\cos\alpha+\cos\beta)\cdots$①, $y=\frac{a}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)\cdots$②.

又直线 AC 的方程为　$(a\sin\alpha)x+(c-a\cos\alpha)y=ac\sin\alpha$;

直线 BC 的方程为　$(a\sin\beta)x+(c-a\cos\beta)y=ac\sin\beta$.

$\because AC\perp BC$,　$\therefore$　$a^2\sin\alpha\sin\beta+a^2\cos\alpha\cos\beta-ac(\cos\alpha+\cos\beta)+c^2=0$,

即 $$a^2\cos(\alpha-\beta)-ac(\cos\alpha+\cos\beta)+c^2=0\cdots③.$$

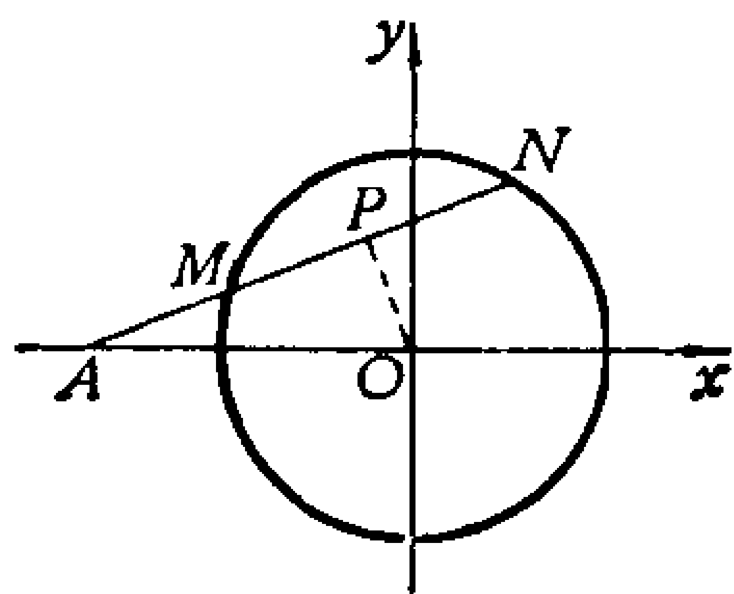
①^2+②^2，并化简得 $a^2\cos(\alpha-\beta)=2x^2+2y^2-a^2\cdots④.$

以①、④代入③，即得所求的轨迹方程

$$2x^2+2y^2-2cx-a^2+c^2=0,\ \text{即}\ \left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2=\frac{2a^2-c^2}{4}.$$

故当 $2a^2<c^2$ 时，轨迹不存在；当 $2a^2=c^2$ 时，轨迹为一点 $\left(\frac{c}{2},0\right)$；当 $2a^2>c^2$（但 $a^2\neq c^2$）时，轨迹为圆 $\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2=\frac{2a^2-c^2}{4}$ 在已知圆的圆内部分.

561. 过定点 A 引直线与定圆 C 相交于 M、N 两点. 求弦 MN 中点 P 的轨迹.



［解一］ 如图建立直角坐标系. 使定点 A 的坐标为 $(a,\ 0)$，定圆 C 的方程为 $x^2+y^2=r^2\cdots①$. 设过点 A 的直线方程为 $\begin{cases}x=a+t\cos\theta\\ y=t\sin\theta\end{cases}\cdots②$，（$t$ 为参数，θ 为任意常数）. ②代入①，得 $t^2+2a\cos\theta\cdot t+a^2-r^2=0\cdots③$. 当方程③的判别式不小于零时，方程有两实根 t_1、t_2，且 $t_1+t_2=-2a\cos\theta$. 设弦 MN 中点 P 的坐标为 $(x,\ y)$，则

$$x=a+\frac{t_1+t_2}{2}\cos\theta=a-a\cos^2\theta\cdots④,$$

$$y=\frac{t_1+t_2}{2}\sin\theta=-a\sin\theta\cos\theta\cdots⑤.$$

由④得 $a\cos2\theta=a-2x\cdots⑥$，由⑤得 $a\sin2\theta=-2y\cdots⑦$. ⑥^2+⑦^2，并化简为 $x^2+y^2-ax=0$，即 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$. 故所求的轨迹为以 $\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$ 为圆心，$\frac{|a|}{2}$ 为半径的圆在定圆内的部分.

［解二］ 仍如上建立直角坐标系. ∵ P 是线段 MN 的中点，∴ $OP\perp MN$. 设点 P 的坐标为 $(x_0,\ y_0)$，则直线 MN 的方程为 $y_0x-(x_0-a)y=ay_0$，直线 OP 的方程为 $y_0x-x_0y=0$. 根据两直线互相垂直的充要条件可知：$y_0^2+x_0(x_0-a)=0$. 以 x、y 代换 x_0、y_0，即得 $x^2+y^2-ax=0$. 以下同［解一］.

562. 求圆系 $x^2+y^2-2\lambda^2x+2(\lambda+4)y-3=0$ 中心的轨迹，

其中 λ 为参数.

[分析] 圆系的中心显然与参数 λ 有关，将圆心坐标用含 λ 的式子表出，即得其轨迹方程.

[解] 原方程配方得 $(x-\lambda^2)^2+(y+\lambda+4)^2=\lambda^4+(\lambda+4)^2+3$. 设 $P(x,y)$ 为轨迹上任意一点，则 $x=\lambda^2$, $y=-\lambda-4$. 消去 λ，得 $(y+4)^2=x$. 所求轨迹是顶点在 $(0, -4)$，开口向右的抛物线.

[说明] 在本题中，由于 $\lambda^4\geqslant 0$, $(\lambda+4)^2\geqslant 0$，故不论 λ 取何值，原方程均表示一个圆. 其轨迹的参数方程 $\begin{cases}x=\lambda^2\\ y=-\lambda-4\end{cases}$ 中的 λ 可取任何实数. 否则，要根据题意考虑 λ 的取值范围. 在画出所求轨迹时，还应注意曲线的范围.

563. **已知圆系方程 $x^2+y^2-2ax\cos\theta-2ay\sin\theta=0$ (a 为正常数，θ 为参数). (1) 求圆系的圆心轨迹；(2) 证明圆心轨迹与动圆的公共弦长为定值.**

[解] (1) 原方程配方得 $(x-a\cos\theta)^2+(y-a\sin\theta)^2=a^2$，故其圆心坐标为 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=a\sin\theta,\end{cases}$ 消去参数 θ，得 $x^2+y^2=a^2$. 故所求轨迹是圆心在原点，半径为 a 的圆.

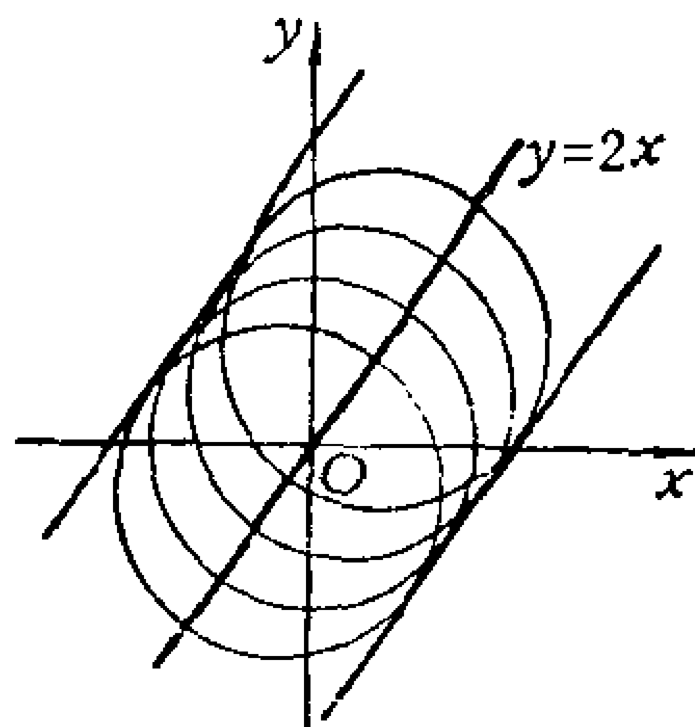
(2) 设定圆 O: $x^2+y^2=a^2$ 与动圆 C: $(x-a\cos\theta)^2+(y-a\sin\theta)^2=a^2$ 相交于两点 P、Q，动圆中心 $C(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$ 在定圆上. $\therefore$ $\triangle COP$ 与 $\triangle COQ$ 都是边长为 a 的正三角形，且 $PQ\perp OC$，故

$$|PQ|=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)=\sqrt{3}a\text{(定值)}.$$

564. **已知圆的参数方程为 $\begin{cases}x=m+\cos\theta\\ y=2m+\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数). (1) 当 m 取不同实数时，求所有圆的圆心的轨迹；(2) 证明平面上被这些圆所盖住的点的坐标 (x, y) 必满足**

$$2x-\sqrt{5}\leqslant y\leqslant 2x+\sqrt{5}.$$

[解] (1) 把圆的参数方程化为普通方程，得 $(x-m)^2+(y-2m)^2=1$.



$\therefore$ 圆心坐标为 $\begin{cases} x_0=m \\ y_0=2m \end{cases}$ (m 为参数)，消去 m，并以 x、y 代换 x_0、y_0，得圆心轨迹是直线

$$y-2x=0.$$

(2) 因为所有圆半径均为 1，故平面上被这些圆所盖住的点到直线 $y-2x=0$ 的距离均小于等于1，即 $\dfrac{|y-2x|}{\sqrt{5}}\leqslant 1$. 亦即 $2x-\sqrt{5}\leqslant y\leqslant 2x+\sqrt{5}$.

565. 设 a 为常数，自坐标原点向圆 $(x-a)^2+(y-2)^2=a^2+1$ 引切线 $y=mx$，试用 a 和 m 表示切点的坐标；当 a 变化时，求切点的轨迹.

[解] 把 $y=mx$ 代入圆方程，整理得

$$(m^2+1)x^2-2(a+2m)x+3=0\cdots①,$$

$\because y=mx$ 与圆相切，$\therefore \Delta=4(a+2m)^2-12(m^2+1)=0\cdots②$. 由①解得切点坐标为 $x=\dfrac{a+2m}{m^2+1}\cdots③$，$y=mx=\dfrac{m(a+2m)}{m^2+1}\cdots④$. $③^2+④^2$，再利用②消去 a、m，得 $x^2+y^2=3$. 此圆即所求切点的轨迹.

[说明] 如果只求切点的轨迹，解法可简化. 设已知圆圆心为 $P(a, 2)$，切点为 T，则 $|OT|^2=|OP|^2-|PT|^2$，即 $x^2+y^2=(a^2+4)-(a^2+1)=3$. $\therefore$ 点 T 的轨迹是圆 $x^2+y^2=3$.

566. 圆 P 的方程为 $x^2+y^2-4ax\cos\theta-4ay\sin\theta+3a^2=0$，(1) 当 a 固定，θ 变动时，求圆 P 的圆心轨迹，并证明所有的圆 P 都外切于一个定圆且内切于另一个定圆；(2) 当 θ 固定，a 变动时，求圆 P 的圆心轨迹，并证明所有的圆 P 有两条公切线.

[分析] (1) 只需将动圆方程化成圆的标准方程即可得圆心的参数方程；(2) 欲证一动圆恒与一圆或一直线相切，可假设一圆或一直线方程，利用相切的条件求其系数，而不管动圆在什么位置，即不管动圆方程中参数在其允许范围内取何值. 根据求得的系数所确定的圆或直线总能和动圆相切，故此圆或直线即为所求.

[解] 将圆 P 的方程化成标准式，得 $(x-2a\cos\theta)^2+(y-2a\sin\theta)^2=a^2$，

则其圆心的坐标为 $\begin{cases} x=2a\cos\theta\cdots① \\ y=2a\sin\theta\cdots②. \end{cases}$

(1) 当 a 固定，θ 变动时，由 $①^2+②^2$ 得 $x^2+y^2=4a^2$. 故圆 P 的圆心轨迹是以原点为圆心，$2|a|$ 长为半径的圆(图 1).

设圆 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ 是和所有的圆 P(其半径为 $|a|$)都相切的圆，则 $(x_0-2a\cos\theta)^2+(y_0-2a\sin\theta)^2=(r\pm|a|)^2$, 即

$$x_0^2+y_0^2-4ax_0\cos\theta-4ay_0\sin\theta-(r^2\pm2|a|r-3a^2)=0.$$

欲使对于任意的 θ，此式总能成立，可令 $x_0=y_0=0$，且 $r^2\pm2|a|r-3a^2=0\cdots③$. 由 ③ 即得 $r=\pm|a|$，或 $r=\mp3|a|$. 负值舍去，故所有的圆 P 都外切于圆 $x^2+y^2=a^2$，且内切于圆 $x^2+y^2=9a^2$.

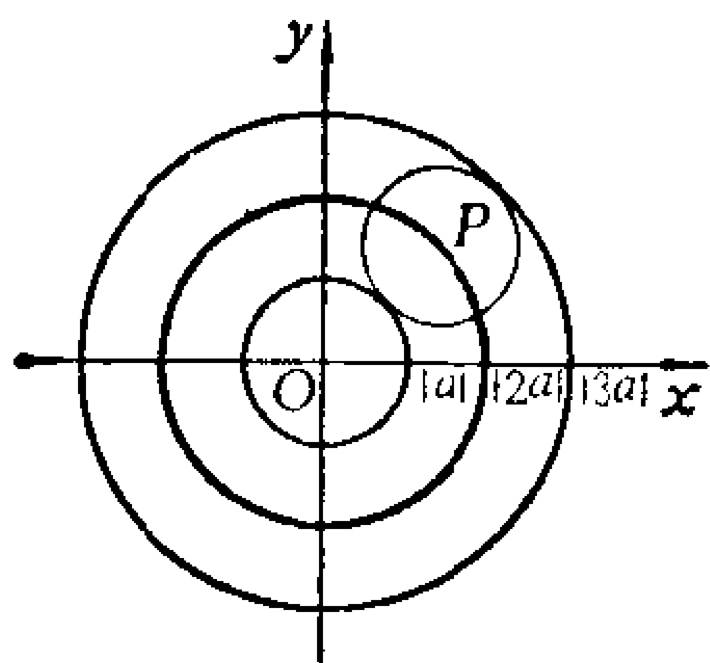


图 1

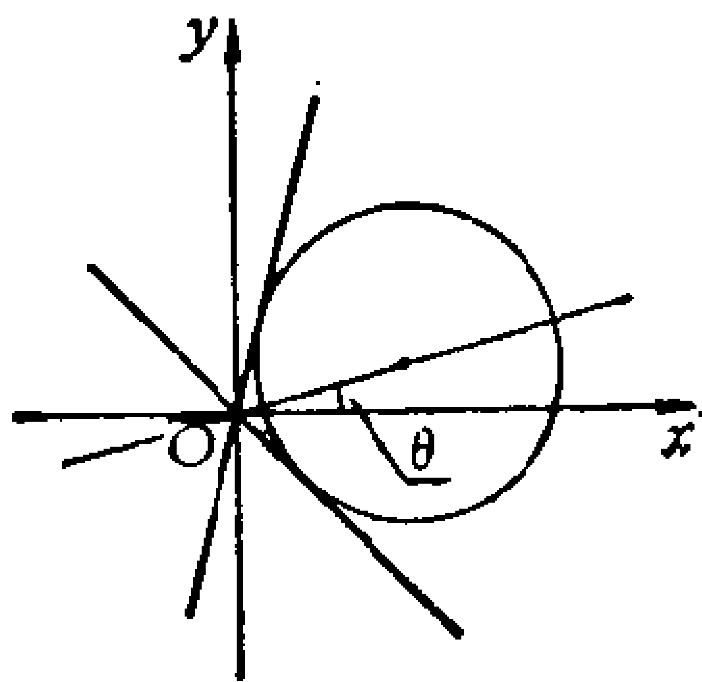


图 2

(2) 当 θ 固定，a 变动时，由 ①、② 得 $x\sin\theta=y\cos\theta$. 故圆 P 的圆心轨迹为过原点的一条直线(图 2).

设直线 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ ($p\geqslant0$)，是和所有的圆 P 都相切的直线，则 $2a\cos\theta\cos\alpha+2a\sin\theta\sin\alpha-p=\pm a$，即 $a[2\cos(\theta-\alpha)\mp1]-p=0$. 欲使对于任意的 a，此式总能成立，可令 $p=0$，且 $\cos(\theta-\alpha)=\pm\frac{1}{2}\cdots④$. 由 ④ 得 $\alpha=k\cdot360°\pm60°+\theta$，或 $\alpha=k\cdot360°\pm120°+\theta$. 故所有的圆 P 都切于直线：

$$x\cos(\theta+60°)+y\sin(\theta+60°)=0\cdots⑤;$$
$$x\cos(\theta-60°)+y\sin(\theta-60°)=0\cdots⑥;$$
$$x\cos(\theta+120°)+y\sin(\theta+120°)=0\cdots⑦;$$
$$x\cos(\theta-120°)+y\sin(\theta-120°)=0\cdots⑧.$$

但直线 ⑦、⑧ 即分别为直线 ⑥、⑤，故所有的圆 P 有两条公切线：

$$x\cos(\theta+60°)+y\sin(\theta+60°)=0$$

和 $$x\cos(\theta-60°)+y\sin(\theta-60°)=0.$$

567. 如果动点 P 到一个三角形 ABC 三边 BC: $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p_1=0$, CA: $x\cos\beta+y\sin\beta-p_2=0$, AB: $x\cos\gamma+y\sin\gamma-p_3=0$ 的距离平方和是常数(p_1、p_2、p_3 均大于 0),试问在什么情况下,动点的轨迹是圆(包括点圆和虚圆)?

[解] 由已知,

$$(x\cos\alpha+y\sin\alpha-p_1)^2+(x\cos\beta+y\sin\beta-p_2)^2+(x\cos\gamma+y\sin\gamma-p_3)^2=\text{常数}.$$

当且仅当 x^2、y^2 项系数相等,且 xy 项系数为零时,方程的轨迹才是圆. 因此有

$$\begin{cases}\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma,\\ 2\cos\alpha\sin\alpha+2\cos\beta\sin\beta+2\cos\gamma\sin\gamma=0.\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}\cos2\alpha+\cos2\beta=-\cos2\gamma\cdots①,\\ \sin2\alpha+\sin2\beta=-\sin2\gamma\cdots②.\end{cases}$$

$①^2+②^2$, 得 $$2+2(\cos2\alpha\cos2\beta+\sin2\alpha\sin2\beta)=1,$$

即 $$\cos2(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}.\quad \therefore\ \alpha-\beta=m\cdot180°\pm60°.$$

$\because 0°<\angle ACB<180°$, $\therefore \angle ACB=60°$ 或 $120°$. 同理可得, $\angle CBA=60°$ 或 $120°$. $\angle BAC=60°$ 或 $120°$. 但 $\angle ACB+\angle CBA+\angle BAC=180°$, 故 $\angle ACB=\angle CBA=\angle BAC=60°$. 由此可见, 当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,动点的轨迹才是圆.

568. 已知一圆 $x^2+y^2=r^2$, 作一线段 MN, 使点 $A(a, b)$ 为其中点,而点 M 恒在圆上,求点 N 的轨迹方程.

[分析] 由 A 是线段 MN 的中点可知, A、M、N 三点的坐标之间具有一定的关系. 故在假设点 N 的坐标后, 点 M 的坐标即可用其表出. 再利用点 M 在已知圆上,即可求得所求的轨迹方程.

[解] 设点 N 的坐标为(x, y), 点 M 的坐标为(x_0, y_0), 则 $x_0^2+y_0^2=r^2\cdots①$. $\because$ 点 A 是线段 MN 的中点, $\therefore a=\frac{x_0+x}{2}$, $b=\frac{y_0+y}{2}$, 即 $x_0=2a-x$, $y_0=2b-y$. 代入 ①, 得 $(x-2a)^2+(y-2b)^2=r^2$. 此即所求的轨迹方程.

[说明] (1) 如果所求轨迹上的动点位置依赖于在一已知曲线上运动的另一动点，则常可如本题那样，在假设轨迹上点的坐标后，用其表示已知曲线上的动点坐标，再根据曲线上的点其坐标满足曲线方程而求得轨迹方程.

569. P 为定圆 C 上的一动点，A 为一定点. 点 Q 分线段 AP 成 $AQ:QP=\lambda$，求点 Q 的轨迹.

[解] 建立直角坐标系，使圆 C 的方程为 $x^2+y^2=r^2$，点 A 的坐标为 $(a, 0)$. 设点 P 的坐标为 (x_0, y_0)，点 Q 的坐标为 (x, y)，则 $x_0^2+y_0^2=r^2$. 又 $\because AQ:QP=\lambda$，故有

$$x=\frac{a+\lambda x_0}{1+\lambda},\quad y=\frac{\lambda y_0}{1+\lambda}.$$

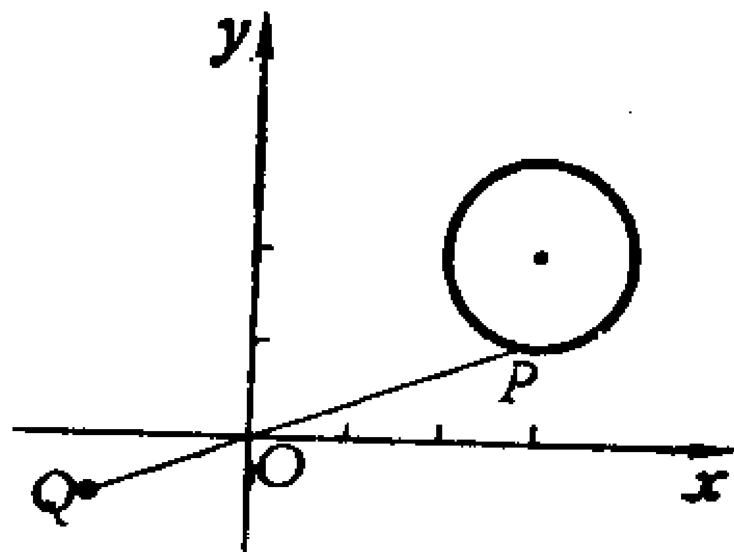
$$\therefore\quad x_0=\frac{(1+\lambda)x-a}{\lambda},\quad y_0=\frac{(1+\lambda)y}{\lambda}.$$

以此两式代入 $x_0^2+y_0^2=r^2$，得

$$\frac{1}{\lambda^2}[(1+\lambda)x-a]^2+\frac{1}{\lambda^2}(1+\lambda)^2y^2=r^2,$$

即 $\left(x-\frac{a}{1+\lambda}\right)^2+y^2=\frac{\lambda^2r^2}{(1+\lambda)^2}$. 故所求的轨迹是以 $\left(\frac{a}{1+\lambda}, 0\right)$ 为圆心，$\frac{|\lambda|r}{|1+\lambda|}$ 为半径的圆.

570. 设 P 为圆心在 $(3, 2)$，半径为 1 的圆周上任意一点，连结 P 与原点 O，并在 OP 的反向延长线上取一点 Q，使 $OP\cdot QO=6$. 当点 P 在圆周上运动时，求点 Q 的轨迹方程.



[解一] 设点 Q 的坐标为 (x, y)，点 P 的坐标为 (x_0, y_0)，则 $(x_0-3)^2+(y_0-2)^2=1\cdots$①.
$\because OP\cdot QO=6$，$\therefore (x_0^2+y_0^2)(x^2+y^2)=36\cdots$②.

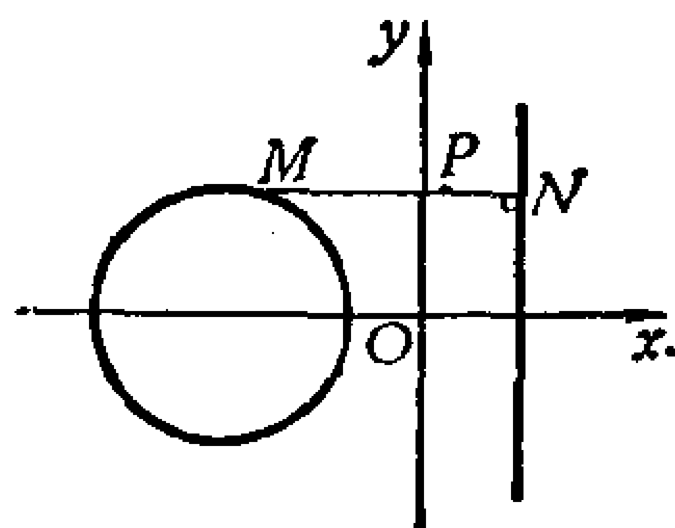
设 $\frac{x_0}{x}=\frac{y_0}{y}=\alpha\ (\alpha<0)$，则 $x_0=\alpha x$，$y_0=\alpha y$. 代入②，得 $\alpha^2=\frac{36}{(x^2+y^2)^2}$，$\therefore \alpha=-\frac{6}{x^2+y^2}$. 故 $x_0=\frac{-6x}{x^2+y^2}$，$y_0=\frac{-6y}{x^2+y^2}$. 代入①并化简，即得所求的轨迹方程 $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{1}{4}$.

［解二］ 取原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，则圆心在(3, 2)，半径为 1 的圆的极坐标方程为

$$\rho^2-2(3\cos\theta+2\sin\theta)\rho+12=0\cdots①.$$

设点 P 的极坐标为(ρ_0, θ_0)，则 $\rho_0^2-2(3\cos\theta_0+2\sin\theta_0)\rho_0+12=0\cdots②$. 又设点 Q 的极坐标为 (ρ, θ)，则 $\theta=\theta_0\cdots③$，$QO=-\rho$. $\because QO\cdot OP=6$, $\therefore \rho_0=-\dfrac{6}{\rho}\cdots④$. ③、④代入②，得 $\dfrac{36}{\rho^2}+2(3\cos\theta+2\sin\theta)\dfrac{6}{\rho}+12=0$，即 $\rho^2+(3\cos\theta+2\sin\theta)\rho+3=0$. 此即所求的轨迹方程.

571. 从圆 $x^2+y^2+12x+20=0$ 上任一点 M 向直线 $x=3$ 作垂线，垂足为 N. 点 P 内分线段 MN 成 2:1，求点 P 的轨迹方程.

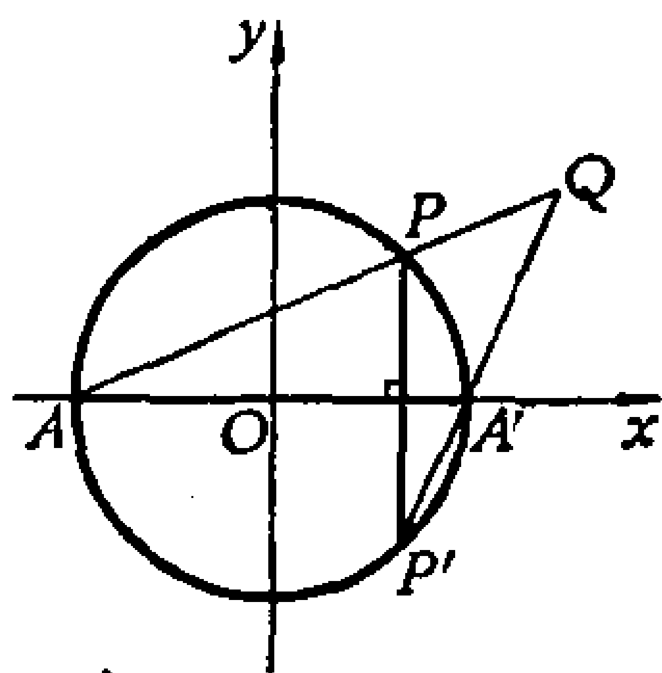


［解］ 设点 M 的坐标为(x_0, y_0)，点 P 的坐标为(x, y)，则 $x_0^2+y_0^2+12x_0+20=0\cdots①$，点 N 的坐标为$(3, y_0)$. $\because \dfrac{MP}{PN}=2$, $\therefore x=\dfrac{x_0+6}{3}$，即 $x_0=3x-6\cdots②$; $y=y_0\cdots③$. 以②、③代入①，得

$$(3x-6)^2+y^2+12(3x-6)+20=0,$$

即 $9x^2+y^2=16$. 此即所求的轨迹方程.

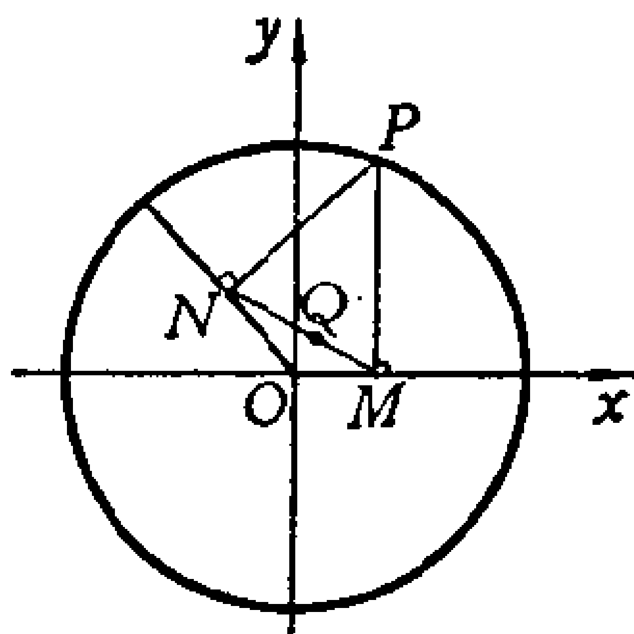
572. AA' 是定圆 O 的直径，PP' 是垂直于 AA' 的弦. 求直线 AP 和 $A'P'$ 交点 Q 的轨迹方程.



［解］ 如图建立直角坐标系，使定圆 O 的方程为 $x^2+y^2=r^2$. 点 A、A' 的坐标分别为$(-r, 0)$、$(r, 0)$. 设弦 PP' 所在的直线方程为 $x=x_0$，点 P、P' 的坐标分别为(x_0, y_0)、$(x_0, -y_0)$，则 $x_0^2+y_0^2=r^2\cdots①$. 直线 AP 的方程为 $(x_0+r)y=y_0(x+r)\cdots②$；直线 $A'P'$ 的方程为 $(r-x_0)y=y_0(x-r)\cdots③$. 从②、③解得 $x_0=\dfrac{r^2}{x}$，$y_0=\dfrac{ry}{x}$. 代入①，化简得 $x^2-y^2=r^2$. 此即所求的轨迹方程.

573. 圆上一动点 P 在此圆的两互不垂直的定半径上的射影为 M、N. 求线段 MN 的中点轨迹方程.

［分析］ 线段 MN 的中点取决于其两端点，而端点又由点 P 确定，故可选择点 P 的坐标为参数解之.



［解］ 以圆心 O 为原点，任意一条定半径所在的直线为 x 轴，且以此圆的半径长为单位长度建立直角坐标系如图. 设点 P 的坐标为 (x_0, y_0)，另一定半径所在直线方程为 $y=kx$，则有 $x_0^2+y_0^2=1\cdots$①，且点 M 的坐标为 $(x_0, 0)$. 又 $\because PN\perp ON$，$\therefore$ 直线 PN 的方程为 $x+ky=x_0+ky_0\cdots$②. 以 $y=kx$ 代入②，解得点 N 的坐标为 $\left(\frac{x_0+ky_0}{1+k^2}, \frac{kx_0+k^2y_0}{1+k^2}\right)$. 设线段 MN 的中点 Q 的坐标为 (x,y)，则

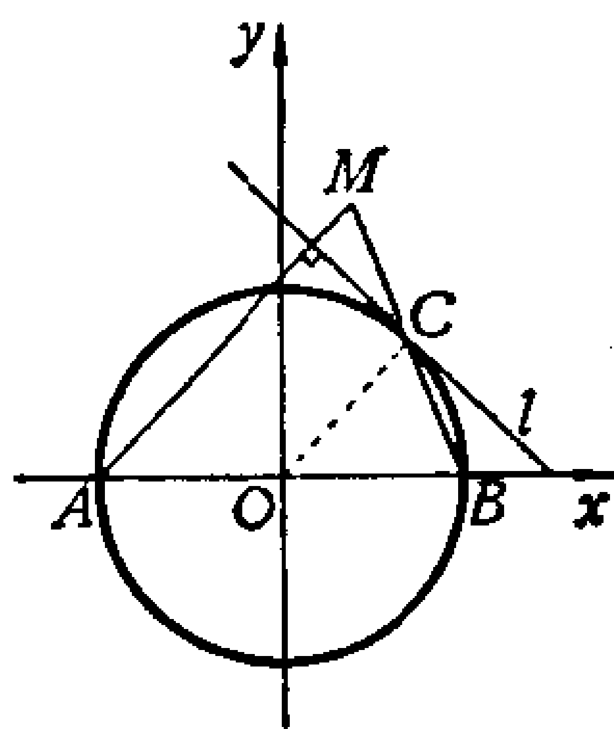
$$x=\frac{(2+k^2)x_0+ky_0}{2(1+k^2)}\cdots③,\qquad y=\frac{kx_0+k^2y_0}{2(1+k^2)}\cdots④.$$

由③、④解得：$\quad x_0=\frac{2(kx-y)}{k},\quad y_0=\frac{2[(2+k^2)y-kx]}{k^2}$.

代入①并化简，即得所求的轨迹方程

$$k^2x^2-4kxy+(k^2+4)y^2=\frac{k^4}{4(1+k^2)}.$$

574. AB 为一圆的定直径，C 为圆上任一点，从 A 作直线垂直于过点 C 的切线 l，交 BC 于 M，求点 M 的轨迹方程.



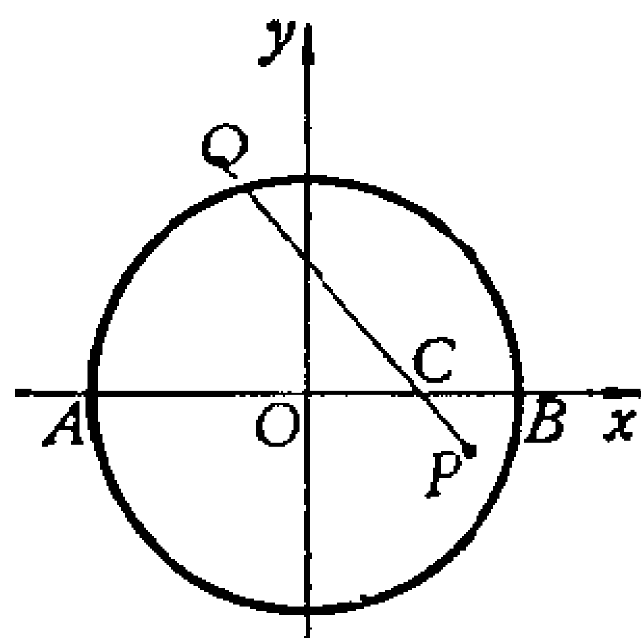
［分析一］ 点 C 的位置确定后，BC、l、AM 的位置相应被确定，从而点 M 的位置也随之而定，故可选点 C 的坐标为参数解之.

［解一］ 如图建立直角坐标系，使定圆的方程为 $x^2+y^2=r^2$. A、B 的坐标分别为 $(-r, 0)$ 和 $(r, 0)$. 设点 C 的坐标为 (x_0, y_0)，则切线 l 的方程为 $x_0x+y_0y=r^2$. $\because AM\perp l$，$\therefore$ 直线 AM 的方程是 $y_0x-x_0y=-ry_0\cdots$①. 又直线 BC 的方程是 $y(x_0-r)=y_0(x-r)\cdots$②. 由①、②解得：$x_0=\frac{x+r}{2}$，$y_0=\frac{y}{2}$. $\because$ 点 C 在圆上，$\therefore x_0^2+y_0^2=r^2$，即 $(x+r)^2+y^2=4r^2$. 此即所求的轨迹方程.

［分析二］ 由平几知识可知，OC 为 $\triangle ABM$ 的中位线，故 $|AM|=2|OC|=2r$. 由此便能转化轨迹条件而求得轨迹方程.

［解二］ 连OC，则$OC\perp l$，$\because AM\perp l$，$\therefore OC/\!/AM$. 又O为AB的中点，故$|AM|=2|OC|=2r$. 设点M的坐标为(x, y)，则$\sqrt{(x+r)^2+y^2}=2r$，即$(x+r)^2+y^2=4r^2$. 此即所求的轨迹方程.

575. AB是圆O的直径，C是直径AB上异于A、B的任一定点，Q是圆周上的动点. 设P是由Q和C所确定的直线上的点，且满足$\frac{AC}{CB}=\frac{QC}{CP}$. 求点$P$的轨迹.



［解］ 如图建立直角坐标系，使点A和点B的坐标分别为$(-r, 0)$、$(r, 0)$，点C的坐标为$(c, 0)$ $(-r<c<r)$，则圆O的方程为$x^2+y^2=r^2$. 设点P的坐标为(x, y)，点Q的坐标为(x_0, y_0)，由于点Q在圆O上，$\therefore x_0^2+y_0^2=r^2\cdots$①. 又$\because \frac{QC}{CP}=\frac{AC}{CB}=\frac{r+c}{r-c}$，

$$\therefore \quad \frac{QC}{QC+CP}=\frac{r+c}{r+c+r-c}=\frac{r+c}{2r}, \quad 即 \quad \frac{CQ}{QP}=\frac{-(r+c)}{2r}.$$

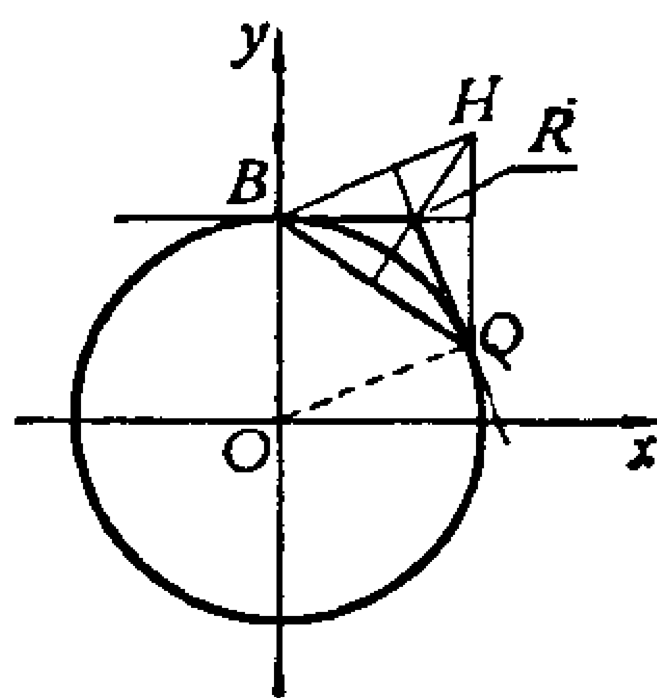
由此得 $$x_0=\frac{c-\frac{r+c}{2r}x}{1-\frac{r+c}{2r}}=\frac{2rc-(c+r)x}{r-c}, \quad y_0=-\frac{r+c}{r-c}y.$$

代入①，得 $$\left[\frac{2rc-(c+r)x}{r-c}\right]^2+\left(\frac{r+c}{r-c}y\right)^2=r^2,$$

即 $$\left(x-\frac{2rc}{r+c}\right)^2+y^2=\left[\frac{(r-c)r}{r+c}\right]^2.$$

故点P的轨迹是以$\left(\frac{2rc}{r+c}, 0\right)$为圆心，$\frac{(r-c)r}{r+c}$为半径的圆.

576. 已知圆$x^2+y^2=a^2$与y轴交于点$B(0, a)$，圆上一动点Q的切线与过点B的切线交于点R，求$\triangle BQR$垂心的轨迹.

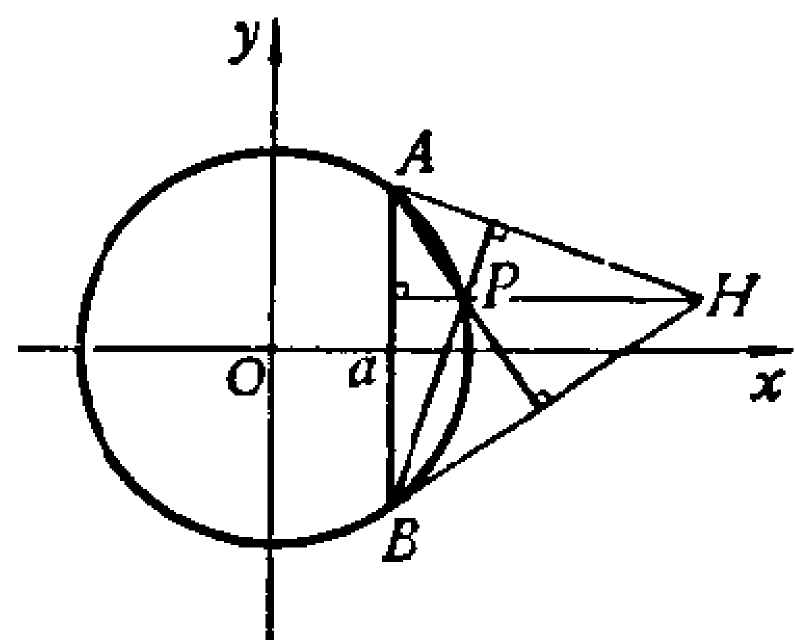


［解］ 设$Q(x_1, y_1)$为已知圆上的动点，则$x_1^2+y_1^2=a^2\cdots$①；设$H(x, y)$为轨迹上任意一点，则QH的方程为$x=x_1\cdots$②. $\because QR$的方程为$x_1x+y_1y=$

a^2, ∴ 过点 B 与 QR 垂直的直线 BH 方程为 $y_1x-x_1y=-ax_1\cdots$③. 以②代入③, 得 $y_1=y-a$, 代入①, 即得 $\triangle BQR$ 垂心的轨迹方程

$$x^2+(y-a)^2=a^2.$$

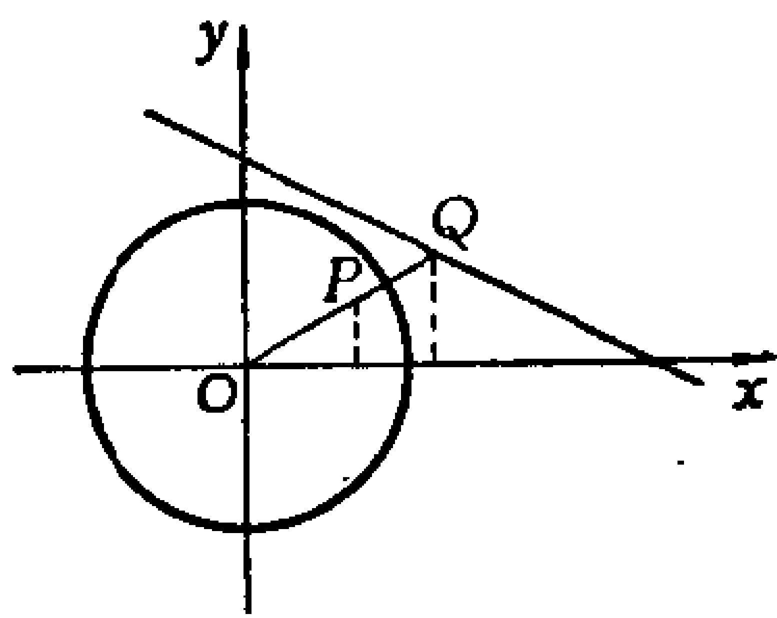
577. 设 AB 为一定圆的固定弦, P 为圆上的动点, 试求 $\triangle ABP$ 的垂心轨迹方程.



[解] 取定圆圆心 O 为原点, 与 AB 垂直直径为 x 轴, 建立直角坐标系. 设定圆 O 的方程为 $x^2+y^2=r^2$, AB 的方程为 $x=a(a<r)$, 则 $A(a, \sqrt{r^2-a^2})$、$B(a, -\sqrt{r^2-a^2})$. 设 $P(x_1, y_1)$ 为圆 O 上任意一点, ∴ $x_1^2+y_1^2=r^2\cdots$①. 设 $H(x, y)$ 为轨迹上任意一点, 则 $y=y_1\cdots$②. ∵ $AH\perp BP$, ∴ $\frac{y-\sqrt{r^2-a^2}}{x-a}\cdot\frac{y_1+\sqrt{r^2-a^2}}{x_1-a}=-1\cdots$③. ②代入③, 得 $\frac{y^2-(r^2-a^2)}{x-a}=-(x_1-a)$, 即 $x_1=\frac{ax-y^2+r^2-2a^2}{x-a}\cdots$④. ③、④代入①, 即得 $\triangle ABP$ 垂心的轨迹方程 $(x-a)^2(r^2-y^2)=(ax-y^2+r^2-2a^2)^2$.

578. 若两点 P、Q 与圆心共线, 且圆心不在线段 PQ 上, 而 $|OP|\cdot|OQ|$ 等于圆半径的平方, 则称 P、Q 为关于圆互相对应的两点. 设 Q 是直线 $x+2y-5=0$ 上的动点, 试求与 Q 关于圆 $x^2+y^2=4$ 的对应点 P 的轨迹.

[解] 设动点 Q 的坐标为 (x_0, y_0), 其对应点 P 的坐标为 (x, y). ∵ O、P、Q 共线,



$$\therefore \frac{x_0}{x}=\frac{y_0}{y}=\frac{|OQ|}{|OP|}=\frac{|OP|\cdot|OQ|}{|OP|^2}=\frac{4}{x^2+y^2}.$$

$$\therefore x_0=\frac{4x}{x^2+y^2}\cdots①, \quad y_0=\frac{4y}{x^2+y^2}\cdots②.$$

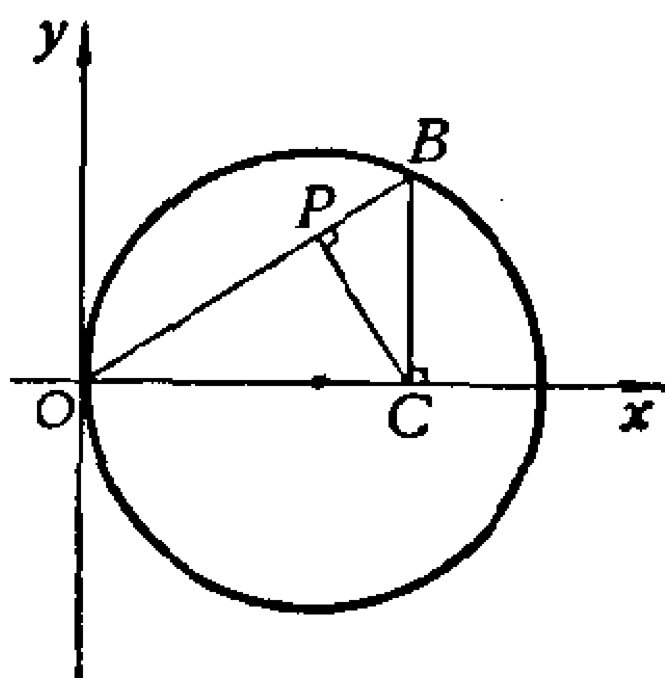
∵ 点 Q 在直线 $x+2y-5=0$ 上, ∴ $x_0+2y_0-5=0$. 以①、②代入, 化简得 $5x^2+5y^2-4x-8y=0$, 即

$$\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\left(y-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{4}{5}.$$

故点 P 的轨迹为以 $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$ 为圆心，$\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 为半径的圆.

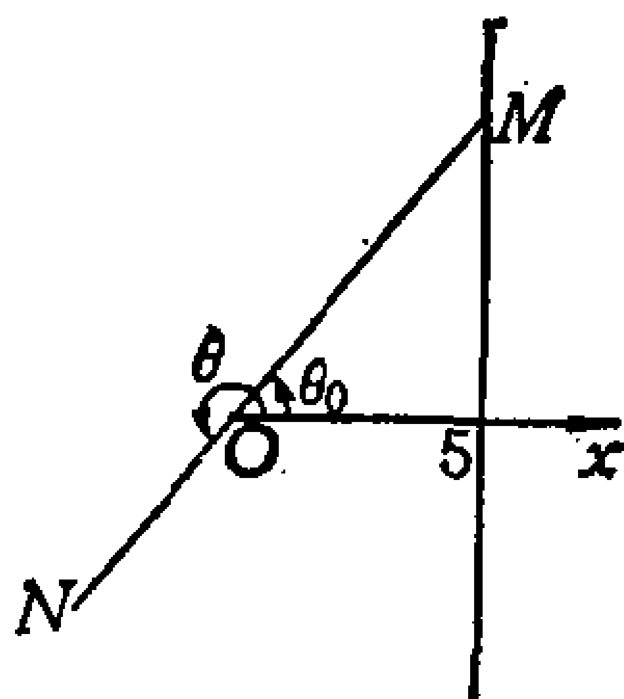
579. 从射线 OB 与圆 $x^2+y^2=ax$ 的交点 B 向 Ox 轴作垂线 BC, C 为垂足，求 C 在 OB 上射影的轨迹方程.

[分析] 由于 P 在 OB 上，且圆过点 O，故利用极坐标系解较容易.



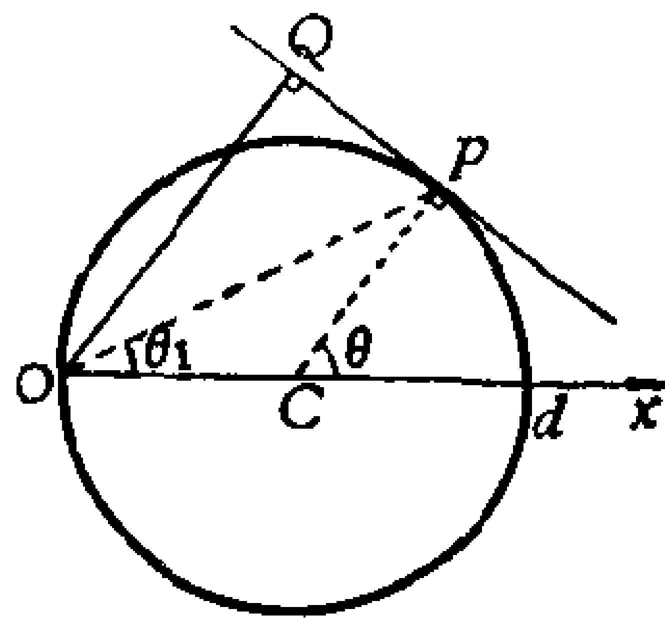
[解] 以 O 为极点，Ox 为极轴建立极坐标系如图，设 $P(\rho, \theta)$ 为轨迹上任意一点，点 B 的极坐标为 (ρ_1, θ_1)， ∵ 圆 $x^2+y^2=ax$ 的极坐标方程为 $\rho=a\cos\theta$，∴ $\rho_1=a\cos\theta_1$…①，$\theta=\theta_1$…②；∵ $|OC|=\rho_1\cos\theta_1$，∴ $\rho=\rho_1\cos^2\theta_1$…③. 若 $\cos\theta_1\neq 0$，由③得 $\rho_1=\frac{\rho}{\cos^2\theta_1}$，与②一起代入①，得 $\rho=a\cos^3\theta$. 若 $\cos\theta_1=0$，即点 B 与点 O 重合，这时 $\rho=0$，也适合方程 $\rho=a\cos^3\theta$. 故此即所求的轨迹方程.

580. M 是曲线 C：$\rho\cos\theta=5$ 上任一点，反向延长 OM 至 N，使 $OM\cdot NO=40$. 当点 M 在曲线 C 上运动时，求点 N 的轨迹.



[解] 设点 N 和点 M 的坐标分别为 (ρ, θ) 和 (ρ_0, θ_0)，则 $\theta=\theta_0+\pi$…①. ∵ 点 M 在曲线 C 上，且 $OM\cdot NO=40$，∴ $\rho_0\cos\theta_0=5$…②；$\rho_0\cdot\rho=40$…③. 由①、③解得 θ_0、ρ_0，代入②得 $\rho=-8\cos\theta$. 此即点 N 轨迹的极坐标方程，其轨迹为圆，圆心在 $(4, \pi)$，半径为 4. 极点为轨迹的极限点.

581. 圆 C：$\rho=d\cos\theta$ 上一点 P，过 P 引圆的切线 PQ，过极点 O 引 $OQ\perp PQ$，Q 为垂足，求点 Q 的轨迹.



[解] 设 $Q(\rho, \theta)$为轨迹上任意一点，P 的坐标为 (ρ_1, θ_1)，则 $\rho_1=d\cos\theta_1$…①. ∵ $CP\parallel OQ$，

∴ $\theta=\angle xOQ=\angle xCP=2\angle xOP=2\theta_1$…②；

∵ $\angle POQ=\theta_1$，∴ $\rho=OQ=\rho_1\cos\theta_1$…③.

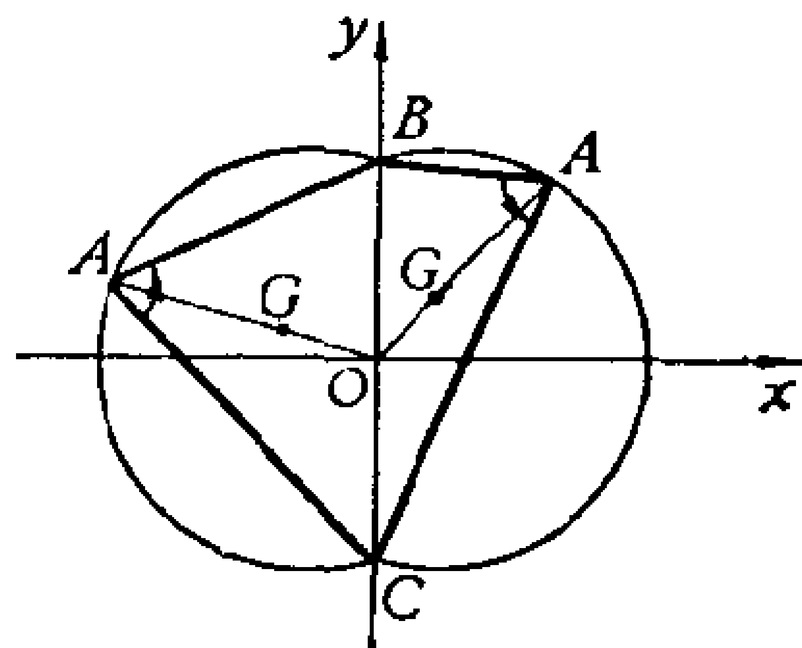
将①代入③，再利用②消去 ρ_1、θ_1，得

$$\rho=d\cos^2\theta_1=d\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{d}{2}(1+\cos\theta).$$

故点Q的轨迹是心脏线 $\rho=\frac{d}{2}(1+\cos\theta)$.

582. 若$\triangle ABC$的边BC的位置、长短一定，$\angle A$的大小也一定，试求$\triangle ABC$重心G的轨迹.

[分析] 由平几知识知，G为OA的三等分点，故在建立直角坐标系，并假设点G的坐标后，即可用其表示出点A的坐标. 于是利用$\angle BAC$为定角，便能求出点G的轨迹方程.



[解] 以边BC的中点O为原点，直线BC为y轴，建立直角坐标系如图，使点B、C的坐标为$(0,\ b)$和$(0,\ -b)$. 设点G的坐标为$(x,\ y)$，则点A的坐标为$(3x,\ 3y)$. 于是AB的斜率$k_{AB}=\frac{3y-b}{3x}$，AC的斜率$k_{AO}=\frac{3y+b}{3x}$. 当$\angle A=90°$时，$k_{AO}\cdot k_{AB}=-1$，即$\frac{3y+b}{3x}\cdot\frac{3y-b}{3x}=-1$，化简得 $x^2+y^2=\frac{b^2}{9}$. 当$\angle A\neq 90°$时，若点A在右半平面，则有

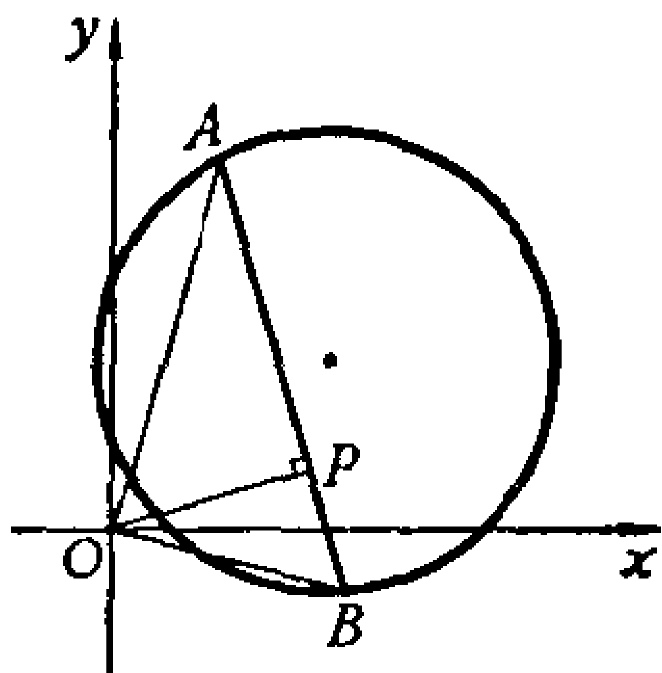
$$\operatorname{tg}A=\frac{\frac{3y+b}{3x}-\frac{3y-b}{3x}}{1+\frac{(3y+b)(3y-b)}{9x^2}},$$ 化简得$9x^2+9y^2-6bx\operatorname{ctg}A-b^2=0$，即

$$\left(x-\frac{b}{3}\operatorname{ctg}A\right)^2+y^2=\frac{b^2}{9}\csc^2 A;$$

若点A在左半平面，同理可得$\left(x+\frac{b}{3}\operatorname{ctg}A\right)^2+y^2=\frac{b^2}{9}\csc^2 A$. 故所求轨迹当$\angle A=90°$时，为以原点为圆心，$\frac{b}{3}$为半径的圆（不包括和$y$轴的交点）. 当$\angle A\neq 90°$时，为以$\left(\frac{b}{3}\operatorname{ctg}A,\ 0\right)$为圆心，$\frac{b}{3}\csc A$为半径的圆在右半平面的一部分；和以$\left(-\frac{b}{3}\operatorname{ctg}A,\ 0\right)$为圆心，同样长为半径的圆在左半平面的一部分.

583. 已知圆$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$的弦在原点张直角，求原点在此弦上的射影的轨迹.

［分析］ 假设动点的坐标后，就易得已知圆的在原点张直角的弦所在直线的方程. 于是利用原点和弦的两端点连线互相垂直，即可求得轨迹方程.



［解］ 设已知圆的在原点张直角的弦为 AB，原点在此弦上的射影为 $P(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)$.

$\because\ OP\perp AB$，$\therefore$ 弦 AB 所在直线的方程为 $x\cos\theta+y\sin\theta=\rho$. 显然，$\rho\neq0$(否则 P 重合于 O，但此时 A、O、B 共线，和 AB 在原点张直角不符). 据(3.120)，表示直线 OA、OB 的方程为

$$x^2+y^2+2(gx+fy)\left(\frac{x\cos\theta+y\sin\theta}{\rho}\right)+c\left(\frac{x\cos\theta+y\sin\theta}{\rho}\right)^2=0,$$

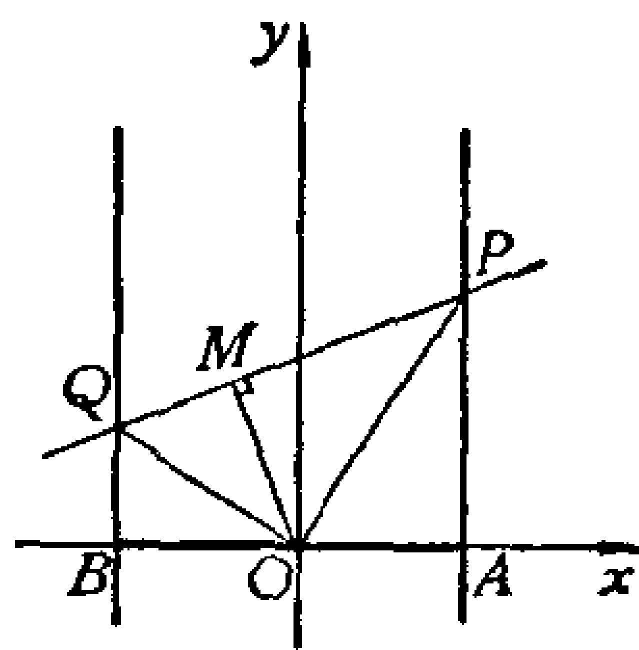
即 $\rho^2(x^2+y^2)+2\rho(gx+fy)(x\cos\theta+y\sin\theta)+c(x\cos\theta+y\sin\theta)^2=0$.

$\because OA\perp OB$，$\therefore 2\rho^2+2\rho(g\cos\theta+f\sin\theta)+c(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=0$. 化简即得 $2\rho^2+2\rho(g\cos\theta+f\sin\theta)+c=0$. 以 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入，得

$$x^2+y^2+gx+fy+\frac{c}{2}=0,\quad 即\quad \left(x+\frac{g}{2}\right)^2+\left(y+\frac{f}{2}\right)^2=\frac{f^2+g^2-2c}{4}.$$

故当 $f^2+g^2<2c$ 时，动点无轨迹；当 $f^2+g^2=2c$ 时，方程的图象为一点 $\left(-\frac{g}{2},\ -\frac{f}{2}\right)$，若此点在圆内，则轨迹即为此点，否则也无轨迹；当 $f^2+g^2>2c$ 时，轨迹为以 $\left(-\frac{g}{2},\ -\frac{f}{2}\right)$ 为圆心，$\frac{\sqrt{f^2+g^2-2c}}{2}$ 为半径的圆在已知圆内的一部分.

584. 定点 O 在线段 AB 上，直线 AP、BQ 是 AB 的垂线，P、Q 分别在 AP、BQ 上运动，使 $\angle POQ$ 恒为直角，求 O 在 PQ 上射影 M 的轨迹.



［分析］ 如图建立直角坐标系，并假设动点 M 的坐标后，就不难写出直线 PQ 的方程，从而确定 P、Q 的位置，再利用 $\angle POQ$ 为直角的条件，便能求得点 M 的轨迹.

［解］ 以 O 为原点，AB 为 x 轴建立直角坐标系，使 AP 的方程为 $x=a$，BQ 的方程为 $x=b$. 设点 M 的坐标为 $(u,\ v)$，则 $\because OM\perp PQ$，$\therefore$ 直线 PQ 的方程即为 $ux+vy=u^2+v^2$. 若点 P 的坐标

为(a, y_P)，点Q的坐标为(b, y_Q)，则$vy_P=u^2+v^2-ua\cdots$①，$vy_Q=u^2+v^2-ub\cdots$②. 又$\because OP\perp OQ$，$\therefore ab+y_Py_Q=0$，故$v^2ab+v^2y_Py_Q=0$. 以①、②代入，得

$$v^2ab+(u^2+v^2-ua)(u^2+v^2-ub)=0,$$

即

$$(u^2+v^2)[u^2+v^2-(a+b)u+ab]=0.$$

显然$u^2+v^2\neq 0$，故以x、y分别代换u、v，即得$x^2+y^2-(a+b)x+ab=0$，即$\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. 所求轨迹是一圆，其圆心为$\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$，半径长$\frac{|a-b|}{2}$，亦即以$AB$为直径的圆.

585. **设动点关于圆$x^2+y^2=a^2$的切点弦所在直线与已知圆$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=b^2$相切，求此动点的轨迹方程.**

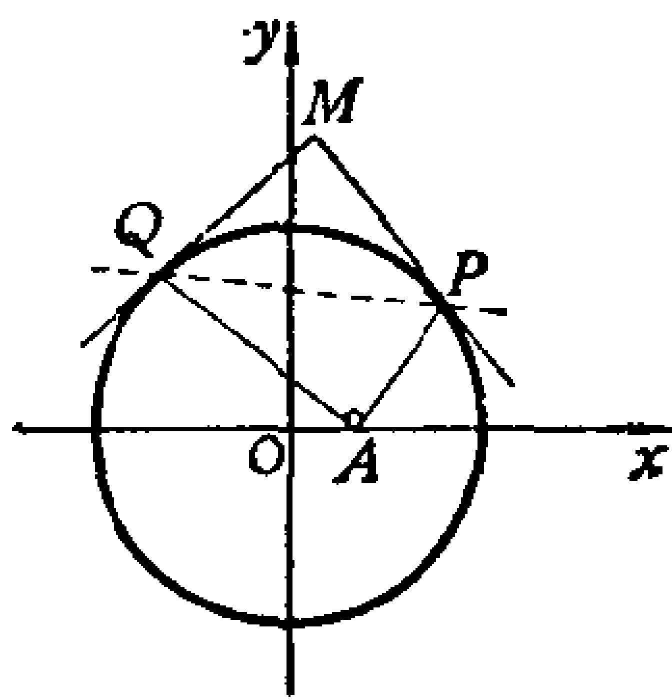
［分析］ 假设动点坐标后，此动点关于圆$x^2+y^2=a^2$的切点弦方程即可写出，利用切点弦和圆$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=b^2$相切的条件，就能求得轨迹方程.

［解］ 设动点的坐标为(u, v)，则它关于圆$x^2+y^2=a^2$的切点弦所在直线方程为$ux+vy=a^2$. $\because$ 此直线和圆$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=b^2$相切，

$$\therefore\quad \frac{|u\alpha+v\beta-a^2|}{\sqrt{u^2+v^2}}=|b|,\quad 即\quad (\alpha u+\beta v-a^2)^2=b^2(u^2+v^2).$$

以x、y分别代换u、v，便得所求的轨迹方程$(\alpha x+\beta y-a^2)^2=b^2(x^2+y^2)$，其中$x$、$y$应满足$x^2+y^2>a^2$.

586. **圆$x^2+y^2=1$内有定点$A(a, 0)$. 圆上有两点P、Q，且$\angle PAQ=90°$. 求过点P和Q的两条切线的交点M的轨迹.**



［分析］ 点M的位置由点P、Q的位置确定；反之，P、Q的位置也可由M的位置确定. 故在假设点M的坐标后，用其表示P、Q的坐标，然后利用PA和QA的垂直关系，即可得所求的轨迹方程.

［解］ 设过点P和Q的两条切线的交点为$M(x_0, y_0)$，则直线PQ方程为$x_0x+y_0y=1$，即$y_0y=1-x_0x\cdots$①. 圆方程$x^2+y^2=1$两边乘以y_0^2，得$y_0^2x^2+y_0^2y^2=y_0^2\cdots$②. ①代入②，并整理得$(x_0^2+y_0^2)x^2-2x_0x+1-y_0^2=0$. 故$P$、$Q$两点的横坐标

x_P、x_Q 满足：$x_P+x_Q=\frac{2x_0}{x_0^2+y_0^2}$，$x_P\cdot x_Q=\frac{1-y_0^2}{x_0^2+y_0^2}$. 同理可得 P、Q 两点的纵坐标 y_P、y_Q 满足 $y_P\cdot y_Q=\frac{1-x_0^2}{x_0^2+y_0^2}$. $\because$ $AP\perp AQ$，$\therefore$ $y_P\cdot y_Q+(x_P-a)\cdot(x_Q-a)=0$，即 $y_P\cdot y_Q+x_P\cdot x_Q-a(x_P+x_Q)+a^2=0$，亦即

$$\frac{1-x_0^2}{x_0^2+y_0^2}+\frac{1-y_0^2}{x_0^2+y_0^2}-a\cdot\frac{2x_0}{x_0^2+y_0^2}+a^2=0.$$

化简，并以 x、y 代换 x_0、y_0，得 $x^2+y^2+\frac{2a}{1-a^2}x-\frac{2}{1-a^2}=0$. 故所求的轨迹为圆.

587. 已知 $\triangle ABC$ 与一动点 P. 如自 A、B、C 各作 PA、PB、PC 的垂线相交于一点，求动点 P 的轨迹方程.

［解］ 取 BC 所在直线为 x 轴，A 在 BC 上的射影 O 为原点，建立直角坐标系. 设 A、B、C 三点的坐标分别为 $A(0,\ a)$、$B(b,\ 0)$、$C(c,\ 0)$，$P(x_0,\ y_0)$为轨迹上任意一点. 自 A、B、C 分别作 PA、PB、PC 的垂线方程为：$x_0x+(y_0-a)(y-a)=0\cdots$①，$(x_0-b)(x-b)+y_0y=0\cdots$②，$(x_0-c)\cdot(x-c)+y_0y=0\cdots$③. 因①、②、③三直线共点，

$$\therefore\quad \begin{vmatrix} x_0 & y_0-a & -a(y_0-a) \\ x_0-b & y_0 & -b(x_0-b) \\ x_0-c & y_0 & -c(x_0-c) \end{vmatrix}=0,$$

以 x、y 代换 x_0、y_0 并化简，得轨迹方程

$$a(x^2+y^2)-a(b+c)x-(a^2+bc)y+abc=0.$$

因点 A 不在 BC 上，故 $a\neq0$，轨迹为圆.

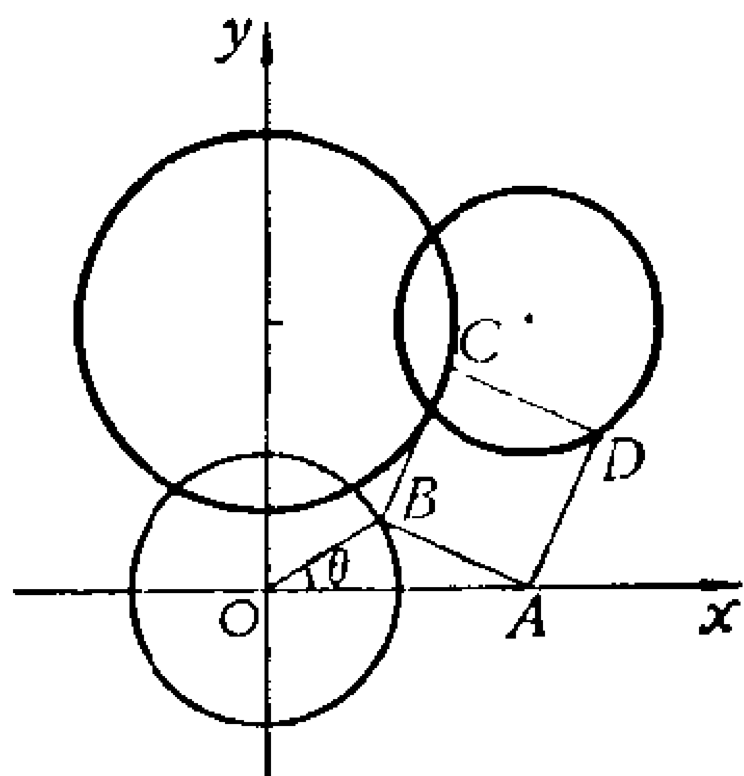
588. 求共轴圆系的平行切线系切点的轨迹方程.

［解］ 建立直角坐标系，使以 y 轴为公共根轴、圆心在 x 轴上的圆系方程为 $x^2+y^2-2\lambda x+f=0$，其中 f 为常数，λ 为参数. 设平行切线系的斜率为 k，切点为$(x_1,\ y_1)$，则切线方程为 $x_1x+y_1y-\lambda(x+x_1)+f=0\cdots$①，$-\frac{x_1-\lambda}{y_1}=k\cdots$②，且 $x_1^2+y_1^2-2\lambda x_1+f=0\cdots$③. 由②得 $\lambda=ky_1+x_1$，代入③，得 $x_1^2+y_1^2-2x_1(x_1+ky_1)+f=0$. 以 x、y 代换 x_1、y_1，即得轨迹方程

$$x^2-y^2+2kxy-f=0.$$

589. 已知圆 $x^2+y^2=1$ 与一定点 $A(2,\ 0)$，点 B 为已知圆上

一动点，以 AB 为一边作正方形 $ABCD$（A、B、C、D 为顺时针序），求点 C 与点 D 的轨迹.



［分析］ 因点 B 是已知圆 $x^2+y^2=1$ 上的动点，故可取 $\angle AOB=\theta$ 为参数. 利用向量 $\overrightarrow{AB}$ 顺时针旋转 $90°$，以及 $\overrightarrow{BA}$ 逆时针旋转 $90°$ 分别与 $\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BC}$ 重合，从而求出点 D 与点 C 的坐标，即得所求轨迹的参数方程.

［解］ 取 $\angle AOB=\theta$ 为参数. 设点 D 的坐标为 (x, y)，$\overrightarrow{AB}$ 的幅角为 φ. ∵ $\overrightarrow{AB}$ 顺时针旋转 $90°$ 后与 $\overrightarrow{AD}$ 重合，

$$\therefore\quad x-2=(\overrightarrow{AD})_{Ox}=|AD|\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=|AB|\sin\varphi=(\overrightarrow{AB})_{Oy}=\sin\theta,$$

故 $x=2+\sin\theta\cdots$①. 又，

$$y-0=(\overrightarrow{AD})_{Oy}=|AD|\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=|AB|(-\cos\varphi)$$
$$=-(\overrightarrow{AB})_{Ox}=-(\cos\theta-2),$$

故 $y=2-\cos\theta\cdots$②. 从①、②消去 θ，得点 C 的轨迹为 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$. 故点 D 的轨迹为以 $(2, 2)$ 为中心，半径为 1 的圆.

设点 C 的坐标为 (x, y)，$\overrightarrow{BA}$ 的幅角为 φ'. ∵ $\overrightarrow{BA}$ 逆时针旋转 $90°$ 后与 $\overrightarrow{BC}$ 重合，∴ $x-\cos\theta=(\overrightarrow{BC})_{Ox}=|BC|\cos\left(\varphi'+\frac{\pi}{2}\right)=|BA|(-\sin\varphi')=-(\overrightarrow{BA})_{Oy}=-(0-\sin\theta)$，故 $x=\cos\theta+\sin\theta\cdots$③. 同理可得 $y=2+\sin\theta-\cos\theta\cdots$④. 从③、④消去 θ，得点 C 的轨迹方程为 $x^2+(y-2)^2=2$. 故点 C 的轨迹为以 $(0, 2)$ 为中心、$\sqrt{2}$ 为半径的圆.

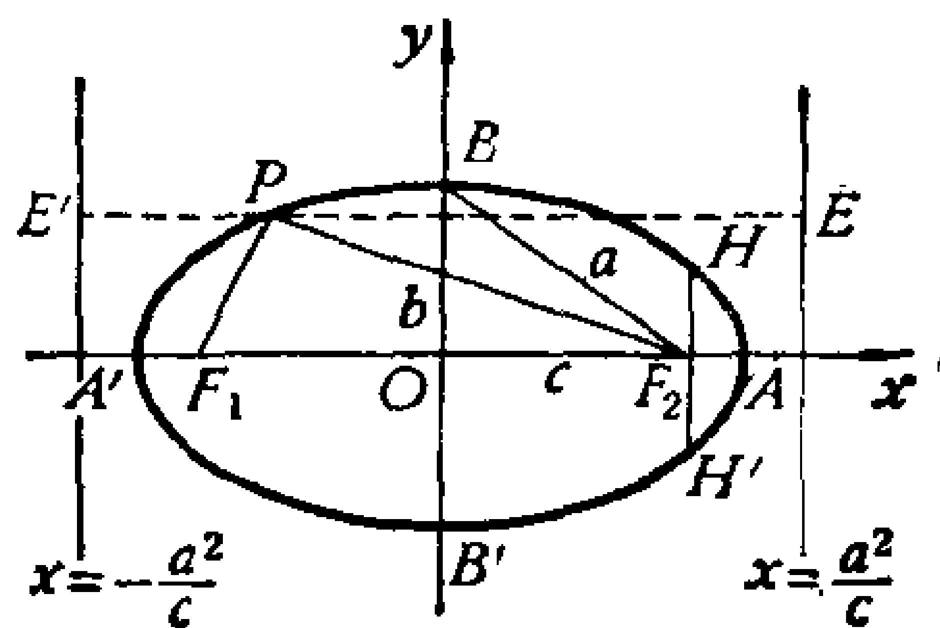
［说明］ 本题应用的向量射影公式可参见第 9 题. 另外，用复数或矩阵也能表达向量的旋转，故还可利用复数或矩阵来解（参见第 17 题）.

第五章 椭圆

1．椭圆的标准方程:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0). \tag{5.10}$$

中心：$O(0, 0)$；



顶点：$A(a, 0)$，$A'(-a, 0)$，

$B(0, b)$，$B'(0, -b)$；

长轴：$|AA'|=2a$；

短轴：$|BB'|=2b$.

(1) 焦点：$F_1(-c, 0)$，$F_2(c, 0)$；

焦距：$|F_1F_2|=2c$，

$$c=\sqrt{a^2-b^2}. \tag{5.11}$$

(2) 离心率：

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad (0<e<1). \tag{5.12}$$

(3) 准线：

$$x=-\frac{a}{e}=-\frac{a^2}{c},\ x=\frac{a}{e}=\frac{a^2}{c}. \tag{5.13}$$

(4) 焦半径（二次曲线上任意一点 P 到焦点 F_1 或 F_2 的距离）：

$$|PF_1|=e|PE'|=a+ex,$$
$$|PF_2|=e|PE|=a-ex. \tag{5.14}$$

(5) 通径（过焦点且垂直于焦点轴的弦）：

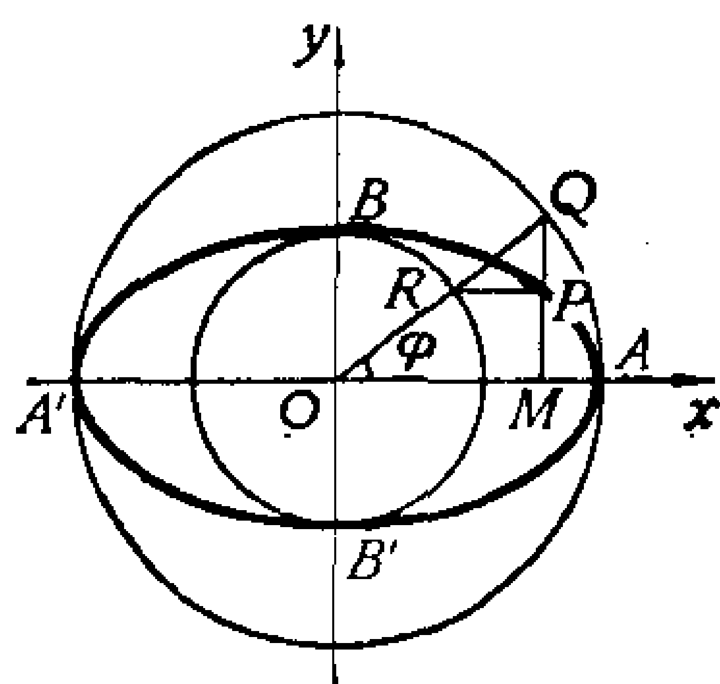
$$|HH'|=\frac{2b^2}{a};\ 焦参数\ p=\frac{b^2}{a}. \tag{5.15}$$

(6) 大辅助圆:

$$x^2+y^2=a^2;$$

小辅助圆:

$$x^2+y^2=b^2. \tag{5.16}$$



(7) 参数方程:

$$\begin{cases} x=a\cos\varphi \\ y=b\sin\varphi \end{cases}\quad (\varphi\ 为离心角). \tag{5.17}$$

2. 其它形式的椭圆方程

(1) 中心在原点,焦点在 y 轴上的标准方程:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\quad (a>b>0). \tag{5.21}$$

(2) 中心在点 $(x_0,\ y_0)$,长轴与 x 轴平行的标准方程:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1\quad (a>b>0). \tag{5.22}$$

(3) 中心在点 $(x_0,\ y_0)$,长轴与 y 轴平行的标准方程:

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1\quad (a>b>0). \tag{5.23}$$

3. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 与直线的关系

(1) 过切点 $(x_1,\ y_1)$ 的切线方程:

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1. \tag{5.31}$$

(2) 过切点 $(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ 的切线方程:

$$\frac{x}{a}\cos\varphi+\frac{y}{b}\sin\varphi=1. \tag{5.32}$$

(3) 已知斜率为 m 的切线方程:

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}. \tag{5.33}$$

*(4) 过椭圆上点(x_1, y_1)的法线方程:

$$a^2y_1x-b^2x_1y=(a^2-b^2)x_1y_1. \tag{5.34}$$

*(5) 过椭圆上点$(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$的法线方程(见第 613 题):

$$\frac{ax}{\cos\varphi}-\frac{by}{\sin\varphi}=a^2-b^2\left(\varphi\neq\frac{n\pi}{2}, n\in J\right). \tag{5.35}$$

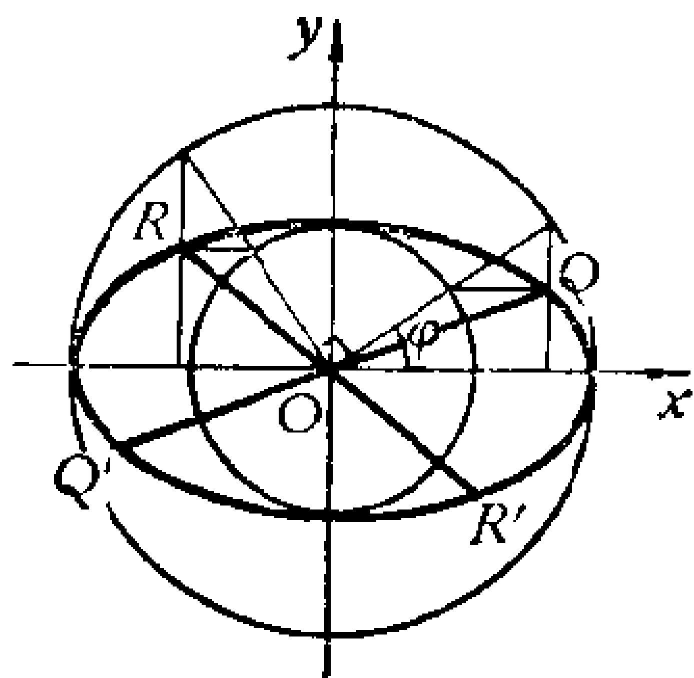
*(6) 点(x_0, y_0)关于椭圆的切点弦方程(见第 617 题):

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1. \tag{5.36}$$

*(7) 点(x_0, y_0)关于椭圆的极线方程(见第 618 题):

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1. \tag{5.37}$$

*(8) 直径与共轭直径:二次曲线互相平行的弦中点的轨迹在一直线上,称此直线为二次曲线的直径(见第 621 题). 若两直径中每一直径平分与另一直径平行的弦,则称此两直径互为共轭直径. 两共轭直径与椭圆的交点,称为两共轭直径的端点.



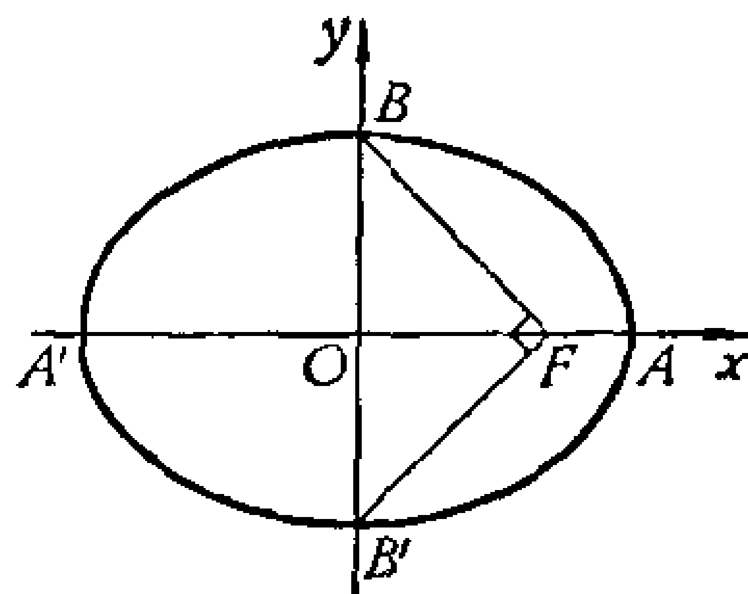
斜率为 m 的椭圆直径 $y=mx$, 其共轭直径为 $b^2x+a^2my=0$ (见第 622 题).

两共轭直径的端点坐标为: $Q(x_1, y_1)$, $Q'(-x_1, -y_1)$; $R\left(-\frac{a}{b}y_1, \frac{b}{a}x_1\right)$, $R'\left(\frac{a}{b}y_1, -\frac{b}{a}x_1\right)$. 两共轭直径端点的离心角之差为 $\frac{\pi}{2}$ (见第 623 题). (5.38)

§1. 椭圆的方程

590. 设椭圆的中心在原点,焦点在 x 轴上,一个焦点与短轴两端点的连线互相垂直,且此焦点与长轴上较近的端点的距离

为$\sqrt{10}-\sqrt{5}$. 求椭圆方程.



[分析] 根据题意,坐标轴即为此椭圆的对称轴,故其方程为标准形式. 于是只需求得其半长轴和半短轴的长,即可得解.

[解] 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 则其顶点坐标分别为 $A'(-a,0)$、$A(a,0)$和$B'(0,-b)$、$B(0,b)$,焦点F的坐标为$(\sqrt{a^2-b^2},0)$. $\because$ $BF\perp B'F$, $|BF|=|B'F|=a$, $\therefore a=\sqrt{2}b\cdots$①. 又 $\because$ $|FA|=a-\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{10}-\sqrt{5}\cdots$②. 由 ①、② 解得: $a=\sqrt{10}$, $b=\sqrt{5}$. 故所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$.

591. 中心在原点, 一焦点为 $F_1(0,\sqrt{50})$ 的椭圆被直线 l: $y=3x-2$ 截得的弦的中点横坐标为 $\frac{1}{2}$, 求此椭圆的方程.

[解] 设所求的椭圆方程为 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\cdots$①, 则 $a^2-b^2=50\cdots$②. 以 $y=3x-2$ 代入 ①, 得 $a^2x^2+b^2(3x-2)^2-a^2b^2=0$, 即 $(a^2+9b^2)x^2-12b^2x+b^2(4-a^2)=0$. 因为 $\varDelta>0$, 所以此方程有两个实根, 设其为 x_1、x_2, 则 $x_1+x_2=\frac{12b^2}{a^2+9b^2}$. 又因椭圆被直线 l 截得的弦的中点横坐标为 $\frac{x_1+x_2}{2}$, $\therefore$ $\frac{6b^2}{a^2+9b^2}=\frac{1}{2}$, 即 $a^2=3b^2\cdots$③. 由②、③解得 $a^2=75$, $b^2=25$. 代入①, 得所求的椭圆方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{75}=1$.

592. 求中心在原点, 长轴在 x 轴上, 离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, 一条准线是 $x=3$ 的椭圆方程.

[解] 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 则 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}\cdots$①. $\frac{a^2}{c}=3\cdots$②. ①×②, 得 $a=\sqrt{5}$. 代入①, 得 $c=\frac{5}{3}$. 而 $b^2=a^2-c^2=\frac{20}{9}$, 故所求的椭圆方程为 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{\frac{20}{9}}=1$.

593. 长、短轴分别在 x、y 轴上的椭圆，其准线间的距离等于 36，椭圆上某一点的两焦半径长分别等于 9 和 15. 求此椭圆的方程.

［解］ 设所求的椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，则 $\frac{a^2}{c}=\frac{36}{2}=18\cdots$①. $2a=9+15=24$. $\therefore\ a=12$. 代入①，得 $c=\frac{a^2}{18}=8$. 而 $b^2=a^2-c^2=80$，故所求的椭圆方程为 $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{80}=1$.

594. 离心率 $e=\cos\frac{\pi}{6}$ 的椭圆的中心在曲线 $y=\lg x$ 上，短轴平行于 x 轴，其长为 2，若椭圆与 x 轴相切，求其方程.

［解］ 设椭圆的中心为 $(x_0,\ y_0)$，则 $y_0=\lg x_0$，$\because$ 椭圆短轴平行于 x 轴，且 $2b=2$，$\therefore\ b=1$. 设椭圆方程是

$$\frac{(x-x_0)^2}{1^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1\quad(a>1).$$

$$\because\quad e=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{c}{a},\quad\therefore\quad\frac{3}{4}=\frac{c^2}{a^2},\quad c^2=\frac{3}{4}a^2;$$

又 $\quad\because\quad a^2-c^2=b^2=1,\quad\therefore\quad a^2-\frac{3}{4}a^2=1,\ a^2=4.$

由于椭圆与 x 轴相切，

$$\therefore\quad |y_0|=a=2,\quad 即\quad y_0=\pm2,\ \lg x_0=\pm2.$$

$$\therefore\quad x_0=100\quad 或\quad x_0=0.01.$$

故所求椭圆方程为

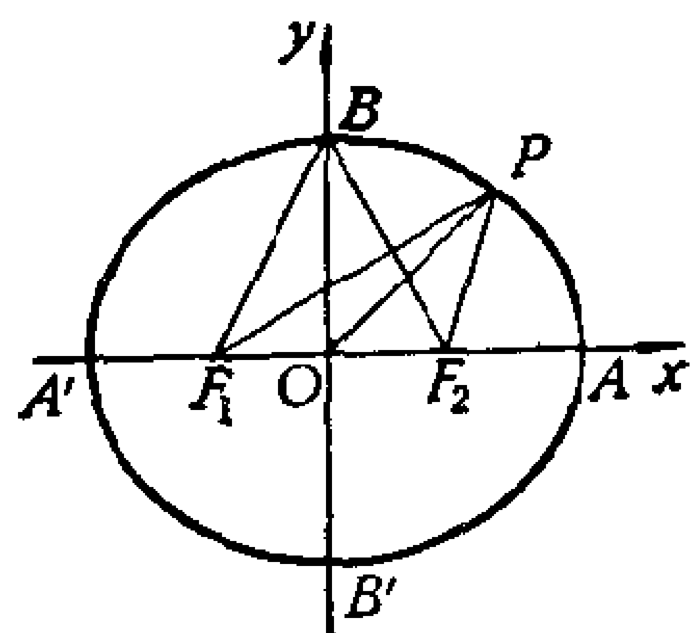
$$(x-100)^2+\frac{(y-2)^2}{4}=1\quad 或\quad (x-0.01)^2+\frac{(y+2)^2}{4}=1.$$

595. 已知椭圆中心在原点，焦点在横轴上，焦距为 $4\sqrt{3}$，且和直线 $3x+2\sqrt{7}y-16=0$ 相切，求椭圆方程.

［解］ 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，切点为 $P(x_0,\ y_0)$，则切线为 $\frac{x_0}{a^2}\cdot x+\frac{y_0}{b^2}\cdot y=1\cdots$①，又已知切线为 $3x+2\sqrt{7}y-16=0\cdots$②，故直线①与②重合. $\therefore\ \frac{x_0/a^2}{3}=\frac{y_0/b^2}{2\sqrt{7}}=\frac{1}{16}$，即 $x_0=\frac{3}{16}a^2$，$y_0=\frac{\sqrt{7}}{8}b^2$. 代回②，得 $9a^2+28b^2-256=0\cdots$③. 又焦距 $2c=4\sqrt{3}$，$c=2\sqrt{3}$，$\therefore\ a^2-b^2=$

12…④. 解方程③、④, 得 $\begin{cases} a^2=16 \\ b^2=4. \end{cases}$ 故所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

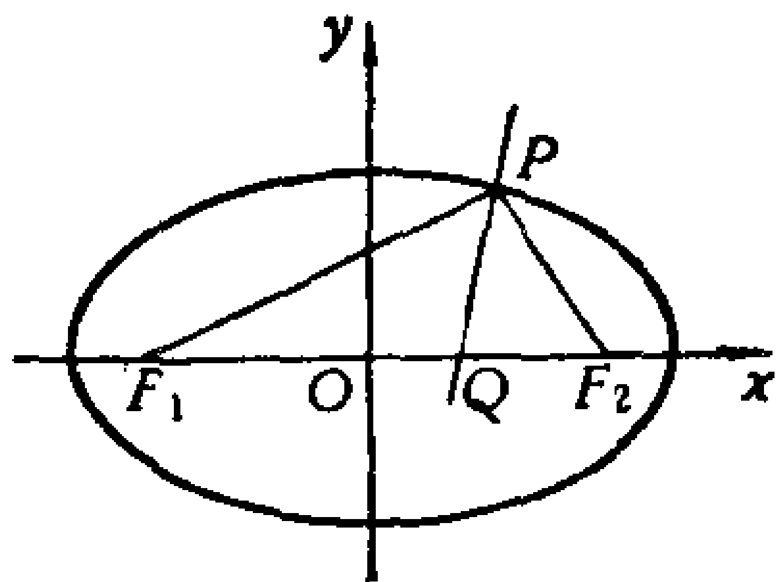
596. 设椭圆的对称轴为坐标轴,短轴的一个端点与两焦点组成一正三角形, 焦点到椭圆的最短距离为 $\sqrt{3}$. 求此椭圆方程.



[分析] 短轴端点到焦点距离是半长轴,短轴的一个端点与两焦点组成正三角形,这就给出了半长轴 a、半短轴 b、半焦距 c 三者之间数量关系, 再由焦点到椭圆的最短距离 $a-c=\sqrt{3}$, 解出 a、b、c 即得解.

[解] 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 则其焦点为 $F_1(-c, 0)$、$F_2(c, 0)$, 其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$; 短轴的一端点为 $B(0, b)$, 长轴的一端点为 $A(a, 0)$. $\because$ $\triangle BF_1F_2$ 是正三角形, $\therefore$ $|BF_1|=|BF_2|=|F_1F_2|$. $\because$ $|BF_1|+|BF_2|=2a$, 而 $|F_1F_2|=2c$, $\therefore$ $a=2c$…①. 又设 P 为椭圆上任一点, 则 $|PF_1|+|PF_2|=2a=(a+c)+(a-c)$. $\because$ $|PF_1|\leqslant|F_1O|+|OP|\leqslant c+a$, $\therefore$ $|PF_2|\geqslant a-c$, 故焦点到椭圆的最短距离为 $a-c$. 即 $a-c=\sqrt{3}$…②. 由①、②解得 $c=\sqrt{3}$, $a=2\sqrt{3}$. $\therefore$ $a^2=12$, $b^2=a^2-c^2=9$. 故当椭圆的长轴在 x 轴上时, 所求方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$; 当椭圆的长轴在 y 轴上时, 其方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{12}=1$.

597. 已知点 P 在以坐标轴为对称轴的椭圆上, 点 P 的两焦半径分别为 $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ 和 $\frac{2\sqrt{5}}{3}$, 过点 P 的法线在长轴上的交点为 $Q\left(\frac{5}{9}, 0\right)$, 求椭圆的方程.



[分析] 条件中涉及椭圆上一点的两焦半径和法线, 故可考虑利用"过椭圆上任一点的法线平分这一点的两焦半径的夹角"这一性质.

［解］ 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，则焦点为 $F_1(-c, 0)$、$F_2(c, 0)$，其中 $c^2=a^2-b^2\cdots$①， 且 $|PF_1|+|PF_2|=2a$， 即 $\frac{4\sqrt{5}}{3}+\frac{2\sqrt{5}}{3}=2a$，$\therefore\ a=\sqrt{5}$，$a^2=5\cdots$②. 又因 PQ 是过点 P 的法线，故 PQ 平分 $\angle F_1PF_2$.

$$\therefore\ \frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|QF_1|}{|QF_2|},\ \text{即}\ \frac{\frac{4\sqrt{5}}{3}}{\frac{2\sqrt{5}}{3}}=\frac{\frac{5}{9}+c}{c-\frac{5}{9}},$$

$\therefore\ c=\frac{5}{3}\cdots$③. ②、③代入①， 得 $b^2=\frac{20}{9}$. 故所求的椭圆方程为

$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{\frac{20}{9}}=1.$$

598. 求椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上的点 P，使点 P 与椭圆两焦点连线互相垂直.

［解］ 椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\cdots$①两焦点坐标为 $(4, 0)$，$(-4, 0)$. 设点 P 坐标为 (x, y)，则 $\frac{y}{x-4}\cdot\frac{y}{x+4}=-1\cdots$②. 由①、②解得：

$$\begin{cases}x=\frac{5\sqrt{7}}{4}\\ y=\frac{9}{4},\end{cases}\quad \begin{cases}x=-\frac{5\sqrt{7}}{4}\\ y=\frac{9}{4},\end{cases}\quad \begin{cases}x=\frac{5\sqrt{7}}{4}\\ y=-\frac{9}{4},\end{cases}\quad \begin{cases}x=-\frac{5\sqrt{7}}{4}\\ y=-\frac{9}{4}.\end{cases}$$

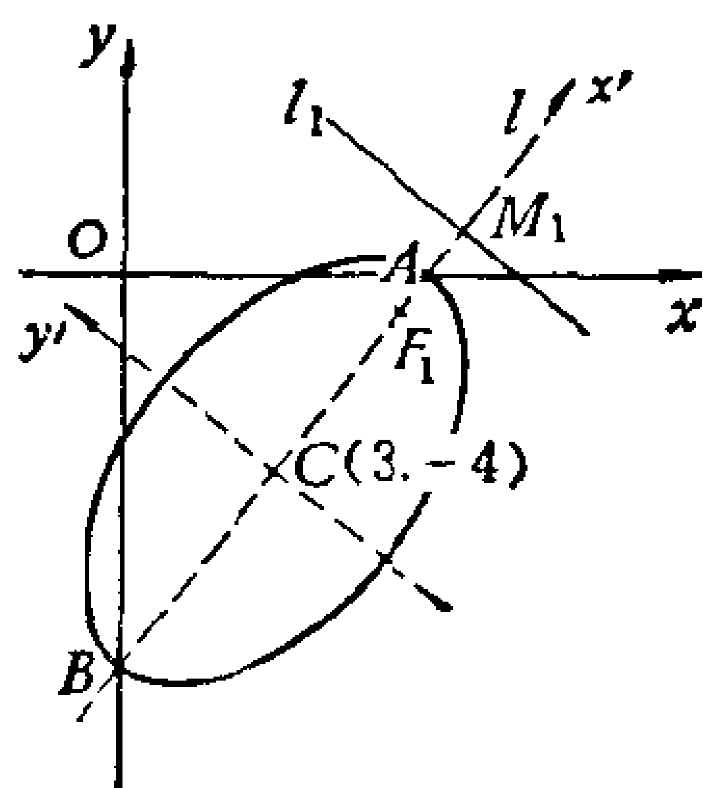
故点 P 坐标为

$$\left(\frac{5\sqrt{7}}{4},\ \frac{9}{4}\right)、\left(\frac{-5\sqrt{7}}{4},\ \frac{9}{4}\right)、\left(\frac{5\sqrt{7}}{4},\ -\frac{9}{4}\right)、\left(\frac{-5\sqrt{7}}{4},\ -\frac{9}{4}\right).$$

599. 已知直线 l：$\frac{x}{6}-\frac{y}{8}=1$ 夹在坐标轴间的线段为椭圆的长轴，且此椭圆的离心率为 0.8，求此椭圆的方程.

［解一］ 设椭圆的半长轴为 a，半焦距为 c，则 $\frac{c}{a}=0.8$. 又 $\because$ 直线 l 与两坐标轴的交点为 $A(6, 0)$ 和 $B(0, -8)$，

$\therefore\quad 2a=|AB|=\sqrt{6^2+(-8)^2}=10,$



故 $a=5$, $c=4$. 椭圆的中心坐标为 $(3,\ -4)$. 设一焦点 F_1 的坐标为 $(x_1,\ y_1)$, 和焦点 F_1 相应的准线 l_1 与直线 l 的交点为 $M_1(x_2,\ y_2)$. ∵ 直线 l 的斜率 $k=\frac{4}{3}$, ∴ 其参数方程为

$$\begin{cases}x=3+\frac{3}{5}t\\ y=-4+\frac{4}{5}t\end{cases}\ (t\text{ 为参数}).\ \text{故}$$

$$\begin{cases}x_1=3+\frac{3}{5}c=\frac{27}{5}\\ y_1=-4+\frac{4}{5}c=-\frac{4}{5},\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=3+\frac{3}{5}\cdot\frac{a^2}{c}=\frac{27}{4}\\ y_2=-4+\frac{4}{5}\cdot\frac{a^2}{c}=1.\end{cases}$$

∴ 准线 l_1 的方程是 $y-1=-\frac{3}{4}\left(x-\frac{27}{4}\right)$, 即 $3x+4y-\frac{97}{4}=0$. 于是根据圆锥曲线的统一定义, 可得所求的椭圆方程为

$$\frac{\sqrt{\left(x-\frac{27}{5}\right)^2+\left(y+\frac{4}{5}\right)^2}}{\frac{\left|3x+4y-\frac{97}{4}\right|}{5}}=\frac{4}{5},$$

即 $$625\left[\left(x-\frac{27}{5}\right)^2+\left(y+\frac{4}{5}\right)^2\right]=16\left(3x+4y-\frac{97}{4}\right)^2,$$

化简得 $$481x^2-384xy+369y^2-4422x+4104y+9216=0.$$

［解二］ 从［解一］得 $a=5$、$b=3$、$c=4$, 中心为 $C(3,\ -4)$. 在以直线 $4x-3y=0$ 与 $3x+4y=0$ 为 x'、y' 轴的坐标系 $x'Oy'$ 中, 椭圆中心坐标为 $\frac{3\times3+4(-4)}{5}=-\frac{7}{5}$, $\frac{-4\times3+3(-4)}{5}=-\frac{24}{5}$, 椭圆方程为

$$\frac{\left(x'+\frac{7}{5}\right)^2}{25}+\frac{\left(y'+\frac{24}{5}\right)^2}{9}=1\cdots①.$$

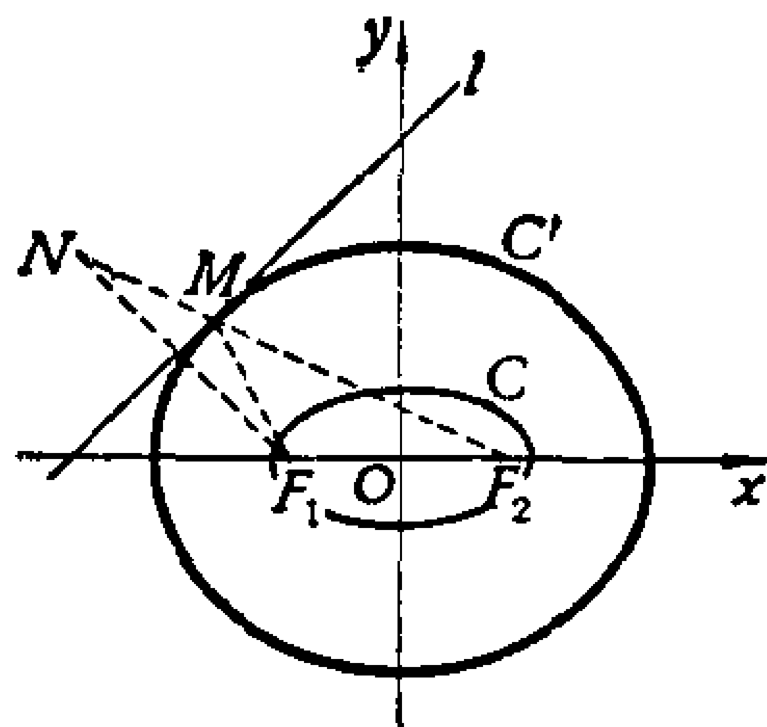
坐标系 $x'Oy'$ 与 xOy 之间的变换公式为 $\begin{cases}x'=\frac{3x+4y}{5}\\ y'=\frac{-4x+3y}{5},\end{cases}$ 代入①, 得所求

的椭圆方程为

$$9\left(\frac{3x+4y+7}{5}\right)^2+25\left(\frac{-4x+3y+24}{5}\right)^2=225,$$

即　$481x^2-384xy+369y^2-4422x+4104y+9216=0.$

600. 已知直线 l: $\begin{cases}x=-5+\dfrac{t}{\sqrt{2}}\\ y=4+\dfrac{t}{\sqrt{2}}\end{cases}$ (t 为参数), 和椭圆 C: $\begin{cases}x=2\sqrt{3}\cos\theta\\ y=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数). (1) 求椭圆 C 的两个焦点 F_1 和 F_2 的坐标; (2) 求以 F_1、F_2 为焦点, 且与直线 l 有公共点 M 的椭圆中长轴最短的椭圆 C' 的方程, 以及此时点 M 的坐标; (3) 求证直线 l 与椭圆 C' 相切.



[分析]　根据椭圆的定义, 只要在直线 l 上找一点 M, 使它到 F_1、F_2 的距离之和最小. 运用平面几何知识, 先作 F_1 关于 l 的对称点 N, 连 NF_2 交 l 于点 M, 则 $|F_1M|+|F_2M|$ 最小, 此时 l 为 $\angle F_1MF_2$ 的外角平分线, 再根据椭圆切线的性质定理即可得证.

[解一]　(1) 椭圆 C 的半长轴为 $a=2\sqrt{3}$, 半短轴为 $b=\sqrt{3}$, 故 $c=3$, 两焦点 F_1、F_2 的坐标分别为 $F_1(-3, 0)$、$F_2(3, 0)$.

(2) 设 F_1 关于 l 的对称点 N 的坐标为 (x_1, y_1), 则 F_1N 的中点坐标为 $\left(\dfrac{x_1-3}{2}, \dfrac{y_1}{2}\right)$, 它满足直线 l 的方程 $x+5=y-4$. $\therefore\ \dfrac{x_1-3}{2}-\dfrac{y_1}{2}=-9$, 即 $x_1-y_1=-15$…①, $\because\ F_1N\perp l$, $\therefore\ \dfrac{y_1}{x_1+3}\cdot 1=-1$, 即 $x_1+y_1=-3$ …②. 解方程①、②, 得点 N 的坐标为$(-9、6)$, 椭圆 C' 的长轴 $2a'=|F_1M|+|F_2M|=|F_2N|=\sqrt{(-9-3)^2+6^2}=6\sqrt{5}$, $\therefore\ a'=3\sqrt{5}$, 半短轴 $b'=\sqrt{a'^2-c^2}=\sqrt{45-9}=6$. $\therefore$ 椭圆 C' 的方程为 $\dfrac{x^2}{45}+\dfrac{y^2}{36}=1$. 解直线 l: $y=x+9$ 及直线 F_2N: $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$ 的联立方程, 即得点 M 的坐标: $\begin{cases}x=-5\\ y=4.\end{cases}$

(3) 因为直线 l 是椭圆 C' 上点 M 的两焦半径夹角的外角平分线，所以 l 是椭圆 C' 在点 M 的切线.

[解二] (1) 同[解一].

(2) 设所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，其中 $b^2=a^2-9$. 解方程组

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-9}=1\cdots①\\ y=x+9\cdots②,\end{cases}$$

②代入①，得 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{(x+9)^2}{a^2-9}=1$，即 $(2a^2-9)x^2+18a^2x-a^2(a^2-90)=0$，于是，得到椭圆与直线 l 有公共点的充要条件为:

$$\begin{cases}a^2>9\\ (18a^2)^2+4a^2(2a^2-9)(a^2-90)\geqslant 0,\end{cases} \text{即} \begin{cases}a^2>9\\ a^4-54a^2+405\geqslant 0.\end{cases}$$

$\therefore$ $a^2\geqslant 45$，当长轴最短时 $a^2=45$，此时 $x=-5$，从而 $y=4$. $\therefore$ 点 M 的坐标为 $(-5, 4)$. 所求的椭圆方程为 $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$.

(3) 当 $a^2=45$ 时，直线 l 与椭圆 C' 的两交点重合，所以它们相切.

601. 求圆心在椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的长轴上，且和椭圆及椭圆短轴相切的圆方程.

[分析] 两曲线相切，在切点有公共的切线. 故椭圆在切点处的法线过圆心，由此可求解.

[解] 所求圆圆心在椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的长轴(x 轴)上，且与短轴(y 轴)相切，故可令其方程为 $x^2+y^2-2ax=0\cdots①$. 设此圆和椭圆相切于点 $P(5\cos\theta, 3\sin\theta)$，则过点 P 椭圆的法线方程为 $\frac{5x}{\cos\theta}-\frac{3y}{\sin\theta}=16$，即 $5x\sin\theta-3y\cos\theta=16\sin\theta\cos\theta\cdots②$. 又点 P 在圆上，$\therefore$ $(5\cos\theta)^2+(3\sin\theta)^2-2a(5\cos\theta)=0$，即 $16\cos^2\theta-10a\cos\theta+9=0\cdots③$. 因直线②过圆心 $(a, 0)$，于是有 $\sin\theta=0$，或 $\cos\theta=\frac{5}{16}a$. 当 $\sin\theta=0$ 时，$\cos\theta=\pm1$，代入③，得 $a=\pm\frac{5}{2}$；当 $\cos\theta=\frac{5}{16}a$ 时，代入③，得 $\frac{25a^2}{16}-9=0$，

$\therefore\ a=\pm\frac{12}{5}$. 故所求的圆方程为 $x^2+y^2\pm5x=0$ 与 $x^2+y^2\pm\frac{24}{5}x=0$.

§2. 直线与椭圆的位置关系

602. 设 $P(m,\ n)$ 为椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 内的一点，求以 $P(m,\ n)$ 为中点的弦所在的直线方程.

[分析] 求以 P 为中点的弦所在的直线方程只需求得斜率 k，而弦的斜率 k 和中点坐标都与端点坐标有关，故可设端点坐标为参数，由于端点坐标满足椭圆方程，得两端点坐标间的关系，从而求出 k 即得解.

[解] 设此弦的两端点为 $A(x_1,\ y_1)$、$B(x_2,\ y_2)$，则 $2m=x_1+x_2$，$2n=y_1+y_2$. $\because$ A、B 在椭圆上，$\therefore$ $b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2$，$b^2x_2^2+a^2y_2^2=a^2b^2$. 相减得 $b^2(x_1^2-x_2^2)+a^2(y_1^2-y_2^2)=0$，

即
$$b^2(x_1+x_2)(x_1-x_2)+a^2(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0.$$
$$\therefore\quad 2mb^2(x_1-x_2)+2na^2(y_1-y_2)=0.$$

当 $x_1\neq x_2$ 时，弦的斜率 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{mb^2}{na^2}$，故弦所在直线方程为 $y-n=-\frac{mb^2}{na^2}(x-m)$，即 $mb^2x+na^2y=m^2b^2+n^2a^2\cdots$①；当 $x_1=x_2$ 时，要使以 $P(m,\ n)$ 为中点的弦存在，必须 $n=0$. 这时，弦所在直线方程为 $x=m$. 此即 $n=0$ 时方程 ① 的特例，故所求直线方程为 $mb^2x+na^2y=m^2b^2+n^2a^2$.

[说明] 本题仅当点 P 在椭圆内部时有解，当点在椭圆上时，即为过此点的椭圆切线. 本题也可设斜率 k 为参数，写出所求直线方程，与椭圆方程联立确定交点坐标，再利用韦达定理，用 k 表示中点坐标，消去参数，即得弦所在直线的方程.

603. 点 $P(2,\ 2)$ 是椭圆 $x^2+4y^2-2x-12y+6=0$ 一弦的中点，求此弦所在的直线方程.

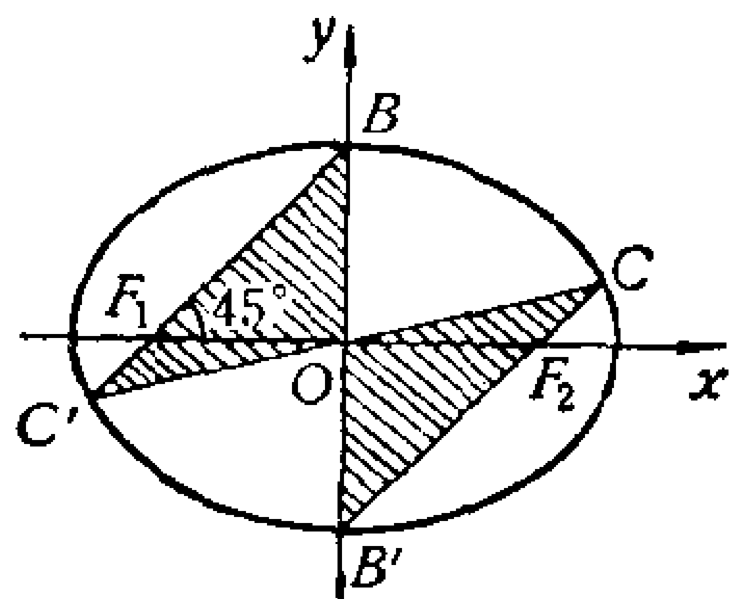
[解] 设所求直线方程为 $y-2=k(x-2)$，代入椭圆方程 $x^2+4y^2-2x-12y+6=0$，消去 y，得 $(1+4k^2)x^2-(16k^2-4k+2)x+(16k^2-8k-2)=0$. 设方程两根为 x_1、x_2，则 $\frac{x_1+x_2}{2}=2$；由韦达定理又有

$$x_1+x_2=\frac{16k^2-4k+2}{1+4k^2}=4.$$

解得 $k=-\frac{1}{2}$. 故所求直线方程为 $y-2=-\frac{1}{2}(x-2)$, 即 $x+2y-6=0$.

604. 过椭圆 $x^2+2y^2=2$ 的焦点引一条倾角为 45° 的直线, 求以此直线与椭圆的两个交点及椭圆中心为顶点的三角形面积.

[解] 已知椭圆方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$, ∴ $a=\sqrt{2}$, $b=1$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=1$. 过 $F_1(-1,0)$, 倾斜角为 45° 的直线 BC' 的方程为 $y=x+1$, 把它与椭圆方程联立, 求得交点分别为



$$B(0,\ 1)、C'\left(-\frac{4}{3},\ -\frac{1}{3}\right).$$

∴ $S_{\triangle OBC'}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$(面积单位). 由对称性可知, $S_{\triangle OB'C}=\frac{2}{3}$(面积单位).

605. (1) 当 m 取不同实数值时, 试证方程 $4x^2+5y^2-8mx-20my+24m^2-20=0$ 表示不同的椭圆; (2) 求被这些椭圆截得线段长都等于 $\frac{5}{3}\sqrt{5}$ 的直线方程.

[解] (1) 将已知方程配方得 $4(x-m)^2+5(y-2m)^2=20$,

即
$$\frac{(x-m)^2}{5}+\frac{(y-2m)^2}{4}=1.$$

对于任一 m, 它表示中心在 $(m,\ 2m)$ 的椭圆.

(2) 因椭圆中心轨迹的参数方程为 $\begin{cases}x=m\\ y=2m\end{cases}$ (m 为参数). 消去 m, 即直线 $y=2x$. 故与 $y=2x$ 平行的直线在这些椭圆上截出相等的线段. 设所求的直线为 $y=2x+b$, 从中心在原点的椭圆考虑, 由 $\begin{cases}y=2x+b\\ \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$ 消去 y, 得 $24x^2+20bx+5b^2-20=0$. 设方程的两根为 x_1、x_2, 则

$$x_1+x_2=-\frac{5}{6}b,\ x_1\cdot x_2=\frac{5b^2-20}{24}.$$

于是,

$$(x_2-x_1)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\left(-\frac{5}{6}b\right)^2-\frac{5b^2-20}{6}=\frac{120-5b^2}{36},$$

$$(y_2-y_1)^2=[(2x_2+b)-(2x_1+b)]^2=4(x_2-x_1)^2=\frac{120-5b^2}{9}.$$

由已知$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\frac{5}{3}\sqrt{5}$,得

$$5\left(\frac{120-5b^2}{36}\right)=\left(\frac{5}{3}\sqrt{5}\right)^2,$$

解得 $b=\pm2$. 故所求直线方程为 $y=2x\pm2$.

606. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 和直线 $Ax+By=1$ 交于 P、Q 两点 $(A^2a^2+B^2b^2-1>0)$, 求过原点 O 的两直线 OP、OQ 互相垂直的条件.

[解一] 设点 P、Q 的坐标分别为 (x_1, y_1)、(x_2, y_2), 则 OP 的方程为 $y_1x-x_1y=0$; OQ 的方程为 $y_2x-x_2y=0$. $\therefore$ OP、OQ 互相垂直的条件是 $y_1y_2+x_1x_2=0\cdots$①. 当 $A=0$ 时, $y=\frac{1}{B}$. 代入椭圆方程, 得 $b^2B^2x^2+a^2(1-b^2B^2)=0$, $\therefore x_1\cdot x_2=\frac{a^2(1-b^2B^2)}{b^2B^2}$, 而 $y_1=y_2=\frac{1}{B}$. 代入①, 得

$$\frac{a^2(1-b^2B^2)+b^2}{b^2B^2}=0,\quad \text{即}\quad a^2+b^2=a^2b^2B^2\cdots②.$$

当 $A\neq0$ 时, 由直线方程得 $x=\frac{1-By}{A}$, 代入椭圆方程, 得

$$(b^2B^2+a^2A^2)y^2-2b^2By+b^2(1-a^2A^2)=0,$$

$$\therefore\quad y_1+y_2=\frac{2b^2B}{b^2B^2+a^2A^2},\quad y_1\cdot y_2=\frac{b^2(1-a^2A^2)}{b^2B^2+a^2A^2}.$$

而 $$x_1\cdot x_2=\frac{(1-By_1)(1-By_2)}{A^2}=\frac{B^2y_1y_2-B(y_1+y_2)+1}{A^2}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad y_1y_2+x_1x_2&=\frac{(A^2+B^2)y_1y_2-B(y_1+y_2)+1}{A^2}\\&=\frac{b^2(A^2+B^2)(1-a^2A^2)-2b^2B^2+b^2B^2+a^2A^2}{A^2(b^2B^2+a^2A^2)}\\&=\frac{a^2+b^2-a^2b^2(A^2+B^2)}{b^2B^2+a^2A^2}=0.\end{aligned}$$

$\therefore\quad a^2+b^2=a^2b^2(A^2+B^2)\cdots$③. 当 $A=0$ 时，③式即为②式，故所求的条件为 $a^2+b^2=a^2b^2(A^2+B^2)$.

［解二］ 根据提要(3.120)，求出过原点 O 以及直线 $Ax+By=1$ 和椭圆的交点 P、Q 的两直线方程为 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2(Ax+By)^2\cdots$①. 化简，得 $b^2(a^2A^2-1)x^2+2a^2b^2ABxy+a^2(b^2B^2-1)y^2=0$. 因为两直线 OP、OQ 互相垂直，故 $b^2(a^2A^2-1)+a^2(b^2B^2-1)=0$，即 $a^2+b^2=a^2b^2(A^2+B^2)$.

607. 椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上不同的三点 $A(x_1,\ y_1)$、$B\left(4,\ \dfrac{9}{5}\right)$、$C(x_2,\ y_2)$ 与焦点 $F(4,\ 0)$ 的距离成等差数列. (1) 求证 $x_1+x_2=8$; (2) 若线段 AC 的垂直平分线与 x 轴的交点为 T，求直线 BT 的斜率 k.

［分析］ 利用圆锥曲线的统一定义，将椭圆上的点到一焦点的距离用这个点的横坐标来表示. 从而根据 A、B、C 三点到焦点 F 的距离成等差数列，推得结论(1).

［解］ (1) 由椭圆方程得半长轴 $a=5$，半短轴 $b=3$，半焦距 $c=4$. 根据圆锥曲线的统一定义，得

$$\frac{|AF|}{\dfrac{a^2}{c}-x_1}=\frac{c}{a},\quad \therefore\quad |AF|=a-\frac{c}{a}x_1=5-\frac{4}{5}x_1.$$

同理，$|CF|=5-\dfrac{4}{5}x_2$. $\because\ |AF|+|CF|=2|BF|$，且 $|BF|=\dfrac{9}{5}$，

$$\therefore\quad \left(5-\frac{4}{5}x_1\right)+\left(5-\frac{4}{5}x_2\right)=\frac{18}{5},\quad 即\quad x_1+x_2=8.$$

(2) 因线段 AC 的中点为 $\left(4,\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$，所以它的垂直平分线方程为 $y-\dfrac{y_1+y_2}{2}=-\dfrac{x_1-x_2}{y_1-y_2}(x-4)$. 又点 T 在 x 轴上，故设其坐标为 $(x_0,\ 0)$，代入上式，得 $x_0-4=\dfrac{y_1^2-y_2^2}{2(x_1-x_2)}\cdots$①. 但 $A(x_1,\ y_1)$、$B(x_2,\ y_2)$都在椭圆上，

$$\therefore\quad y_1^2=\frac{9}{25}(25-x_1^2),\ y_2^2=\frac{9}{25}(25-x_2^2).$$

$$\therefore\quad y_1^2-y_2^2=-\frac{9}{25}(x_1+x_2)(x_1-x_2).$$

以此代入①，并利用 $x_1+x_2=8$ 的结论，得

$$x_0-4=-\frac{36}{25}. \quad \therefore \quad k_{BT}=\frac{\frac{9}{5}-0}{4-x_0}=\frac{5}{4}.$$

608. 设直线 l 的参数方程是 $\begin{cases}x=t\\ y=b+mt\end{cases}$ (t为参数); 椭圆 E 的参数方程是 $\begin{cases}x=1+a\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$ ($a\neq0$, θ 为参数). 系数 a、b 应满足什么条件, 才能使对于任意 m 值, 直线 l 与椭圆 E 总有公共点.

[解] 由直线 l 的参数方程消去参数 t, 得 $y=mx+b\cdots$①. 由椭圆 E 的参数方程消去参数 θ, 得 $\frac{(x-1)^2}{a^2}+y^2=1\cdots$②. ①代入②, 并整理得

$$(1+a^2m^2)x^2+2(a^2mb-1)x+a^2b^2-a^2+1=0,$$

其判别式

$$\begin{aligned}\Delta&=4(a^2mb-1)^2-4(1+a^2m^2)(a^2b^2-a^2+1)\\&=4a^2[(a^2-1)m^2-2bm+(1-b^2)].\end{aligned}$$

若对任意m值, 直线 l 与椭圆 E 总有公共点, 则当m为任意值时, 不等式 $(a^2-1)m^2-2bm+1-b^2\geqslant0$ 恒成立. $\therefore$ 当 $a^2-1>0$ 时, $b^2-(a^2-1)\cdot(1-b^2)\leqslant0$, 即 $\begin{cases}|a|>1\\ |b|\leqslant\frac{\sqrt{a^2-1}}{|a|}\end{cases}\cdots$③. 或当 $a^2-1=0$ 时, $b=0\cdots$④.

$\therefore$ 当系数 a、b 满足条件 $\begin{cases}|a|>1\\ |b|\leqslant\frac{\sqrt{a^2-1}}{|a|}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|a|=1\\ b=0\end{cases}$ 时, 直线 l 与椭圆 E 总有公共点.

609. 已知椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 的一条切线在两坐标轴之间的线段被切点平分. 求切点的坐标.

[解] 设切点 P 的坐标为 (x_1, y_1), 则过点 P 的切线方程为 $b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2\cdots$①. ①式中分别令 $x=0$、$y=0$, 得切线与 y 轴、x 轴交点的坐标为 $Q\left(0, \frac{b^2}{y_1}\right)$、$R\left(\frac{a^2}{x_1}, 0\right)$. 因为点 P 是线段 RQ 中点, 所以 $x_1=\frac{a^2}{2x_1}$,

$y_1=\frac{b^2}{2y_1}$; 解得 $x_1=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$, $y_1=\pm\frac{b}{\sqrt{2}}$. ∴ 切点 P 的坐标为:

$\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$、$\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$、$\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$、$\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$.

610. 求直线 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 相切的条件.

[解] 设切点为 (x_0, y_0), 则切线方程为 $b^2x_0x+a^2y_0y=a^2b^2$. 若直线 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ 也为切线, 则两线重合.

$$\therefore\quad x_0=\frac{a^2\cos\alpha}{p},\quad y_0=\frac{b^2\sin\alpha}{p}.$$

又切点在椭圆上, 故所求的条件为

$$\frac{a^4b^2\cos^2\alpha}{p^2}+\frac{a^2b^4\sin^2\alpha}{p^2}=a^2b^2,$$

即 $a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha=p^2$.

611. 已知点 $P(\alpha, \beta)$ 为椭圆 $4x^2+y^2=4$ 外部的一点. (1) 求过点 P, 且斜率为 m 的直线与此椭圆相切的条件; (2) 求椭圆的互相垂直的两切线的交点轨迹方程.

[解] (1) 过点 P 且斜率为 m 的直线方程为 $y=m(x-\alpha)+\beta$, 代入椭圆方程, 得 $(m^2+4)x^2-2m(\alpha m-\beta)x+(m\alpha-\beta)^2-4=0$. 故此直线与椭圆相切的条件是 $(\alpha m-\beta)^2m^2-(m^2+4)[(m\alpha-\beta)^2-4]=0$, 即 $(m\alpha-\beta)^2=m^2+4$…①.

(2) 化①式为关于 m 的方程: $(1-\alpha^2)m^2+2\alpha\beta m-\beta^2+4=0$. 当 $\alpha\neq\pm1$ 时, 方程有两解, 即过点 P 可作两条切线. 欲使两切线互相垂直, 须且只须 $\frac{4-\beta^2}{1-\alpha^2}=-1$, 即 $\alpha^2+\beta^2=5$. 以 x、y 代换 α、β, 得 $x^2+y^2=5$. 当 $\alpha=\pm1$ 时, 方程只有一解, 即有斜率的切线只有一条; 另一条切线垂直于 x 轴. 故此时过 $(\pm1, 2)$、$(\pm1, -2)$ 四点才能引互相垂直的两切线, 而此四点的坐标亦满足方程 $x^2+y^2=5$, 故所求的轨迹方程为 $x^2+y^2=5$.

612. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上过离心角为 φ_1、φ_2($0\leqslant\varphi_1<\varphi_2<$

2π)的点的两条切线的交点坐标.

[解] 过离心角为 φ_1、φ_2 的点的两条切线方程为

$$\begin{cases} bx\cos\varphi_1+ay\sin\varphi_1=ab \\ bx\cos\varphi_2+ay\sin\varphi_2=ab. \end{cases}$$

解此方程组:

$$D=\begin{vmatrix} b\cos\varphi_1 & a\sin\varphi_1 \\ b\cos\varphi_2 & a\sin\varphi_2 \end{vmatrix}=ab\sin(\varphi_2-\varphi_1),$$

$$D_x=\begin{vmatrix} ab & a\sin\varphi_1 \\ ab & a\sin\varphi_2 \end{vmatrix}=a^2b(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1),$$

$$D_y=\begin{vmatrix} b\cos\varphi_1 & ab \\ b\cos\varphi_2 & ab \end{vmatrix}=ab^2(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2).$$

(i) 若 $\varphi_2-\varphi_1=\pi$, 则 $D=0$, 即两切线平行,无交点;

(ii) 若 $\varphi_2-\varphi_1\neq\pi$, 则 $D\neq0$,

$$\therefore\quad x=\frac{a^2b(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1)}{ab\sin(\varphi_2-\varphi_1)}=a\cos\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}\cdot\sec\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2},$$

$$y=\frac{ab^2(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2)}{ab\sin(\varphi_2-\varphi_1)}=b\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\cdot\sec\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}.$$

故切线的交点坐标为

$$\left(a\cos\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}\cdot\sec\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2},\ b\sin\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}\cdot\sec\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right).$$

613. 求过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一点$(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ 的法线方程.

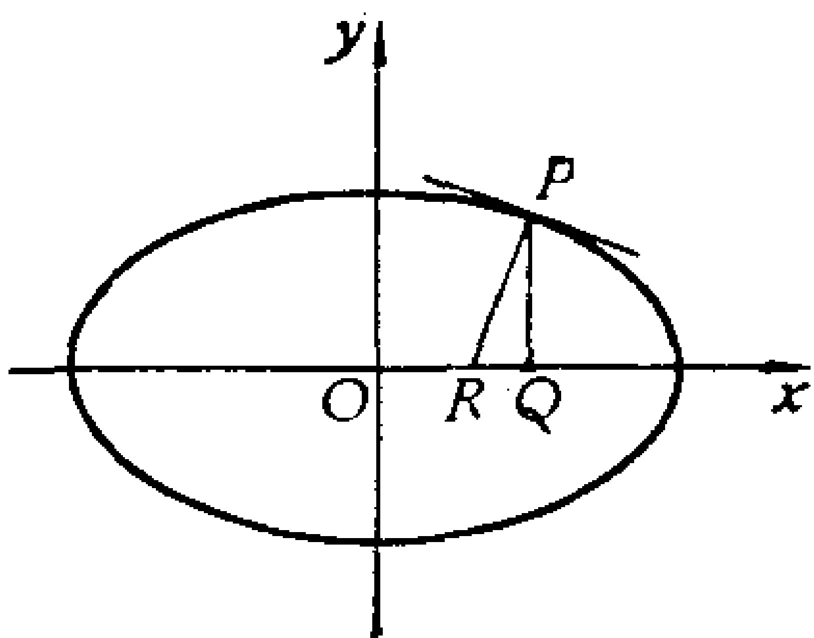
[解] 椭圆在点$(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$处的切线方程为 $\frac{x\cos\varphi}{a}+\frac{y\sin\varphi}{b}=1$, 即 $bx\cos\varphi+ay\sin\varphi=ab$. 因法线与切线互相垂直, 故可设法线方程为 $ax\sin\varphi-by\cos\varphi=\lambda$. $\because$ 法线过点$(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$, $\therefore$ $a^2\sin\varphi\cos\varphi-b^2\sin\varphi\cos\varphi=\lambda$. 故所求法线方程为

$$ax\sin\varphi-by\cos\varphi=(a^2-b^2)\sin\varphi\cos\varphi,$$

若 $\varphi\neq\frac{k\pi}{2}(k\in J)$, 可化为 $\frac{ax}{\cos\varphi}-\frac{by}{\sin\varphi}=a^2-b^2$.

614. 已知椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上一点 P 在 x 轴上的射影

为 Q, 点 P 的法线与 x 轴交点为 R. 求 OR 与 RQ 之比.



[解] 设椭圆上一点 P 的坐标为 (x_1, y_1), 过 P 的法线方程为 $a^2y_1x-b^2x_1y=(a^2-b^2)\cdot x_1y_1$. 令 $y=0$, 得 $x=\frac{a^2-b^2}{a^2}x_1$, 故点 R 的坐标为 $\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}x_1, 0\right)$, 点 Q 的坐标为 $(x_1, 0)$.

$$\therefore\quad OR=\frac{a^2-b^2}{a^2}x_1,\ RQ=x_1-\frac{a^2-b^2}{a^2}x_1=\frac{b^2}{a^2}x_1.$$

因此,
$$\frac{OR}{RQ}=\frac{a^2-b^2}{b^2}=\frac{c^2}{b^2}.$$

615. 设 P 为过椭圆一个焦点垂直于 x 轴的弦的一个端点, 若点 P 的法线恰好过短轴一个端点. 求椭圆的离心率.

[分析] $\because\ e=\frac{c}{a}$, $\therefore$ 可利用点 P 的法线过短轴端点,建立关于 a、c 的方程,从而求得离心率.

[解] 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 过右焦点垂直于 x 轴的直线方程为 $x=c$. 此直线与上半椭圆交点为 $P\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$, 过 P 的法线方程为 $y-\frac{b^2}{a}=\frac{a}{c}(x-c)$. $\because$ 法线过短轴的端点 $(0, -b)$, $\therefore\ -b-\frac{b^2}{a}=\frac{a}{c}(-c)$, 即 $ab=a^2-b^2$. 又 $c^2=a^2-b^2$, 故 $a\sqrt{a^2-c^2}=c^2$. 两边平方, 得 $a^4-a^2c^2=c^4$, 即 $\left(\frac{c}{a}\right)^4+\left(\frac{c}{a}\right)^2-1=0$. 解之, 得

$$\frac{c^2}{a^2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\quad \frac{c^2}{a^2}=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\text{(舍去)}.$$

故所求椭圆的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

616. 求直线 $lx+my+n=0$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的法线的条件.

[解] 设 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任意一点,则过此点

的法线方程(参见第613题)为 $ax\sin\theta-by\cos\theta-(a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta=0$. 它和方程 $lx+my+n=0$ 表示同一直线,故可得:

$a\sin\theta=\lambda l\cdots$①, $-b\cos\theta=\lambda m\cdots$②, $-(a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta=\lambda n\cdots$③, 其中 $\lambda\neq0$. $b^2\times$①$^2+a^2\times$②^2, 得 $\lambda^2(b^2l^2+a^2m^2)=a^2b^2$. 显然, l、m 不全为零, $\therefore\ \lambda^2=\dfrac{a^2b^2}{b^2l^2+a^2m^2}\cdots$④. ①×②, 得 $-ab\sin\theta\cos\theta=\lambda^2lm$, 即 $\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{\lambda^2lm}{ab}$. 代入③, 得 $\dfrac{a^2-b^2}{ab}\lambda^2lm=\lambda n\cdots$⑤. $\because\ \lambda\neq0$, $\therefore$ 当 l 或 m 为零时,必有 $n=0$; 若 $lm\neq0$, 则 $n\neq0$, 化⑤式为 $\dfrac{(a^2-b^2)^2}{a^2b^2}\lambda^2l^2m^2=n^2\cdots$⑥. ④代入⑥, 得 $\dfrac{(a^2-b^2)^2}{n^2}=\dfrac{a^2}{l^2}+\dfrac{b^2}{m^2}\cdots$⑦. 故所求条件为: 当 l 或 m 为零时, $n=0$; 当 l、m 均不为零时, a、b、l、m、n 的关系如⑦式.

617. 自 $P_0(x_0, y_0)$ 作椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的两切线, 切点分别为 P_1、P_2, 试求直线 P_1P_2 的方程.

[解] 设切点 P_1、P_2 的坐标为 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$, 则椭圆过点 P_1、P_2 的切线分别为

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1\cdots①,\quad \frac{x_2x}{a^2}+\frac{y_2y}{b^2}=1\cdots②.$$

$\because$ 两切线均过 $P_0(x_0, y_0)$,

$$\therefore\quad \frac{x_1x_0}{a^2}+\frac{y_1y_0}{b^2}=1\cdots③,\quad \frac{x_2x_0}{a^2}+\frac{y_2y_0}{b^2}=1\cdots④.$$

由③、④可知, P_1、P_2 在直线 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$ 上, 所以直线 P_1P_2 的方程为 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$.

[说明] 线段 P_1P_2 称为椭圆的切点弦.

618. 过定点 $P_0(x_0, y_0)$ 的动直线与椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 交于两点 P_1、P_2, 求过 P_1、P_2 的切线交点的轨迹.

[解] 设 $P(\alpha, \beta)$ 为轨迹上的任一点, 则直线 P_1P_2 的方程为 $\dfrac{\alpha x}{a^2}+\dfrac{\beta y}{b^2}=1$. $\because$ P_1P_2 过 $P_0(x_0, y_0)$, $\therefore$ $\dfrac{\alpha x_0}{a^2}+\dfrac{\beta y_0}{b^2}=1$,

以(x, y)代(α, β)，则得轨迹上的点的坐标所满足的方程$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$，即轨迹在直线$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$上.

很明显，$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$是点$P_0(x_0, y_0)$关于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的切点弦所在的直线方程. 它在椭圆内部的线段（即切点弦）不可能是两切线交点的轨迹. 设$P'(x', y')$为直线$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$上在椭圆外的任一点，则$\frac{x_0x'}{a^2}+\frac{y_0y'}{b^2}=1\cdots$①. 点$P'(x', y')$关于椭圆的切点弦方程为$\frac{x'x}{a^2}+\frac{y'y}{b^2}=1\cdots$②. 故$P_0(x_0, y_0)$满足②，即切点弦②过$P_0(x_0, y_0)$. $\therefore$ $P'(x', y')$为轨迹上的点.

[说明] 此轨迹称为$P_0(x_0, y_0)$关于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的极线，$P_0$称为此极线的极. 当$P_0$在椭圆外部时，$P_0$的极线与$P_0$的切点弦所在直线重合；当$P_0$在椭圆上，$P_0$的极线与过$P_0$的切线重合；当$P_0$在椭圆内部时，$P_0$的极线在椭圆外，但$P_0$不与椭圆中心重合.

619. **求过椭圆$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$的弦$lx+my+n=0(n\neq0)$的两端点的切线交点坐标.**

[分析] 设椭圆在弦的两端点切线的交点为P，则$lx+my+n=0$是点P关于椭圆的极线方程. 利用上题结论即可求点P的坐标.

[解] 设两切线交点P的坐标为(x_1, y_1)，则点P关于椭圆的极线方程为$b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2$. 因为极线方程即$lx+my+n=0$，故$b^2x_1=\lambda l$，$a^2y_1=\lambda m$，$a^2b^2=-\lambda n(\lambda\neq0$，且$n\neq0)$. 解得$x_1=\frac{la^2}{-n}$，$y_1=\frac{mb^2}{-n}$. 所以交点$P$的坐标是$\left(-\frac{la^2}{n}, -\frac{mb^2}{n}\right)$.

620. **如果$P_0(x_0, y_0)$在定直线$Ax+By+C=0(C\neq0)$上运动，求证P_0关于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的极线过一定点.**

[分析] $P_0(x_0, y_0)$在定直线$Ax+By+C=0$上运动，因而坐标x_0、y_0之间存在函数关系. 选取其中一个x_0(或y_0)作为参数，于是$P_0(x_0, y_0)$

关于椭圆的极线方程 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ 可化为只含一个参数的直线系方程，从而得证.

[证] $\because$ $P_0(x_0, y_0)$ 在定直线 $Ax+By+C=0$ 上运动，$\therefore$ $Ax_0+By_0+C=0$. 又 $A^2+B^2\neq0$，如 $B\neq0$，则 $y_0=-\frac{1}{B}(Ax_0+C)$；如 $A\neq0$，则 $x_0=-\frac{1}{A}(By_0+C)$. 代入极线方程 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$, 即得

$$x_0\left(\frac{x}{a^2}-\frac{Ay}{Bb^2}\right)=\frac{Cy}{Bb^2}+1 \quad 或 \quad y_0\left(-\frac{Bx}{Aa^2}+\frac{y}{b^2}\right)=\frac{Cx}{Aa^2}+1.$$

故极线必过

$$\begin{cases}\frac{x}{a^2}-\frac{Ay}{Bb^2}=0\\ \frac{Cy}{Bb^2}+1=0\end{cases} 的交点\left(-\frac{Aa^2}{C}, -\frac{Bb^2}{C}\right), 或 \begin{cases}-\frac{Bx}{Aa^2}+\frac{y}{b^2}=0\\ \frac{Cx}{Aa^2}+1=0\end{cases}$$

的交点 $\left(-\frac{Aa^2}{C}, -\frac{Bb^2}{C}\right)$. 而点 $\left(-\frac{Aa^2}{C}, -\frac{Bb^2}{C}\right)$ 为定点.

[说明] 定点 $\left(-\frac{Aa^2}{C}, -\frac{Bb^2}{C}\right)$ 即 $Ax+By+C=0$ 关于椭圆的极.

621. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的斜率为 m 的平行弦的中点轨迹.

[分析] 因轨迹上的点 P 所在弦的斜率均为 m，故可用动弦的参数方程代入椭圆方程，利用轨迹上的点是弦的中点，求出点 P 坐标所满足的方程.

[解] 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的斜率为 m 的弦的中点坐标为 $P(x_0, y_0)$，其倾角为 θ，则此弦的参数方程为 $\begin{cases}x=x_0+t\cos\theta\\ y=y_0+t\sin\theta\end{cases}$ (t 为参数). 代入椭圆方程并化简得 $(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)t^2+2(b^2x_0\cos\theta+a^2y_0\sin\theta)t+b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2=0$. 当 (x_0, y_0) 在椭圆内部时，$b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2<0$，故 $\Delta>0$，方程有两实根 t_1、t_2. 因为 (x_0, y_0) 为弦的中点，所以 $t_1+t_2=0$，即 $b^2x_0\cos\theta+a^2y_0\sin\theta=0$. 以 x、y 代换 x_0、y_0，并两边除以 $\cos\theta$，得 $b^2x+a^2\operatorname{tg}\theta\cdot y=0$. $\because$ $m=\operatorname{tg}\theta$，$\therefore$ 所求的轨迹方程为 $b^2x+a^2my=0$. 其轨迹为直线 $b^2x+a^2my=0$ 在椭圆内的一段.

［说明］ 椭圆的平行弦的中点轨迹称为此椭圆的直径，即过椭圆中心的弦.

622. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的平行于直线 l: $b^2x+a^2my=0$ 的弦的中点轨迹.

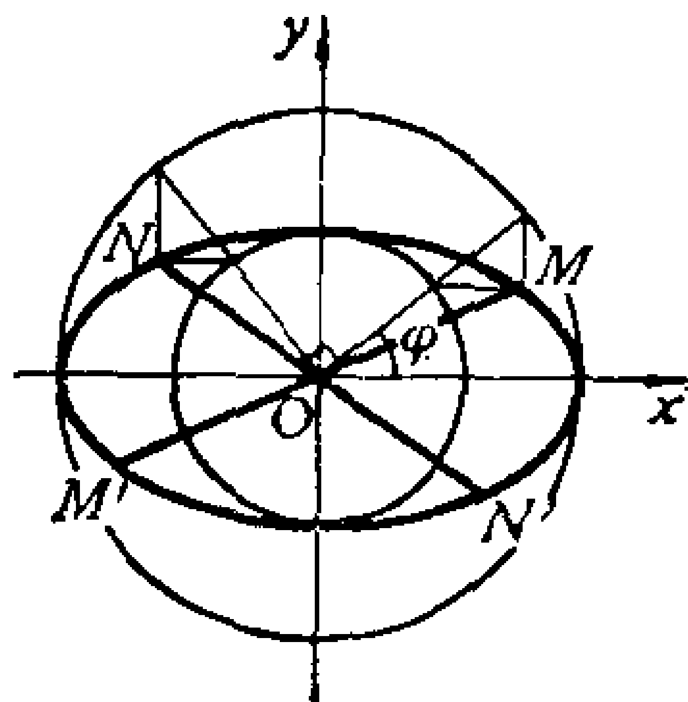
［解］ 设直线 l: $b^2x+a^2my=0$ 的斜率为 k, 则 $k=-\frac{b^2}{a^2m}$. 据上题结论: 斜率为 k 的平行弦中点的轨迹为 $b^2x+a^2ky=0$, 以 k 的值代入，得

$$b^2x+a^2\left(\frac{-b^2}{a^2m}\right)y=0, \quad 即 \quad y=mx.$$

［说明］ 按椭圆直径的定义，直线 $y=mx$ 在椭圆内那一条线段也是此椭圆的直径. 这条直径和直线 $b^2x+a^2my=0$ 在椭圆内的那条直径互为共轭直径.

623. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一直径的端点为 $M(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$、$M'(-a\cos\varphi, -b\sin\varphi)$. 求共轭直径的端点坐标.

［分析］ 直径 MM' 为已知，其共轭直径方程可求，再解方程组求共轭直径和椭圆的交点.



［解］ 直径 MM' 的方程是 $y=\frac{bx}{a}\operatorname{tg}\varphi$, 它的共轭直径 NN' 方程是 $y=-\frac{bx}{a}\operatorname{ctg}\varphi$. 代入椭圆方程得 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2\operatorname{ctg}^2\varphi}{a^2}=1$, 即 $\frac{x^2\csc^2\varphi}{a^2}=1$.

$$\therefore \quad x=\pm a\sin\varphi, \ y=\mp b\cos\varphi.$$

所以共轭直径和椭圆交点 N、N' 的坐标为

$$(a\sin\varphi, \ -b\cos\varphi) \quad 和 \quad (-a\sin\varphi, \ b\cos\varphi).$$

［说明］ (1) 解题过程中为使 $\operatorname{tg}\varphi$ 与 $\operatorname{ctg}\varphi$ 均有意义，假定 $\varphi\neq\frac{n\pi}{2}$ $(n\in J)$. 如 $\varphi=0$ 或 $\varphi=\pi$, 则直径与长轴重合，其共轭直径与短轴重合；端点坐标为 $(0, b)$ 和 $(0, -b)$. 如 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 或 $\varphi=\frac{3\pi}{2}$, 则直径与短轴重合，其共轭直径与长轴重合；端点坐标为 $(-a, 0)$ 和 $(a, 0)$. 这两种情况，均可包含在前面的结论之中，故结论对 φ 的一切值成立.

(2) 从本题结果可知椭圆互为共轭直径的两端点的离心角之差为 90°. 如果一直径的端点坐标为 (x_1, y_1)、$(-x_1, -y_1)$, 则其共轭直径的端点坐标为: $\left(-\frac{a}{b}y_1, \frac{b}{a}x_1\right)$、$\left(\frac{a}{b}y_1, -\frac{b}{a}x_1\right)$.

§3. 图象与区域

624. 作方程: (1) $y=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$, (2) $x=-\sqrt{1-4y^2}$ 的图象.

[解] (1) $y=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$, 即 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, 其中 $x\in[-3, 3]$, $y\geqslant 0$. 故图象为椭圆的上半部分(图 1).

(2) $x=-\sqrt{1-4y^2}$, 即 $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$, 其中 $x\leqslant 0$, $y\in\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

故图象为椭圆的左半部分(图 2).

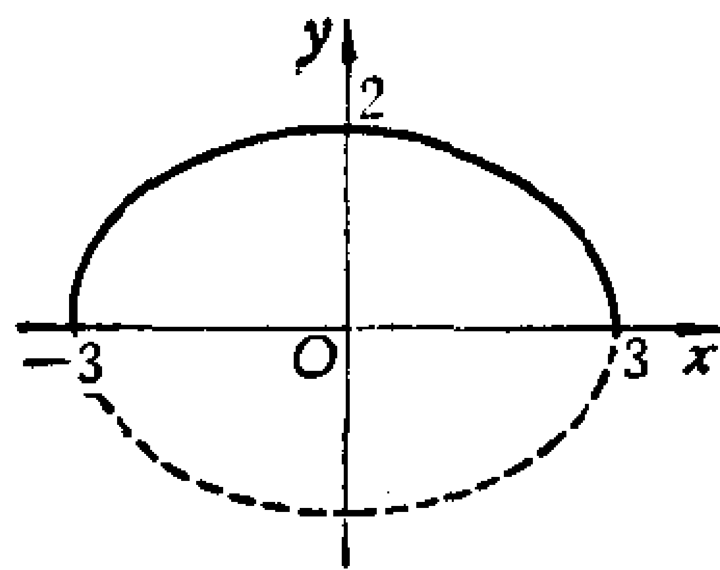


图 1

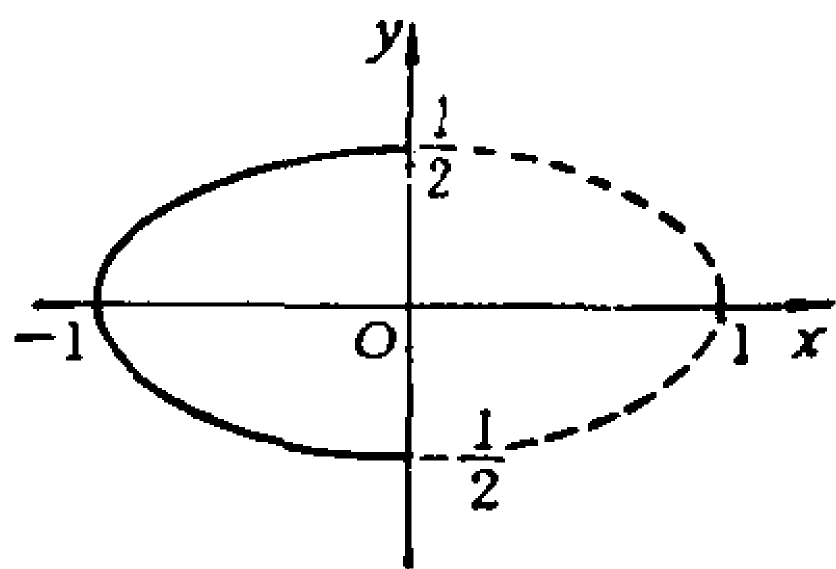


图 2

625. 作方程 $y=x+\sqrt{(x+1)(4-x)}$ 的图象.

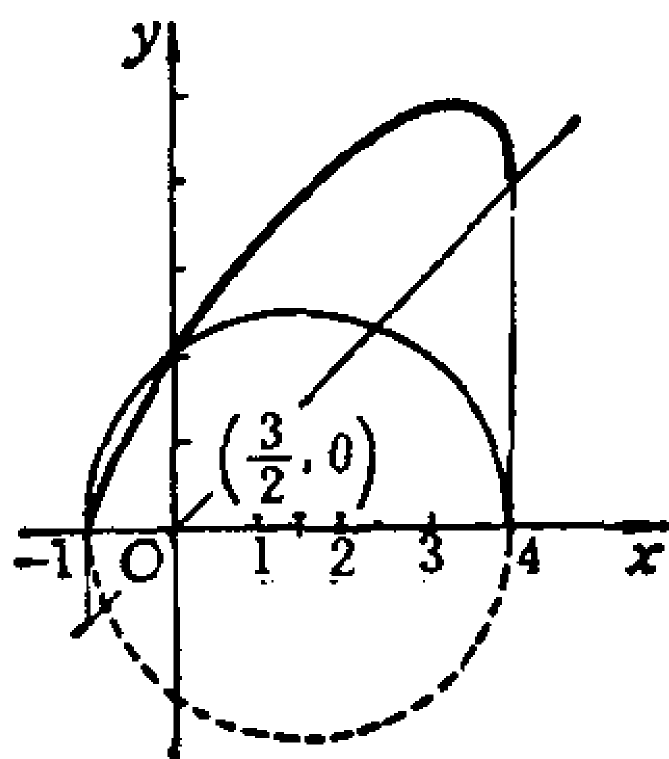
[解] ∵ $y=x+\sqrt{(x+1)(4-x)}$,

∴ $y-x=\sqrt{(x+1)(4-x)}\geqslant 0$,

且 $x\in[-1, 4]$. 令

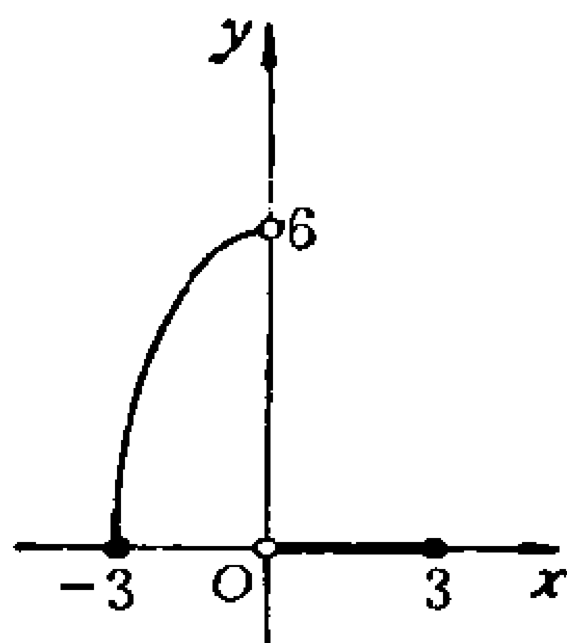
$$y_1=x,\ y_2=\sqrt{(x+1)(4-x)}.$$

方程 $y_1=x$ 为过原点 O 的直线; 方程



$y_2=\sqrt{(x+1)(4-x)}$，即 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y_2^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$，且 $y_2\geqslant 0$，为以 $\left(\frac{3}{2},0\right)$ 为中心，$\frac{5}{2}$ 为半径的上半圆．利用 $y=y_1+y_2$，可作出 $y=x+\sqrt{(x+1)(4-x)}$ 的图象．它是在直线 $y=x$ 上方的一段椭圆弧．

626．作方程 $y=\sqrt{9-x^2}-\frac{3x}{|x|}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$ 的图象．



［解］ ∵ $9-x^2\geqslant 0$，且 $x\neq 0$，

∴ $x\in[-3,0)\cup(0,3]$．

当 $x\in(0,3]$ 时，

$$y=\sqrt{9-x^2}-\sqrt{9-x^2}=0;$$

当 $x\in[-3,0)$ 时，

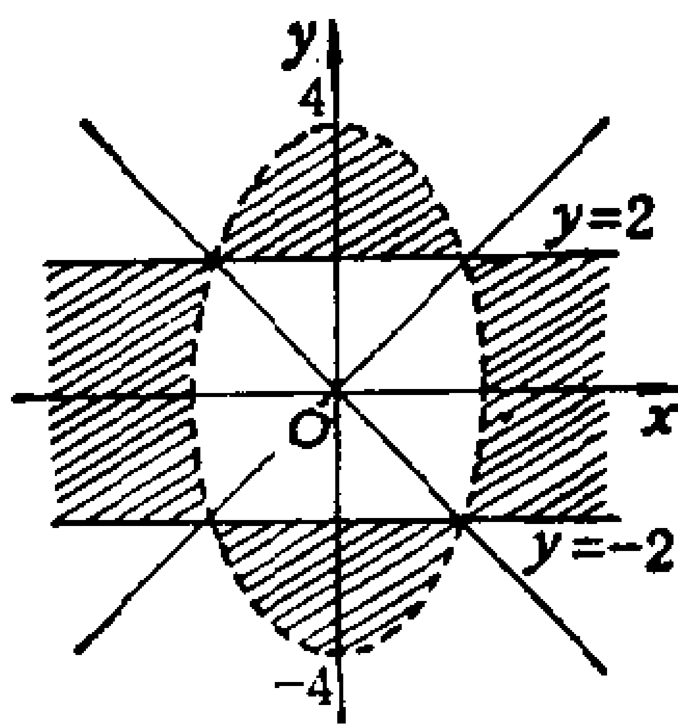
$$y=\sqrt{9-x^2}+\sqrt{9-x^2}=2\sqrt{9-x^2}\geqslant 0,$$

即 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$，但 $x\in[-3,0)$，$y\in[0,6)$．此图象为 x 轴上方，y 轴左方的一段椭圆弧和 x 正半轴上的一条线段．

627．已知曲线 $x^2\cos^2\theta+y^2\sin^2\theta=4$．

(1) 当 θ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 内变化时，求满足 $x^2\cos^2\theta+y^2\sin^2\theta=4$ 的点 (x,y) 所在的范围，并用图象表示之；

(2) 当 θ 在什么范围内时，曲线 $x^2\cos^2\theta+y^2\sin^2\theta=4$ 上的所有点都位于不等式 $x^2+y^2\leqslant 16$ 所表示的图形之中？$(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$



［分析］ (1) $x^2\cos^2\theta+y^2\sin^2\theta=4$ 可变形为 $x^2\cos^2\theta+(1-\cos^2\theta)y^2=4$，则根据 θ 的范围确定 $\cos^2\theta$ 的范围，从而可确定 (x,y) 的范围．

(2) 椭圆 $x^2\cos^2\theta+y^2\sin^2\theta=4$ 的两轴长是 $\frac{4}{|\cos\theta|}$ 和 $\frac{4}{|\sin\theta|}$．所以椭圆位于圆 $x^2+y^2=16$ 内部的充要条件是 $\frac{4}{|\cos\theta|}\leqslant 8$ 和 $\frac{4}{|\sin\theta|}\leqslant 8$．据此可确定 θ 的范围．

［解］ 将椭圆方程 $x^2\cos^2\theta+y^2\sin^2\theta=4$ 变形为

$$x^2\cos^2\theta+y^2(1-\cos^2\theta)=4,\quad 即\quad (x^2-y^2)\cos^2\theta=4-y^2.$$

当 $x^2=y^2$，即 $|x|=|y|$ 时，$|y|=2$；当 $x^2\neq y^2$，即 $|x|\neq|y|$ 时，

$$\cos^2\theta=\frac{4-y^2}{x^2-y^2}.\quad \because\ \frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2},\quad \therefore\ 0<\cos^2\theta<\frac{3}{4},$$

即 $0<\dfrac{4-y^2}{x^2-y^2}<\dfrac{3}{4}$.

如果 $|x|>|y|$，即 $x^2>y^2$，可得 $4-y^2>0$，且 $16-4y^2<3x^2-3y^2$. 即 $|y|<2$，且 $\dfrac{x^2}{\frac{16}{3}}+\dfrac{y^2}{16}>1$.

如果 $|x|<|y|$，即 $x^2<y^2$，可得 $4-y^2<0$，且 $-4y^2+16>3x^2-3y^2$. 即 $|y|>2$，且 $\dfrac{x^2}{\frac{16}{3}}+\dfrac{y^2}{16}<1$.

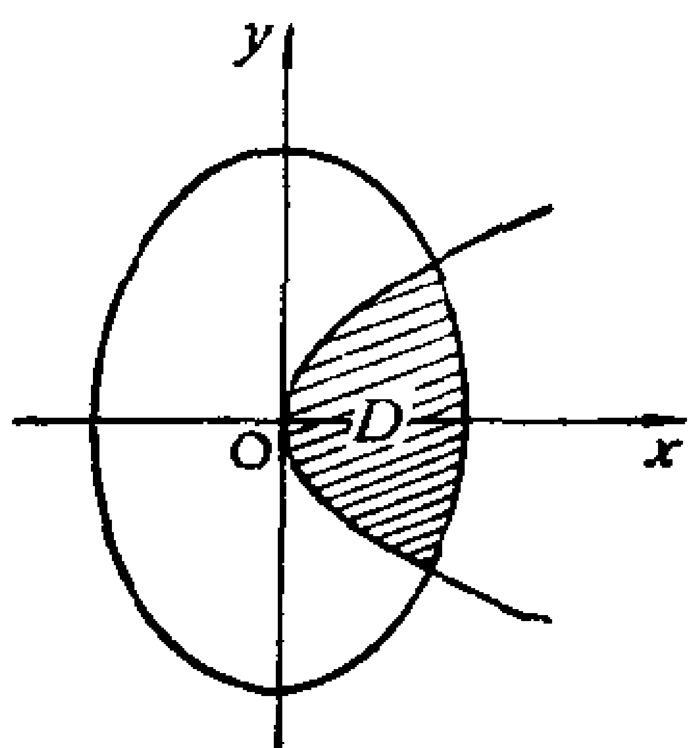
综上所述，满足 $x^2\cos^2\theta+y^2\sin^2\theta=4$ 的点 (x, y) 应是：

$$\begin{cases}|x|=|y|\\|y|=2,\end{cases}\qquad \begin{cases}|x|>|y|\\|y|<2\\\dfrac{x^2}{\frac{16}{3}}+\dfrac{y^2}{16}>1,\end{cases}\qquad \begin{cases}|x|<|y|\\|y|>2\\\dfrac{x^2}{\frac{16}{3}}+\dfrac{y^2}{16}<1.\end{cases}$$

将三组解用图象表示，即得满足条件的点的变化范围，如图中阴影部分所示(不包括椭圆边界，但边界上有四点 $\begin{pmatrix}|x|=2\\|y|=2\end{pmatrix}$ 适合).

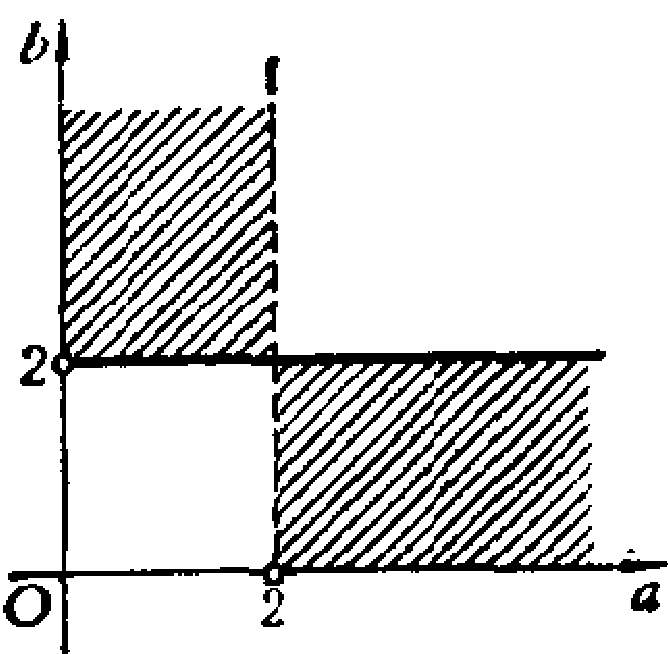
(2) 椭圆的两轴长是 $\dfrac{4}{|\cos\theta|}$，$\dfrac{4}{|\sin\theta|}$. 椭圆位于圆 $x^2+y^2=16$ 之中的充要条件是 $\dfrac{4}{|\cos\theta|}\leqslant 8$，且 $\dfrac{4}{|\sin\theta|}\leqslant 8$，即 $|\cos\theta|\geqslant\dfrac{1}{2}$ 且 $|\sin\theta|\geqslant\dfrac{1}{2}$. $\because\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$\therefore\ \dfrac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{3}$ 和 $\dfrac{2\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{5\pi}{6}$. 即当 $\dfrac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{3}$ 和 $\dfrac{2\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{5\pi}{6}$ 时，椭圆 $x^2\cos^2\theta+y^2\sin^2\theta=4$ 上的所有点都位于不等式 $x^2+y^2\leqslant 16$ 所表示的图形之中.

628. 描出点集 $D=\left\{(x, y)\ \middle|\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\leqslant 1，且\ y^2-2x\leqslant 0\right\}$ 的图象.



［解］ ∵ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leqslant 1$，∴ 点 (x, y) 在椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 的内部(包括边界). ∵ $y^2-2x\leqslant 0$，∴ 点 (x, y) 在抛物线 $y^2=2x$ 的内部（包括边界）. ∴ 点集 D 为上述两点集的交集，如图中阴影部分所示(包括边界).

629. 直线 $y=mx$ 和椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$ 的两个交点是 P、Q. (1) m 取何值时，线段 PQ 的长等于 $a+b$；(2) 如果 PQ 长等于 ab 时，求使 m 存在的 a、b 取值范围，并用图形表示出来.



［解］ (1) 设点 P、Q 的坐标分别为 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)，则 $y_1=mx_1$，$y_2=mx_2$. 以 $y=mx$ 代入椭圆方程，得 $b^2x^2+a^2m^2x^2=a^2b^2$，即

$$(b^2+a^2m^2)x^2-a^2b^2=0.$$

据韦达定理，有 $(x_1-x_2)^2=\frac{4a^2b^2}{b^2+a^2m^2}$.

$$\because\quad |PQ|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(1+m^2)(x_1-x_2)^2,$$

$$\therefore\quad (1+m^2)\frac{4a^2b^2}{b^2+a^2m^2}=(a+b)^2.$$

化简得 $$m^2[a^2(a+b)^2-4a^2b^2]=4a^2b^2-b^2(a+b)^2,$$

即 $$m^2a^2(a-b)(a+3b)=b^2(a-b)(3a+b).$$

当 $a=b$ 时，m 为任何实数，均有 $|PQ|=a+b$；当 $a\neq b$ 时，则

$$m=\pm\frac{b\sqrt{(a+3b)(3a+b)}}{a(a+3b)}.$$

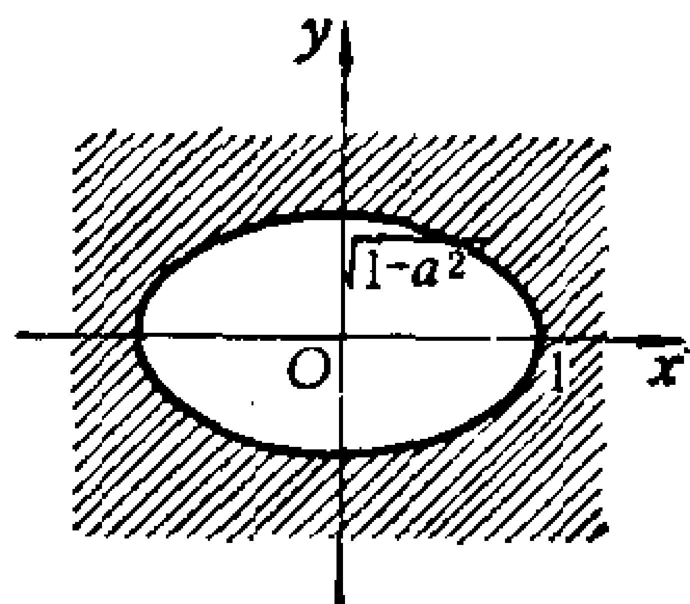
(2) 若 $|PQ|=ab$，则由 (1) 得 $(1+m^2)\frac{4a^2b^2}{b^2+a^2m^2}=a^2b^2$，即 $(a^2-4)m^2=4-b^2$. 故 $a=b=2$，或 $\frac{4-b^2}{a^2-4}\geqslant 0$. 即

$$\begin{cases}b^2\leqslant 4\\a^2>4\end{cases}\text{ 或 }\begin{cases}b^2\geqslant 4\\a^2<4.\end{cases}\quad\because\ a>0,\ b>0,$$

$$\therefore\ \begin{cases}0<b\leqslant 2\\a>2\end{cases}\text{ 或 }\begin{cases}b\geqslant 2\\0<a<2.\end{cases}$$

a、b 的取值范围为图中阴影部分(不包括边界)和一条去掉端点的射线(图中粗线).

630. 设 $A(a,\ 0)\ (0<a<1)$ 为直角坐标系中的定点, (1) 求过点 $P(\cos\theta,\ \sin\theta)\ (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 且与直线 AP 垂直的直线 l 的方程; (2) 点 P 移动时, 求直线 l 通过的点的范围.



[解] (1) 若 θ 不等于 0、π、2π, 也不等于 $\arccos a$、$2\pi-\arccos a$, 则直线 AP 有不为零的斜率: $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta-a}$. 从而直线 l 的斜率为 $\dfrac{a-\cos\theta}{\sin\theta}$.

∴ l 的方程为

$$y-\sin\theta=\frac{a-\cos\theta}{\sin\theta}(x-\cos\theta).$$

化简得 $$(\cos\theta-a)x+y\sin\theta=1-a\cos\theta\cdots①.$$

容易验证, 方程①也包含当 θ 取上述特殊值时的情形.

(2) 设 $P(x,\ y)$ 是直线 l 上一动点, 则 $(\cos\theta-a)x+y\sin\theta=1-a\cos\theta$,

把它变形成 $$(x+a)\cos\theta+y\sin\theta=1+ax.$$

于是得 $$\frac{(x+a)\cos\theta+y\sin\theta}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}=\frac{1+ax}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}\cdots②.$$

令 $$\frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}=\sin\alpha,\quad \frac{y}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}=\cos\alpha,$$

则②式可化成 $\sin(\alpha+\theta)=\dfrac{1+ax}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}$.

$$\because\ |\sin(\alpha+\theta)|\leqslant 1,\quad \therefore\ \left|\frac{1+ax}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}\right|\leqslant 1.$$

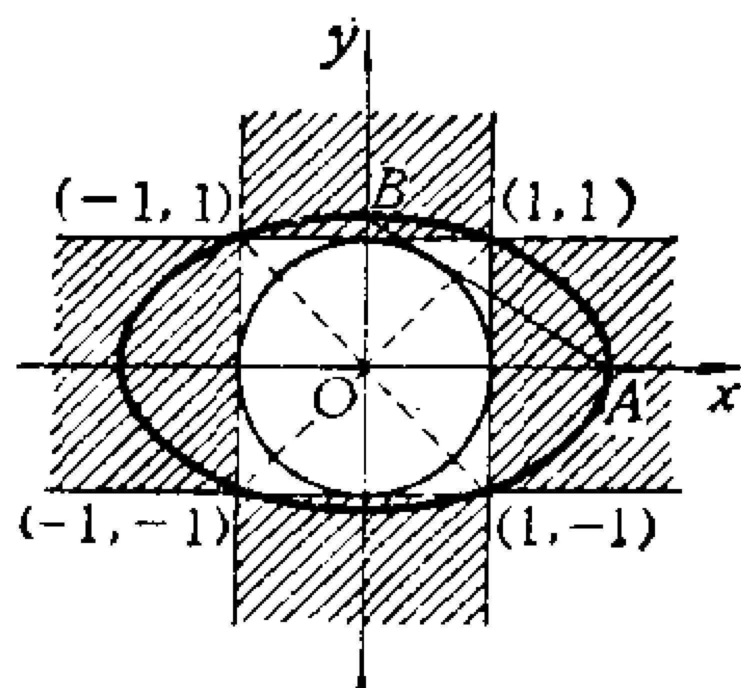
平方得 $(1+ax)^2\leqslant(x+a)^2+y^2$, 即 $1+2ax+a^2x^2\leqslant x^2+2ax+a^2+y^2$.

$$\therefore\ x^2(1-a^2)+y^2\geqslant 1-a^2,\quad 即\quad x^2+\frac{y^2}{1-a^2}\geqslant 1.$$

所以直线 l 通过的点的范围为图中椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{1-a^2}=1$ 的外部(包括边界部分).

631. (1) 求以圆 $x^2+y^2=1$ 上一动点 $P(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ 的切线与 x、y 轴的交点 A、B 为两个顶点, 原点 O 为中心的椭圆方程;

(2) 如果 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 求证椭圆经过四个定点, 并求这四个点的坐标, 以及这些椭圆上的点所存在的范围 D.



[解] (1) 圆 $x^2+y^2=1$ 在点 $P(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ 的切线方程为 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=1$…①; 它和 x、y 轴交于点 $A(\sec\alpha,\ 0)$、$B(0,\ \csc\alpha)$. 故所求的椭圆方程为 $x^2\cos^2\alpha+y^2\sin^2\alpha=1$…②.

(2) 把②变形为

$$x^2\cos^2\alpha+y^2(1-\cos^2\alpha)-1=0,$$

即 $$(x^2-y^2)\cos^2\alpha+y^2-1=0\cdots③,$$

所以椭圆过 $\begin{cases}x^2-y^2=0\\ y^2-1=0\end{cases}$ 的交点 $(1,\ 1)$、$(-1,\ 1)$、$(-1,\ -1)$、$(1,\ -1)$.

当 $x^2-y^2=0$ 时, 有 $x^2=y^2=1$. 当 $x^2-y^2\neq0$ 时, 从③得 $\cos^2\alpha=\dfrac{y^2-1}{y^2-x^2}$.

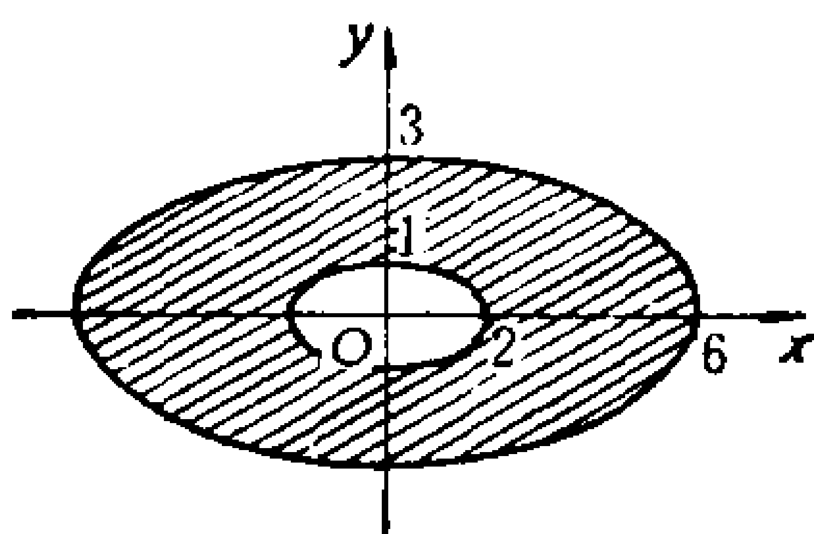
$\because\ \alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\therefore\ 0<\cos^2\alpha<1$. 于是椭圆②上的点 $(x,\ y)$ 应满足

$$0<\frac{y^2-1}{y^2-x^2}<1\cdots④,$$

若 $x^2<y^2$, 则由④得 $y^2>1$, 且 $x^2<1$; 若 $x^2>y^2$, 则由④得 $y^2<1$, 且 $x^2>1$.

因此所求的点集 D 是上述四个定点, 及图中阴影部分(不包括边界).

632. **求曲线系 $x^2+4y^2-8x\cos\theta-16y\sin\theta+12=0$ 中各曲线上的点所在的区域, 并使区域内的点都在曲线系上.**



[分析] 先考察对于任意 θ_0 所确定的曲线上任意一点 $P_0(x_0,\ y_0)$ 的存在范围. 再对于上述范围内的任意点 $P_1(x_1,\ y_1)$, 证明它必在曲线系的某一曲线 $x^2+4y^2-8x\cos\theta_1-16y\sin\theta_1+12=0$ 上.

[证] 若 $P_0(x_0,\ y_0)$ 是由任一 θ_0 所确定的曲线上的一点, 则 $x_0^2+4y_0^2-8x_0\cos\theta_0-16y_0\sin\theta_0+12=0$, ($x_0$、$y_0$ 不全为0). $\therefore\ 8(x_0\cos\theta_0+2y_0\sin\theta_0)=x_0^2+4y_0^2+12$. 用 $\sqrt{x_0^2+4y_0^2}$ 除方程两边, 得

$$\frac{x_0\cos\theta_0+2y_0\sin\theta_0}{\sqrt{x_0^2+4y_0^2}}=\frac{x_0^2+4y_0^2+12}{8\sqrt{x_0^2+4y_0^2}}\cdots①.$$

令
$$\sin\varphi=\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+4y_0^2}},\quad \cos\varphi=\frac{2y_0}{\sqrt{x_0^2+4y_0^2}},$$

则①式化成

$$\sin(\varphi+\theta_0)=\frac{x_0^2+4y_0^2+12}{8\sqrt{x_0^2+4y_0^2}};\quad \therefore\quad 0<\frac{x_0^2+4y_0^2+12}{8\sqrt{x_0^2+4y_0^2}}\leqslant 1,$$

即
$$(\sqrt{x_0^2+4y_0^2})^2-8\sqrt{x_0^2+4y_0^2}+12\leqslant 0.$$

从而
$$2\leqslant\sqrt{x_0^2+4y_0^2}\leqslant 6,\quad \therefore\ 4\leqslant x_0^2+4y_0^2\leqslant 36,$$

即
$$\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{1}\geqslant 1,\quad 且\quad \frac{x_0^2}{36}+\frac{y_0^2}{9}\leqslant 1.$$

$\therefore$ 点 $P_0(x_0,\ y_0)$ 在两个椭圆:

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1\quad 和\quad \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$$

之间(包括边界)的环形区域内.

又,若任一点 $P_1(x_1,\ y_1)$ 在上述区域内,则必有

$$\frac{x_1^2}{4}+y_1^2\geqslant 1\quad 且\quad \frac{x_1^2}{36}+\frac{y_1^2}{9}\leqslant 1,\quad 即\quad 0<\frac{x_1^2+4y_1^2+12}{8\sqrt{x_1^2+4y_1^2}}\leqslant 1.$$

所以存在角 ω 使

$$\sin\omega=\frac{x_1^2+4y_1^2+12}{8\sqrt{x_1^2+4y_1^2}}.$$

因为
$$\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+4y_1^2}}\right)^2+\left(\frac{2y_1}{\sqrt{x_1^2+4y_1^2}}\right)^2=1,$$

令
$$\sin\varphi=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+4y_1^2}},\quad \cos\varphi=\frac{2y_1}{\sqrt{x_1^2+4y_1^2}};$$

且 $\theta_1=\omega-\varphi$. 则

$$\sin\omega=\sin(\theta_1+\varphi)=\frac{2y_1}{\sqrt{x_1^2+4y_1^2}}\sin\theta_1+\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+4y_1^2}}\cos\theta_1.$$

$$\therefore\quad \frac{2y_1\sin\theta_1+x_1\cos\theta_1}{\sqrt{x_1^2+4y_1^2}}=\frac{x_1^2+4y_1^2+12}{8\sqrt{x_1^2+4y_1^2}},$$

即
$$x_1^2+4y_1^2-8x_1\cos\theta_1-16y_1\sin\theta_1+12=0.$$

所以区域内的点都在此曲线系上.

§4. 平移、旋转、对称变换

633. 设 θ 是实参数，求证椭圆 C: $4x^2+y^2-8x\cos\theta-4y\sin^2\theta-\sin^2 2\theta=0$ 的形状、大小不变；且如果 $\theta\neq\frac{n\pi}{2}$, $n\in J$ 时，原点在椭圆 C 与 y 轴的两个交点之间的线段上.

[证] 为化椭圆 C 的方程为标准式，将坐标轴平移到新原点 $O'(x_0, y_0)$，则 $\begin{cases}x=x'+x_0\\ y=y'+y_0,\end{cases}$ 代入椭圆 C 的方程，得

$$4(x'+x_0)^2+(y'+y_0)^2-8(x'+x_0)\cos\theta-4(y'+y_0)\sin^2\theta-\sin^2 2\theta=0,$$

即
$$4x'^2+y'^2+8(x_0-\cos\theta)x'+2(y_0-2\sin^2\theta)y'$$
$$+4x_0^2+y_0^2-8x_0\cos\theta-4y_0\sin^2\theta-\sin^2 2\theta=0.$$

取 $\begin{cases}x_0=\cos\theta\\ y_0=2\sin^2\theta,\end{cases}$ 则 $4x'^2+y'^2=4$，即 $\frac{x'^2}{1}+\frac{y'^2}{4}=1$. 椭圆 C 的半长轴 $a=2$，半短轴 $b=1$，即形状、大小不变. 椭圆 C 与 y 轴两交点的纵坐标 y_1、y_2 是方程 $y^2-4y\sin^2\theta-\sin^2 2\theta=0$ 的两根，$\therefore\ y_1\cdot y_2=-\sin^2 2\theta$，当且仅当 $\theta\neq\frac{n\pi}{2}$ 时，$y_1\cdot y_2<0$，$\therefore\ y_1$、y_2 异号. 故原点在椭圆 C 与 y 轴两个交点之间的线段上.

634. 已知圆心坐标为 $(1, 1)$，半径为 1 的圆方程是 $f(x, y)=0$. (1) 把方程 $f(x^2, y^2)=0$ 表示为两条二次曲线；(2) 把坐标轴围绕原点转动 $45°$，求(1)中两条二次曲线的标准方程.

[解] (1) $\because\ f(x, y)=(x-1)^2+(y-1)^2-1$,

$$\therefore\ f(x^2, y^2)=(x^2-1)^2+(y^2-1)^2-1$$
$$=(x^2-1)^2+(y^2-1+1)(y^2-1-1)$$
$$=(x^2-1)^2+y^4-2y^2=(x^2+y^2-1)^2-2x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2+\sqrt{2}xy-1)(x^2+y^2-\sqrt{2}xy-1).$$

$\therefore\ f(x^2, y^2)=0$ 表示下列两条二次曲线:

$$x^2+\sqrt{2}xy+y^2-1=0\cdots①,\ x^2-\sqrt{2}xy+y^2-1=0\cdots②.$$

(2) 设新坐标系为 $x'Oy'$，则

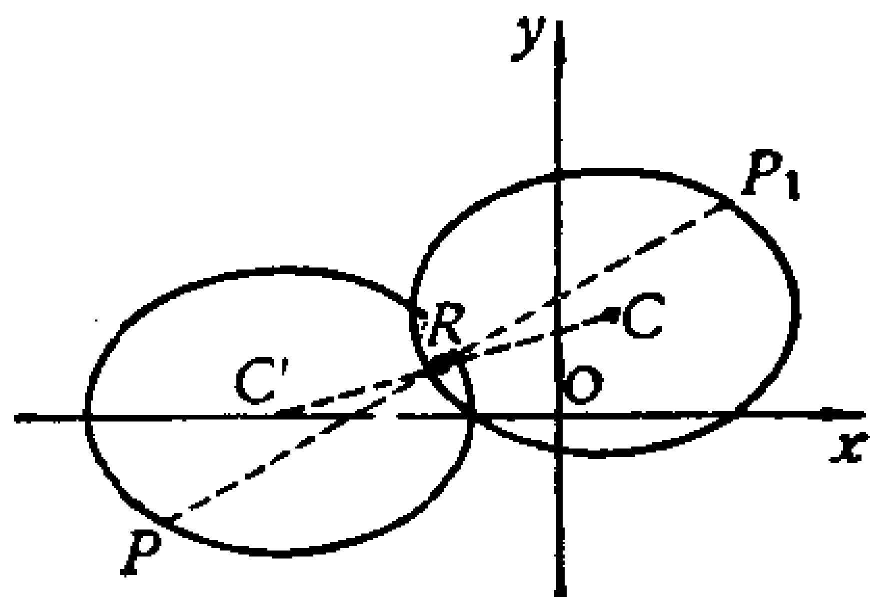
$$\begin{cases} x=x'\cos 45°-y'\sin 45°=\dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}} \\ y=x'\sin 45°+y'\cos 45°=\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

代入①与②，化简得：

$$\frac{x'^2}{(\sqrt{2-\sqrt{2}})^2}+\frac{y'^2}{(\sqrt{2+\sqrt{2}})^2}=1,$$

$$\frac{x'^2}{(\sqrt{2+\sqrt{2}})^2}+\frac{y'^2}{(\sqrt{2-\sqrt{2}})^2}=1.$$

635. 试求椭圆 C：$\dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$ 关于点 $R(-2,1)$ 对称的椭圆 C' 的方程.



[解]　设椭圆 C 上任意一点 $P_1(x_1, y_1)$ 与椭圆 C' 上的点 $P(x, y)$，关于点 $R(-2,1)$ 对称，则

$$\frac{x_1+x}{2}=-2,\quad \frac{y_1+y}{2}=1.$$

$$\therefore\quad x_1=-4-x,\ y_1=2-y.$$

$$\because\quad \frac{(x_1-1)^2}{16}+\frac{(y_1-2)^2}{9}=1,\quad \therefore\quad \frac{(-x-5)^2}{16}+\frac{(-y)^2}{9}=1,$$

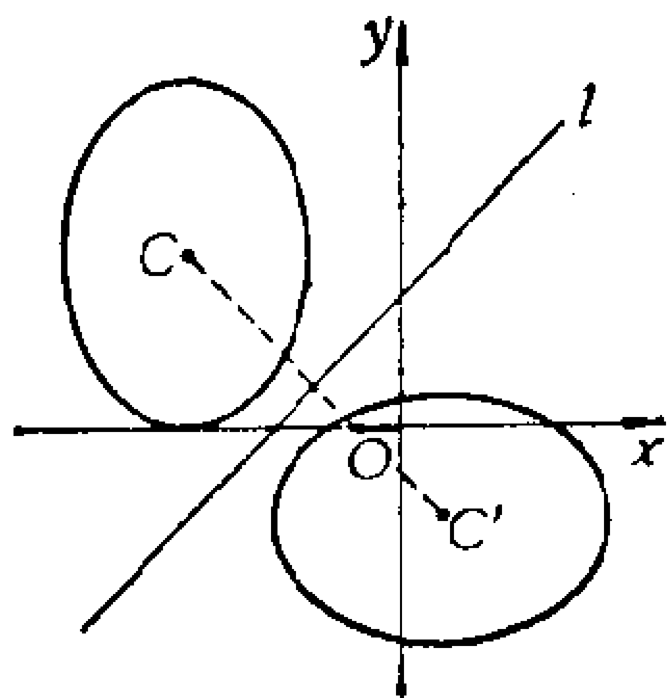
即
$$\frac{(x+5)^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1.$$

[说明]　求与已知曲线对称的曲线方程，可作求轨迹问题看待. 已知曲线 $F(x, y)=0$ 上的点 $P_1(x_1, y_1)$，经过对称变换后变为未知曲线上的对应点 $P(x, y)$，x_1、y_1 的作用与参数相同. 利用变换条件，建立 x_1、y_1 与 x、y 之间的两个方程①与②，$\because$ P_1 在曲线 $F(x, y)=0$ 上，$\therefore$ $F(x_1, y_1)=0$…③. 从方程①、②、③消去 x_1、y_1，即得所求曲线的方程.

636. 求椭圆 C：$\dfrac{(x+5)^2}{9}+\dfrac{(y-4)^2}{16}=1$ 关于直线 l：$x-y+3=0$ 对称的椭圆 C' 的方程.

[解]　设椭圆 C 上任意一点 $P_1(x_1, y_1)$ 与椭圆 C' 上的点 $P(x, y)$ 关于

直线 l 对称，则



$$\frac{x_1+x}{2}-\frac{y_1+y}{2}+3=0\cdots①,$$

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=-1\cdots②.$$

解方程组①与②，得 $x_1=y-3,\ y_1=x+3$.

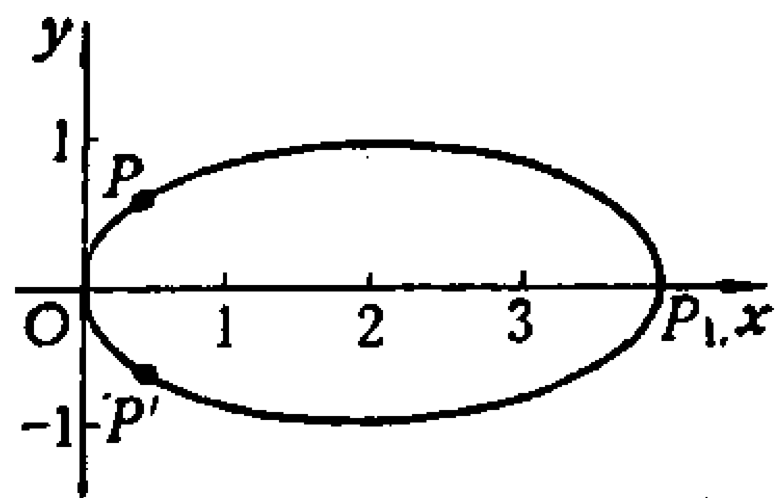
$$\because\quad \frac{(x_1+5)^2}{9}+\frac{(y_1-4)^2}{16}=1,$$

$$\therefore\quad \frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{9}=1.$$

此即椭圆 C' 的方程。

§5. 最大值、最小值

637. 在椭圆 $x^2+4y^2=4x$ 上，求使 $z=x^2-y^2$ 取得最大值和最小值的点 P 的坐标.



[分析] 椭圆 $x^2+4y^2=4x$ 上点的坐标 x、y 间存在相依关系，从中解出 y，代入 $z=x^2-y^2$ 中，可使 z 成为单变量函数. 在求该函数最大(最小)值时应注意自变量的允许值范围.

[解一] 设 $P(x,\ y)$ 为椭圆 $x^2+4y^2=4x$ 上一点，则 $y^2=\frac{1}{4}(4x-x^2)$，代入 $z=x^2-y^2$ 得 $z=x^2-\frac{1}{4}(4x-x^2)$，即 $z=\frac{5}{4}\left(x-\frac{2}{5}\right)^2-\frac{1}{5}$. $\because P(x,y)$ 是椭圆 $x^2+4y^2=4x$ 上的点， $\therefore 4x-x^2=4y^2\geqslant 0,\ 0\leqslant x\leqslant 4$.

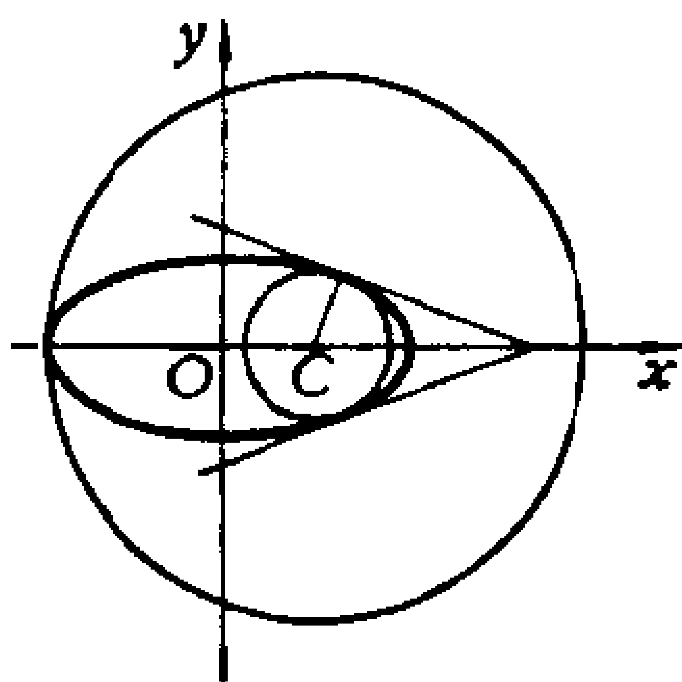
故 $\begin{cases}x=\frac{2}{5}\\ y=\pm\frac{3}{5}\end{cases}$ 时，z 有最小值 $-\frac{1}{5}$； $\begin{cases}x=4\\ y=0\end{cases}$ 时，z 有最大值 16. 即椭圆 $x^2+4y^2=4x$ 上使 $z=x^2-y^2$ 取得最大值的点为 $P_1(4,\ 0)$； 取得最小值的点为 $P\left(\frac{2}{5},\ \frac{3}{5}\right)$ 或 $P'\left(\frac{2}{5},\ -\frac{3}{5}\right)$.

［解二］　将已知椭圆方程化为 $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$，设椭圆上动点 P 为 $(2+2\cos\theta,\ \sin\theta)$.

$$\therefore\quad z=x^2-y^2=(2+2\cos\theta)^2-\sin^2\theta$$
$$=5\cos^2\theta+8\cos\theta+3=5\left(\cos\theta+\frac{4}{5}\right)^2-\frac{1}{5}.$$

$\therefore$ 当 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$，即点 P 坐标为 $\left(\frac{2}{5},\ \frac{3}{5}\right)$ 或 $\left(\frac{2}{5},\ -\frac{3}{5}\right)$ 时，$z_{\min}=-\frac{1}{5}$；当 $\cos\theta=1$，即点 P 坐标为 $(4,\ 0)$ 时，$z_{\max}=16$.

638. 椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 与圆 $(x-1)^2+y^2=r^2$ 有公共点，(1) 求半径 r 的最小值与最大值；(2) 证明 r 取最小值或最大值时，两条曲线在公共点处的切线重合.



［分析］　两曲线有公共点，即它们组成的方程组有实解. 而所给的两个二元二次方程中，圆方程 $(x-1)^2+y^2=r^2$ 包含参数 r，于是可通过二元二次方程组有实解的条件，定出参数 r 的变化范围，从而求出 r 的最小(最大)值.

［解］　(1) 由椭圆方程 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 得 $y^2=1-\frac{x^2}{4}\cdots$①. 代入圆方程，则有 $r^2=\frac{3}{4}x^2-2x+2=\frac{3}{4}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\cdots$②. 由椭圆方程可知 $-2\leqslant x\leqslant 2$，$\therefore$ 当 $x=\frac{4}{3}$ 时，r^2 有最小值 $\frac{2}{3}$，即 $r_{\min}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 又 $-2-\frac{4}{3}\leqslant x-\frac{4}{3}\leqslant 2-\frac{4}{3}$，从而 $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2\leqslant\left(-\frac{10}{3}\right)^2$，故 $r^2=\frac{3}{4}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\leqslant 9$. $\therefore$ 当 $x=-2$ 时，r^2 有最大值 9，$r_{\max}=3$.

(2) 设椭圆和圆的公共点为 $(x_0,\ y_0)$，则椭圆在这点的切线方程是 $\frac{x_0}{4}x+y_0y=1\cdots$③；圆在这点的切线方程是 $(x_0-1)(x-1)+y_0y=r^2\cdots$④. 当 r 取最小值 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 时，由②可知 $x_0=\frac{4}{3}$，代入①得 $y_0=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$，此时切线③与④都是 $\frac{1}{3}x\pm\frac{\sqrt{5}}{3}y=1$. 同理可证，当 r 取最大值 3 时，椭圆与圆的公

共点坐标为 $(-2, 0)$，切线③与④分别为 $-\frac{1}{2}x=1$，$-3x=6$，也重合. 故 r 取最小值或最大值时，两条曲线在公共点处的切线重合.

639. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的切线夹在椭圆对称轴之间的线段 $|AB|$ 长的最小值，以及达到最小值时的切点坐标.

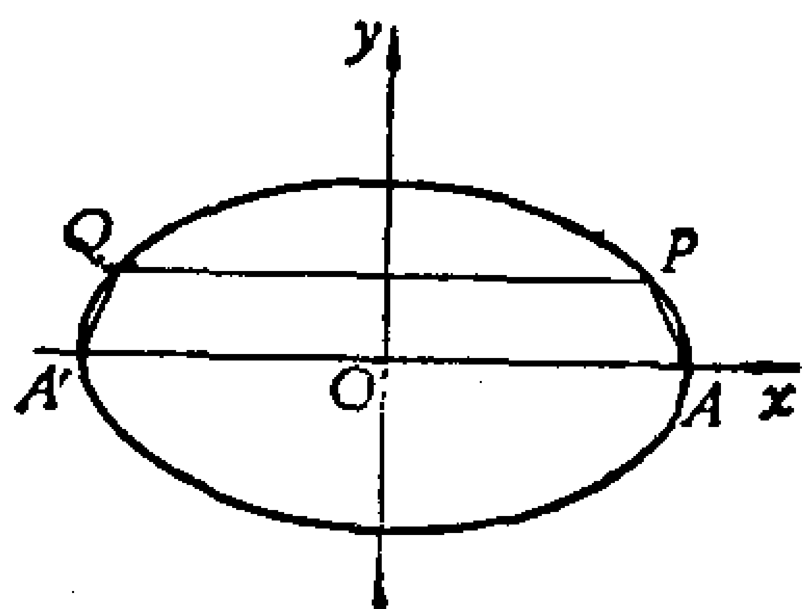
[分析] 线段 $|AB|$ 之长随切点而变化，故可取切点的离心角 φ 为参数，写出切线方程，即可得 $|AB|^2$ 的函数表达式，进而求得其最小值.

[解] 设切点为 $P(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$，则椭圆切线方程为 $\frac{x}{a}\cos\varphi+\frac{y}{b}\sin\varphi=1$. 切线与椭圆对称轴的交点坐标为 $A(a\sec\varphi, 0)$、$B(0, b\csc\varphi)$. $\therefore |AB|^2=a^2\sec^2\varphi+b^2\csc^2\varphi=a^2+b^2+a^2\mathrm{tg}^2\varphi+b^2\mathrm{ctg}^2\varphi\geqslant a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$. 当 $a^2\mathrm{tg}^2\varphi=b^2\mathrm{ctg}^2\varphi$，即 $\mathrm{tg}^2\varphi=\frac{b}{a}$，$\cos\varphi=\pm\sqrt{\frac{a}{a+b}}$，$\sin\varphi=\pm\sqrt{\frac{b}{a+b}}$ 时，$|AB|_{\min}=a+b$. 此时切点坐标分别为

$$\left(a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right)、\left(-a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right)、$$

$$\left(-a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, -b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right)、\left(a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, -b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right).$$

640. 求以长轴为一底的椭圆内接梯形的最大面积.



[解] 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，内接梯形另一底的一个端点 P 的坐标为 $(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$（$\varphi$ 为锐角），则其面积

$$S=(a\cos\varphi+a)b\sin\varphi=ab(1+\cos\varphi)\sin\varphi$$

$$=4ab\cos^3\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$$

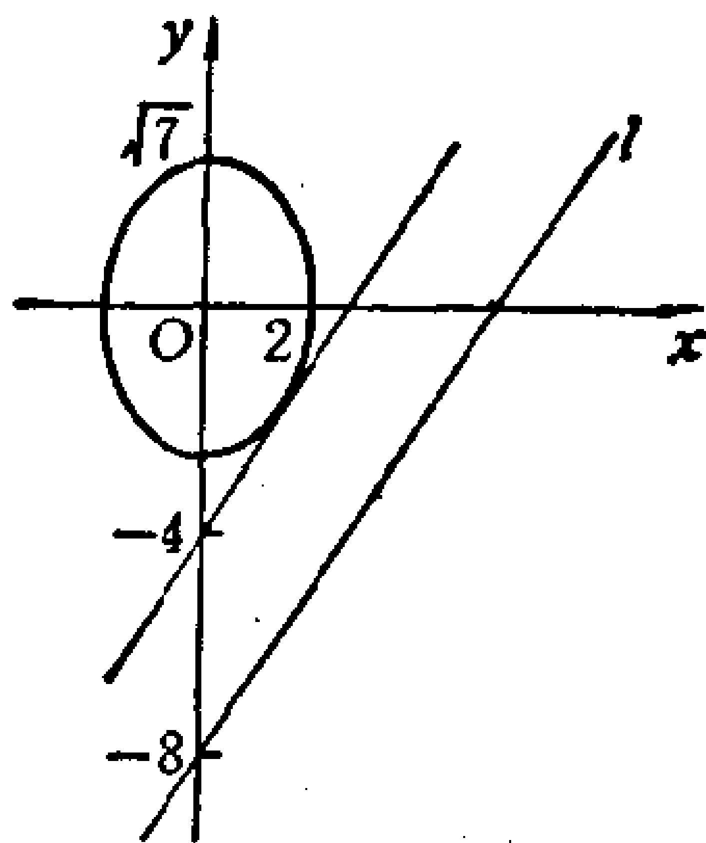
$$=\frac{4ab}{\sqrt{3}}\sqrt{3\cos^6\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$\leqslant\frac{4ab}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{\left(\cos^2\frac{\varphi}{2}+\cos^2\frac{\varphi}{2}+\cos^2\frac{\varphi}{2}+3\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^4}}{4^2}$$

$$=\frac{9ab}{4\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}ab.$$

当且仅当 $\cos^2\frac{\varphi}{2}=3\sin^2\frac{\varphi}{2}$，即 $\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{3}$，亦即 $\varphi=30°$ 时，椭圆内接梯形的面积最大，其最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$.

641. 在椭圆 $7x^2+4y^2=28$ 上求一点，使它到直线 l：$3x-2y-16=0$ 的距离最短，并求此距离.



［分析］ 椭圆上到直线 l 距离最短的点，是和此直线平行的两条切线中的一条的切点.

［解］ 直线 l：$3x-2y-16=0$ 的斜率 $k=\frac{3}{2}$. 斜率为 $\frac{3}{2}$ 的、椭圆 $7x^2+4y^2=28$ 的切线方程是 $y=\frac{3}{2}x\pm4$. 取 $y=\frac{3}{2}x-4$，从方程组

$\begin{cases}y=\frac{3}{2}x-4\\7x^2+4y^2=28\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{3}{2}\\y=-\frac{7}{4},\end{cases}$ 即为切点坐标. 故椭圆上到直线距离最短的点为 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{7}{4}\right)$，最短距离

$$d=\frac{-\left(3\cdot\frac{3}{2}+2\cdot\frac{7}{4}-16\right)}{\sqrt{13}}=\frac{8}{\sqrt{13}}.$$

642. 椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 被短轴分成两个半椭圆，求这个半椭圆(包括短轴)的最大的内切圆半径.

［分析］ 由于半椭圆关于长轴对称，故最大的内切圆应与半椭圆被长轴所分的两部分都相切，且和短轴相切.

［解］ 设所求半椭圆的最大内切圆的方程为 $(x-r)^2+y^2=r^2$，即 $y^2=2rx-x^2$. 代入椭圆方程，得 $b^2x^2+a^2(2rx-x^2)-a^2b^2=0$，即 $(b^2-a^2)x^2+2a^2rx-a^2b^2=0$. ∵ 此圆是半椭圆的内切圆，∴ $\Delta=4a^4r^2+4a^2b^2(b^2-a^2)=0$，　故 $r^2=b^2\frac{a^2-b^2}{a^2}=b^2e^2$，∴ $r=eb$.

［说明］ 由于半椭圆关于 x 轴对称，因此只要考虑它和内切圆在第一象限的情形. 而在第一象限内它们只能有一个公共点，故 $\Delta=0$.

643. 在椭圆 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 上取一点 $P(x_0, y_0)$ $(x_0\neq 0, y_0\neq 0)$，过点 P 作椭圆的切线与法线分别交 y 轴于 A、B，求 $|AB|$ 的最小值.

［解］ 椭圆 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的切线方程是 $\frac{x_0x}{3}+y_0y=1$，$\therefore$ 点 A 的坐标为 $\left(0, \frac{1}{y_0}\right)$；而过点 P 的法线方程是 $y_0x-\frac{x_0}{3}y=\frac{2}{3}x_0y_0$，$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(0, -2y_0)$. 故 $|AB|^2=\left(\frac{1}{y_0}+2y_0\right)^2=\frac{1}{y_0^2}+4y_0^2+4\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{y_0^2}\cdot 4y_0^2}+4=8$，即 $|AB|\geqslant 2\sqrt{2}$. $\therefore$ 当 $\frac{1}{y_0^2}=4y_0^2$，即 $y_0=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$|AB|$ 有最小值，其最小值为 $2\sqrt{2}$.

644. 椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 的内接矩形的一边平行于长轴，求该内接矩形的最大面积.

［解一］ 设矩形的顶点为 $A(x_1, y_1)$、$B(-x_1, y_1)$、$C(-x_1, -y_1)$、$D(x_1, -y_1)$，其面积为 S，则

$$S=|AB|\cdot|BC|=4|x_1y_1|.$$

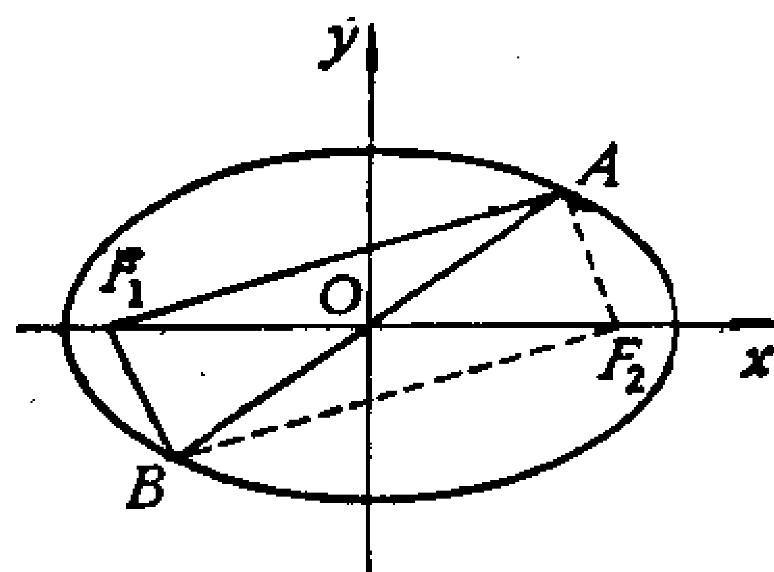
$$\therefore\quad S^2=16x_1^2y_1^2=16\,\frac{b^2x_1^2a^2y_1^2}{a^2b^2}\leqslant\frac{16}{a^2b^2}\left(\frac{b^2x_1^2+a^2y_1^2}{2}\right)^2=\frac{16}{a^2b^2}\cdot\left(\frac{a^2b^2}{2}\right)^2=4a^2b^2.$$

$\because$ $b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2$，当且仅当 $b^2x_1^2=a^2y_1^2=\frac{a^2b^2}{2}$，即 $x_1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$, $y_1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}b$ 时，$S^2_{\max}=4a^2b^2$. 故 $S_{\max}=2ab$.

［解二］ 设矩形 $ABCD$ 在第一象限的顶点 A 的坐标为 $(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$. 矩形面积 $S=4a\cos\varphi\cdot b\sin\varphi=2ab\sin 2\varphi\leqslant 2ab$. $\therefore$ $S_{\max}=2ab$.

645. 设 AB 为过椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 中心的弦，F_1 为焦点. 求 $\triangle F_1AB$ 的最大面积.

［分析］ 如图，$\triangle F_1AB$ 的面积是平行四边形 F_1AF_2B 面积之半，且等于 $\triangle AF_1F_2$ 的面积. 只有当点 A 处于短轴端点时，$\triangle AF_1F_2$ 才能达到最大值，从而得解.



［解］ 设椭圆的另一焦点为 F_2，因 O 为 AB、F_1F_2 的中点，故四边形 F_1AF_2B 为平行四边形. ∴ $\triangle F_1AB$ 的面积 $=\triangle AF_1F_2$ 的面积. 设点 A 坐标为 (x_1, y_1)，则 $\triangle AF_1F_2$ 的面积 $=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_1|$. 由 $b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2$，得

$$y_1^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x_1^2), \quad \therefore \quad |y_1|=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_1^2}.$$

当 $x_1=0$ 时，$|y_1|$ 取到最大值 b. ∴ $\triangle AF_1F_2$ 的最大面积为 $\frac{1}{2}\cdot 2c\cdot b=bc$. 亦即 $\triangle F_1AB$ 的最大面积为 bc.

646. 内接于椭圆 A：$a^2x^2+y^2=a^2$ 的矩形中，面积最大的记做 B，设内切于 B 的椭圆为 C，求 A、B、C 的面积比. 其中 a 为不等于 1 的正数，椭圆 $\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=1$ 的面积 $S=\pi|pq|$.

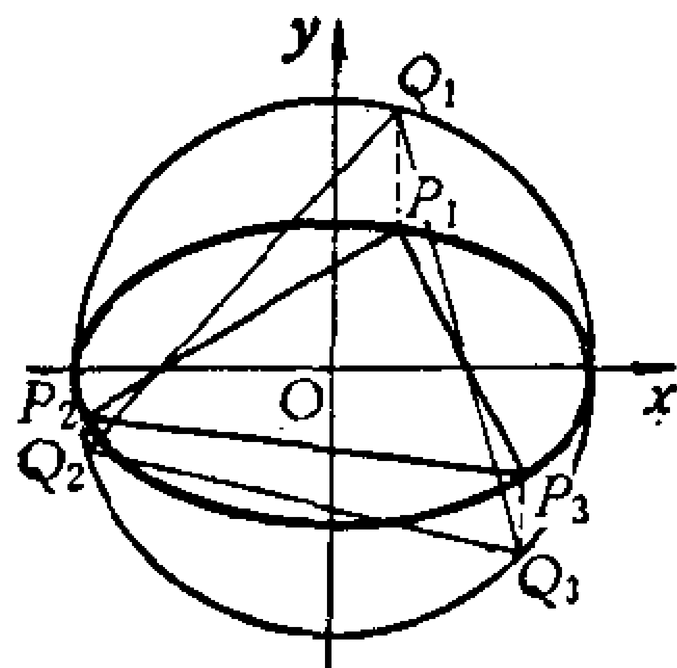
［解］ 由椭圆 A：$x^2+\frac{y^2}{a^2}=1$，得它的面积 $S_1=\pi\cdot 1\cdot a=\pi a$. ∵ A 的内接矩形关于坐标轴对称，设其在第一象限内的顶点为 (x_1, y_1)，则其面积 $S=2x_1\cdot 2y_1=4x_1y_1$，且 $a^2x_1^2+y_1^2=a^2$ ⋯ ①，$\sqrt{a^2x_1^2\cdot y_1^2}\leqslant\frac{a^2x_1^2+y_1^2}{2}$ ⋯ ②. 由 ①、② 得 $ax_1y_1\leqslant\frac{a^2}{2}$，即 $x_1y_1\leqslant\frac{a}{2}$. ∴ $S=4x_1y_1\leqslant 2a$，等号在 $a^2x_1^2=y_1^2$ 时成立. 利用 ① 得 $a^2x_1^2=\frac{a^2}{2}$，$y_1^2=\frac{a^2}{2}$，∴ $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.
∴ 当 S 最大时，矩形 B 在第一象限的顶点为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$，它的面积 $S_2=2a$. B 的内切椭圆 C 的方程是

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=1.$$

它的面积 $S_3=\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{1}{2}\pi a$,

$$\therefore\quad S_1:S_2:S_3=\pi a:2a:\frac{1}{2}\pi a=2\pi:4:\pi.$$

647. 求证椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的内接三角形的面积最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$.



[分析] 当 $a=b$ 时的椭圆是圆. 半径为 a 的圆的内接三角形面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. 而椭圆又可看成是圆在某一方向上均匀压缩的结果, 所以考察椭圆内接 $\triangle P_1P_2P_3$ 的三个顶点在大辅助圆 $x^2+y^2=a^2$ 上相应顶点构成的 $\triangle Q_1Q_2Q_3$, 以寻找它们之间的关系.

[证] 设椭圆上三点坐标为

$P_1(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$、$P_2(a\cos\beta,\ b\sin\beta)$、$P_3(a\cos\gamma,\ b\sin\gamma)$.

在椭圆的大辅助圆 $x^2+y^2=a^2$ 上取相应三点

$Q_1(a\cos\alpha,\ a\sin\alpha)$、$Q_2(a\cos\beta,\ a\sin\beta)$、$Q_3(a\cos\gamma,\ a\sin\gamma)$,

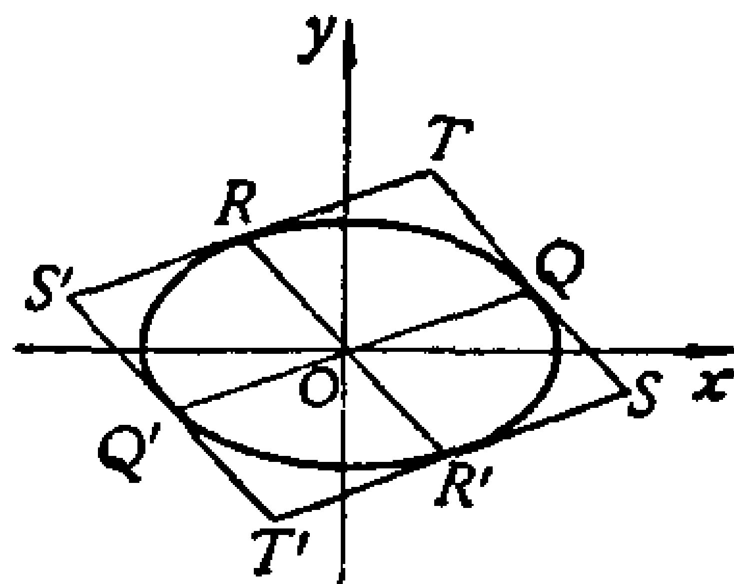
则 $\triangle P_1P_2P_3$ 的面积 $S_1=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a\cos\alpha & b\sin\alpha & 1 \\ a\cos\beta & b\sin\beta & 1 \\ a\cos\gamma & b\sin\gamma & 1 \end{vmatrix}$ 的绝对值,

$\triangle Q_1Q_2Q_3$ 的面积 $S_2=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a\cos\alpha & a\sin\alpha & 1 \\ a\cos\beta & a\sin\beta & 1 \\ a\cos\gamma & a\sin\gamma & 1 \end{vmatrix}$ 的绝对值.

$\therefore\quad S_1=\frac{b}{a}S_2$, 因此只要 S_2 为最大, S_1 也为最大. 由于 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ 是圆内接三角形, 故当其为正三角形时面积最大, 最大面积是 $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$.

$$\therefore\quad \triangle P_1P_2P_3\ \text{的最大面积}=\frac{b}{a}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}ab.$$

648. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的最小外切平行四边形的面积.



［分析］ 因椭圆外切平行四边形对边的切点关于原点对称，故取相邻两切点的离心角 α、β 为自变量，利用椭圆切线方程，即可求出外切平行四边形的顶点的坐标，从而得此四边形面积的函数表达式，进而考虑其最小值.

［解］ 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的外切平行四边形 $TS'T'S$ 四边的切点坐标分别为：$Q(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$、$R(a\cos\beta,\ b\sin\beta)$、$Q'(-a\cos\alpha,\ -b\sin\alpha)$、$R'(-a\cos\beta,\ -b\sin\beta)$. TQ、TR、$T'Q'$、$T'R'$ 的方程分别为：

$$\frac{x}{a}\cos\alpha+\frac{y}{b}\sin\alpha=1\cdots①,\quad \frac{x}{a}\cos\beta+\frac{y}{b}\sin\beta=1\cdots②,$$

$$-\frac{x}{a}\cos\alpha-\frac{y}{b}\sin\alpha=1\cdots③,\quad -\frac{x}{a}\cos\beta-\frac{y}{b}\sin\beta=1\cdots④.$$

由①、②得　$T\left(a\frac{\sin\beta-\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)},\ b\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}\right)$,

由②、③得　$S'\left(-a\frac{\sin\beta+\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)},\ b\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}\right)$,

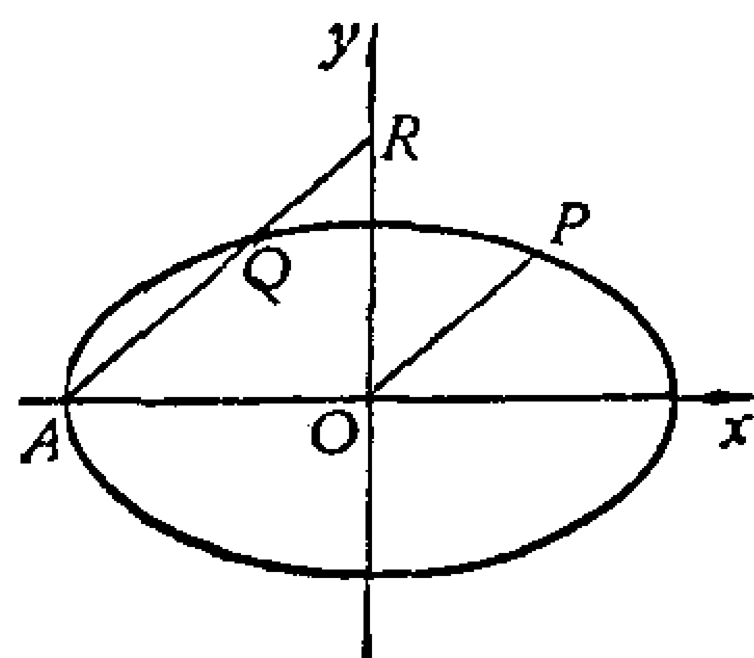
由③、④得　$T'\left(-a\frac{\sin\beta-\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)},\ -b\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}\right)$,

$$\therefore\quad S_{\square STS'T'}=2S_{\triangle TS'T'}=\begin{vmatrix} a\frac{\sin\beta-\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} & b\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)} & 1\\ -a\frac{\sin\beta+\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} & b\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)} & 1\\ -a\frac{\sin\beta-\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} & -b\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)} & 1\end{vmatrix}$$

的绝对值 $=\frac{4ab}{|\sin(\beta-\alpha)|}$. 当 $|\alpha-\beta|=\frac{\pi}{2}$ 时，该椭圆的外切平行四边形的面积为最小，最小值为 $4ab$. 此时，QQ' 与 RR' 为共轭直径.

§6. 其　它

649. 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上有两点 P、Q，连结点 $A(-a,\ 0)$ 与点 Q 的直线平行于 OP，且与 y 轴交于点 R. 求 $\frac{|AQ\cdot AR|}{|OP|^2}$ 的值.



［分析］ 欲求 AQ、AR，可用过点 A 的直线参数方程，代入椭圆方程与 y 轴方程分别求出 AQ、AR。从点 P 在椭圆上的条件，可求得 $|OP|^2$。

［解］ 设 AQ 的方程为 $\begin{cases} x=-a+t\cos\theta \\ y=t\sin\theta, \end{cases}$

代入椭圆方程得

$$(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)t^2-2ab^2t\cos\theta=0.$$

$\therefore\ AQ=\dfrac{2ab^2\cos\theta}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}$. 又，$AR=\dfrac{a}{\cos\theta}\ \left(\because\ \theta\neq\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$\therefore\ |AQ\cdot AR|=\dfrac{2a^2b^2}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}$. $\because\ AQ\parallel OP$，$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(|OP|\cos\theta, |OP|\sin\theta)$. 又点 P 在椭圆上，故

$$|OP|^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}.\quad \therefore\ \frac{|AQ\cdot AR|}{|OP|^2}=2.$$

［说明］ 凡涉及求过已知点 $P_0(x_0, y_0)$ 的直线与曲线交点到 P_0 的距离问题，常可利用过点 P_0 的直线的参数方程。

650. 平面上，到两定点 $(c, 0)$、$(-c, 0)$ 距离之和为定长 $2a$ $(a>c>0)$ 的点的轨迹方程为

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a\cdots①,$$

去根号后得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2-a^2(a^2-c^2)=0\cdots②.$$

试证方程①与②表示的曲线重合.

［证］ 因为 $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}+2a=0$ 无实数解，所以

$$(x-c)^2+y^2+4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=(x+c)^2+y^2,$$

即

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x\cdots③,$$

③与①同解. 又方程②即 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1$，从 $\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1-\dfrac{x^2}{a^2}\geqslant 0$ 得 $|x|\leqslant a$. 又因为 $a>c>0$，所以 $\dfrac{c}{a}|x|<a$，$a-\dfrac{c}{a}x>0$，这样 $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

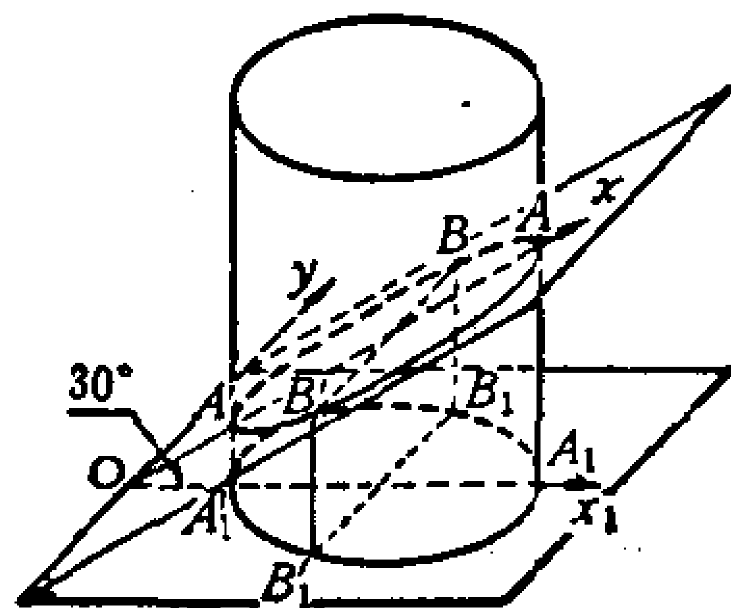
$=-\left(a-\frac{c}{a}x\right)$无实数解. 方程③两边平方得$(x-c)^2+y^2=\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2$, 即方程②: $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2-a^2(a^2-c^2)=0$, 方程②与③也同解. 所以方程①与②表示的曲线重合.

651. 求使直线$x\cos\theta+y\sin\theta=2$和椭圆$x^2+3y^2=6$有公共点的$\theta$的取值范围$(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$.

[解] 当$\cos\theta=0$时, ∵ $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, ∴ $\sin\theta=1$. 此时直线方程为$y=2$, 代入椭圆方程得$x^2=-6$, 此方程无实根, 故当$\cos\theta=0$时, 直线和椭圆无公共点.

当$\cos\theta\neq0$时, 由直线方程可得$x=\frac{2-y\sin\theta}{\cos\theta}$. 以此代入椭圆方程, 得$(1+2\cos^2\theta)y^2-4y\sin\theta-(6\cos^2\theta-4)=0$. 其判别式$\Delta=(4\sin\theta)^2+4(1+2\cos^2\theta)(6\cos^2\theta-4)=24\cos^2\theta(2\cos^2\theta-1)$. 为使直线和椭圆有公共点,必有$\Delta\geqslant0$, 即$24\cos^2\theta(2\cos^2\theta-1)\geqslant0$. ∵ $\cos\theta\neq0$, ∴ $\cos^2\theta\geqslant\frac{1}{2}$, 即$\cos\theta\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$, 或$\cos\theta\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$. ∵ $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, 故$\theta$的取值范围为: $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$, 或$\frac{3\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\pi$.

652. 正圆柱底的直径等于12 cm, 一个与底平面成30°角的平面截此圆柱,试求截面上的椭圆的长、短轴的长与离心率.



[解] 如图. ∵ $AA_1\parallel A'A_1'$, ∴ $\frac{A'A}{A_1'A_1}=\frac{OA'}{OA_1'}=\sec30°$, 而$A_1'A_1=12(\text{cm})$, ∴ 长轴$A'A=12\sec30°=8\sqrt{3}\,(\text{cm})$. 而短轴$B'B=B_1'B_1=12(\text{cm})$. 又

$$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{(4\sqrt{3})^2-6^2}{(4\sqrt{3})^2}=\frac{1}{4}.$$

∴ 离心率$e=\frac{1}{2}$.

653. 一平面截一正圆柱,所得椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$, 求该截面与圆柱底平面所成的二面角α (α为锐角).

［解］ 设截面与底面成α角时所得椭圆的半长轴、半短轴分别为a、b，$\alpha\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$. 若底面圆半径为$R$，则根据上题有$a=\frac{R}{\cos\alpha}\cdots$①，$b=R\cdots$②. 由题意可知$\frac{\sqrt{3}}{2}=e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cdots$③，以①、②代入③，得$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴ $\alpha=60°$.

654. 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，过中心$O$的一条弦$AB$与$x$轴夹成锐角$\alpha$，将坐标平面沿$x$轴折成一个直二面角，求$A$、$B$的连线与$x$轴的夹角.

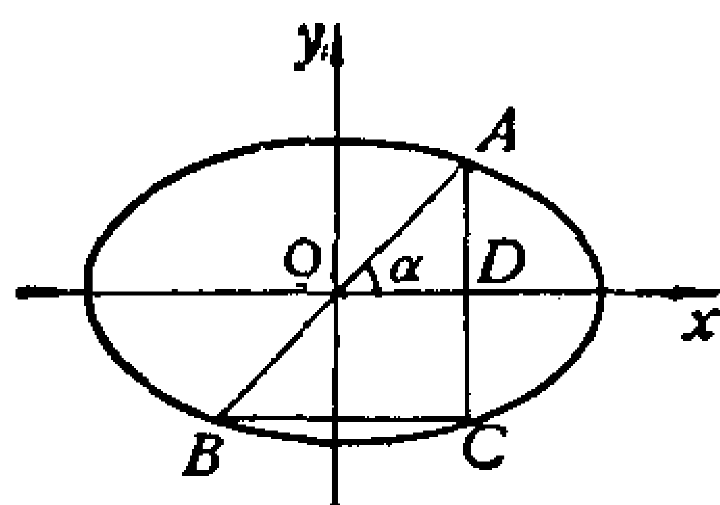


图 1

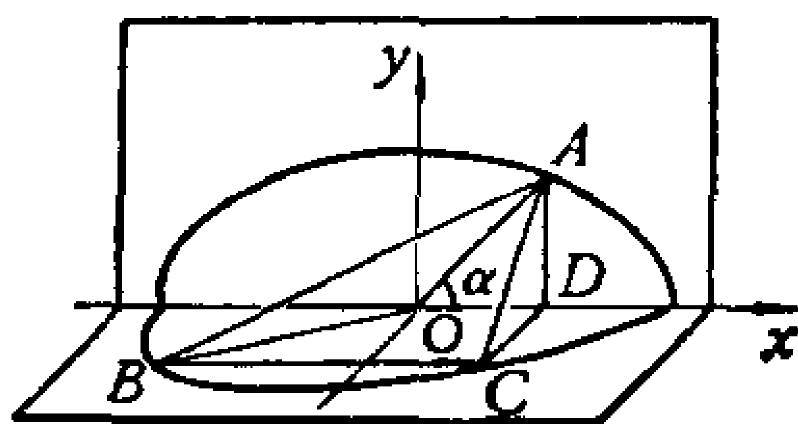


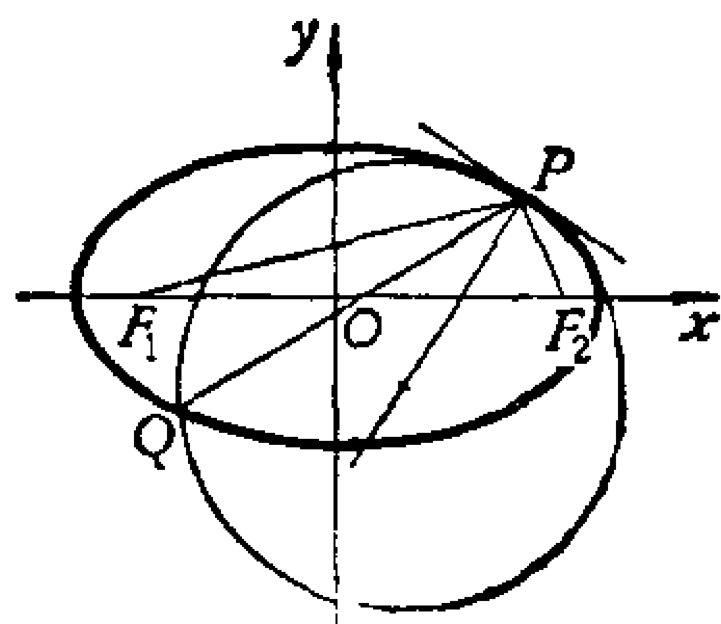
图 2

［解］ 过B引$BC\parallel Ox$交椭圆于C，B、C关于y轴对称，A、C关于x轴对称，∴ $|AD|=|DC|$，且AD、CD均垂直于x轴. 坐标平面折起后在同一平面内的点或线位置关系不变，因此，仍有$|AD|=|DC|$，且AD、CD均垂直于x轴，$\angle ADC$是二面角的平面角，∴ $\angle ADC=90°$，则$AD\perp$平面BOC. 又 ∵ $\angle DCB=90°$，根据三垂线定理：$BC\perp AC$. 在直角$\triangle ABC$中，$|BC|$同折前，为$2|OA|\cos\alpha$，而$|AC|=\sqrt{|AD|^2+|DC|^2}=\sqrt{2}|AD|=\sqrt{2}|OA|\sin\alpha$，$\operatorname{tg}\angle ABC=\frac{|AC|}{|BC|}=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\alpha$. ∵ $BC\parallel x$轴，∴ AB与x轴所成的角就是$\angle ABC$，即

$$\angle ABC=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\alpha\right).$$

655. 设圆与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的四个交点中有三个重合于点$P(x_0,\ y_0)$，试求此圆方程.

［分析］ 设圆与椭圆的四个交点为P、P_1、P_2、Q，当P_1、P_2趋近于P



并与 P 重合时，直线 PP_1、PP_2 均与过点 P 的切线重合，直线 P_1Q 与 PQ 重合，故此圆包括在过 P、P_1、P_2、Q 四点的二次曲线系中，应用提要(8.72)可得此二次曲线系方程，根据一般二次方程表示圆的充要条件，即可得所求的圆方程.

［解］ 椭圆过点 $P(x_0, y_0)$ 的切线方程为 $b^2x_0x+a^2y_0y-a^2b^2=0$，直线 PQ 的方程为 $(x-x_0)\sin\theta-(y-y_0)\cos\theta=0$，$\theta$ 为 PQ 的倾角. 过圆与椭圆的全部交点的二次曲线系方程为 $(b^2x_0x+a^2y_0y-a^2b^2)[(x-x_0)\sin\theta-(y-y_0)\cos\theta]=\lambda(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)\cdots$ ①（参见提要(8.72)）. ①式表示圆的充要条件是：x^2、y^2 项的系数相等，xy 项的系数等于零. 故 $-b^2x_0\sin\theta+\lambda b^2=a^2y_0\cos\theta+\lambda a^2\cdots$②，

$$b^2x_0\cos\theta-a^2y_0\sin\theta=0,$$

即
$$\frac{\sin\theta}{b^2x_0}=\frac{\cos\theta}{a^2y_0}=\pm\frac{1}{\sqrt{b^4x_0^2+a^4y_0^2}}\cdots③,$$

以③代入②，得 $\lambda=-\dfrac{\sqrt{b^4x_0^2+a^4y_0^2}}{a^2-b^2}$. 以③及 λ 值代入①，并利用 $b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2=0$，化简即得所求的圆方程

$$a^4b^4(x^2+y^2)-2b^4(a^2-b^2)x_0^3x+2a^4(a^2-b^2)y_0^3y$$
$$+a^4b^4(3x_0^2+3y_0^2-2a^2-2b^2)=0,$$

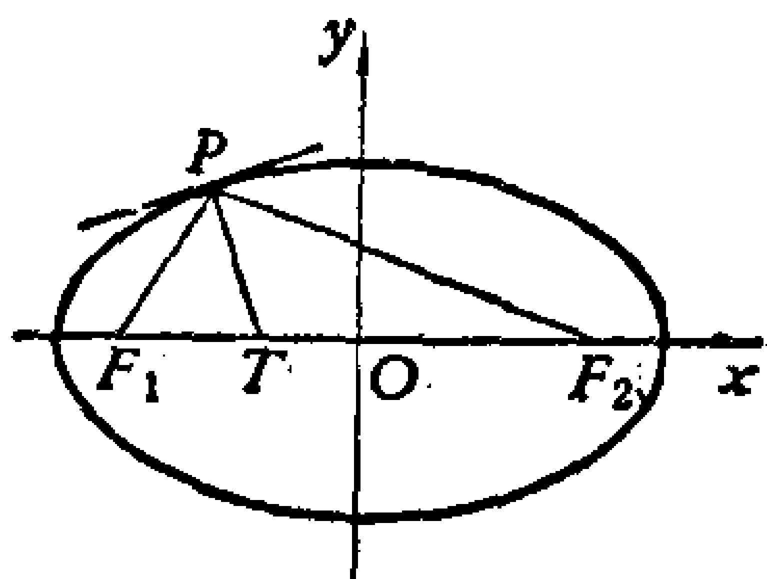
即
$$x^2+y^2-\frac{2(a^2-b^2)x_0^3}{a^4}x+\frac{2(a^2-b^2)y_0^3}{b^4}y$$
$$+3(x_0^2+y_0^2)-2(a^2+b^2)=0.$$

［说明］ (1) 此圆称为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的密切圆（曲率圆）. 本题的另一解法参见第732题.

(2) 当 $x_0=\pm a$，$y_0=0$ 时，从 $b^2x_0\cos\theta-a^2y_0\sin\theta=0$ 可得 $\cos\theta=0$，$\sin\theta=1$. 因而 PQ 与过点 P 的切线重合，即点 Q 与点 P 重合，此时圆方程为 $x^2+y^2\mp 2ae^2x+a^2(2e^2-1)=0$. 圆与椭圆的四个交点分别重合于点 $(a,0)$、$(-a, 0)$. 同理，当 $x_0=0, y_0=\pm b$ 时，$\sin\theta=0$，$\cos\theta=1$，PQ 与过点 P 的切线重合，此时圆方程为 $x^2+y^2\pm\dfrac{2a^2e^2}{b}y-a^2(1+e^2)=0$，椭圆与圆的四个交点分别重合于 $(0, b)$、$(0, -b)$.

§7. 证 明 题

656. 求证椭圆上任意一点的两条焦半径的夹角被该点的法线所平分.



[分析] 如图, 利用角平分线判定定理, 只要证明 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|F_1T|}{|TF_2|}$ 即可.

[证] 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 且 $P(x_1, y_1)$为椭圆上任一点, F_1、F_2 是左右焦点, 则 $|PF_1|=a+ex_1$, $|PF_2|=a-ex_1$. 过点 P 的法线方程为 $a^2y_1x-b^2x_1y+b^2x_1y_1-a^2x_1y_1=0$. 令 $y=0$, 得 $x=\frac{c^2}{a^2}x_1$, 故法线和 x 轴交点 T 的坐标为 $\left(\frac{c^2}{a^2}x_1, 0\right)$.

$$|F_1T|=c+\frac{c^2x_1}{a^2}=\frac{c(a^2+cx_1)}{a^2},\ |TF_2|=c-\frac{c^2x_1}{a^2}=\frac{c(a^2-cx_1)}{a^2}.$$

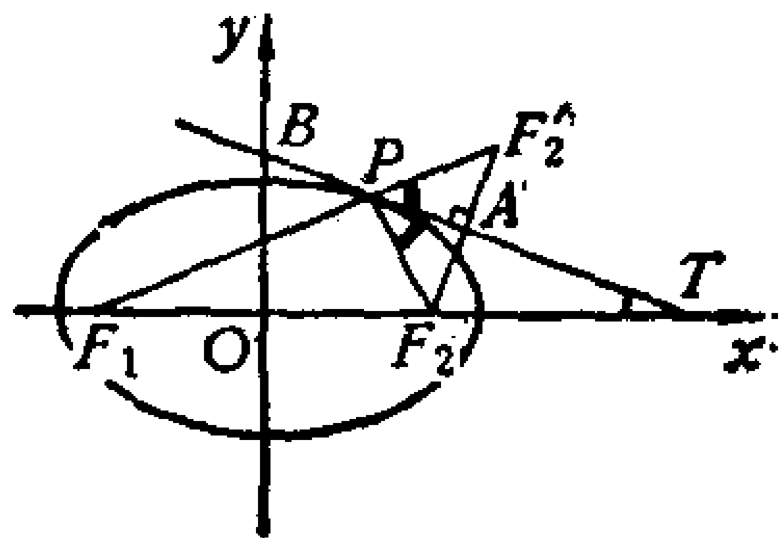
$$\because\ \frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{a+ex_1}{a-ex_1}=\frac{a^2+cx_1}{a^2-cx_1},\ \frac{|F_1T|}{|TF_2|}=\frac{a^2+cx_1}{a^2-cx_1},$$

$$\therefore\ \frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|F_1T|}{|TF_2|}.$$

所以过点 P 的法线 PT 平分点 P 的两条焦半径的夹角.

[说明] 椭圆的这一性质在光学、声学上均有应用.

657. 自椭圆上一点 P 引椭圆的切线交焦点轴于 T, 设椭圆的一个焦点为 F_2, 求证: $\cos\angle F_2PT=e\cos\angle F_2TP$ (e 是椭圆的离心率).



[证] 设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 作椭圆焦点 F_2 关于切线 PT 的对称点 F_2', F_2F_2' 交 PT 于 A, 则 $\angle F_2PA=\angle APF_2'$. 而 $\angle F_2PA=\angle F_1PB$, $\therefore$ $\angle APF_2'=\angle F_1PB$. 故 F_1、P、F_2' 三点共线. $\because$ $PF_2=PF_2'$, $\therefore$ $|F_1F_2'|=2a$.

$$\angle F_2PT=\angle TPF_2'=\frac{\pi}{2}-\angle F_2';\quad \angle F_2TP=\frac{\pi}{2}-\angle F_2'F_2T.$$

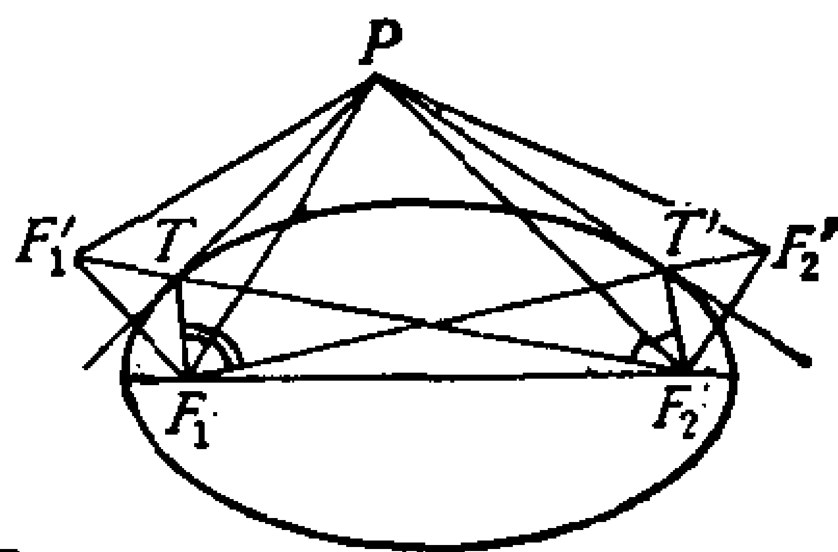
从而推得

$$\cos\angle F_2PT=\sin\angle F_2';\quad \cos\angle F_2TP=\sin\angle F_2'F_2T=\sin\angle F_2'F_2F_1.$$

又，$\triangle F_2F_1F_2'$ 中 $\dfrac{|F_1F_2'|}{|F_1F_2|}=\dfrac{\sin\angle F_2'F_2F_1}{\sin\angle F_2'}$,

$$\therefore\quad \frac{2a}{2c}=\frac{\cos\angle F_2TP}{\cos\angle F_2PT},\quad 即\quad \cos\angle F_2PT=e\cos\angle F_2TP.$$

658. 已知 PT、PT' 是以 F_1、F_2 为焦点的椭圆的两切线，T、T' 为切点. 求证：(1) $\angle PF_2T=\angle PF_2T'$，$\angle PF_1T=\angle PF_1T'$；(2) $\angle F_1PT=\angle F_2PT'$.



[证] (1) 作椭圆焦点 F_1、F_2 关于切线 PT、PT' 的对称点 F_1'、F_2'. 上题已证明 F_1、T'、F_2' 三点共线，F_2、T、F_1' 三点共线；

且 $$|F_1F_2'|=|F_2F_1'|=2a,$$

故 $\triangle PF_2F_1'\cong\triangle PF_1F_2'$，$\therefore \angle PF_2T=\angle PF_2'F_1$.

而 $$\angle PF_2'F_1=\angle PF_2T',\quad \therefore\quad \angle PF_2T=\angle PF_2T'.$$

同理可证，$\angle PF_1T=\angle PF_1T'$.

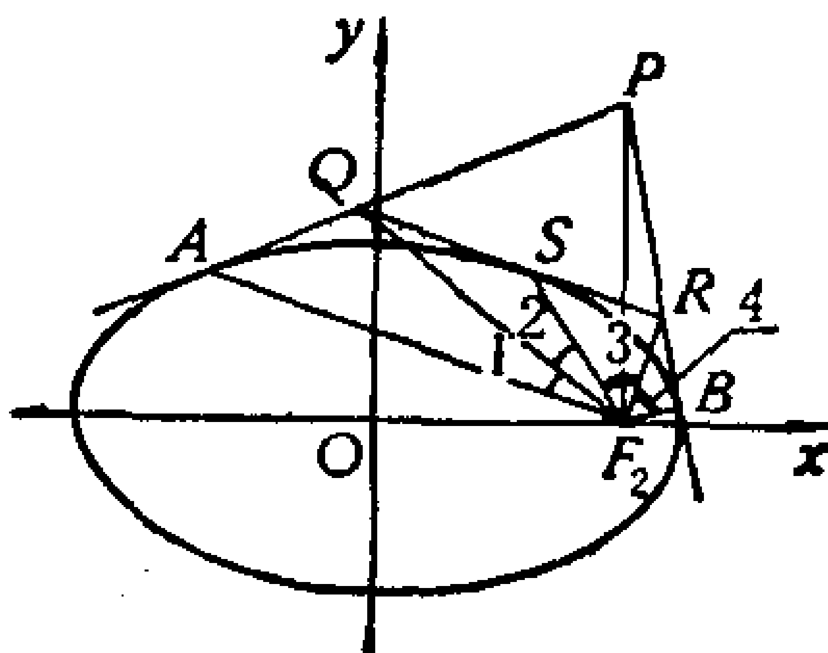
(2) $\because$ $\triangle PF_1F_2'\cong\triangle PF_1'F_2$，$\therefore$ $\angle F_1PF_2'=\angle F_2PF_1'$.

两边同时减去 $\angle F_1PF_2$，得 $\angle F_1PF_1'=\angle F_2PF_2'$.

又 $$\angle F_1PT=\frac{1}{2}\angle F_1PF_1',\quad \angle F_2PT'=\frac{1}{2}\angle F_2PF_2',$$

$$\therefore\quad \angle F_1PT=\angle F_2PT'.$$

659. 求证：在椭圆中，一条动切线介于两条定切线间的部分，在一个焦点的视角为常量.



[分析] 如图 PA、PB 是椭圆的两定切线，一动切线交两定切线于 Q 和 R，当 QR 运动到与 PA 或 PB 重合时，据上题可知所得视角应有 $\angle PF_2A=\angle PF_2B$，设其为 α，因而只需证 $\angle QF_2R=\alpha$ 即可.

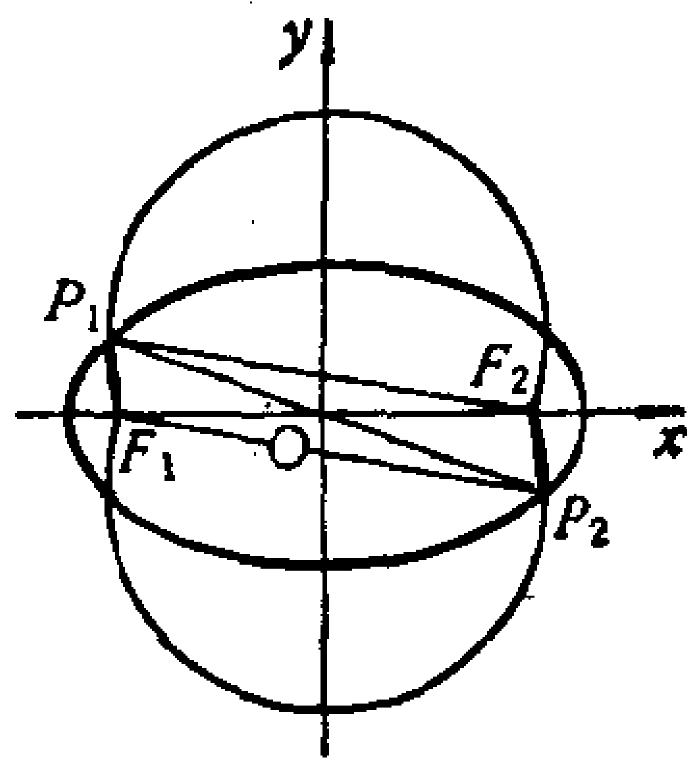
[证] $\because$ PA、PB 为椭圆的两定切线，

根据上题(1)得 $\angle PF_2A=\angle PF_2B=\alpha$ (定值). 同理, QA、QS 为两切线, $\therefore\ \angle 1=\angle 2$; 又 RS、RB 为两切线, $\therefore\ \angle 3=\angle 4$.

$$\therefore\quad \angle QF_2R=\angle 2+\angle 3=\frac{1}{2}(\angle AF_2S+\angle SF_2B)$$

$$=\frac{1}{2}(\angle AF_2P+\angle PF_2B)=\alpha(\text{定值}).$$

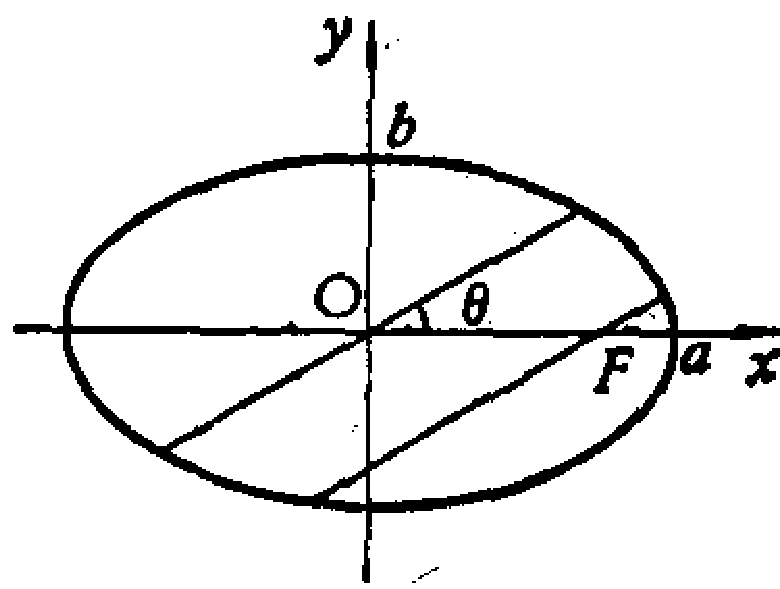
660. 设 $P_1(x_1,\ y_1)$、$P_2(x_2,\ y_2)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上使 $\angle F_1P_1F_2=\angle F_1P_2F_2$ 的两点, 其中 F_1、F_2 为椭圆的两焦点, O 为原点. 求证 $|P_1O|=|P_2O|$.



[证] $\because\ \angle F_1P_1F_2=\angle F_1P_2F_2$, 令此角为 α, 则 P_1、P_2 分别在以 F_1F_2 为弦、所含圆周角为 α、且关于坐标轴及原点对称的两段圆弧上. 又椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 也关于原点及坐标轴对称, 因而它们的交点 P_1、P_2 也关于原点或坐标轴对称. 当 P_1、P_2 关于原点对称时, 即 $|P_1O|=|P_2O|$; 当 P_1、P_2 关于 x 轴对称时, $x_1=x_2$, $|y_1|=|y_2|$; 或关于 y 轴对称时, $|x_1|=|x_2|$, $y_1=y_2$, 这两种情况下均有

$$|P_1O|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{x_2^2+y_2^2}=|P_2O|.$$

661. 求证椭圆的一条直径长为通过一个焦点且与此直径平行的弦和长轴的比例中项.



[分析] 利用直线的参数方程, 通过计算直径和该平行弦的长来证明.

[证] 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\cdots$①, 直径的倾角为 θ, 则直径的参数方程为

$$\begin{cases} x=t\cos\theta \\ y=t\sin\theta \end{cases}\quad (t\text{ 为参数})\cdots②.$$

由①、②消去 x、y, 得 $t^2(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)-a^2b^2=0$.
故直径长

$$d=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{\frac{4a^2b^2}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}}$$
$$=\frac{2ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}}.$$

和直径平行的过焦点 $(c, 0)$ 的弦方程为 $\begin{cases}x=c+t\cos\theta\\ y=t\sin\theta\end{cases}$ …③, 由①、③消去 x、y, 得 $t^2(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)+2b^2ct\cos\theta-b^4=0$. 和直径平行的焦点弦长

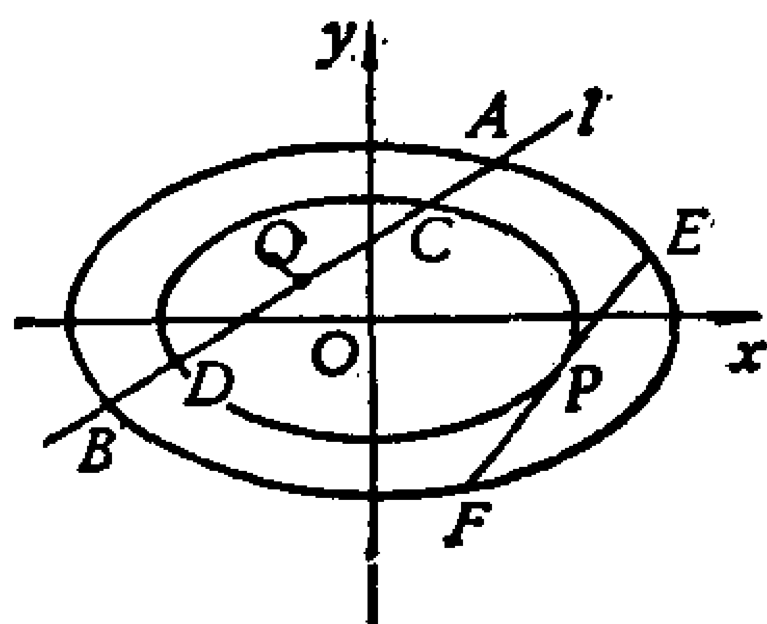
$$l=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}$$
$$=\sqrt{\frac{4b^4c^2\cos^2\theta}{(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)^2}+\frac{4b^4}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}}$$
$$=\sqrt{\frac{4b^4(c^2\cos^2\theta+b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)}{(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)^2}}$$
$$=\sqrt{\frac{4b^4a^2}{(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)^2}}=\frac{2b^2a}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}.$$

又椭圆的长轴长 $2a$,

$$\therefore\quad 2a\cdot\frac{2b^2a}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}=\frac{4a^2b^2}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta},$$

即 $d^2=2al$. 命题得证.

662. 已知两椭圆的离心率相同,长、短轴分别重合.求证:(1)与两椭圆相交的直线夹在椭圆间的两线段长相等;(2)大椭圆的弦若与小椭圆相切,则该弦被切点平分.



[分析] (1) 直线 l 和两椭圆交于 A、B 和 C、D. 若证得线段 AB 与 CD 的中点重合,则 $|AC|=|DB|$.

(2) 证明过小椭圆上一点 P 的切线被大椭圆截得的线段的中点即切点 P.

[证] (1) 设大椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 小椭圆方程为 $\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=1$. 因为它们的离心率相等. 所以 $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{p^2-q^2}}{p}$, 即 $p^2b^2=q^2a^2$. 令 $\frac{p^2}{a^2}=\frac{q^2}{b^2}=\lambda$ $(0<\lambda<1)$, 则两椭圆方程分别为 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ …①,

$b^2x^2+a^2y^2=\lambda a^2b^2\cdots②$. 设直线的参数方程为 $\begin{cases}x=x_0+t\cos\theta\\ y=y_0+t\sin\theta\end{cases}\cdots③$,
其中(x_0, y_0)为 l 上任一点,以③分别代入①、②,得

$$(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)t^2+(2b^2x_0\cos\theta+2a^2y_0\sin\theta)t+b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2=0\cdots④,$$

$$(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)t^2+(2b^2x_0\cos\theta+2a^2y_0\sin\theta)t+b^2x_0^2+a^2y_0^2-\lambda a^2b^2=0\cdots⑤.$$

由④、⑤易见 AB 的中点与 CD 的中点对应的参数值均为

$$-\frac{b^2x_0\cos\theta+a^2y_0\sin\theta}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta},$$

即 AB 与 CD 的两中点重合. 若此中点为 Q, 则

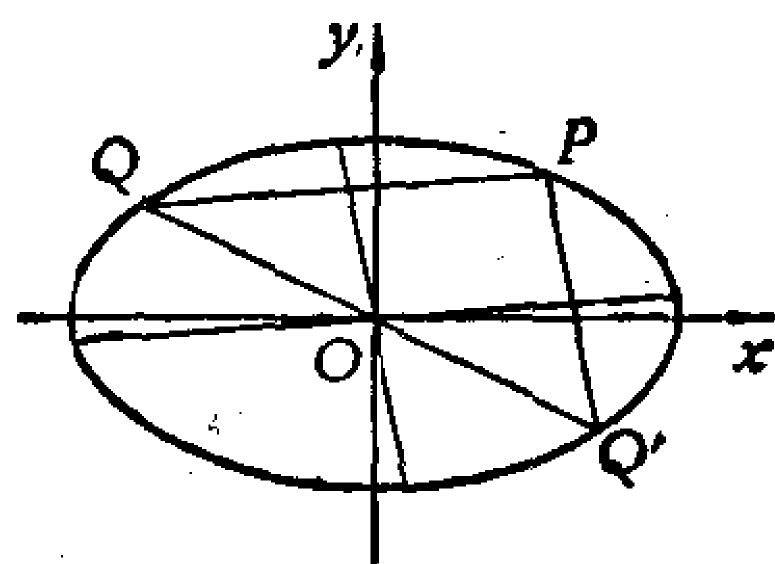
$$|AQ|-|CQ|=|BQ|-|DQ|, \quad 即 \quad |AC|=|BD|.$$

(2) 若点 $P(x_0, y_0)$ 是椭圆②上的一点, 则 $b^2x_0^2+a^2y_0^2=\lambda a^2b^2$, 于是⑤便为 $(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)t^2+(2b^2x_0\cos\theta+2a^2y_0\sin\theta)t=0\cdots⑤'$. 若直线③与椭圆②相切, 则由⑤′可得 $t_1=t_2=0$, 因而 $2b^2x_0\cos\theta+2a^2y_0\sin\theta=0$. 于是④便为 $(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)t^2+b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2=0\cdots④'$. 而直线③与椭圆①相交于 E、F, 若 E 和 F 对应的参数值分别为 t_1' 和 t_2', 则由④′可知 $t_1'+t_2'=0$. 所以切点 $P(x_0, y_0)$是弦 EF 的中点.

[说明] 本题中(2)的结论为(1)的特殊情况,此时小椭圆内弦的两端退缩为一点.

663. (1)证明椭圆上任意一点与一直径的两端点连接而得的两弦平行于一对共轭直径; (2)对双曲线作同样的证明.

[分析] 根据椭圆、双曲线的一对共轭直径的斜率(假定存在斜率)之积分别为 $-\frac{b^2}{a^2}$、$\frac{b^2}{a^2}$, 即可得证.



[证] (1) 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任意一点为 $P(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$, 一直径的两端点为 $Q(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$、$Q'(-a\cos\alpha, -b\sin\alpha)$. PQ、PQ' 的斜率分别为:

$$k_{PQ}=\frac{b(\sin\varphi-\sin\alpha)}{a(\cos\varphi-\cos\alpha)}, \quad k_{PQ'}=\frac{b(\sin\varphi+\sin\alpha)}{a(\cos\varphi+\cos\alpha)}.$$

$\because\quad k_{PQ}\cdot k_{PQ'}=\dfrac{b^2(\sin^2\varphi-\sin^2\alpha)}{a^2(\cos^2\varphi-\cos^2\alpha)}=\dfrac{b^2(\sin^2\varphi-\sin^2\alpha)}{a^2(1-\sin^2\varphi-1+\sin^2\alpha)}=-\dfrac{b^2}{a^2}$,

$\therefore$ PQ、PQ' 分别平行于以 $\dfrac{b(\sin\varphi-\sin\alpha)}{a(\cos\varphi-\cos\alpha)}$、$\dfrac{b(\sin\varphi+\sin\alpha)}{a(\cos\varphi+\cos\alpha)}$ 为斜率的一对共轭直径. 若 k_{PQ} 为零或不存在, 则 $k_{PQ'}$ 不存在或为零, 此时命题显然成立.

(2) 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上任意一点为 $P(a\sec\varphi,\ b\operatorname{tg}\varphi)$, 一直径的两端为 $Q(a\sec\alpha,\ b\operatorname{tg}\alpha)$、$Q'(-a\sec\alpha,\ -b\operatorname{tg}\alpha)$. PQ、PQ' 的斜率分别为 $k_{PQ}=\dfrac{b(\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\alpha)}{a(\sec\varphi-\sec\alpha)}$, $k_{PQ'}=\dfrac{b(\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}\alpha)}{a(\sec\varphi+\sec\alpha)}$.

$\because\quad k_{PQ}\cdot k_{PQ'}=\dfrac{b^2(\operatorname{tg}^2\varphi-\operatorname{tg}^2\alpha)}{a^2(\sec^2\varphi-\sec^2\alpha)}=\dfrac{b^2(\operatorname{tg}^2\varphi-\operatorname{tg}^2\alpha)}{a^2(1+\operatorname{tg}^2\varphi-1-\operatorname{tg}^2\alpha)}=\dfrac{b^2}{a^2}$,

$\therefore$ PQ、PQ' 平行于一对共轭直径.

[说明]　分别与椭圆(双曲线)的一对共轭直径平行的两弦称为椭圆(双曲线)的补弦. 本题中的 PQ、PQ' 即为补弦.

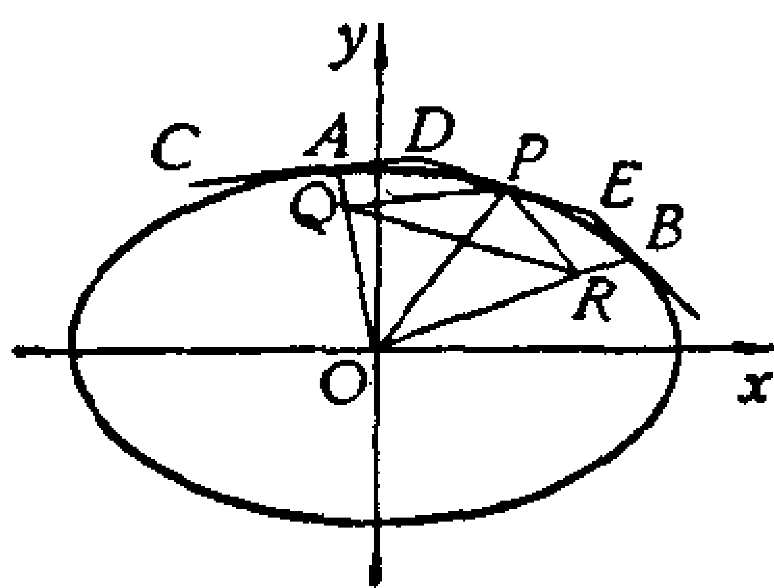
664. **已知: A、B 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在长轴、短轴的一个端点, C 为线段 AB 的中点. 求证: 过直线 OC 与椭圆的交点的切线平行于 AB.**

[证]　$\because$ $A(a,\ 0)$、$B(0,\ b)$, $\therefore$ $C\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$. 设直线 OC 与椭圆交于 $P_1(x_1,\ y_1)$, $\because$ O、C、P_1 共线, $\therefore$ $\dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{b}{a}$. 过 P_1 的切线的斜率 $k=\dfrac{-b^2x_1}{a^2y_1}=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{a}{b}=-\dfrac{b}{a}$; AB 的斜率 $k_{AB}=\dfrac{b-0}{0-a}=-\dfrac{b}{a}$. $\therefore$ 过 P_1 的切线与 AB 平行.

665. **设 A、P、B 为椭圆上具有离心角成等差数列的任意三点, O 为椭圆中心, AC、PD、BE 为椭圆的切线, 过 P 作 $PQ\,/\!/\,AC$, $PR\,/\!/\,BE$, 分别交 OA、OB 于 Q、R, 试证 $QR\,/\!/\,PD$.**

[证]　设椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, A、P、B 三点坐标分别为

$A(a\cos(\alpha+\beta),\ b\sin(\alpha+\beta))$、$P(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$、$B(a\cos(\alpha-\beta),\ b\sin(\alpha-\beta))$，则切线 AC 的方程为



$$\frac{x}{a}\cos(\alpha+\beta)+\frac{y}{b}\sin(\alpha+\beta)=1,$$

直线 PQ 的方程为

$$\frac{x}{a}\cos(\alpha+\beta)+\frac{y}{b}\sin(\alpha+\beta)=\cos\beta\cdots①,$$

直线 OA 的方程为 $y=\frac{b}{a}x\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cdots②$. 由①与②解得：

$$x_Q=a\cos(\alpha+\beta)\cos\beta,\ y_Q=b\sin(\alpha+\beta)\cos\beta.$$

同理可得：

$$x_R=a\cos(\alpha-\beta)\cos\beta,\ y_R=b\sin(\alpha-\beta)\cos\beta.$$

∴ QR 的斜率

$$k_{QR}=\frac{b\cos\beta[\sin(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)]}{a\cos\beta[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]}=\frac{b(-2\cos\alpha\sin\beta)}{a\cdot 2\sin\alpha\sin\beta}$$
$$=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\alpha.$$

而切线 PD 的斜率

$$k_{PD}=-\frac{b\cos\alpha}{a\sin\alpha}=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\alpha,\quad \therefore\ QR\parallel PD.$$

666. 求证：自椭圆准线上任意一点 P 所作椭圆的两切线的切点弦垂直于点 P 与相应焦点的连线.

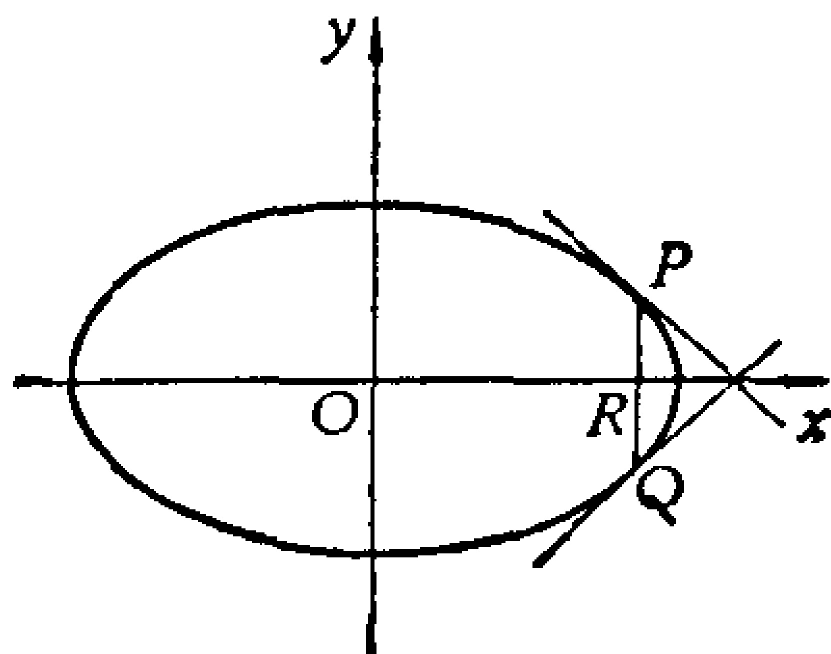
［证］ 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，准线 $x=\frac{a}{e}$ 上一点 $P\left(\frac{a}{e},\ y_1\right)$ 的切点弦方程为 $\frac{\frac{a}{e}x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1\cdots①$. 点 P 与焦点 $F(ae,\ 0)$ 的连线的斜率 $k_{FP}=\frac{y_1}{\frac{a}{e}-ae}=\frac{ey_1}{a(1-e^2)}$；切点弦①的斜率 $k=-\frac{b^2}{aey_1}$.

$$\because\ k_{FP}\cdot k=-\frac{b^2}{a^2(1-e^2)}=\frac{-b^2}{a^2-a^2e^2}=-1,$$

∴ 点 P 的切点弦与相应焦点和 P 的连线垂直.

667. 过点 $R\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0\right)$ 垂直于 x 轴的直线与椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 交于 P、Q. 求证过 P、Q 的两切线互相垂直.

[证] 过点 $R\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0\right)$ 垂直于 x 轴的直线与椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 的两交点 P、Q 的坐标为



$$P\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

$$Q\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\ -\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

过 P、Q 的两切线方程为:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{y}{\sqrt{a^2+b^2}}=1\cdots①,\quad \frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{y}{\sqrt{a^2+b^2}}=1\cdots②.$$

$$\because\quad A_1A_2+B_1B_2=\frac{1}{a^2+b^2}-\frac{1}{a^2+b^2}=0,$$

$\therefore$ 过 P、Q 两点的切线互相垂直.

668. 过椭圆的两焦点引椭圆任一切线的两垂线,求证这两垂线长的积为定值.

[分析] 先计算两焦点到椭圆切线的距离之积,并考察其是否与切点位置无关.

[证] 设椭圆的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos\alpha\\ y=b\sin\alpha,\end{cases}$ 过椭圆上任一点 $P(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$的切线方程为 $\frac{x}{a}\cos\alpha+\frac{y}{b}\sin\alpha=1$, 两焦点的坐标为 $(c,\ 0)$、$(-c,\ 0)$,则焦点到切线的垂线长的积为

$$\frac{|b\cos\alpha\cdot c-ab|\,|b\cos\alpha\cdot(-c)-ab|}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}=b^2(\text{定值}).$$

[说明] 本题也可采用普通方程, 设切点坐标为 $(x_1,\ y_1)$, 利用 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$ 证之. 解析几何中的定值问题, 一般先计算出所要证明的量, 利用变量应满足的关系式,从中消去变量就可得证.

669. 过椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上一点 R 的切线与两轴交于 P、Q. 若 $|PR|=|QR|$，求证 $\triangle OPQ$（O 为中心）的面积为 ab.

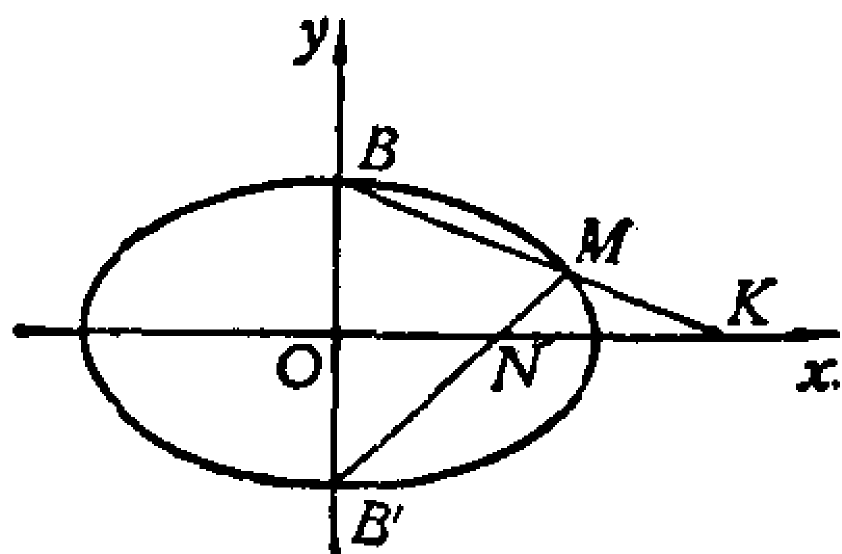
［证］ 设 $R(x_0, y_0)(x_0y_0\neq 0)$ 为椭圆上一点，则过 R 的切线方程为 $b^2x_0x+a^2y_0y=a^2b^2$. 切线交两轴于 $P\left(\frac{a^2}{x_0}, 0\right)$、$Q\left(0, \frac{b^2}{y_0}\right)$. $\because$ $|PR|=|QR|$，$\therefore$ $y_0=\frac{1}{2}y_Q=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{y_0}$，从而得 $y_0=\pm\frac{b}{\sqrt{2}}$；且 $x_0=\frac{1}{2}x_P=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{x_0}$，得 $x_0=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$. $\therefore$ $\triangle OPQ$ 的面积 $=\frac{1}{2}|OP|\cdot|OQ|=\frac{1}{2}|x_P|\cdot|y_Q|=\frac{1}{2}\left|\frac{a^2b^2}{x_0y_0}\right|=ab$（面积单位）.

670. 过椭圆上任意一点 M 的切线，与过这椭圆长轴端点 A、A' 的两切线分别交于 N、N'，求证 $AN\cdot A'N'$ 为定值.

［证］ 设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$M(x_0, y_0)$ 为椭圆上任一点，过点 M 的切线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$，过椭圆长轴端点 A、A' 的两切线方程为 $x^2-a^2=0$. 联立两切线方程消去 x，得 $a^2y_0^2y^2-2a^2b^2y_0y+a^2b^4-b^4x_0^2=0$. 而 AN 与 $A'N'$ 的乘积即此方程两根之积，

$$\therefore\quad AN\cdot A'N'=y_1\cdot y_2=\frac{b^2(a^2b^2-b^2x_0^2)}{a^2y_0^2}=b^2，为定值.$$

671. 若椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任一点 M（但非短轴端点）与短轴两端点 B'、B 的连线交 x 轴于 N 和 K，求证 $ON\cdot OK$ 为定值.

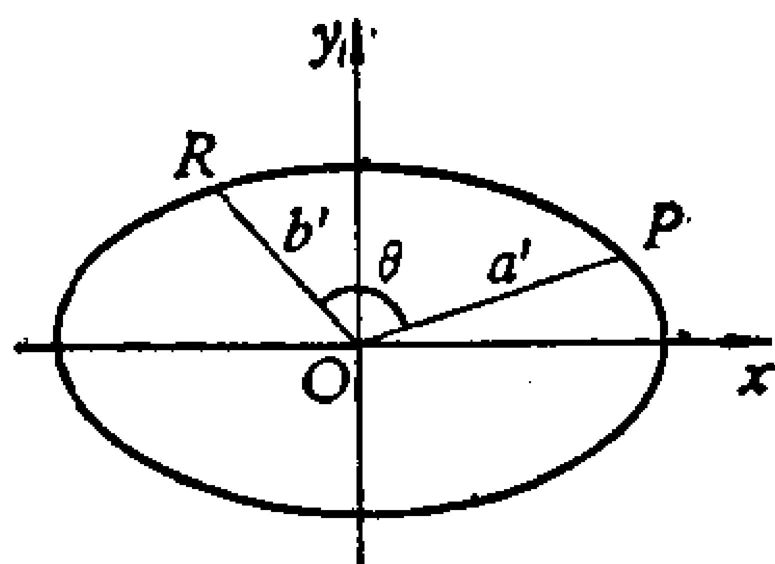


［证］ 设点 M、N、K 的坐标分别为 $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$、$(x_N,\ 0)$、$(x_K,\ 0)$. $\because$ N、K 分别为直线 $B'M$、BM 与 x 轴的交点，

$$\therefore\quad x_N=\frac{a\cos\theta}{1+\sin\theta},\quad x_K=\frac{a\cos\theta}{1-\sin\theta}.$$

$\therefore$ $ON\cdot OK=x_N\cdot x_K=a^2$，为定值.

672. 椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 半直径 a' 和它的共轭半直径 b' 的夹角为 θ. 求证: $\sin\theta=\frac{ab}{a'b'}$.



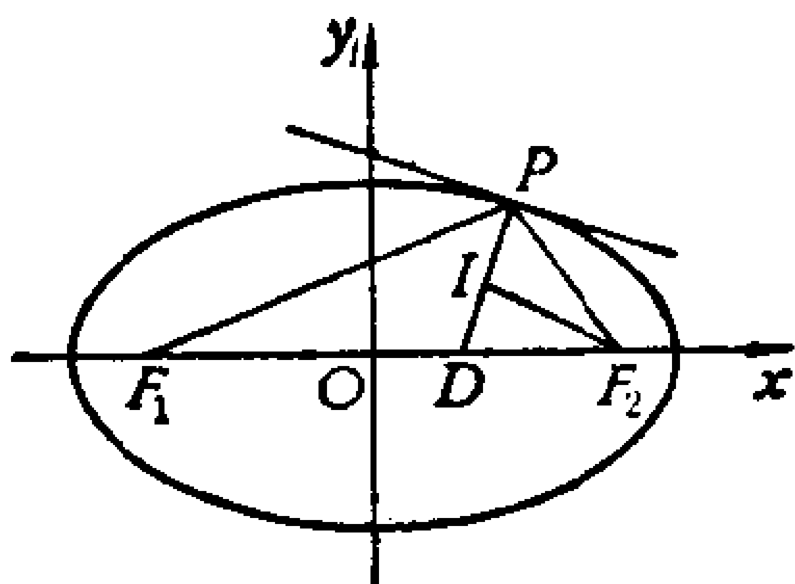
[分析] 当半直径 a' 端点 P 的位置设定后, 则共轭半直径 b' 端点 R 的位置随之而定. 角 θ 的正弦可用点 P 的坐标表示, 而 OP 长度为 a', 所以点 P 的坐标又可由 a' 表示, 即得证.

[证] 设半直径 a' 的端点为 $P(x_1, y_1)$, 则它的共轭半直径的端点为 $R\left(-\frac{a}{b}y_1, \frac{b}{a}x_1\right)$(参见第 623 题). 设直线 OP、OR 的倾角分别为 α、β,

则
$$\sin\alpha=\frac{y_1}{a'},\ \cos\alpha=\frac{x_1}{a'};\ \sin\beta=\frac{bx_1}{ab'},\ \cos\beta=-\frac{ay_1}{bb'}.$$

$$\sin\theta=\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha=\frac{bx_1}{ab'}\cdot\frac{x_1}{a'}+\frac{ay_1}{bb'}\cdot\frac{y_1}{a'}$$
$$=\frac{b^2x_1^2+a^2y_1^2}{a'b'ab}=\frac{a^2b^2}{a'b'ab}=\frac{ab}{a'b'}.$$

673. 椭圆上任一点 P 和两焦点所组成三角形的内心, 将法线介于点 P 与长轴间部分分成定比.



[分析] 如图, 因过点 P 的法线平分 $\angle F_1PF_2$, 故 $\triangle F_1PF_2$ 的内心在法线 PD 上, 利用角平分线性质定理即可得证.

[证] 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 椭圆上任一点为 $P(x_0, y_0)$, 则过点 P 的椭圆法线为 $a^2y_0x-b^2x_0y=(a^2-b^2)x_0y_0$. 根据椭圆的光学性质, 法线 PD 平分 $\angle F_1PF_2$, 故 PD 过 $\triangle PF_1F_2$ 的内心 I, IF_2 平分 $\angle PF_2F_1$, $\therefore \frac{PI}{ID}=\frac{|PF_2|}{|F_2D|}$. 由于点 D 的坐标为 $\left(\frac{c^2}{a^2}x_0, 0\right)$,

$$\therefore\quad |DF_2|=c-\frac{c^2}{a^2}x_0=\frac{c(a^2-cx_0)}{a^2}.$$

又
$$|PF_2|=e\left(\frac{a}{e}-x_0\right)=a-\frac{c}{a}x_0=\frac{a^2-cx_0}{a},$$

$$\therefore \quad \frac{|PF_2|}{|F_2D|}=\frac{a}{c}, \quad 即 \quad \frac{PI}{ID}=\frac{a}{c}.$$

674. 求证：椭圆的任意两共轭直径的平方和为定值.

［分析］ 根据提要(5.38)，利用两共轭直径端点之一的坐标分别为(x_1, y_1)、$\left(-\frac{a}{b}y_1, \frac{b}{a}x_1\right)$，或$(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$、$(-a\sin\varphi, b\cos\varphi)$，即可得证.

［证一］ 设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，椭圆任一直径端点为$(x_1, y_1)$、$(-x_1, -y_1)$，其中$x_1\cdot y_1\neq 0$. 它的共轭直径方程为$y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x$，解方程组$\begin{cases} b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \\ y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x, \end{cases}$ 得端点坐标$\left(-\frac{a}{b}y_1, \frac{b}{a}x_1\right)$和$\left(\frac{a}{b}y_1, -\frac{b}{a}x_1\right)$，则共轭直径的平方和为

$$\begin{aligned}
&[x_1-(-x_1)]^2+[y_1-(-y_1)]^2 \\
&\quad+\left[\frac{a}{b}y_1-\left(-\frac{a}{b}y_1\right)\right]^2+\left[\frac{b}{a}x_1-\left(-\frac{b}{a}x_1\right)\right]^2 \\
&=4x_1^2+4y_1^2+4\frac{a^2}{b^2}y_1^2+4\frac{b^2}{a^2}x_1^2=4\left[\frac{a^2+b^2}{a^2}x_1^2+\frac{a^2+b^2}{b^2}y_1^2\right] \\
&=4\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}(b^2x_1^2+a^2y_1^2)=4(a^2+b^2).
\end{aligned}$$

显然，这结论也包含共轭直径为椭圆长轴和短轴的情形.

［证二］ 设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的两共轭直径端点分别为

$$(a\cos\varphi, b\sin\varphi)、(-a\cos\varphi, -b\sin\varphi);$$
$$(-a\sin\varphi, b\cos\varphi)、(a\sin\varphi, -b\cos\varphi).$$

则两共轭直径的平方和为

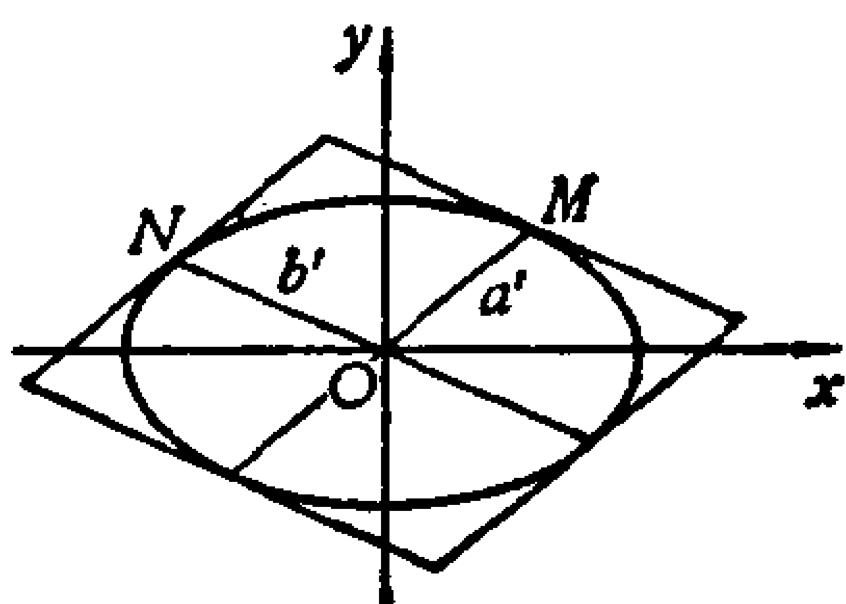
$$4(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)+4(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)=4(a^2+b^2).$$

［说明］ 本题结论与双曲线相应的命题统称为阿波罗尼斯(Apollonius)定理.

675. 求证：椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$中，过两条共轭直径端点的四条切线所围成的平行四边形的面积等于$4ab$.

［证］ 过直径端点的切线平行于它的共轭直径，故过两条共轭直径的端

点引椭圆的切线所围成的平行四边形相邻两边长分别为两共轭直径长. 如图，设两直径端点分别为



$M(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$、$N(-a\sin\theta,\ b\cos\theta)$;

长分别为 $2a'$、$2b'$; 倾角分别为 α、β, 则

$$\sin\alpha=\frac{b\sin\theta}{a'},\ \cos\alpha=\frac{a\cos\theta}{a'};$$

$$\sin\beta=\frac{b\cos\theta}{b'},\quad \cos\beta=\frac{-a\sin\theta}{b'}.$$

设两直径的交角 $\varphi=\beta-\alpha$,

$$\therefore\quad \sin\varphi=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$$

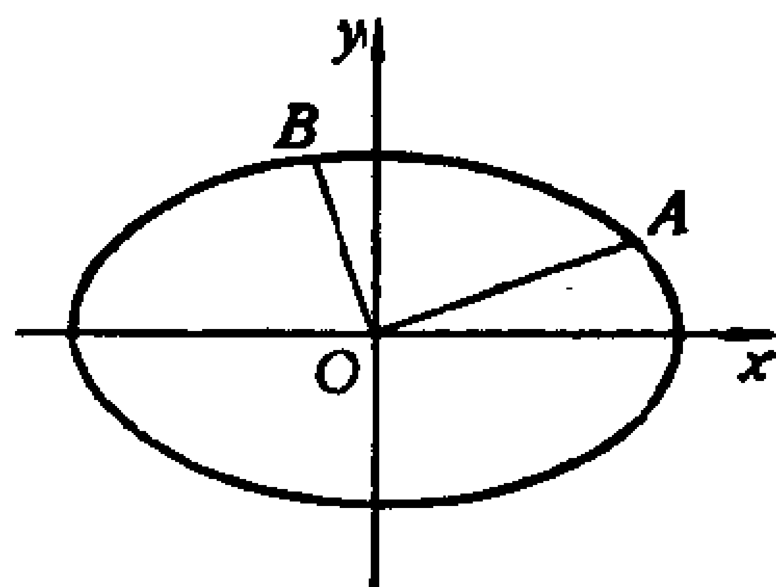
$$=\frac{b\cos\theta}{b'}\cdot\frac{a\cos\theta}{a'}-\left(-\frac{a\sin\theta}{b'}\right)\cdot\left(\frac{b\sin\theta}{a'}\right)=\frac{ab}{a'b'}.$$

故该平行四边形面积为:

$$2a'\cdot2b'\cdot\sin\varphi=2a'\cdot2b'\cdot\frac{ab}{a'b'}=4ab.$$

676. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两半直径OA、OB互相垂直，求证:

$$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}.$$



［分析］ 因为点 A 确定以后，点 B 随之而定. 故以点 A 的坐标为参数，且利用极坐标进行计算较为方便.

［证］ 以原点为极点，Ox 为极轴建立极坐标系，则椭圆方程可化为: $b^2\rho^2\cos^2\theta+a^2\rho^2\sin^2\theta=a^2b^2$. 设点 A 的极坐标为 $(\rho_1,\ \theta)$，点 B 的极坐标为 $\left(\rho_2,\ \theta+\frac{\pi}{2}\right)$. 因为点 A、B 均在椭圆上，

$$\therefore\quad b^2\rho_1^2\cos^2\theta+a^2\rho_1^2\sin^2\theta=a^2b^2;$$

$$b^2\rho_2^2\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+a^2\rho_2^2\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=a^2b^2,$$

即

$$b^2\rho_2^2\sin^2\theta+a^2\rho_2^2\cos^2\theta=a^2b^2.$$

$$\therefore\quad \rho_1^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta};\quad \rho_2^2=\frac{a^2b^2}{b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta}.$$

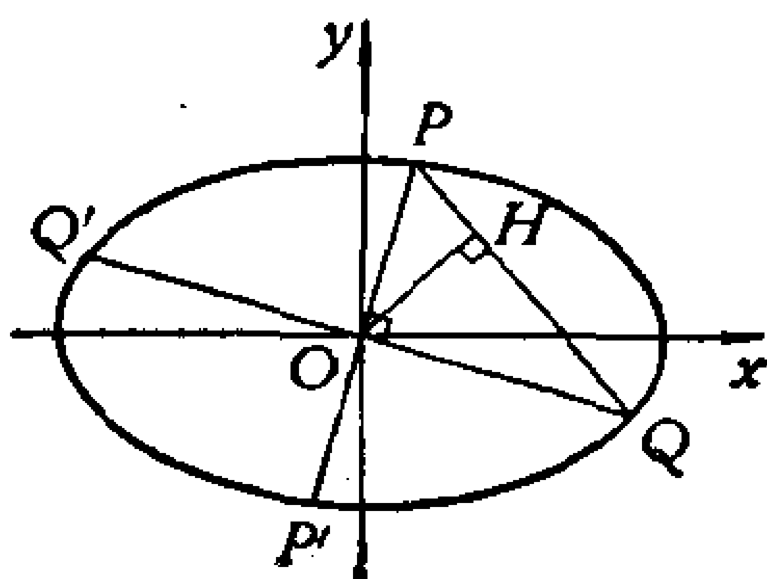
$$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}$$
$$=\frac{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta+b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta}{a^2b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}.$$

[说明] 用解析法证明定值问题，常常把变动的元素以参数表示，然后计算出所需的结果与参数无关.

677. 求证：椭圆中心到互相垂直的直径两端的连线的距离为定值.

[分析一] 设 PP' 与 QQ' 是椭圆互相垂直的两直径，$|OH|$ 是 O 到 PQ 的距离，它是直角三角形 POQ 斜边上的高，

$$|OH|=\frac{|OP|\cdot|OQ|}{|PQ|}=\frac{|OP|\cdot|OQ|}{\sqrt{OP^2+OQ^2}}$$
$$=\sqrt{\frac{OP^2\cdot OQ^2}{OP^2+OQ^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}}},$$



故只需证 $\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}$ 为定值即可.

[证一] 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，由上题可知

$$\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2},$$
$$\therefore\quad |OH|=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}(\text{定值}).$$

[分析二] 由于椭圆中心是原点，再利用直线 PQ 与椭圆交点和原点的连线 OP、OQ 的二次齐次方程，就便于运用 $OP\perp OQ$ 的条件.

[证二] 设直线 PQ 的方程为 $x\cos\theta+y\sin\theta=p$，则两直线 OP、OQ 的方程为 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\left(\frac{x\cos\theta+y\sin\theta}{p}\right)^2$，

即 $(b^2p^2-a^2b^2\cos^2\theta)x^2-2a^2b^2xy\cos\theta\sin\theta+(a^2p^2-a^2b^2\sin^2\theta)y^2=0$.

$$\because\quad OP\perp OQ,\quad \therefore\quad b^2p^2-a^2b^2\cos^2\theta+a^2p^2-a^2b^2\sin^2\theta=0.$$
$$\therefore\quad p^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

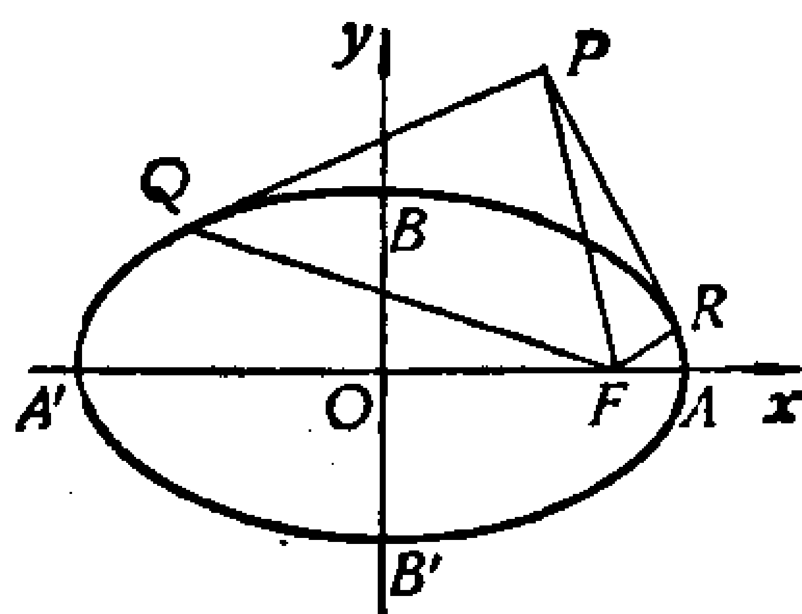
而$p=|OH|$，故$|OH|$为定值.

［说明］ 涉及直线与二次曲线的交点和原点的两连线的问题，利用二次齐次方程(提要3.120)，往往可使解法简化.

678. 由椭圆外一点$P(x_1, y_1)$向椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$引切线$PQ$、$PR$，$Q$、$R$为切点，设$F$为椭圆的一个焦点. 求证：

$$\frac{|FP|^2}{|FQ|\,|FR|}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}.$$

［分析］ 利用点P的切点弦方程和椭圆方程求出切点坐标满足的方程，然后利用韦达定理计算.



［证］ 点$P(x_1, y_1)$的切点弦RQ的方程为$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$，解方程组

$$\begin{cases}\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$$

消去y，得方程$\frac{y_1^2}{b^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=\left(1-\frac{x_1x}{a^2}\right)^2$，整理成关于$\frac{x}{a}$的方程

$$\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)\left(\frac{x}{a}\right)^2-\frac{2x_1}{a}\cdot\frac{x}{a}+\left(1-\frac{y_1^2}{b^2}\right)=0.$$

此方程的两根为$\frac{x_1'}{a}$、$\frac{x_2'}{a}$. 由韦达定理

$$\frac{x_1'}{a}+\frac{x_2'}{a}=\frac{\frac{2x_1}{a}}{\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}};\quad \frac{x_1'}{a}\cdot\frac{x_2'}{a}=\frac{1-\frac{y_1^2}{b^2}}{\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}}.$$

x_1'、x_2'是点R、Q的横坐标，若焦点F坐标为$(c, 0)$，则

$$\begin{aligned}|FQ|\cdot|FR|&=(a-ex_1')(a-ex_2')\\ &=a^2\left[1-e\left(\frac{x_1'}{a}+\frac{x_2'}{a}\right)+e^2\,\frac{x_1'}{a}\cdot\frac{x_2'}{a}\right]\\ &=\frac{a^2}{\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}}\left[\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{2ex_1}{a}+e^2\left(1-\frac{y_1^2}{b^2}\right)\right].\end{aligned}$$

$$|FQ|\cdot|FR|\cdot\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)=x_1^2+\frac{a^2y_1^2}{b^2}-2aex_1+a^2e^2-\frac{a^2e^2y_1^2}{b^2}$$
$$=(x_1-ae)^2+\frac{a^2y_1^2(1-e^2)}{b^2}$$
$$=(x_1-ae)^2+y_1^2=(x_1-c)^2+y_1^2.$$

而 $|FP|^2=(x_1-c)^2+y_1^2$, 所以 $\frac{|FP|^2}{|FQ||FR|}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}$.

[说明] 对于双曲线也有类似结论: $\frac{|FP|^2}{|FQ||FR|}=\left|\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}\right|$, 证明方法相同.

679. 求证：从不在椭圆长轴上的一点最多可作椭圆的四条法线．且四法线足的离心角之和为 π 的奇数倍．

[分析] 题断涉及法线足的离心角 φ, 故可设法线足为 $(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$, 利用法线过不在长轴上一点 $P(x_1, y_1)$ 这一条件进行推证.

[证] 在直角坐标系中，设椭圆的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos\varphi\\ y=b\sin\varphi,\end{cases}$ 法线足(即切点)为 $(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$, 则法线方程为 $ax\sin\varphi-by\cos\varphi=(a^2-b^2)\sin\varphi\cos\varphi$. 因这法线过不在长轴上的点 $P(x_1, y_1)$, $(y_1\neq0)$. 故 $ax_1\sin\varphi-by_1\cos\varphi=c^2\sin\varphi\cos\varphi$. 令 $t=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, 代入化简得

$$by_1t^4+2(ax_1+c^2)t^3+2(ax_1-c^2)t-by_1=0\cdots①.$$

$\because$ $by_1\neq0$, $\therefore$ 方程①为四次方程，最多有四个实根 $t_i(i=1, 2, 3, 4)$, 因此过点 $P(x_1, y_1)$ 最多可作椭圆的四条法线. 若设此四法线足的离心角为 $\varphi_i(i=1, 2, 3, 4)$, 则 $t_i=\operatorname{tg}\frac{\varphi_i}{2}$, 根据韦达定理得:

$$s_1=t_1+t_2+t_3+t_4=-\frac{2(ax_1+c^2)}{by_1},$$
$$s_2=t_1t_2+t_1t_3+t_1t_4+t_2t_3+t_2t_4+t_3t_4=0,$$
$$s_3=t_1t_2t_3+t_1t_2t_4+t_1t_3t_4+t_2t_3t_4=-\frac{2(ax_1-c^2)}{by_1},$$
$$s_4=t_1t_2t_3t_4=-1.$$

$$\because\quad \operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4)=\frac{1-s_2+s_4}{s_1-s_3}=0,$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4)=(2n+1)\frac{\pi}{2},$$

即
$$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4=(2n+1)\pi\quad (n\in J).$$

［说明］ 有关椭圆离心角的问题，一般应用椭圆的参数方程，按题意导出离心角之间的关系，利用万能置换公式将三角方程变为半角正切的代数方程，根据韦达定理与三角公式推出结论.

680. 设 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4 是椭圆与任意圆的四个交点的离心角，求证：$\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=2n\pi\quad(n\in J)$.

［证］ 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，圆方程为 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-r^2=0$. 以 $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$ 代入圆方程，得

$$a^2\cos^2\theta-2ax_0\cos\theta+x_0^2+b^2\sin^2\theta-2by_0\sin\theta+y_0^2-r^2=0.$$

设 $t=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$，代入整理得

$$[(x_0+a)^2+y_0^2-r^2]t^4-4by_0t^3+2(x_0^2+y_0^2-a^2+2b^2-r^2)t^2$$
$$-4by_0t+(x_0-a)^2+y_0^2-r^2=0,$$

它的四个根为 t_1、t_2、t_3、t_4. 由韦达定理得:

$$s_1=t_1+t_2+t_3+t_4=\frac{4by_0}{(x_0+a)^2+y_0^2-r^2},$$

$$s_2=t_1t_2+t_1t_3+t_1t_4+t_2t_3+t_2t_4+t_3t_4=\frac{2(x_0^2+y_0^2-a^2+2b^2-r^2)}{(x_0+a)^2+y_0^2-r^2},$$

$$s_3=t_1t_2t_3+t_1t_2t_4+t_1t_3t_4+t_2t_3t_4=\frac{4by_0}{(x_0+a)^2+y_0^2-r^2},$$

$$s_4=t_1t_2t_3t_4=\frac{(x_0-a)^2+y_0^2-r^2}{(x_0+a)^2+y_0^2-r^2}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)=\frac{s_1-s_3}{1-s_2+s_4}=0.$$

$\therefore\quad \frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)=n\pi(n\in J)$. 即 $\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=2n\pi$.

［说明］ 圆与椭圆的四个交点中如有一点位于椭圆长轴端点 $(-a, 0)$ 时，此点的离心角为 π，则 $\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}$ 不存在，故 t^4 的系数为零. 此时方程只有 t_2、t_3、t_4 三个实根，而 $t_2t_3+t_3t_4+t_4t_2=1$，因此

$$\operatorname{tg}\frac{\theta_2}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta_3}{2}+\operatorname{tg}\frac{\theta_4}{2}\right)=1-\operatorname{tg}\frac{\theta_3}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta_4}{2},$$

即　$\operatorname{tg}\frac{\theta_2}{2}=\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\theta_3+\theta_4)$.　$\therefore$　$\frac{1}{2}(\theta_2+\theta_3+\theta_4)=k\pi+\frac{\pi}{2}$　$(k\in J)$.

而 $\theta_1=\pi$, 故 $\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=2n\pi$ $(n\in J)$.

681. 设 P_1、P_2、…、P_n 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的 n 个点，且 OP_1、OP_2、…、OP_n 将圆周角 O n 等分，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{OP_i^2}$ 为定值.

［分析］ 椭圆上的点 P_i 到中心距离为 ρ_i, $\angle xOP_i=\theta_i$, 即点 P_i 的坐标为 $(\rho_i\cos\theta,\ \rho_i\sin\theta)$. 因为点 P_i 在椭圆上，故可求出 $\frac{1}{\rho_i^2}$ 的值，从而证得结论.

［证］ 设 $OP_i=\rho_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, $\angle xOP_1=\alpha$, 则

$$\angle xOP_i=\alpha+\frac{(i-1)2\pi}{n},$$

P_i 的坐标为

$$\left(\rho_i\cos\left(\alpha+\frac{(i-1)2\pi}{n}\right),\ \rho_i\sin\left(\alpha+\frac{(i-1)2\pi}{n}\right)\right)\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

将 P_i 的坐标代入椭圆方程，得

$$\rho_i^2\left[\frac{\cos^2\left(\alpha+\frac{(i-1)2\pi}{n}\right)}{a^2}+\frac{\sin^2\left(\alpha+\frac{(i-1)2\pi}{n}\right)}{b^2}\right]=1\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

故
$$\frac{1}{\rho_i^2}=\frac{\cos^2\left(\alpha+\frac{(i-1)2\pi}{n}\right)}{a^2}+\frac{\sin^2\left(\alpha+\frac{(i-1)2\pi}{n}\right)}{b^2}.$$

将上面 n 个等式相加得:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\rho_i^2}&=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\cos^2\left(\alpha+\frac{(i-1)2\pi}{n}\right)}{a^2}+\frac{\sin^2\left(\alpha+\frac{(i-1)2\pi}{n}\right)}{b^2}\right]\\&=\frac{1}{2a^2}\sum_{i=1}^{n}\left[1+\cos\left(2\alpha+\frac{(i-1)4\pi}{n}\right)\right]\\&\quad+\frac{1}{2b^2}\sum_{i=1}^{n}\left[1-\cos\left(2\alpha+\frac{(i-1)4\pi}{n}\right)\right]=\frac{n}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\sum_{i=1}^{n}\cos\left(2\alpha+\frac{(i-1)4\pi}{n}\right).$$

其中

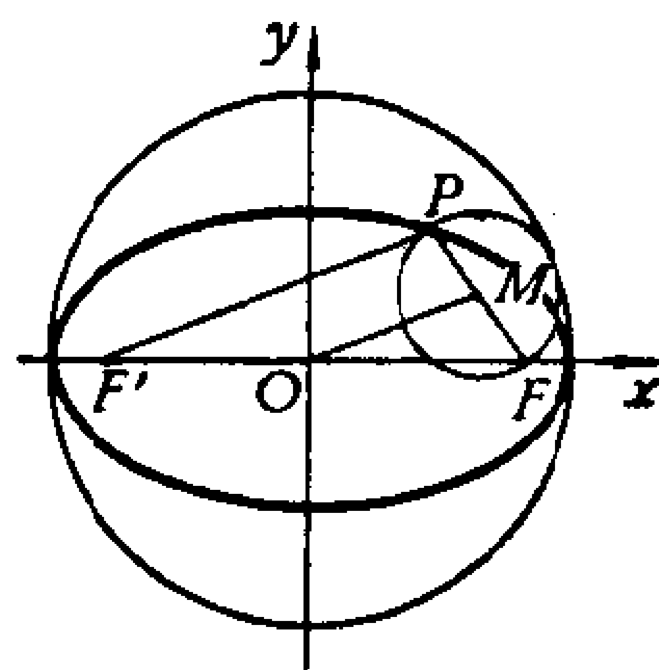
$$\sum_{i=1}^{n}\cos\left(2\alpha+\frac{(i-1)4\pi}{n}\right)=\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{n}}\sum_{i=1}^{n}\cos\left(2\alpha+\frac{(i-1)4\pi}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{2\pi}{n}}\sum_{i=1}^{n}\left[\sin\left(2\alpha+\frac{(2i-1)2\pi}{n}\right)-\sin\left(2\alpha+\frac{(2i-3)2\pi}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{2\pi}{n}}\left[\sin\left(2\alpha-\frac{2\pi}{n}\right)-\sin\left(2\alpha-\frac{2\pi}{n}\right)\right]=0.$$

$$\therefore\ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\rho_i^2}=\frac{n}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)(\text{定值}).$$

682. **求证：以椭圆的任一焦半径为直径之圆与大辅助圆相切.**



［分析］ 只需证明焦半径的中点与大辅助圆中心的距离等于两圆半径之差即可.

［证］ 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $P(x_1, y_1)$ 在椭圆上，焦点为 $F(ae, 0)$、$F'(-ae, 0)$.

$$\because\ |PF'|=a+ex_1,\ |PF|=a-ex_1,$$

又 $\because$ OM 是 $\triangle FF'P$ 的中位线， $\therefore$ $|OM|=\frac{1}{2}|PF'|=\frac{1}{2}(a+ex_1)$. 大辅助圆与以 PF 为直径的圆的半径之差

$$d=a-\frac{1}{2}|PF|=a-\frac{1}{2}(a-ex_1)=\frac{1}{2}(a+ex_1)=|OM|.$$

$\therefore$ 以 PF 为直径的圆与大辅助圆相切.

683. **一直线的斜率等于一椭圆的离心率，且过此椭圆的准线与此椭圆焦点轴的交点，求证此直线与椭圆相切.**

［证］ 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 则焦点轴与准线的交点 D 的坐标为 $\left(\frac{a}{e}, 0\right)$. 斜率为离心率 e 且过 D 的直线方程为 $y=e\left(x-\frac{a}{e}\right)$, 即

$ex-y-a=0$. 以 $y=ex-a$ 代入椭圆方程，得 $b^2x^2+a^2(ex-a)^2=a^2b^2$，即

$(b^2+a^2e^2)x^2-2a^3ex+a^2(a^2-b^2)=0$. $\because$ $b^2+a^2e^2=b^2+c^2=a^2$,

$\therefore$ 此方程为 $x^2-2aex+a^2e^2=0$，即 $(x-ae)^2=0$. 故此直线与椭圆相切.

684. 求证：椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 与圆 $(x-be)^2+y^2=b^2e^2$ 相切，其中 e 为椭圆的离心率.

[分析] 只需证明在交点处椭圆的法线过圆心.

[证] 从圆方程得 $y^2=b^2e^2-(x-be)^2=2bex-x^2$，代入椭圆方程 $b^2x^2+a^2(2bex-x^2)=a^2b^2$，得 $(a^2-b^2)x^2-2a^2bex+a^2b^2=0$. 但 $a^2-b^2=c^2=a^2e^2$，$\therefore (aex-ab)^2=0$，解得 $x=\frac{b}{e}$. $\therefore$ 圆与椭圆交点坐标为 $P\left(\frac{b}{e}, y_1\right)$.
过点 P 的椭圆法线方程为 $a^2y_1x-\frac{b^3}{e}y=a^2bey_1$. $\because$ 圆心 $(be, 0)$ 的坐标适合此方程，$\therefore$ 此法线过圆心，因此过 P 的椭圆切线与圆的切线重合，即圆与椭圆相切.

685. 求证：椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 对中心张直角的弦恒与圆 $x^2+y^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ 相切.

[证一] 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 对中心张直角的弦的端点 P、Q 的极坐标为 (ρ_1, θ)、$\left(\rho_2, \theta+\frac{\pi}{2}\right)$，则其直角坐标为 $(\rho_1\cos\theta, \rho_1\sin\theta)$、$(-\rho_2\sin\theta, \rho_2\cos\theta)$. 进而直线 PQ 的方程为

$$(\rho_1\sin\theta-\rho_2\cos\theta)x-(\rho_1\cos\theta+\rho_2\sin\theta)y+\rho_1\rho_2=0,$$

于是中心到直线 PQ 的距离

$$d=\frac{\rho_1\rho_2}{\sqrt{(\rho_1\sin\theta-\rho_2\cos\theta)^2+(\rho_1\cos\theta+\rho_2\sin\theta)^2}}=\frac{\rho_1\rho_2}{\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2}}.$$

$\because$ 点 P 在椭圆上，$\therefore$ $b^2\rho_1^2\cos^2\theta+a^2\rho_1^2\sin^2\theta=a^2b^2$,

从而 $\rho_1^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}$. 同理，有 $\rho_2^2=\frac{a^2b^2}{b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta}$.

$\therefore$ $d^2=\frac{\rho_1^2\rho_2^2}{\rho_1^2+\rho_2^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$. 所以椭圆弦 PQ 与圆 $x^2+y^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ 相切.

［证二］ 设在椭圆中心 O 张直角之弦的方程为 $x\cos\theta+y\sin\theta=p$, 弦的两端点为 P、Q. 根据提要(3.120), 两直线 OP、OQ 的方程为:

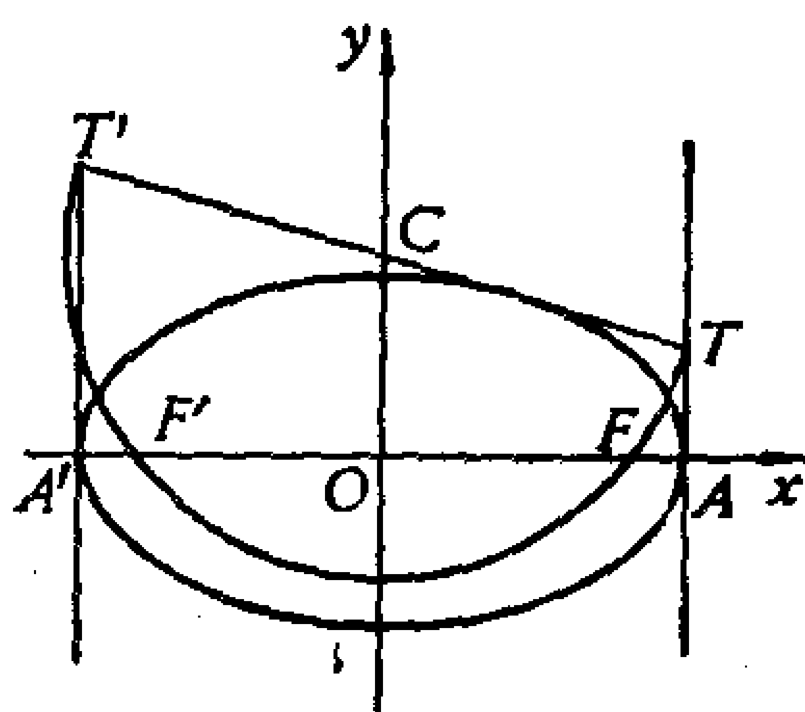
$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\left(\frac{x\cos\theta+y\sin\theta}{p}\right)^2,$$

即
$$p^2(b^2x^2+a^2y^2)=a^2b^2(x^2\cos^2\theta+2xy\sin\theta\cos\theta+y^2\sin^2\theta).$$

$$\because\quad OP\perp OQ,\quad\therefore\quad p^2(a^2+b^2)-a^2b^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=0.$$

$\therefore\quad p^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$. 故 PQ 与圆 $x^2+y^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ 相切.

686. 设 TT' 是椭圆的任一切线介于长轴两端切线 AT、$A'T'$ 间的线段, 则以 TT' 为直径的圆必过焦点 F、F'.



［分析］ 可先求出以 TT' 为直径的圆方程, 然后验证 F、F' 在圆上. 或者证明 TT' 的中点 C 到两焦点距离为 $\dfrac{1}{2}|TT'|$.

［证一］ 设椭圆在直角坐标系中的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta,\end{cases}$ 过椭圆上任一点 $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$的切线方程为 $\dfrac{x\cos\theta}{a}+\dfrac{y\sin\theta}{b}=1$; 因为长轴两端的切线方程为 $x^2-a^2=0$, 故 T、T' 的坐标为

$$\left(a,\ \frac{b(1-\cos\theta)}{\sin\theta}\right)、\left(-a,\ \frac{b(1+\cos\theta)}{\sin\theta}\right).$$

以 TT' 为直径的圆方程为

$$\frac{y-\dfrac{b(1-\cos\theta)}{\sin\theta}}{x-a}\cdot\frac{y-\dfrac{b(1+\cos\theta)}{\sin\theta}}{x+a}=-1,$$

即
$$(x-a)(x+a)+\left(y-b\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\left(y-b\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right)=0.$$

将焦点 $F(c,\ 0)$的坐标代入方程左端, 因为

$$(c-a)(c+a)+b^2=c^2-a^2+b^2=0,$$

故 F 在圆上. 同理, F' 也在圆上.

［证二］ 设切线方程 $\dfrac{x\cos\theta}{a}+\dfrac{y\sin\theta}{b}=1$ 与 y 轴的交点为 C, 它的坐标

是$\left(0,\ \frac{b}{\sin\theta}\right)$，故点$C$又是线段$TT'$的中点.

$$\because\quad |CF'|=\sqrt{c^2+\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)^2}=\sqrt{c^2+b^2\csc^2\theta},$$

$$|CF|=\sqrt{c^2+\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)^2}=\sqrt{c^2+b^2\csc^2\theta}.$$

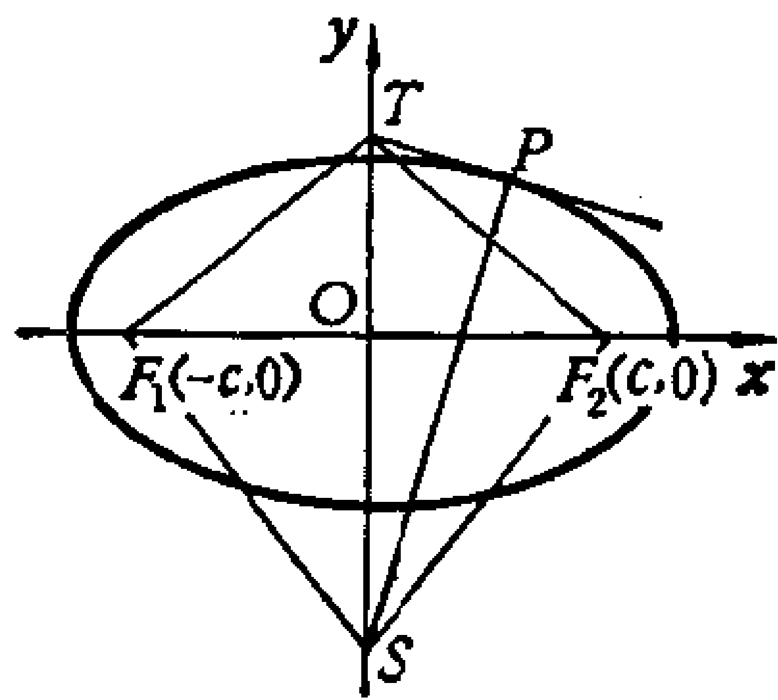
而
$$\frac{1}{2}|TT'|=\sqrt{a^2+\left(\frac{b\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2}=\sqrt{a^2+b^2\operatorname{ctg}^2\theta}$$

$$=\sqrt{a^2-b^2+b^2\csc^2\theta}=\sqrt{c^2+b^2\csc^2\theta}.$$

$\therefore\quad |CF|=|CF'|=\frac{1}{2}|TT'|$，即$F$、$F'$在以$TT'$为直径的圆上.

［说明］ 证四点共圆，可证四点坐标满足同一圆方程，因而关键是求出此圆方程. 除此之外，有时可利用二次曲线系方程，与一般二次方程为圆方程的充要条件推求. 另外也可利用四边形对角互补，或圆幂定理的逆定理来证明四点共圆.

687. 设P为椭圆上任意一点（但非顶点），过P引椭圆的切线和法线，分别交椭圆短轴所在的直线于T和S. 求证：椭圆的两个焦点F_1、F_2及P、S、T五点共圆.



［证］ 设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，过椭圆上任一点$P(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$的切线方程为$bx\cos\theta+ay\sin\theta-ab=0$，法线方程为

$$\frac{ax}{\cos\theta}-\frac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2,$$

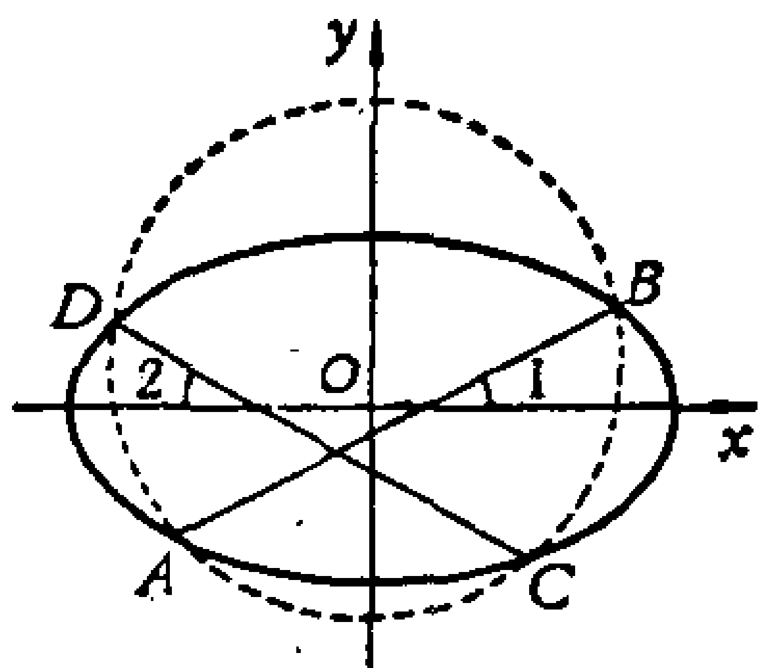
故它们与短轴交点为

$$T\left(0,\ \frac{b}{\sin\theta}\right)、S\left(0,\ -\frac{c^2}{b}\sin\theta\right).$$

又
$$\because\quad k_{F_2T}\cdot k_{F_2S}=\left(-\frac{b}{c\sin\theta}\right)\cdot\left(\frac{c}{b}\sin\theta\right)=-1,$$

$\therefore$ 焦点F_2和点P都对ST张直角. 同理，F_1对ST也张直角. 因此P、F_1、F_2在以ST为直径的圆上，即F_1、F_2、P、S、T五点共圆.

688. 如图,AB 和 CD 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两弦,且 $\angle 1=\angle 2$. 求证: A、C、B、D 四点共圆.



[分析] 欲证 A、B、C、D 四点共圆,只需找到过这四点的一个圆方程. 利用 AB、CD 两直线方程,根据提要(8.72)可得过 A、B、C、D 的二次曲线系方程,适当选取参数 λ,即可得过这四点的圆方程.

[证] 因 $\angle 1=\angle 2$, 故 AB 和 CD 的倾角之和为 π, 斜率 $k_{AB}=-k_{OD}$. 若设直线 AB 的方程为 $mx+ny+l_1=0$, 则 CD 的方程为 $mx-ny+l_2=0$, 于是过椭圆 $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$ 与两直线 AB、CD 的四个交点的二次曲线系为

$$(mx+ny+l_1)(mx-ny+l_2)+\lambda(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)=0,$$

即 $(\lambda b^2+m^2)x^2+(\lambda a^2-n^2)y^2+m(l_1+l_2)x+n(l_2-l_1)y+l_1l_2-\lambda a^2b^2=0$.

令 $\lambda=\frac{m^2+n^2}{a^2-b^2}$,有 $m^2+\lambda b^2=-n^2+\lambda a^2\neq 0$,则此二次曲线为一个圆,故 A、B、C、D 四点共圆.

689. 求证: 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上三点的焦点半径成等差数列的充要条件是这三点的横坐标成等差数列.

[证] 必要性: 设椭圆上三点为 $P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$、$R(x_3, y_3)$, 不妨设 F 是右焦点, 则 $|FP|=a-ex_1$, $|FQ|=a-ex_2$, $|FR|=a-ex_3$. 因为 $|FP|$、$|FQ|$、$|FR|$ 成等差数列, 所以 $2|FQ|=|FP|+|FR|$. 即 $2(a-ex_2)=(a-ex_1)+(a-ex_3)$, 得 $2x_2=x_1+x_3$, 故 x_1、x_2、x_3 成等差数列.

充分性: 因 x_1、x_2、x_3 成等差数列, 故 $2x_2=x_1+x_3$.

则
$$\begin{aligned}|FP|+|FR|&=a-ex_1+a-ex_3=2a-e(x_1+x_3)\\&=2a-2ex_2=2(a-ex_2)=2|FQ|.\end{aligned}$$

即三焦点半径 $|FP|$、$|FQ|$、$|FR|$ 成等差数列.

690. 若椭圆之两切线平行,求证这两切点与中心共线.

[证] 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 有两切点 (x_1, y_1)和(x_2, y_2), 过这两点的切线方程为 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$ 和 $\frac{x_2x}{a^2}+\frac{y_2y}{b^2}=1$. 已知两切线平行,

$\therefore\ \frac{b^2x_2}{a^2y_2}=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$, 即 $\frac{y_2}{x_2}=\frac{y_1}{x_1}=k$, 亦即$(x_1, y_1)$ 与 (x_2, y_2) 在直线 $y=kx$ 上. 而直线 $y=kx$ 过椭圆中心, 故中心与两切点共线.

691. 求证: 过椭圆系 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$($a$ 为定值, b 为参数)通径上端的切线必过一定点.

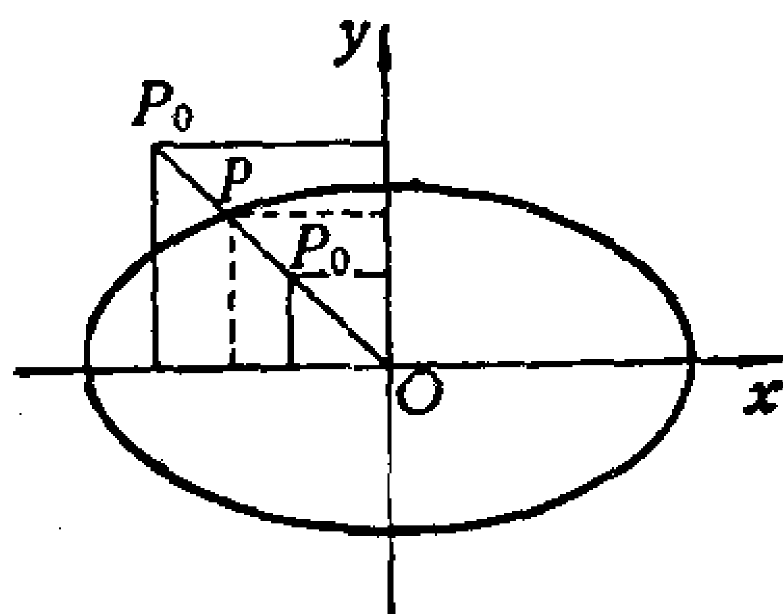
[证] 因为通径上端点 P 的坐标为 $\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$, 椭圆过点 P 的切线为 $\frac{cx}{a^2}+\frac{\frac{b^2}{a}y}{b^2}=1$, 即 $cx+ay-a^2=0$. 等式$\sqrt{a^2-b^2}x+ay-a^2=0$, 对于一切允许的 b 值都成立; 令$\begin{cases}x=0\\ay-a^2=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=0\\y=a,\end{cases}$ 故切点恒过点$(0, a)$. 同样, 过另一通径上端$\left(-c, \frac{b^2}{a}\right)$的切线也恒过点$(0, a)$.

692. 已知一点 $P_0(x_0, y_0)$与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 求证:

(1) 当 P_0 在椭圆外时, $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1>0$;

(2) 当 P_0 在椭圆内时, $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1<0$.

[证一] (1) 当P_0在椭圆外时, 若$|x_0|>a$, 则 $\frac{x_0^2}{a^2}>1$, $\therefore\ \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1>0$; 若 $|x_0|<a$, 则直线 $x=x_0$ 与椭圆有交点, 设为 $P'(x_0,y')$. 于是 $|y_0|>|y'|$,



$$\therefore\ \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1>\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1=0.$$

故当点 P_0 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 外时, $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1>0$.

(2) 当点 $P_0(x_0, y_0)$在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 内时，则 $|x_0|<a$，直线 $x=x_0$ 与椭圆有交点，设为 $P'(x_0, y')$，则 $|y_0|<|y'|$，

$$\therefore \quad \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1<\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1=0.$$

［证二］ 连接 O、P_0 与椭圆交于点 P，设点 P 的坐标为(x', y')。

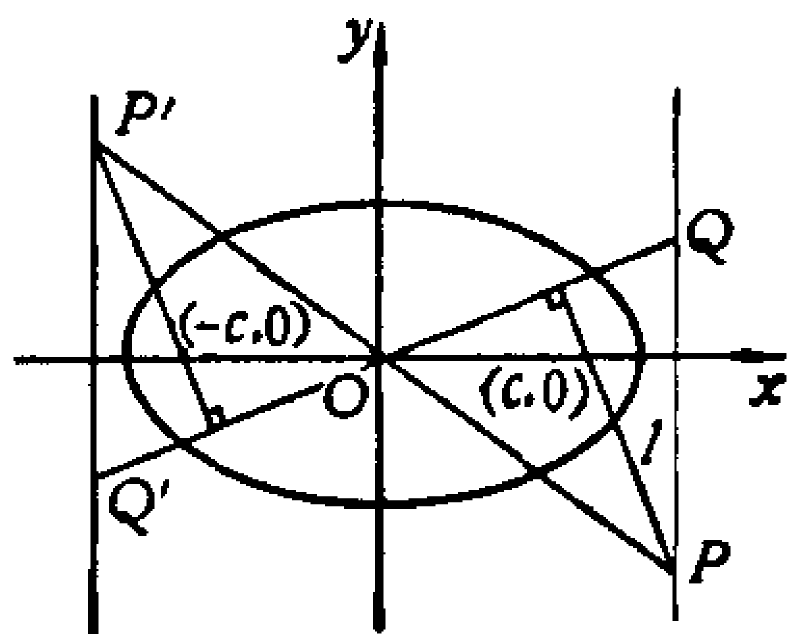
(1) ∵ P_0 在椭圆外， ∴ $|x_0|>|x'|$，$|y_0|>|y'|$。

故
$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1>\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1=0.$$

(2) ∵ P_0 在椭圆内， ∴ $|x_0|<|x'|$，$|y_0|<|y'|$。

故
$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1<\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1=0.$$

693. 试证：椭圆的两共轭直径与一准线所成的三角形的垂心必为与该准线对应的焦点.



［证］ 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，对于任一直径 $y=kx$，根据提要 (5.38)，它的共轭直径方程为 $y=-\frac{b^2}{a^2k}x$. 直径 $y=kx$ 与右准线 $x=\frac{a^2}{c}$ 的交点为 $P\left(\frac{a^2}{c}, \frac{a^2k}{c}\right)$，过 P 与共轭直径垂直的直线 l 方程为 $y=\frac{a^2k}{b^2}\left(x-\frac{a^2}{c}\right)+\frac{a^2k}{c}$. 在椭圆的两共轭直径与准线所成的三角形 OPQ 中，x 轴是垂直于准线的高，故垂心即 l 与 x 轴的交点$(c, 0)$，即右焦点. 对于左准线，则垂心为左焦点$(-c, 0)$.

694. 求证：椭圆两准线上任意一点的切点弦各过一定点.

［证］ 设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，准线 $x=\frac{a^2}{c}$ 上任一点为 $\left(\frac{a^2}{c}, y_0\right)$，过此点向椭圆引切线，所得切点弦方程为

$$\frac{\left(\frac{a^2}{c}\right)x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1, \quad 即 \quad \frac{x}{c}+\frac{y_0y}{b^2}=1,$$

$(b^2x-b^2c)+cyy_0=0$. 欲使其对任何 y_0 均成立，只要

$$\begin{cases} cy=0 \\ b^2(x-c)=0, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x=c \\ y=0. \end{cases}$$

故准线上任一点的切点弦均过焦点$(c,\ 0)$. 同样，对于左准线上任一点的切点弦都过左焦点$(-c,\ 0)$.

695. 求证：椭圆的任一内接或外切正三角形的中心不可能与椭圆中心重合.

[分析] 命题结论以否定形式出现，故可用反证法证明. 椭圆中心是互相垂直的两对称轴的交点，而正三角形的中心则不是. 如果假定两中心重合，必然与对称性有矛盾.

[证] (1) 设椭圆内接正三角形的中心与椭圆中心重合，则正三角形的外接圆与椭圆同心，并且它们有四个交点. 根据对称性，这四个交点是矩形的顶点，但正三角形三个顶点不可能都是矩形顶点，因此两中心不能重合.

(2) 若椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的中心与其外切三角形的中心重合，则中心到三边的距离相等. 设三边的切点为 $(x_i,\ y_i)(i=1,\ 2,\ 3)$，则三边方程为 $b^2x_ix+a^2y_iy=a^2b^2$. 椭圆中心到三边的距离为$\frac{a^2b^2}{\sqrt{b^4x_i^2+a^4y_i^2}}$. 于是得

$$b^4x_1^2+a^4y_1^2=b^4x_2^2+a^4y_2^2=b^4x_3^2+a^4y_3^2.$$

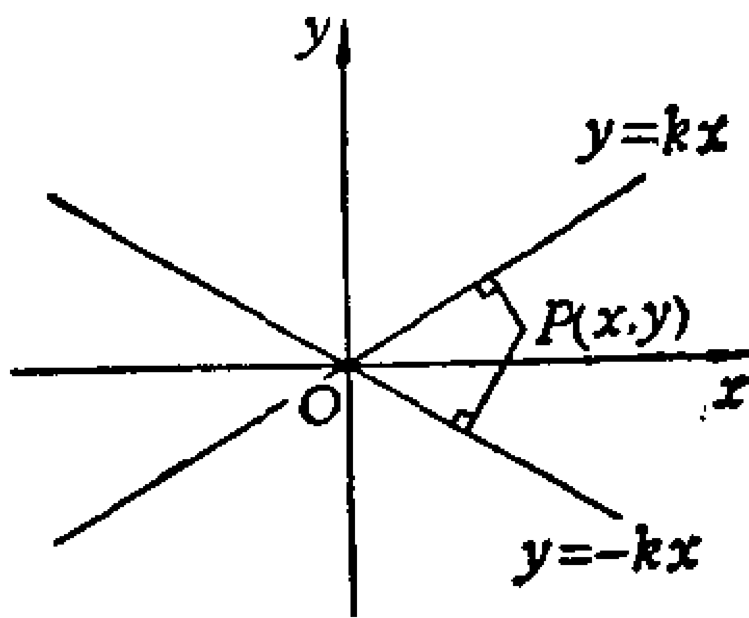
$$\because \quad a^2y_i^2=b^2(a^2-x_i^2), \qquad \therefore \quad b^4x_i^2+a^4y_i^2=b^2(a^4-c^2x_i^2).$$

因此 $x_1^2=x_2^2=x_3^2$. 但椭圆上横坐标绝对值相等的三点中，必有两点是关于中心对称的，它们的切线互相平行；但三角形中不可能有两边互相平行，所以两中心不可能重合.

[说明] 在(2)的证明中，并未用到"正三角形"的条件，这实际上证明了更广泛的命题："椭圆任一外切三角形的内心不可能与椭圆中心重合".

§8. 轨 迹 题

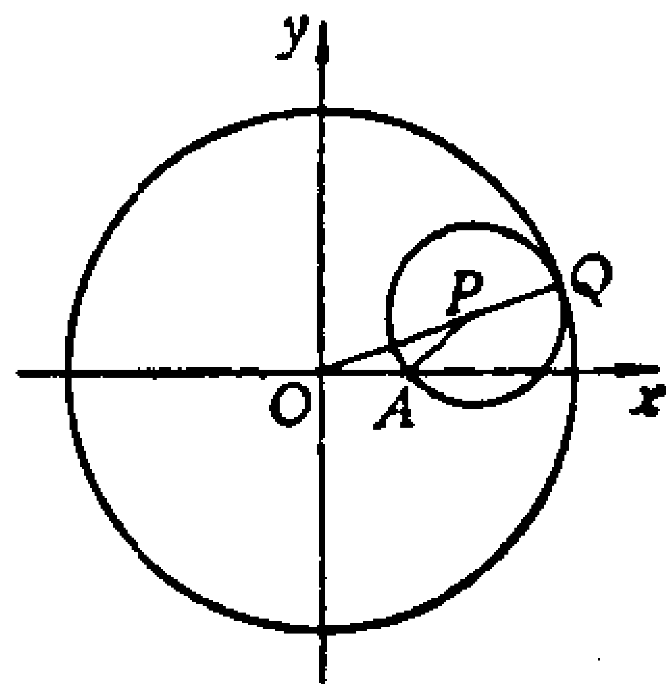
696. 一动点到两相交定直线的距离的平方和为定值，求此动点的轨迹.



［分析］ 两直线的交角平分线是互相垂直的，用来作为坐标轴，能使两条直线方程易于表达，求轨迹方程就较方便.

［解］ 取两定直线交点 O 为原点，以它们的角平分线为两坐标轴建立直角坐标系. 于是可设两定直线方程为 $y=\pm kx$, $(k>0)$. 若 $P(x, y)$为轨迹上任意一点，则 $\left(\frac{|kx+y|}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2+\left(\frac{|-kx+y|}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2=m^2$ （m^2 为定值）. 化简得 $2k^2x^2+2y^2=m^2(1+k^2)$. 故所求轨迹为椭圆. 特别地，当 $k=1$ 时，轨迹为圆.

697. 求与已知圆相切，且过圆 O 内一定点 A 的圆的圆心轨迹.



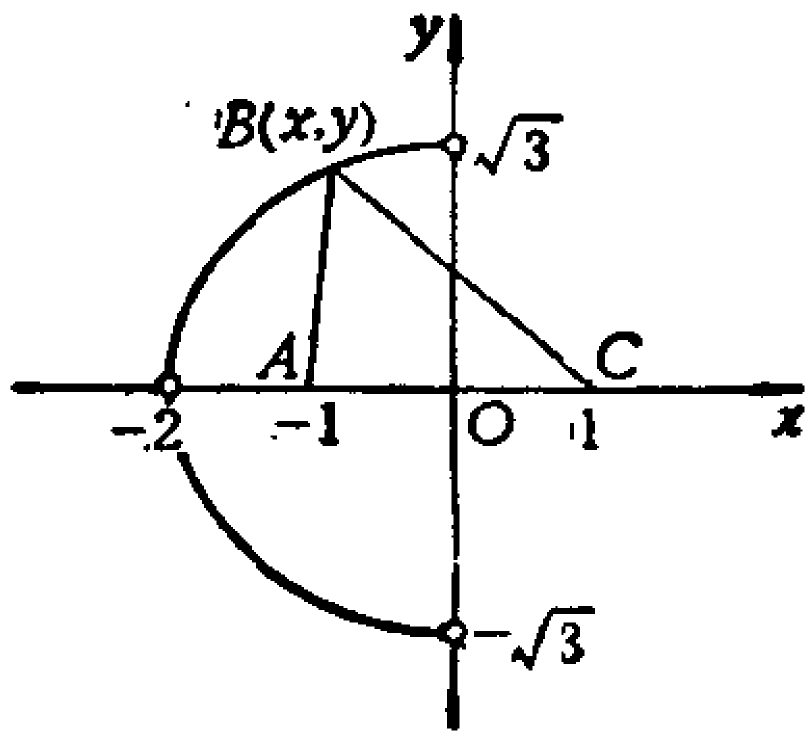
［解］ 以 O 为原点，OA 所在直线为 x 轴建立直角坐标系如图. 设 $P(x, y)$ 为轨迹上任一点，圆 P 过点 $A(a, 0)$ 与圆 O 相切于 Q. 圆 O 的方程为 $x^2+y^2=r^2$ $(r>a)$.

$\because$ $|OP|+|PA|=|OP|+|PQ|=r$ 为定值，

$\therefore$ 由椭圆定义可知，点 P 轨迹为椭圆，它的中心在 OA 中点 $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$，焦距为 a，长轴为 r. 故所求轨迹方程为

$$\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=1.$$

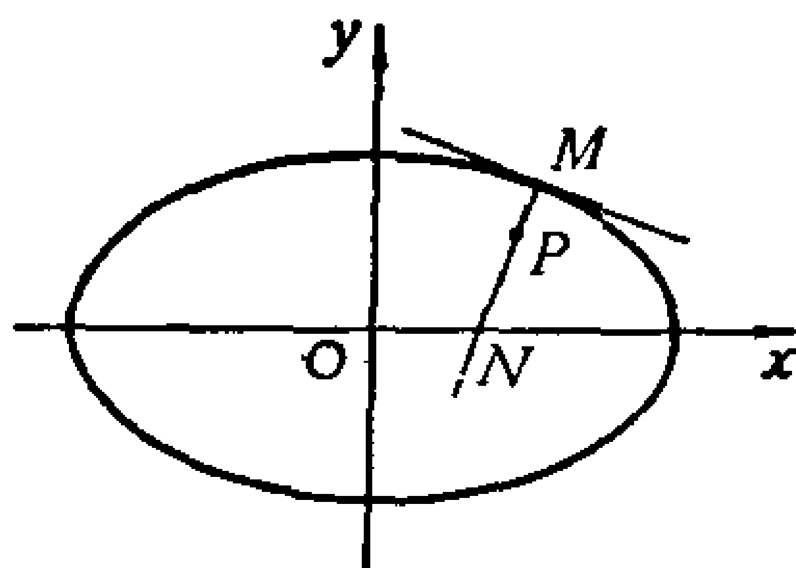
698. $\triangle ABC$ 三边 $a>b>c$ 成等差数列，A、C 坐标分别是 $(-1, 0)$、$(1, 0)$，求顶点 B 的轨迹.



［解］ 设 $B(x, y)$为轨迹上任意一点. $\because$ a、b、c 成等差数列，$\therefore$ $a+c=2b$，即 $|BC|+|BA|=2|AC|=4$. 由椭圆定义可知，点 B 在焦距为 2，长轴为 4，以 A、C 为焦点的

椭圆上，其方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. $\because a>b>c$, $\therefore a>c$, 即 $|BC|>|AB|$, 亦即 $(x-1)^2+y^2>(x+1)^2+y^2$. 解得 $x<0$. $\therefore$ 点 B 轨迹是左半椭圆: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ $(x<0)$, 其中应除去点$(-2, 0)$.

699. 求椭圆上一点和过这点的法线与长轴交点间的线段被分成 $\lambda:(1-\lambda)$ 的点的轨迹 $(0<\lambda<1)$.



［分析］ 一条线段的定比分点决定于这条线段的两个端点及定比的比值. 现比值已给出，故可从考虑两端点的坐标出发求解.

［解］ 设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,

$M(x_0, y_0)$为椭圆上的点，则$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1\cdots$①, 过点 M 椭圆的法线方程为 $a^2y_0x-b^2x_0y=(a^2-b^2)x_0y_0$. 当 $y=0$ 时, $a^2y_0x=(a^2-b^2)x_0y_0$. 显然 $y_0\neq0$ (否则法线与 x 轴重合), 故 $x=\frac{(a^2-b^2)x_0}{a^2}$, 即法线与长轴的交点$N$的坐标为 $\left(\frac{(a^2-b^2)x_0}{a^2}, 0\right)$. 设分线段 MN 成定比 $\frac{\lambda}{1-\lambda}$ 的点为 $P(x, y)$, 即$\frac{MP}{PN}=\frac{\lambda}{1-\lambda}$, 则

$$x=\frac{x_0+\frac{\lambda}{1-\lambda}\cdot\frac{(a^2-b^2)x_0}{a^2}}{1+\frac{\lambda}{1-\lambda}}=\frac{(a^2-b^2\lambda)x_0}{a^2},$$

$$y=\frac{y_0}{1+\frac{\lambda}{1-\lambda}}=(1-\lambda)y_0.$$

$$\because\ a>b>0,\ 且\ 0<\lambda<1,\quad \therefore\ a^2-b^2\lambda\neq0.$$

由以上两式解得 $x_0=\frac{a^2x}{a^2-b^2\lambda}$, $y_0=\frac{y}{1-\lambda}$. 代入①, 得

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a^2-b^2\lambda}{a}\right)^2}+\frac{y^2}{(1-\lambda)^2b^2}=1.$$

故所求的轨迹为一椭圆.

［说明］ 求一动线段的定比分点的轨迹方程，一般均可如本题一样，选取适当的参数后，将动线段的两端点的坐标用参数表示，然后利用线段的定比分点坐标的公式，得所求轨迹的参数方程．消去参数，即得轨迹的普通方程．

700．过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任意一点 M，作 x 轴的垂线，垂足为 N．求线段 MN 中点的轨迹方程．

［解］ 设点 M 的坐标为 (x_0, y_0)，则点 N 的坐标为 $(x_0, 0)$，且 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1\cdots$①．又设线段 MN 的中点坐标为 (x, y)，则 $x=x_0$，$y=\frac{y_0}{2}$．代入①，即得所求的轨迹方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=1$．

701．求过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 一焦点的弦的中点轨迹方程．

［解］ 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一焦点的坐标为 $(c, 0)$，过此焦点的弦所在的直线方程为 $y=k(x-c)\cdots$①．①代入椭圆方程，并整理得

$$(b^2+a^2k^2)x^2-2a^2ck^2x+a^2k^2c^2-a^2b^2=0.$$

因其判别式大于零，故方程有两实根 x_1、x_2，且 $x_1+x_2=\frac{2a^2ck^2}{b^2+a^2k^2}$．设过此焦点的弦的中点坐标为 (x, y)，则 $x=\frac{a^2ck^2}{b^2+a^2k^2}\cdots$②．当 $x\neq c$ 时，由①可得 $k=\frac{y}{x-c}$．代入②，并化简为

$$(x-c)(b^2x^2+a^2y^2-b^2cx)=0.$$

$\because$ $x-c\neq0$，即得 $b^2x^2+a^2y^2-b^2cx=0\cdots$③．

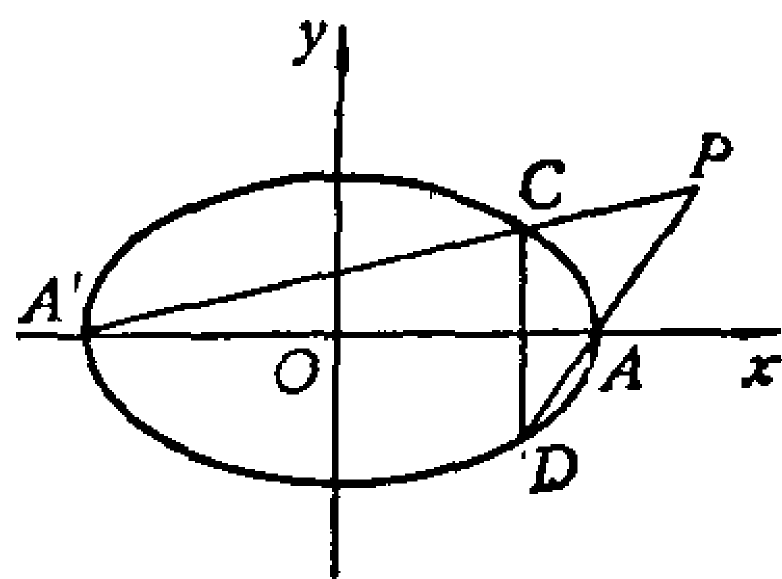
当过焦点 $(c, 0)$ 的弦所在的直线方程为 $x=c$ 时，此弦的中点即为 $(c, 0)$，其坐标仍满足方程③，故方程③即为所求的轨迹方程．

702．CD 是和椭圆长轴 $A'A$ 垂直的弦，求两直线 $A'C$ 与 AD 交点 P 的轨迹．

［解］ 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$．直线 CD 的方程为 $x=x_0$，点 C、D

的坐标分别为(x_0, y_0)和$(x_0, -y_0)$. 则

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1\cdots①.$$



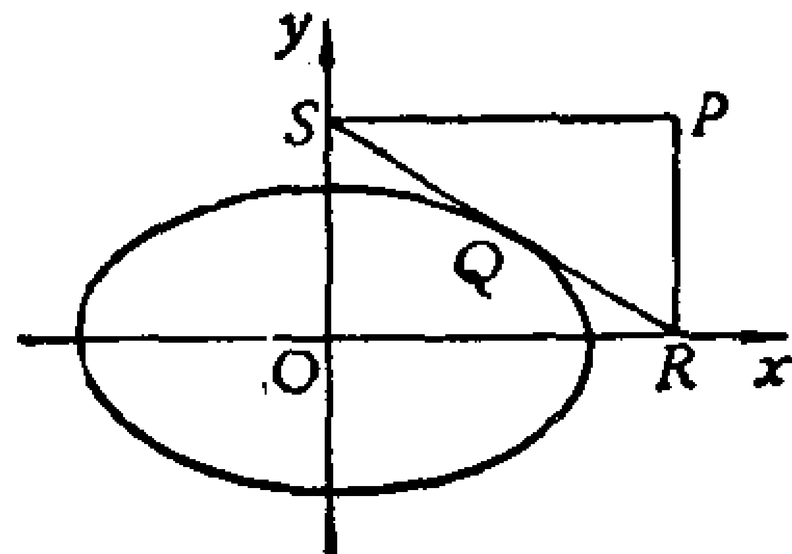
直线$A'C$和AD的方程分别为

$$(x_0+a)y=y_0(x+a)\cdots②,$$

和 $$(a-x_0)y=y_0(x-a)\cdots③.$$

从②、③解得: $x_0=\frac{a^2}{x}$, $y_0=\frac{ay}{x}$. 代入①,并化简得 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. 所求轨迹为双曲线.

703. **椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一动点Q的切线交长、短轴于R、S点,过R、S分别作长、短轴的垂线. 求此两垂线交点P的轨迹方程.**



[解] 设点Q的坐标为(x_0, y_0), 则

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1\cdots①.$$

过Q的切线方程为

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1, \text{即} \frac{x}{\frac{a^2}{x_0}}+\frac{y}{\frac{b^2}{y_0}}=1,$$

(显然, $x_0y_0\neq0$). $\therefore$ $OR=\frac{a^2}{x_0}$, $OS=\frac{b^2}{y_0}$. 设点P的坐标为(x, y), 则 $x=\frac{a^2}{x_0}$, $y=\frac{b^2}{y_0}$; 即 $x_0=\frac{a^2}{x}$, $y_0=\frac{b^2}{y}$. 代入①, 得 $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1$. 即为所求的轨迹方程.

704. **从椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点向它的动切线引垂线,求垂足的轨迹.**

[分析] 取离心角φ为参数,设切点坐标为$(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$,容易写出动切线方程和相应的垂线方程. 从这两方程中消去参数φ,即得垂足的轨迹. 或利用椭圆的性质,借助平面几何有关知识也易求得轨迹.

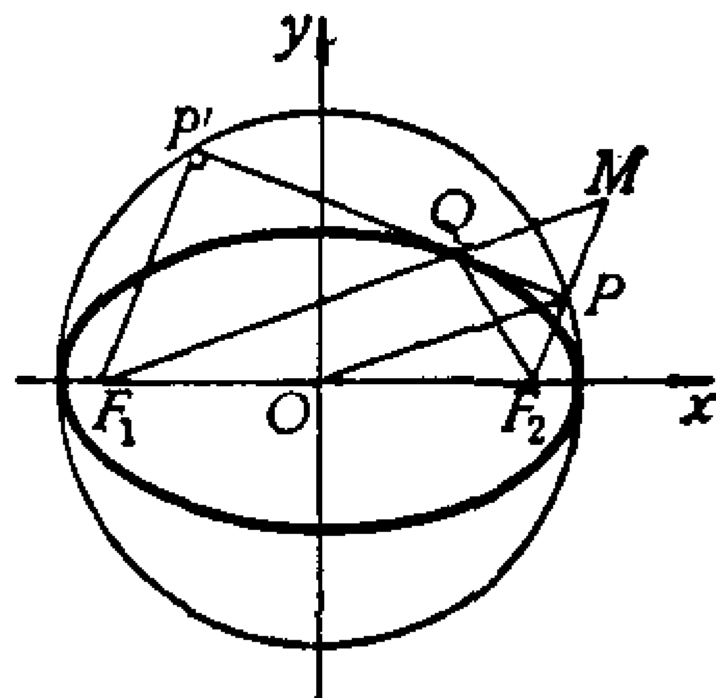
[解一] 设切点为$Q(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$, 则椭圆的切线$QP$的方程为

$bx\cos\varphi+ay\sin\varphi=ab\cdots$①；过右焦点 $F_2(c,0)$，垂直于切线 QP 的直线 F_2P 的方程为 $ax\sin\varphi-by\cos\varphi=ac\sin\varphi\cdots$②．①^2+②^2，得

$$b^2x^2\cos^2\varphi+b^2y^2\cos^2\varphi+a^2x^2\sin^2\varphi+a^2y^2\sin^2\varphi=a^2b^2+a^2c^2\sin^2\varphi,$$

即
$$(x^2+y^2)(b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi)=a^2[b^2+(a^2-b^2)\sin^2\varphi]$$
$$=a^2(b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi).$$

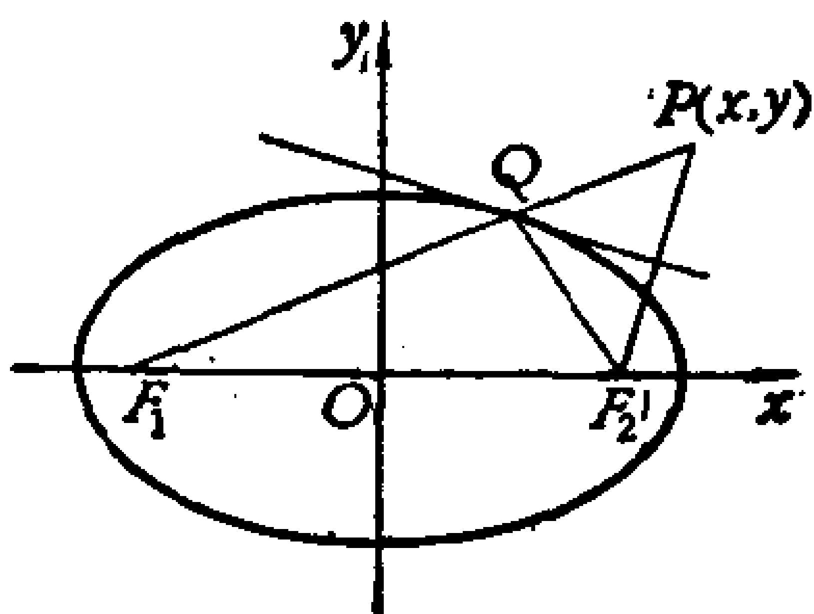
但 $b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi\neq0$，$\therefore\ x^2+y^2=a^2$．即垂足轨迹为大辅助圆．



［解二］ 如图，P 是焦点 F_2 在切线 QP 上的射影，其中 Q 为切点，延长 F_2P 与 F_1Q 的延长线交于 M．由椭圆的性质，$\angle MQP=\angle F_2QP$，又 $F_2P\perp QP$，$\therefore\ |QM|=|QF_2|$．$\because\ |F_1Q|+|F_2Q|=2a$，$\therefore\ |F_1M|=2a$．又 $\because\ P$、O 分别是 F_2M 与 F_1F_2 的中点，$\therefore\ |OP|=a$．故点 P 轨迹是以 O 为圆心，a 为半径的圆：$x^2+y^2=a^2$．

［说明］ 同样的结论对双曲线也成立．

705．求椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 的焦点 $F_2(c,0)$ 关于动切线对称的点的轨迹方程．



［解一］ 设椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 的焦点 $F_2(c,0)$ 关于点 $Q(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ 处的切线 $\dfrac{x\cos\varphi}{a}+\dfrac{y\sin\varphi}{b}=1$ 的对称点为 $P(x,y)$．

$$\because\ F_2P\text{ 的中点}\left(\frac{x+c}{2},\ \frac{y}{2}\right)\text{在切线上，}$$

$$\therefore\ b\cdot\frac{x+c}{2}\cdot\cos\varphi+a\cdot\frac{y}{2}\cdot\sin\varphi=ab\cdots①;$$

又 $\because\ F_2P$ 与切线垂直，$\therefore\ (-b\cos\varphi)y+a\sin\varphi(x-c)=0$，即

$$a(x+c)\sin\varphi-by\cos\varphi=2ac\sin\varphi\cdots②.$$

由①、②得

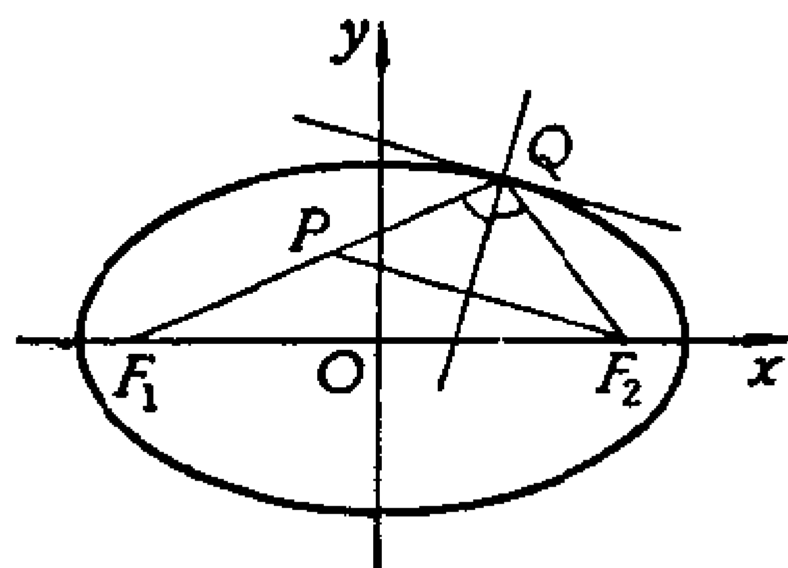
$$x+c=\frac{2a(b^2\cos\varphi+ac\sin^2\varphi)}{b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi},\quad y=\frac{-2a(bc\sin\varphi\cos\varphi-ab\sin\varphi)}{b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi}.$$

$\therefore\ (x+c)^2+y^2=4a^2$. $\therefore$ 轨迹是以 $F_1(-c,\ 0)$ 为中心, $2a$ 为半径的圆.

[解二] 延长 F_1Q 交过 F_2 垂直于过 Q 的切线的直线于 P. $\because$ Q 的切线二等分 $\angle F_2QP$, $\therefore$ P 为 F_2 关于切线的对称点. 而 $|F_1P|=|F_1Q|+|QP|=|F_1Q|+|F_2Q|=2a$, $\therefore$ 轨迹为以 F_1 为中心, $2a$ 为半径的圆:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2.$$

706. 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一个焦点 $F_2(c,\ 0)$ 关于动法线的对称点的轨迹方程.



[分析] 因过 Q 的法线平分 $\angle F_1QF_2$, 故 F_2 关于法线的对称点 P 必在 F_1Q 上, 过 F_2 且垂直于法线的直线与 F_1Q 交点的轨迹即为点 P 的轨迹.

[解] 设点 Q 的坐标为 $(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$, 则直线 F_1Q 的方程为 $b(x+c)\sin\varphi-ay\cos\varphi=cy\cdots$①; 过 F_2 与法线垂直的直线为 $bx\cos\varphi+ay\sin\varphi=bc\cos\varphi\cdots$②. 从②得

$$\frac{\sin\varphi}{b(c-x)}=\frac{\cos\varphi}{ay}=\pm\frac{1}{\sqrt{b^2(x-c)^2+a^2y^2}},\quad (x\neq c,\ y\neq 0).$$

代入①, 得

$$b^2(c^2-x^2)-a^2y^2=\pm cy\sqrt{b^2(x-c)^2+a^2y^2},$$

即
$$(b^2x^2+a^2y^2-b^2c^2)^2=c^2y^2[b^2(x-c)^2+a^2y^2]\cdots③.$$

当动法线过焦点 $F_2(c,\ 0)$ 时, F_2 为轨迹上的一点, $(c,\ 0)$ 满足方程③, 故方程③即为所求的轨迹方程.

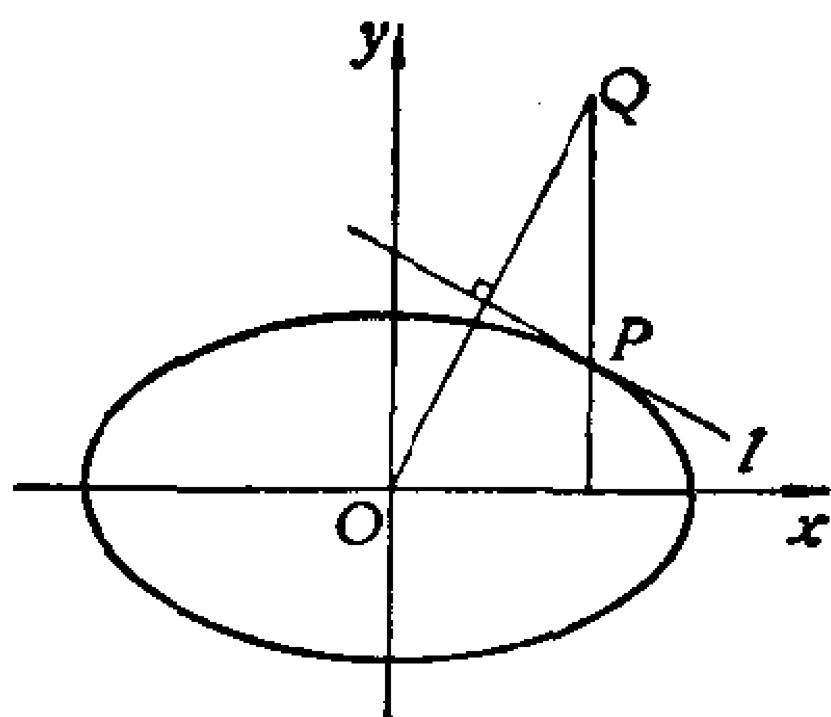
707. 设 P 是椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上的动点, Q 是椭圆的辅助圆 $x^2+y^2=a^2$ 上关于 P 的对应点, 求过 P、Q 分别引所在曲线的法线的交点轨迹.

[解] 设点 P 的坐标为 $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$, 则点 Q 为 $(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$. 椭圆过点 P 的法线方程为 $ax\sin\theta-by\cos\theta=(a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta\cdots$①. 圆的过点 Q 的法线方程为 $y\cos\theta=x\sin\theta\cdots$②. ②代入①, 得 $(a-b)x\sin\theta=(a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta$; 当 $\sin\theta\neq 0$ 时, $x=(a+b)\cos\theta\cdots$③.

③代入②，得 $y\cos\theta=(a+b)\cos\theta\sin\theta$；当 $\cos\theta\neq0$ 时，$y=(a+b)\sin\theta$ …④．由③、④得 $x^2+y^2=(a+b)^2$．当 $\sin\theta=0$ 时，两法线重合于 x 轴；当 $\cos\theta=0$ 时，两法线重合于 y 轴．故所求的轨迹为圆心在原点、半径为 $a+b$ 的圆，以及两坐标轴．

708．过椭圆上动点 P 作切线，求过中心垂直于切线的直线与过点 P 平行于短轴的直线的交点 Q 的轨迹．

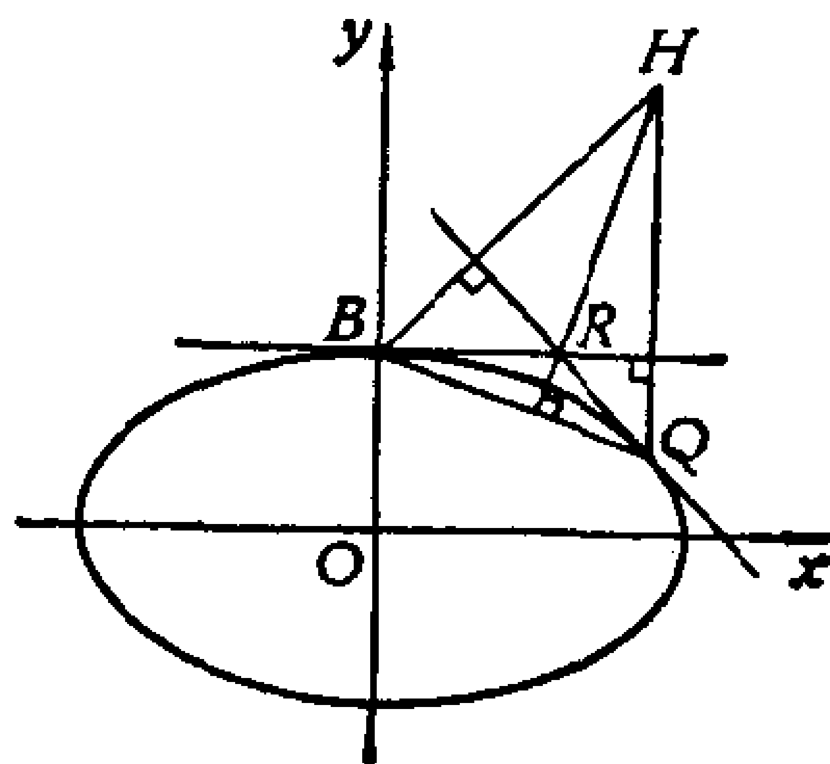
［解］ 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，点 P 的坐标为 $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$，则过点 P 的切线 l 的方程为 $bx\cos\theta+ay\sin\theta=ab$．因为 $OQ\perp l$，故直线 OQ 的方程为 $ax\sin\theta-by\cos\theta=0$…①．又过点 P 且平行于短轴的直线方程为 $x=a\cos\theta$…②．②代入①，得 $y=\frac{a^2}{b}\sin\theta$，或 $\cos\theta=0$．故所求的轨迹方程为 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=\frac{a^2}{b}\sin\theta\end{cases}$ （θ 为参数），即 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{a^2}{b}\right)^2}=1$ 或 $x=0$．其轨迹为一椭圆和短轴所在的直线．



［说明］ 当点 P 运动到短轴的两端点时，两直线重合于短轴所在的直线 $x=0$，故把整条直线看作两直线的交点的集合．

709．设 Q 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的动点，但非短轴端点，过 Q 的切线与过点 $B(0,\ b)$ 的切线交于 R，求 $\triangle BQR$ 的垂心 H 的轨迹方程．

［解一］ 设动点 Q 的坐标为 $(x_1,\ y_1)$，则 $b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2$…①．过 Q 的切线方程为 $b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2$，与 $y=b$ 联立，解得交点 R 的坐标为 $\left(\frac{a^2(b-y_1)}{bx_1},\ b\right)$．设 $H(x,\ y)$ 为 $\triangle BQR$ 的垂心，$\because$ $RH\perp BQ$，

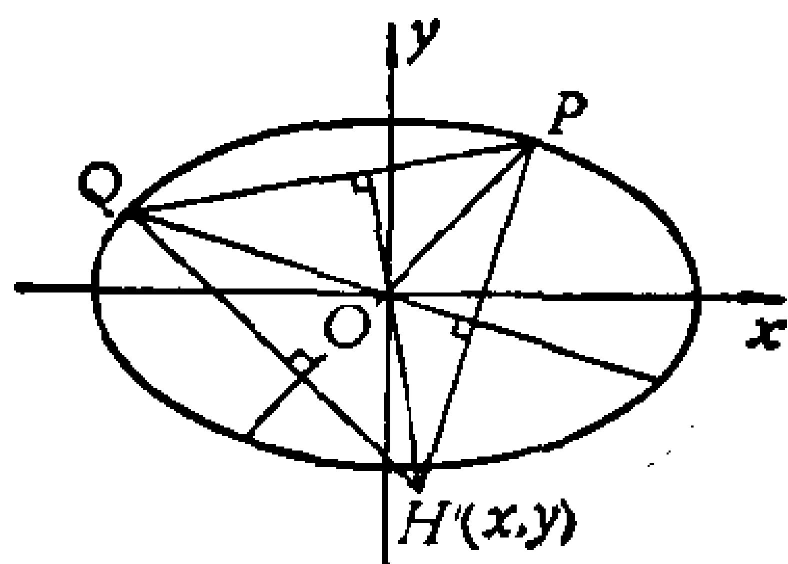


$$\therefore\quad \frac{y_1-b}{x_1}\cdot\frac{y-b}{x-\dfrac{a^2(b-y_1)}{bx_1}}=-1\cdots②.$$

又 $x=x_1\cdots③$. ③代入②,化简得 $y_1=b-\dfrac{bx^2}{b(y-b)+a^2}\cdots④$. 把③、④代入①,整理得 $a^2x^2+b^2(y-b)^2=a^4$. 即为垂心 H 的轨迹方程.

[解二] 设点 Q 坐标为 $(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$,过点 Q 的切线方程为 $\dfrac{x}{a}\cos\varphi+\dfrac{y}{b}\sin\varphi=1$. 过 $\triangle BQR$ 顶点 B 的高为 $\dfrac{x}{b}\sin\varphi-\dfrac{y}{a}\cos\varphi=-\dfrac{b}{a}\cos\varphi\cdots①$; 过顶点 Q 的高为 $x=a\cos\varphi\cdots②$. 直线①与②的交点即 $\triangle BQR$ 的垂心 H. 从①与②消去参数 φ, 并注意到 $x\neq 0$, 即得垂心 H 的轨迹方程 $a^2x^2+b^2(y-b)^2=a^4$.

710. 设 P、Q 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的两共轭直径的端点, O 为椭圆中心,试求 $\triangle OPQ$ 的垂心的轨迹方程.



[解] 设点 P 坐标为 $(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$, 则点 Q 坐标为 $(-a\sin\varphi,\ b\cos\varphi)$. OP、OQ 的斜率分别为

$$\frac{b\sin\varphi}{a\cos\varphi}、\ -\frac{b\cos\varphi}{a\sin\varphi},$$

故过 P、Q 引 OQ、OP 的垂线 PH、QH 的方程分别为:

$$ax\sin\varphi-by\cos\varphi=(a^2-b^2)\sin\varphi\cos\varphi\cdots①;$$

$$ax\cos\varphi+by\sin\varphi=-(a^2-b^2)\sin\varphi\cos\varphi\cdots②.$$

①+②, 得 $\qquad (ax-by)\cos\varphi+(ax+by)\sin\varphi=0,$

当 $\varphi\neq\dfrac{n\pi}{2}$ 时,

$$\frac{\cos\varphi}{by+ax}=\frac{\sin\varphi}{by-ax}=\pm\frac{\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}}{\sqrt{2(a^2x^2+b^2y^2)}}.$$

$$\therefore\quad \cos\varphi=\frac{by+ax}{\pm\sqrt{2(a^2x^2+b^2y^2)}},\quad \sin\varphi=\frac{-ax+by}{\pm\sqrt{2(a^2x^2+b^2y^2)}}.$$

代入②, 得

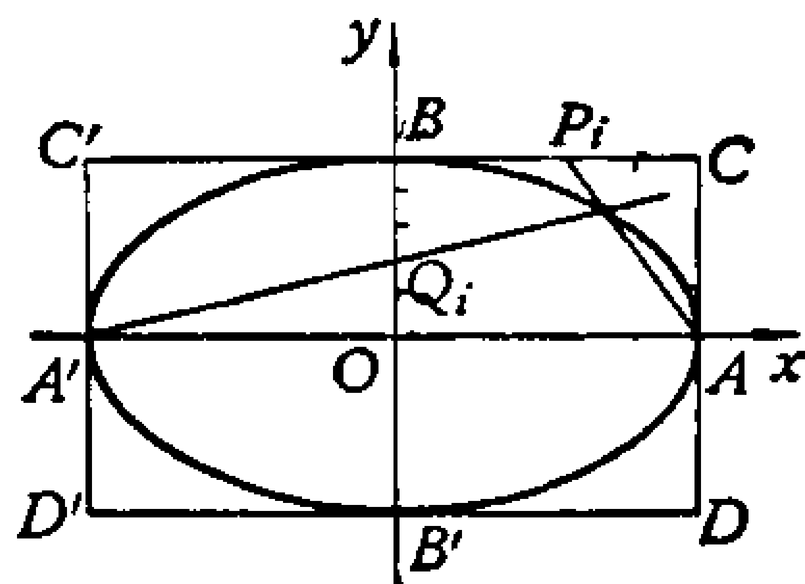
$$\frac{ax(ax+by)}{\sqrt{2(a^2x^2+b^2y^2)}}+\frac{by(by-ax)}{\sqrt{2(a^2x^2+b^2y^2)}}$$
$$=\mp(a^2-b^2)\frac{b^2y^2-a^2x^2}{2(a^2x^2+b^2y^2)},$$

化简得 $$2(a^2x^2+b^2y^2)^3=(a^2-b^2)^2(b^2y^2-a^2x^2)^2.$$

此即所求的轨迹方程. 当 $\varphi=\frac{n\pi}{2}$ 时 $(n\in J)$, P、Q 分别位于 x、y 轴上, 故$\triangle OPQ$ 的垂心为原点,也满足轨迹方程.

711. 设椭圆的外切矩形 $CDD'C'$ 的边与椭圆的对称轴平行, 将半长轴 OA、半短轴 OB 分别分成相同的等分. OA 的等分点在 BC 上的射影为 P_i, OB 上对应的等分点为 Q_i, (OB 上 i 自 O 算起, BC 上的 i 自 C 算起), 则 AP_i 与 $A'Q_i$ 的交点在椭圆上.

［证］ 建立坐标系如图, 设 $|OA|=a$, $|OB|=b$. 点 P_i 的坐标为 $(a-\lambda a,\ b)$, 点 Q_i 的坐标为 $(0,\ \lambda b)$, 其中 $\lambda=\frac{i}{n}$ (OA、OB 均分成 n 等分, $i=0,\ 1,\ \cdots,\ n$). AP_i 的方程为 $b(x-a)+\lambda ay=0\cdots$①, $A'Q_i$ 的方程为 $\lambda b(x+a)-ay=0\cdots$②. 从①、②消去参数 λ, 得 $y^2=-\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$, 即 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.



［说明］ 本题结论为画椭圆的一种方法.

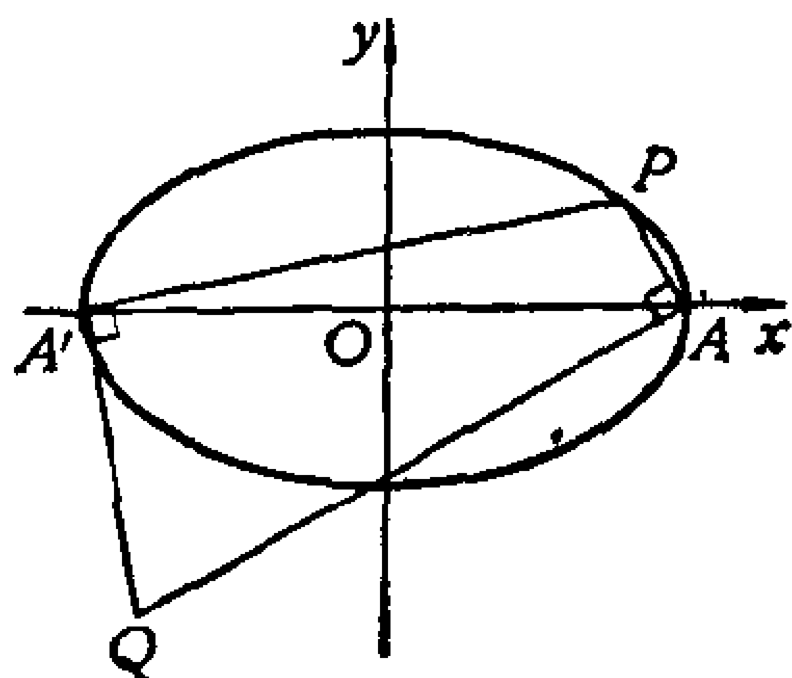
712. 求证两动直线 $\frac{tx}{a}-\frac{y}{b}+t=0$ 和 $\frac{x}{a}+\frac{ty}{b}-1=0$ 交点的轨迹为椭圆, 并证明此两动直线交点的离心角为 $2n\pi+2\operatorname{arc\,tg} t$ $(n\in J)$.

［证］ 两动直线 $\frac{tx}{a}-\frac{y}{b}+t=0$ 和 $\frac{x}{a}+\frac{ty}{b}-1=0$ 的交点坐标为:

$$\begin{cases} x=\dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2} \\ y=\dfrac{2bt}{1+t^2}, \end{cases}$$

此即轨迹的参数方程. 令 $t=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, 即 $\varphi=2n\pi+2\operatorname{arc\,tg} t \quad (n\in J)$, 则 $\begin{cases}x=a\cos\varphi\\ y=b\sin\varphi,\end{cases}$ 消去参数 φ 即得轨迹的普通方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. ∴ 轨迹为椭圆, 且两动直线交点的离心角 $\varphi=2n\pi+2\operatorname{arc\,tg} t \quad (n\in J)$.

713. 椭圆的长轴为 AA', P 是椭圆上的任一点, 引 $AQ\perp AP$, $A'Q\perp A'P$, AQ 与 $A'Q$ 的交点为 Q, 求点 Q 的轨迹.



[解] 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 则点 A 和 A' 的坐标分别是 $(a,\ 0)$ 和 $(-a,\ 0)$. 又设点 P 的坐标为 $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$, ∵ $AQ\perp AP$, $A'Q\perp A'P$, ∴ AQ 的方程为

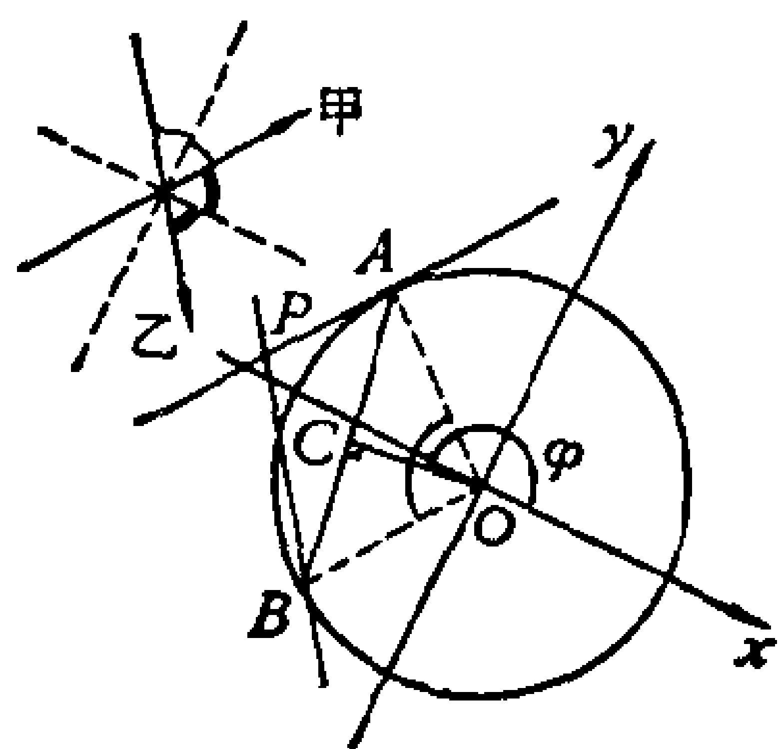
$$y=-\frac{a(\cos\theta-1)}{b\sin\theta}(x-a);$$

$A'Q$ 的方程为 $y=-\frac{a(\cos\theta+1)}{b\sin\theta}(x+a)$. 两式相乘, 得

$$y^2=\frac{a^2(\cos^2\theta-1)}{b^2\sin^2\theta}(x^2-a^2),\ \text{即}\ y^2=-\frac{a^2}{b^2}(x^2-a^2).\ \text{亦即}\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\frac{a^4}{b^2}}=1.$$

故所求轨迹仍为一椭圆. 当 $\theta=n\pi \quad (n\in J)$ 时, P 与 A 或 A' 重合, 点 A'、A 为轨迹的极限点.

714. 设 AB 为圆 O 内长度不变之动弦, 过弦两端分别作直线与两已知方向平行, 试求此两直线交点 P 的轨迹.



[解] 取圆心 O 为原点, 以过 O 且平行于已知方向的两直线夹角的内外角平分线为坐标轴, 建立直角坐标系. 设动弦 AB 在中心 O 张的角为 2α, 作 AB 的弦心距 OC; 再设 $(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OC})=\varphi$, 圆 O 半径为 R, 则 A、B 两点的坐标分别为 $A(R\cos(\varphi-\alpha),\ R\sin(\varphi-\alpha))$、$B(R\cos(\varphi+\alpha),\ R\sin(\varphi+\alpha))$. 若第一个已知方向的斜率为 m, 则第二个已知方向的斜率为 $-m$. 故 AP、BP 的直线方程分别为:

$$y-R\sin(\varphi-\alpha)=m[x-R\cos(\varphi-\alpha)]\cdots①,$$
$$y-R\sin(\varphi+\alpha)=-m[x-R\cos(\varphi+\alpha)]\cdots②.$$

从①、②消去参数 φ: ①+②, 得

$$y=R\sin\varphi(-m\sin\alpha+\cos\alpha)\cdots③;$$

①−②, 得 $$mx=R\cos\varphi(\sin\alpha+m\cos\alpha)\cdots④;$$

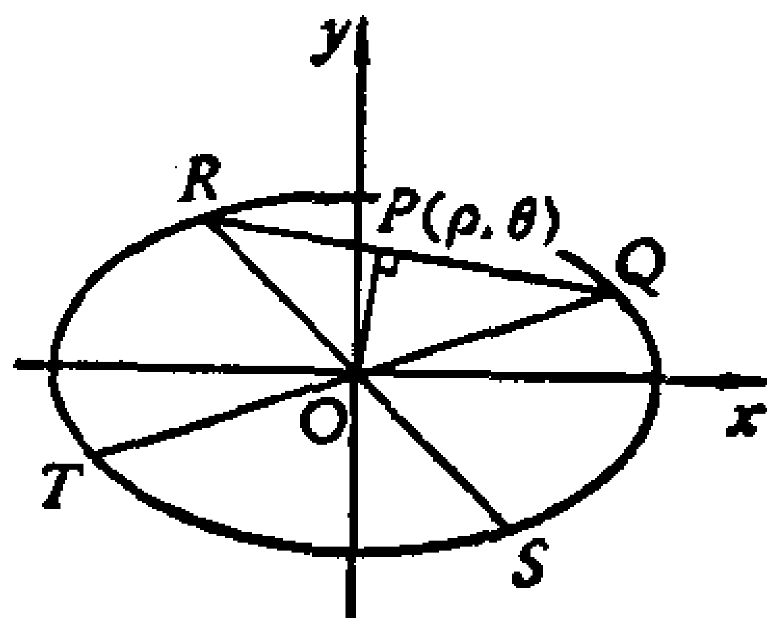
③²+④², 得

$$\frac{m^2x^2}{R^2(\sin\alpha+m\cos\alpha)^2}+\frac{y^2}{R^2(\cos\alpha-m\sin\alpha)^2}=1.$$

故所求点 P 的轨迹为椭圆.

715. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两共轭直径的端点为 Q、R, 当 Q、R 在椭圆上运动时, 求椭圆中心在 QR 上的射影的轨迹方程.

［分析］ 若直径的一端为 $Q(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$, 则与它相应的共轭直径的一端坐标为 $R(-a\sin\varphi, b\cos\varphi)$. 从而可得直线 RQ 的方程. 又设轨迹上任意一点 P 的极坐标为 (ρ, θ), 则直线 $x\cos\theta+y\sin\theta=\rho$ 与 OP 垂直, 与 RQ 重合. 由两直线重合的条件可得两个方程, 消去参数 φ, 即得所求轨迹方程.



［解一］ 设 $Q(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$ 为椭圆上动直径的端点, 则其共轭直径的端点坐标为 $R(-a\sin\varphi, b\cos\varphi)$, (参见第623题). 故 QR 的直线方程为

$$y-b\sin\varphi=\frac{b(\sin\varphi-\cos\varphi)}{a(\cos\varphi+\sin\varphi)}(x-a\cos\varphi),$$

即 $$\frac{x}{a}\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{y}{b}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdots①.$$

又设轨迹上任意一点 P 的极坐标为 (ρ, θ), 则过点 P 且与 OP 垂直的直线方程为 $x\cos\theta+y\sin\theta=\rho\cdots②$. 因直线①、②重合, 故

$$\frac{\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}{a\cos\theta}=\frac{\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}{b\sin\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}\rho}.$$

即 $\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}\rho}a\cos\theta,\ \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}\rho}b\sin\theta.$

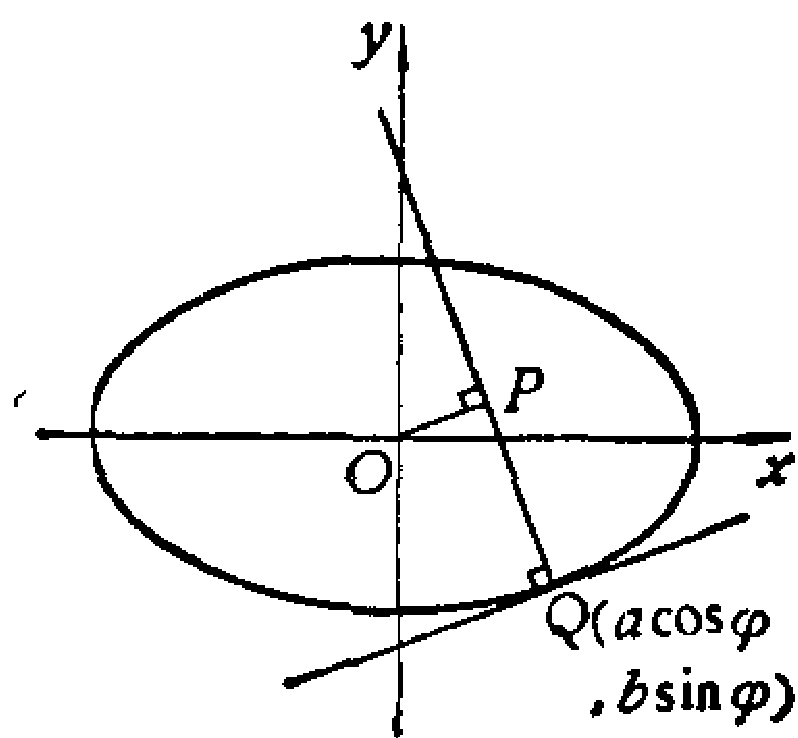
两式平方相加，得 $2\rho^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta$. 此即所求轨迹的极坐标方程，化为直角坐标方程即 $2(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$. 因化直角坐标方程时，方程两边同乘以 ρ^2，故需 $\rho^2\neq0$，亦即原点(0, 0)不在轨迹上.

716. **求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的中心 O 在它的动切线上射影的轨迹方程.**

[解一] 设 $P(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ 为椭圆上任一点，则椭圆在点 P 的切线方程为 $bx\cos\theta+ay\sin\theta=ab\cdots$①；过原点 O 而垂直于此切线的直线方程为 $ax\sin\theta-by\cos\theta=0\cdots$②. 由①、②解得 $\sin\theta=\frac{by}{x^2+y^2}$，$\cos\theta=\frac{ax}{x^2+y^2}$. ∵ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，∴ 所求轨迹方程为 $\frac{a^2x^2+b^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=1$，即 $(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$，但 $x^2+y^2\neq0$.

[解二] 设 $(\rho,\ \theta)$ 为轨迹上任意一点的极坐标，则过这点的切线为 $x\cos\theta+y\sin\theta=\rho\cdots$①；若该切线的切点为 $(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$，则切线方程为 $\frac{x\cos\varphi}{a}+\frac{y\sin\varphi}{b}=1\cdots$②. 直线①与②应重合，∴ $\cos\theta=\rho\frac{\cos\varphi}{a}\cdots$③，$\sin\theta=\rho\frac{\sin\varphi}{b}\cdots$④. 从③、④消去参数 φ，得 $\rho^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta$. 此即所求轨迹的极坐标方程.

717. **求椭圆中心在其动法线上射影的轨迹方程.**



[解] 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在动点 $(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ 的法线方程为

$$\frac{ax}{\cos\varphi}-\frac{by}{\sin\varphi}=a^2-b^2\cdots①,$$

其中 $\varphi\neq\frac{n\pi}{2}$. 又 $P(x,y)$ 为轨迹上任意一点，因 OP 垂直法线，故 OP 的方程为 $\frac{bx}{\sin\varphi}+\frac{ay}{\cos\varphi}=0\cdots$②. 从①与②解出

$$\frac{1}{\cos\varphi}=\frac{x(a^2-b^2)}{a(x^2+y^2)},\quad \frac{1}{\sin\varphi}=\frac{-y(a^2-b^2)}{b(x^2+y^2)}.$$

$$\therefore\quad \cos^2\varphi+\sin^2\varphi=\frac{(x^2+y^2)^2}{(a^2-b^2)^2}\left(\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}\right)=1,$$

即点 P 的轨迹方程为

$$(x^2+y^2)^2(a^2y^2+b^2x^2)=(a^2-b^2)x^2y^2.$$

当 $\varphi=\frac{n\pi}{2}$ $(n\in J)$时，法线过原点，故原点(0, 0)也在轨迹上.

718. 椭圆上两点的离心角之差 $\alpha-\beta$ 一定，求过这两点的两切线交点的轨迹 $(\alpha-\beta\neq(2n+1)\pi,\ n\in J)$.

［解］ 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，椭圆上两点的离心角分别为 α、β，且 $\alpha-\beta=\theta$. 则过这两点的切线方程分别为 $bx\cos\alpha+ay\sin\alpha=ab\cdots$①，$bx\cos\beta+ay\sin\beta=ab\cdots$②. ①×$\cos\beta$－②×$\cos\alpha$，得

$$ay(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)=ab(\cos\beta-\cos\alpha),$$

即

$$y\sin(\alpha-\beta)=2b\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

显然，$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\neq0$，否则两点重合. 又 $\alpha-\beta\neq(2n+1)\pi$,

$$\therefore\quad \frac{y}{b}\cos\frac{\theta}{2}=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdots③.$$

①×$\sin\beta$－②×$\sin\alpha$，得 $bx(\sin\beta\cos\alpha-\sin\alpha\cos\beta)=ab(\sin\beta-\sin\alpha)$,

即

$$x\sin(\alpha-\beta)=2a\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

$$\therefore\quad \frac{x}{a}\cos\frac{\theta}{2}=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdots④.$$

③²+④²，得

$$\frac{x^2}{a^2\sec^2\frac{\theta}{2}}+\frac{y^2}{b^2\sec^2\frac{\theta}{2}}=1.$$

故所求的轨迹为一椭圆.

719. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两共轭直径的端点分别为 P、Q，椭圆中心为 O，当 P、Q 在椭圆上运动时，求以 OP、OQ 为直径的圆的另一交点的轨迹方程.

［分析］ 取点 P 的离心角 φ 为参数，求出以 OP、OQ 为直径的两圆系方程，然后消去参数.

［解］ 设椭圆上两共轭直径的端点分别为：$P(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$、$Q(-a\sin\varphi,\ b\cos\varphi)$，以 OP、OQ 为直径的圆方程为：

$$x(x-a\cos\varphi)+y(y-b\sin\varphi)=0\cdots①,$$

$$x(x+a\sin\varphi)+y(y-b\cos\varphi)=0\cdots②.$$

从①与②分别得： $x^2+y^2=ax\cos\varphi+by\sin\varphi\cdots③,$

$$x^2+y^2=-ax\sin\varphi+by\cos\varphi\cdots④.$$

③^2+④^2，得 $$2(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2.$$

此即所求的轨迹方程．按题意原点 O 不在轨迹上.

720．求椭圆的相互垂直的两切线的交点的轨迹.

［分析］ 如果椭圆外一点确定后，则过此点所引的椭圆两切线的斜率也被确定，从而可判定此点是否在轨迹上．因此，可先假设动点坐标，并用其表示两切线的斜率，然后利用斜率的乘积等于 -1 解之.

［解］ 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，两切线的交点为 $P(x_0,\ y_0)$，则当过点 P 的切线不垂直于 x 轴时，其方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，k 为其斜率．以 $y=k(x-x_0)+y_0$ 代入椭圆方程，整理得

$$(a^2k^2+b^2)x^2+2a^2k(y_0-kx_0)x+a^2[(y_0-kx_0)^2-b^2]=0.$$

∵ 直线和椭圆相切，故判别式等于零，

即 $$a^4k^2(y_0-kx_0)^2-(a^2k^2+b^2)a^2[(y_0-kx_0)^2-b^2]=0.$$

化简成关于 k 的二次方程：$(a^2-x_0^2)k^2+2x_0y_0k+b^2-y_0^2=0$．由于点 P 在椭圆外，且过点 P 的切线不垂直于 x 轴，故方程恒有两根 k_1、k_2，此即两切线的斜率．因两切线互相垂直，所以 $k_1\cdot k_2=-1$，即 $\frac{b^2-y_0^2}{a^2-x_0^2}=-1$．以 x、y 代换 x_0、y_0 并化简，即得 $x^2+y^2=a^2+b^2$．又当过点 P 的一条切线垂直于 x 轴时，则和它垂直的另一切线必垂直于 y 轴，它们的交点为 $(a,\ b)$、$(-a,\ b)$、$(a,\ -b)$、$(-a,\ -b)$，其坐标仍适合方程 $x^2+y^2=a^2+b^2$，故所求的轨迹是以原点为圆心，半径为 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的圆.

［说明］ (1) 本题也可利用已知斜率的切线方程(实际上与上述解法一样)，或从过点 $(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$、$(a\cos\beta,\ b\sin\beta)$ 的两切线方程与它们

互相垂直的条件 $\frac{\cos\alpha\cos\beta}{a^2}+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{b^2}=0$ 中消去 α、β 得解. (2) 此轨迹称为椭圆的准圆，也称蒙日(Monge)圆.

721. **已知椭圆的两动切线的交角为 β 或 $\pi-\beta$ $\left(\beta\neq\frac{\pi}{2}\right)$，求此两动切线交点的轨迹方程.**

［分析］ 两切线的交角由它们的斜率决定，如果两切线的交角为定值，则它们的斜率必有某种关系，利用这一关系即可得适合条件的点的轨迹方程.

［解］ 设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，两动切线 l_1、l_2 的交点为(x_0, y_0)，它们的斜率分别为 k_1、k_2. 因已知斜率为 k 的椭圆切线方程为 $y=kx\pm\sqrt{a^2k^2+b^2}$，故 k_1、k_2 是方程 $(y_0-kx_0)^2=a^2k^2+b^2$ 的两根，亦即方程 $(x_0^2-a^2)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-b^2=0$ 的两根. $\therefore k_1+k_2=\frac{2x_0y_0}{x_0^2-a^2}$，$k_1k_2=\frac{y_0^2-b^2}{x_0^2-a^2}$. 又切线 l_1、l_2 的交角为 β 或 $\pi-\beta$ $\left(\beta\neq\frac{\pi}{2}\right)$，

$$\begin{aligned}\therefore\quad \operatorname{tg}^2\beta&=\frac{(k_1-k_2)^2}{(1+k_1k_2)^2}=\frac{(k_1+k_2)^2-4k_1k_2}{(1+k_1k_2)^2}\\&=\frac{4x_0^2y_0^2-4(x_0^2-a^2)(y_0^2-b^2)}{(x_0^2+y_0^2-a^2-b^2)^2},\end{aligned}$$

即 $$(x_0^2+y_0^2-a^2-b^2)^2\operatorname{tg}^2\beta=4b^2x_0^2+4a^2y_0^2-4a^2b^2\cdots①.$$

若两动切线中有一条斜率不存在，则可验证它们的交点坐标仍适合方程①. 故以 x、y 代换①中的 x_0、y_0，即得所求的轨迹方程

$$(x^2+y^2-a^2-b^2)^2\operatorname{tg}^2\beta=4b^2x^2+4a^2y^2-4a^2b^2.$$

722. **如果椭圆两切线恒平行于两共轭直径，求此两切线交点的轨迹.**

［解］ 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，其两共轭直径的斜率为 k_1、k_2，则 $k_1\cdot k_2=-\frac{b^2}{a^2}$. 因椭圆两切线恒平行于两共轭直径，故两切线方程应是 $y=k_ix\pm\sqrt{a^2k_i^2+b^2}$ $(i=1, 2)$，即 $(y-k_ix)^2=a^2k_i^2+b^2$. 化简得 $(x^2-a^2)k_i^2-2xyk_i+y^2-b^2=0$. 故有 $k_1k_2=\frac{y^2-b^2}{x^2-a^2}$.

$$\therefore\quad \frac{y^2-b^2}{x^2-a^2}=-\frac{b^2}{a^2},\ 即\quad \frac{x^2}{2a^2}+\frac{y^2}{2b^2}=1.$$

当两共轭直径的斜率有一为零(或有一不存在)时，两切线的交点坐标仍适合此方程，故所求轨迹为椭圆 $\frac{x^2}{2a^2}+\frac{y^2}{2b^2}=1$.

723. 已知方程 C: $f(x, y)=4x^2+y^2+16x\sin^2\theta-8y\cos\theta-4\sin^2 2\theta=0$, (1)求证：无论 θ 为何实数，方程 C 所确定的椭圆的长、短轴为定长；(2)如以 θ 为参数，求椭圆 C 的中心的轨迹；(3)方程 C 所确定的椭圆集合能否盖住原点？试证明之.

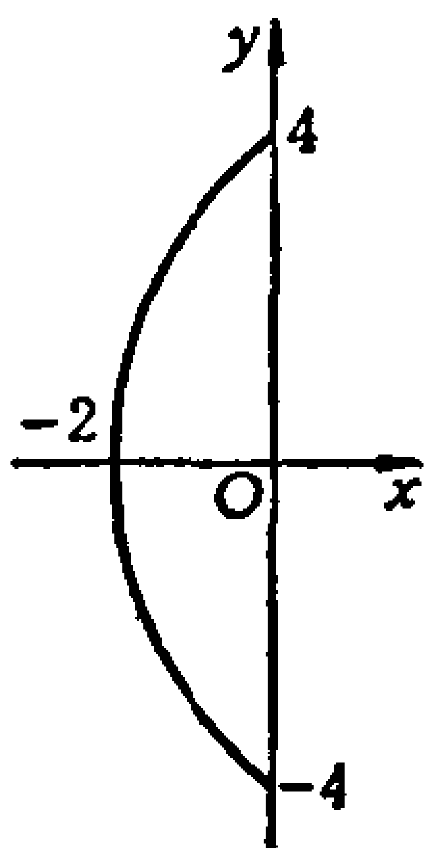
[分析] 为了确定椭圆的长、短轴与中心坐标，可先行配方. 要判断方程 C 所确定的椭圆集合能否盖住原点，可检验 $f(0, 0)$ 的符号.

[解] (1) 将方程 C 配方得 $4(x+2\sin^2\theta)^2+(y-4\cos\theta)^2=16$, 即

$$\frac{(x+2\sin^2\theta)^2}{4}+\frac{(y-4\cos\theta)^2}{16}=1.$$

故无论 θ 为何实数，方程 C 所确定的椭圆的长轴恒为 8，短轴恒为 4.

(2) 设椭圆中心为 $P(x, y)$，则 $\begin{cases}x=-2\sin^2\theta\\ y=4\cos\theta.\end{cases}$ 消去θ, 得中心 P 的轨迹方程为 $y^2=8(x+2)$ $(x\leqslant 0)$. 故轨迹为以 $(-2, 0)$为顶点，通径长为 8，在 y 轴左方的一段抛物线弧.



(3) 把原点坐标(0, 0)代入椭圆 C 的方程，得 $f(0, 0)=-4\sin^2 2\theta\leqslant 0$, 所以原点在椭圆 C 的内部或椭圆 C 上，即方程 C 所确定的椭圆集合能盖住原点.

[说明] 求二次曲线系中心的轨迹，若求出中心的坐标，即为轨迹的参数方程. 消去参数时，应注意参数的允许值范围对轨迹存在范围的限制.

724. 已知方程 $4x^2+9y^2-8x\cos\theta-18y\sin\theta=32-5\sin^2\theta$. 当 θ 固定时，方程表示什么曲线？当 θ 变化时，求此曲线系的中心轨迹.

[解] 将原方程配方得 $4(x-\cos\theta)^2+9(y-\sin\theta)^2=36$, 即

$$\frac{(x-\cos\theta)^2}{9}+\frac{(y-\sin\theta)^2}{4}=1.$$

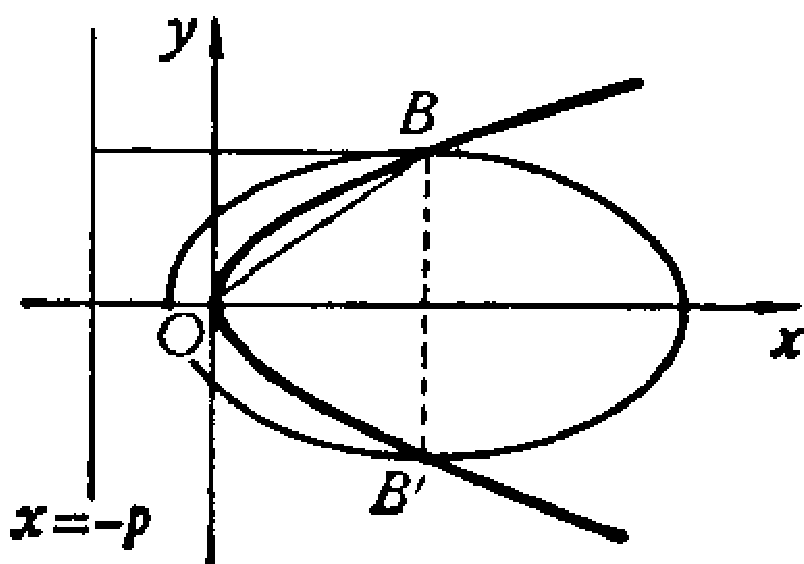
它表示中心在$(\cos\theta, \sin\theta)$，长轴与x轴平行的椭圆.

当θ变化时，椭圆中心$P(x, y)$应满足参数方程：$\begin{cases}x=\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）. 消去$\theta$，得$x^2+y^2=1$. 故椭圆中心轨迹是一单位圆.

725. **求共焦点、共准线的椭圆短轴端点的轨迹.**

［分析］ 取椭圆的离心率e为参数解之.

［解］ 取左焦点O为原点，过焦点O而与准线垂直的直线为x轴，建立直角坐标系. 设焦点O到准线的距离为p，离心率e为参数，则椭圆方程为



$$x^2+y^2=e^2(x+p)^2,$$

即
$$\frac{\left(x-\frac{e^2p}{1-e^2}\right)^2}{\left(\frac{ep}{1-e^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\frac{e^2p^2}{1-e^2}}=1.$$

∴ 短轴两端点B、B'的坐标分别为：

$$\begin{cases}x=\dfrac{e^2p}{1-e^2}\\y=\dfrac{ep}{\sqrt{1-e^2}},\end{cases}\quad\begin{cases}x=\dfrac{e^2p}{1-e^2}\\y=-\dfrac{ep}{\sqrt{1-e^2}}.\end{cases}$$

消去参数e，得$y^2=px$. 所求轨迹为抛物线.

726. **从椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上一定点$M(x_1, y_1)$引同心椭圆系$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\lambda(0<\lambda<1)$的切线，求切点的轨迹.**

［解］ 设切点坐标为(x_0, y_0)，则切线方程为$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=\lambda$. ∵ 它过定点$M$，∴ $\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}=\lambda$…①；又$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=\lambda$…②. 由①、②消去$\lambda$，

得
$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{x_1x_0}{a^2}-\frac{y_1y_0}{b^2}=0,$$

$$\frac{\left(x_0-\frac{x_1}{2}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y_0-\frac{y_1}{2}\right)^2}{b^2}=\frac{x_1^2}{4a^2}+\frac{y_1^2}{4b^2}.$$

$$\because\quad \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,\quad \therefore\quad \frac{\left(x_0-\frac{x_1}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{\left(y_0-\frac{y_1}{2}\right)^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=1.$$

把 x_0、y_0 换成 x、y，即

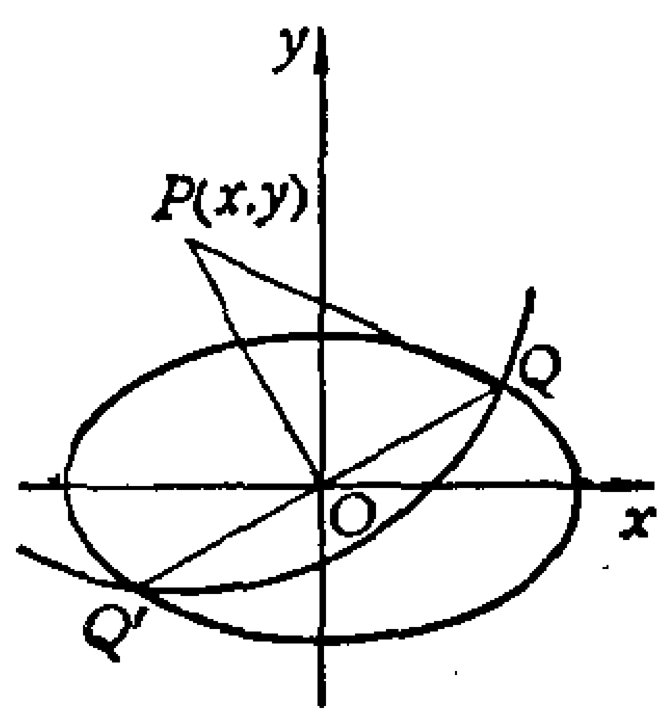
$$\frac{\left(x-\frac{x_1}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{\left(y-\frac{y_1}{2}\right)^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=1.$$

故所求切点轨迹为中心在 $\left(\frac{x_1}{2},\ \frac{y_1}{2}\right)$，长、短轴为原椭圆长、短轴之半的椭圆.

727. 半径为定值 r 的圆过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的动直径的两端点，求这些圆的中心的轨迹方程．其中 $0<b<a<r$.

［解］ 设 $Q(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ 为椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 动直径的一端，$P(x,\ y)$ 为轨迹上任意一点，则 $|PQ|=r$，且

$$(x-a\cos\varphi)^2+(y-b\sin\varphi)^2=r^2\cdots①.$$



又 $|OP|^2+|OQ|^2=r^2$,

$$\therefore\quad x^2+y^2+a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi=r^2\cdots②.$$

②代入①，得 $ax\cos\varphi+by\sin\varphi=0$. 若 $\cos\varphi\neq0$,

得 $$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{ax}{by},\quad \therefore\quad \cos^2\varphi=\frac{b^2y^2}{a^2x^2+b^2y^2}\cdots③;$$

若 $\cos\varphi=0$，点 Q 的坐标为 $(0,\ \pm b)$，$\therefore$ 点 P 在 x 轴上，即 $y=0$，且 $x^2=r^2-b^2>0$，$\therefore\ \cos^2\varphi=\frac{b^2y^2}{a^2x^2+b^2y^2}$ 也成立．将③代入②，得

$$x^2+y^2+(a^2-b^2)\cdot\frac{b^2y^2}{a^2x^2+b^2y^2}+b^2=r^2,$$

整理即得所求轨迹方程

$$(x^2+y^2)(a^2x^2+b^2y^2+a^2b^2)=r^2(a^2x^2+b^2y^2).$$

728. 设 AB 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在中心张直角之弦，求分别过 A、B 两点的切线交点的轨迹方程.

［解］ 设 $P(x_0, y_0)$ 为轨迹上任一点，则点 P 关于椭圆的切点弦方程为 $b^2x_0x+a^2y_0y=a^2b^2$. 当 $y_0\neq 0$ 时，得 $ay=\frac{b^2(a^2-x_0x)}{ay_0}$. 代入椭圆方程，并整理得 $(a^2y_0^2+b^2x_0^2)x^2-2a^2b^2x_0x+a^4(b^2-y_0^2)=0$. 这方程的两实根 x_1、x_2 即为两切点的横坐标，且 $x_1\cdot x_2=\frac{a^4(b^2-y_0^2)}{a^2y_0^2+b^2x_0^2}$. 同理，当 $x_0\neq 0$ 时，两切点的纵坐标 y_1、y_2 满足 $y_1y_2=\frac{b^4(a^2-x_0^2)}{a^2y_0^2+b^2x_0^2}$. ∵ 这两切点对椭圆中心(即原点)张直角，∴ $\frac{a^4(b^2-y_0^2)}{a^2y_0^2+b^2x_0^2}+\frac{b^4(a^2-x_0^2)}{a^2y_0^2+b^2x_0^2}=0$. 以 x、y 代换 x_0、y_0，并化简得：

$$\frac{x^2}{\frac{a^2(a^2+b^2)}{b^2}}+\frac{y^2}{\frac{b^2(a^2+b^2)}{a^2}}=1\cdots①.$$

当 $x_0=0$ 或 $y_0=0$ 时，不难验证动点的坐标即为

$$\left(0,\ \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a}\right)、\left(0,\ -\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a}\right)、$$

$$\left(\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{b},\ 0\right)、\left(-\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{b},\ 0\right),$$

其坐标也适合方程①，故方程①即为所求的轨迹方程.

729. 求过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的动法线弦两端的切线的交点的轨迹方程.

［解］ 设动法线弦的一端点坐标为 $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$，则过此点的法线方程为 $\frac{a}{\cos\theta}x-\frac{b}{\sin\theta}y=a^2-b^2\cdots①$. 又设过此动法线弦两端的切线的交点坐标为 $(x_0,\ y_0)$，利用切点弦方程 (5.36)，此动法线方程又可表示为 $b^2x_0x+a^2y_0y=a^2b^2\cdots②$. 因为①、②表示同一直线，故

$$\frac{\frac{a}{\cos\theta}}{b^2x_0}=\frac{-\frac{b}{\sin\theta}}{a^2y_0}=\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}.$$

由此可得：

$$\cos\theta=\frac{a^3}{(a^2-b^2)x_0},\quad \sin\theta=-\frac{b^3}{(a^2-b^2)y_0}.$$

$\because \quad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1, \quad \therefore \quad \left[-\frac{b^3}{(a^2-b^2)y_0}\right]^2+\left[\frac{a^3}{(a^2-b^2)x_0}\right]^2=1.$

以 x、y 代换 x_0、y_0，化简即得所求的轨迹方程

$$b^6x^2+a^6y^2=(a^2-b^2)^2x^2y^2, \quad (xy\neq 0).$$

730. 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的长为 $2d$ 的弦的两端点作切线，求证此两切线的交点轨迹为

$$d^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\left(\frac{a^2y^2}{b^2}+\frac{b^2x^2}{a^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right).$$

[证] 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\cdots$① 的长为 $2d$ 的弦的两端点坐标分别为 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2)，过此两端点所作的两切线交点的坐标为 (x_0, y_0)，则此弦所在直线的方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1\cdots$②. 由①、②消去 y，得

$$(a^2y_0^2+b^2x_0^2)x^2-2a^2b^2x_0x+a^4(b^2-y_0^2)=0\cdots③.$$

又由①、②消去 x，得

$$(a^2y_0^2+b^2x_0^2)y^2-2a^2b^2y_0y+b^4(a^2-x_0^2)=0\cdots④.$$

故
$$x_1+x_2=\frac{2a^2b^2x_0}{a^2y_0^2+b^2x_0^2}, \quad x_1x_2=\frac{a^4(b^2-y_0^2)}{a^2y_0^2+b^2x_0^2},$$
$$y_1+y_2=\frac{2a^2b^2y_0}{a^2y_0^2+b^2x_0^2}, \quad y_1y_2=\frac{b^4(a^2-x_0^2)}{a^2y_0^2+b^2x_0^2}.$$
$$\because \quad (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=4d^2,$$

即
$$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2-4(x_1x_2+y_1y_2)=4d^2,$$
$$\therefore \quad a^4b^4(x_0^2+y_0^2)-[a^4(b^2-y_0^2)+b^4(a^2-x_0^2)](a^2y_0^2+b^2x_0^2)$$
$$=d^2(a^2y_0^2+b^2x_0^2)^2.$$

两边除以 a^4b^4，并以 x、y 代换 x_0、y_0，即得

$$d^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\left(\frac{a^2y^2}{b^2}+\frac{b^2x^2}{a^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right).$$

731. 求椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 在中心 O 张直角之弦的中点的轨迹方程.

[分析] 可取弦的端点的离心角为参数，也可利用弦的参数方程求解（见[解一]、[解二]），但运算较麻烦. 如用已知中点的弦方程和提要

(3.120)，则较为简捷(见[解三])。

[解一]　设在中心O张直角之弦两端点分别为$Q_1(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$、$Q_2(a\cos\beta,\ b\sin\beta)$，$Q_1Q_2$的中点$P$的坐标$(x、y)$，则

$$x=\frac{a}{2}(\cos\alpha+\cos\beta)\cdots①,\ y=\frac{b}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)\cdots②.$$

$$\because\quad OQ_1\perp OQ_2,\quad\therefore\quad \frac{b^2\sin\alpha\sin\beta}{a^2\cos\alpha\cos\beta}=-1\cdots③.$$

从①、②得

$$\frac{x}{a}=\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta),\quad \frac{y}{b}=\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta),$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{ay}{bx}\cdots④;\quad \cos^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\cdots⑤.$$

从③得

$$a^2[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]+b^2[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]=0,$$

即 $$(a^2+b^2)\left[2\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)-1\right]+(a^2-b^2)\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}=0\cdots⑥.$$

以④、⑤代入⑥：

$$(a^2+b^2)\left[2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)-1\right]+(a^2-b^2)\frac{b^2x^2-a^2y^2}{b^2x^2+a^2y^2}=0.$$

化简整理得

$$(a^2+b^2)(b^2x^2+a^2y^2)^2=a^2b^2(b^4x^2+a^4y^2),\ (x^2+y^2\neq0).$$

[解二]　设$P(x_0,\ y_0)$为轨迹上任意一点，直线Q_1Q_2的参数方程为$\begin{cases}x=x_0+t\cos\theta\\ y=y_0+t\sin\theta\end{cases}$($\theta$为倾角)，代入椭圆方程得

$$(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)t^2+2(b^2x_0\cos\theta+a^2y_0\sin\theta)t$$
$$+b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2=0\cdots①.$$

$\because$　P为Q_1Q_2的中点，$\therefore$ 方程①的两根t_1、t_2之和为零：$t_1+t_2=0\cdots②$，

即 $$b^2x_0\cos\theta+a^2y_0\sin\theta=0\cdots③.$$

又，$t_1t_2=\dfrac{b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}<0\cdots④$；$\dfrac{(y_0+t_1\sin\theta)(y_0+t_2\sin\theta)}{(x_0+t_1\cos\theta)(x_0+t_2\cos\theta)}=-1$，

即 $$x_0^2+x_0(t_1+t_2)\cos\theta+t_1t_2\cos^2\theta+y_0^2+y_0(t_1+t_2)\sin\theta$$
$$+t_1t_2\sin^2\theta=0\cdots⑤.$$

以②、③、④代入⑤:

$$x_0^2+y_0^2+\frac{b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2}{b^2+a^2\dfrac{b^4x_0^2}{a^4y_0^2}}+\frac{b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2}{b^2\dfrac{a^4y_0^2}{b^4x_0^2}+a^2}=0.$$

以 x、y 代换 x_0、y_0, 整理成

$$a^2b^2(b^2x^2+a^2y^2)(x^2+y^2)+(a^4y^2+b^4x^2)(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)=0,$$

即 $$(a^2+b^2)(b^2x^2+a^2y^2)^2=a^2b^2(b^4x^2+a^4y^2),\ (x^2+y^2\neq 0).$$

[解三] 设 $P(x_0,\ y_0)$ 为轨迹上任意一点. 以 P 为中点的椭圆的弦方程为 $b^2x_0(x-x_0)+a^2y_0(y-y_0)=0$, 即

$$b^2x_0x+a^2y_0y=b^2x_0^2+a^2y_0^2.$$

据提要(3.120), 直线 OQ_1、OQ_2 的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{b^2x_0x+a^2y_0y}{b^2x_0^2+a^2y_0^2}\right)^2.\quad \because\ OQ_1\perp OQ_2,$$

$$\therefore\ \frac{1}{a^2}-\left(\frac{b^2x_0}{b^2x_0^2+a^2y_0^2}\right)^2+\frac{1}{b^2}-\left(\frac{a^2y_0}{b^2x_0^2+a^2y_0^2}\right)^2=0.$$

以 x、y 代换 x_0、y_0, 整理成

$$\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{b^4x^2+a^4y^2}{(b^2x^2+a^2y^2)^2},$$

即 $$(a^2+b^2)(b^2x^2+a^2y^2)^2=a^2b^2(b^4x^2+a^4y^2),\ (x^2+y^2\neq 0).$$

[说明] 这类较复杂的轨迹题, 往往可用多参数, 根据题意列出轨迹上任意一点 $P(x,\ y)$所满足的方程组(方程个数比参数多一个), 再消去参数求解. 有时也可先设 $P(x_0,\ y_0)$ 为轨迹上任意一点, 按照轨迹条件求出 $(x_0,\ y_0)$所满足的方程, 再以 x、y 代换 x_0、y_0 得解.

732. 设 $P(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上任一点, 求过点 P 且与椭圆至少有三个交点重合于 P 的圆的圆心轨迹方程, 其中 φ 为参数.

[分析] 要求圆心的轨迹, 可先求出适合条件的圆系方程. 设圆与椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的四个交点为 P、Q、R、S. 则 PS、QR 与椭圆的长轴的夹角互补 (参见第1112题), 即 PS 与 QR 的斜率互为相反数. 若 Q、R 与 P 重合, 则 QR 与过点 P 的椭圆切线重合. 因而, 从过点 P 的切线方程可

求 PS 的方程．再利用圆锥曲线系的方程，可求出这些圆的方程．

［解］　椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $P(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ 的切线方程为 $\frac{x}{a}\cos\varphi+\frac{y}{b}\sin\varphi=1$，设圆与该椭圆的第四个交点为 S．$\because$ PS 的斜率与此切线的斜率互为相反数，$\therefore$ PS 的方程为

$$\frac{x-a\cos\varphi}{a}\cos\varphi-\frac{y-b\sin\varphi}{b}\sin\varphi=0,$$

即
$$\frac{x}{a}\cos\varphi-\frac{y}{b}\sin\varphi-\cos 2\varphi=0.$$

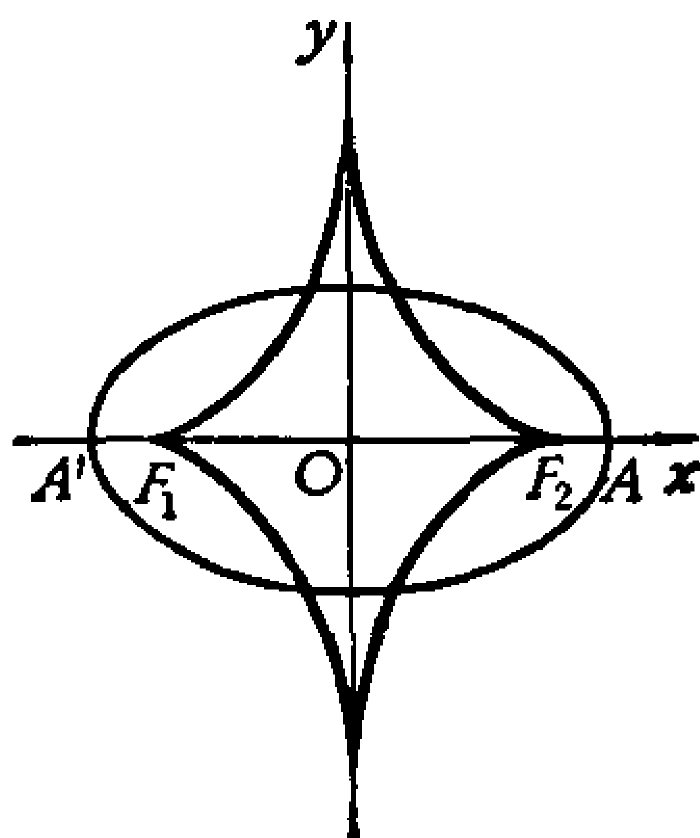
这些圆的方程为

$$\left(\frac{x}{a}\cos\varphi+\frac{y}{b}\sin\varphi-1\right)\left(\frac{x}{a}\cos\varphi-\frac{y}{b}\sin\varphi-\cos 2\varphi\right)=\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right).$$

其中 λ 满足条件：

$$\frac{\lambda}{a^2}-\frac{\cos^2\varphi}{a^2}=\frac{\lambda}{b^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2},$$

$$\therefore\quad \lambda=\frac{b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi}{b^2-a^2}.$$



$\therefore$　此圆系方程为

$$x^2+y^2-(a^2-b^2)\left(\frac{2x\cos^3\varphi}{a}-\frac{2y\sin^3\varphi}{b}\right)+a^2(\cos^2\varphi-2\sin^2\varphi)-b^2(2\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)=0,$$

圆心坐标为 $\begin{cases}x=\dfrac{a^2-b^2}{a}\cos^3\varphi\\ y=-\dfrac{a^2-b^2}{b}\sin^3\varphi.\end{cases}$ 消去参数 φ，得

$$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

其图象如图中粗线所示．

［说明］　本题中所求的圆称为椭圆在点 $P(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ 的密切圆，又称曲率圆．密切圆中心的轨迹为渐屈线．

第六章　双　曲　线

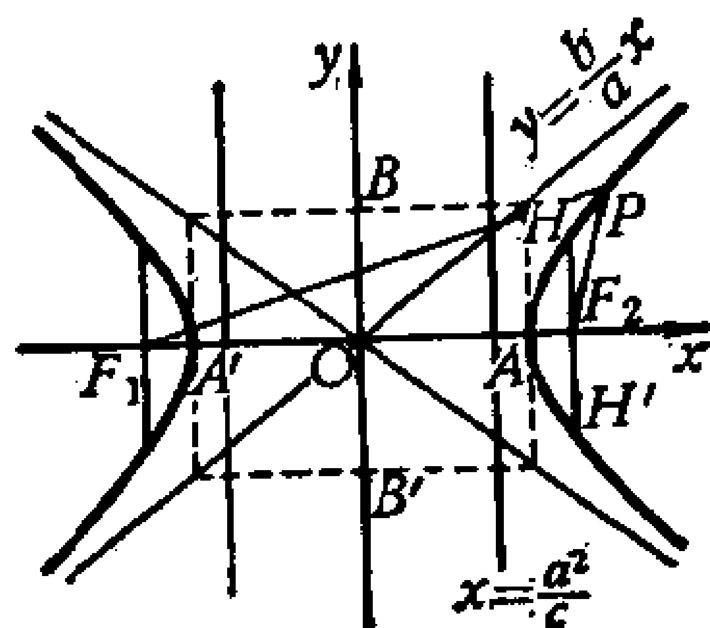
1. 双曲线的标准方程:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0). \qquad (6.10)$$

中心: $O(0,\ 0)$; 顶点: $A(a,\ 0)$, $A'(-a,\ 0)$;

实轴: $|AA'|=2a$; 虚轴: $|BB'|=2b$;

$B(0,\ b)$, $B'(0,\ -b)$.



(1) 焦点: $F_1(-c,\ 0)$, $F_2(c,\ 0)$;

焦距 $|F_1F_2|=2c$,

$$c=\sqrt{a^2+b^2}. \qquad (6.11)$$

(2) 离心率:

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad (e>1). \qquad (6.12)$$

(3) 准线:

$$x=-\frac{a}{e}=-\frac{a^2}{c},\ x=\frac{a}{e}=\frac{a^2}{c}. \qquad (6.13)$$

(4) 焦半径: 当 $x\geqslant a$ 时,

$$|PF_1|=ex+a,\quad |PF_2|=ex-a;$$

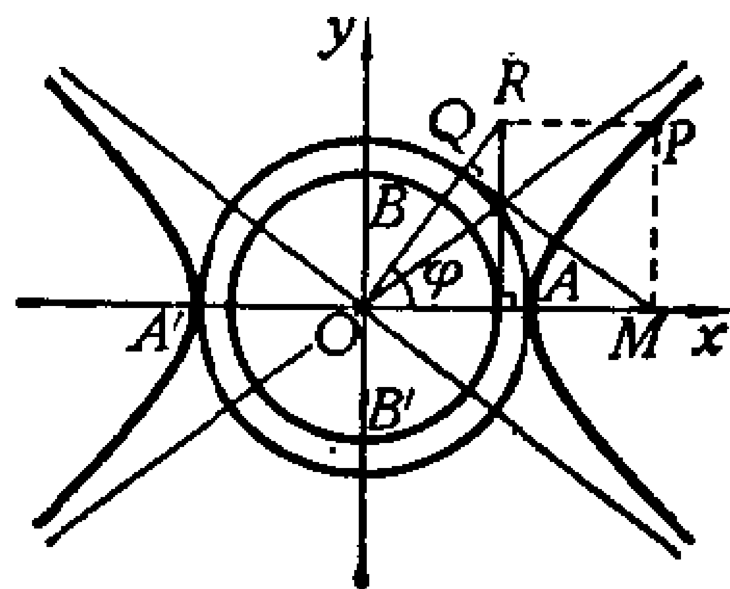
当 $x\leqslant a$ 时, $|PF_1|=-(ex+a)$, $|PF_2|=-(ex-a)$. $\qquad$ (6.14)

(5) 通径:

$$|HH'|=\frac{2b^2}{a};\ 焦参数\ p=\frac{b^2}{a}. \qquad (6.15)$$

(6) 渐近线: $y=\frac{b}{a}x$,

$$y=-\frac{b}{a}x. \qquad (6.16)$$



(7) 辅助圆: $x^2+y^2=a^2$,

$$x^2+y^2=b^2. \qquad (6.17)$$

(8) 参数方程:

$$\begin{cases} x=a\sec\varphi \\ y=b\operatorname{tg}\varphi \end{cases} \quad (\varphi \text{ 为离心角}). \qquad (6.18)$$

2. 其它形式的双曲线方程

(1) 中心在原点, 实轴在 y 轴上的标准方程:

$$-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad (a>0,\ b>0). \qquad (6.21)$$

(2) 中心在 $(x_0,\ y_0)$, 实轴与 x 轴平行的标准方程:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0). \qquad (6.22)$$

(3) 中心在 $(x_0,\ y_0)$, 实轴与 y 轴平行的标准方程:

$$-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1 \quad (a>0,\ b>0). \qquad (6.23)$$

3. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 与直线的关系

(1) 过切点 $(x_1,\ y_1)$ 的切线方程:

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1. \qquad (6.31)$$

(2) 过切点 $(a\sec\varphi,\ b\operatorname{tg}\varphi)$ 的切线方程(见第 750 题):

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\sin\varphi=\cos\varphi. \qquad (6.32)$$

(3) 已知斜率为 m 的切线方程:

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}. \qquad (6.33)$$

*(4) 过双曲线上点(x_1, y_1)的法线方程:

$$a^2y_1x+b^2x_1y=(a^2+b^2)x_1y_1. \qquad (6.34)$$

*(5) 过双曲线上点 $(a\sec\varphi,\ b\,\mathrm{tg}\,\varphi)$ 的法线方程 (见第 751 题):

$$ax\sin\varphi+by=(a^2+b^2)\,\mathrm{tg}\,\varphi. \qquad (6.35)$$

*(6) 点(x_0, y_0)关于双曲线的切点弦方程(见第 760 题):

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1. \qquad (6.36)$$

*(7) 点(x_0, y_0)关于双曲线的极线方程(见第 761 题):

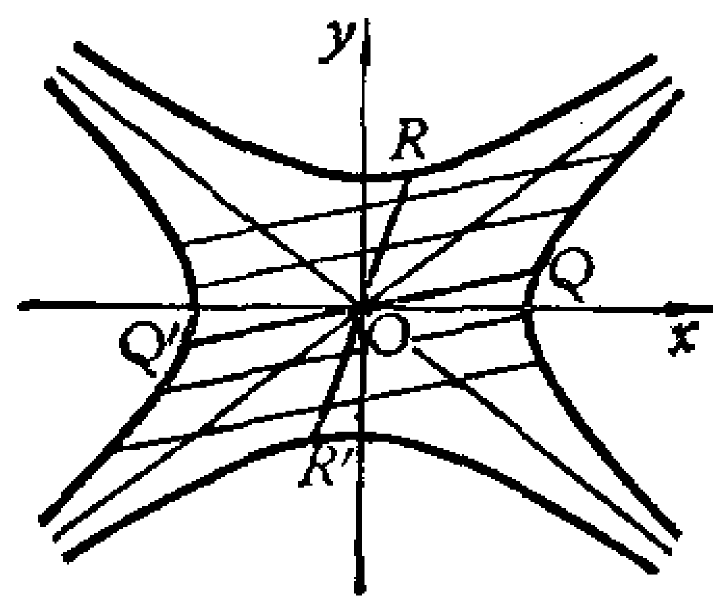
$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1. \qquad (6.37)$$

*(8) 斜率为 m 的双曲线直径 $y=mx$, 其共轭直径为 $b^2x-a^2my=0$(见第 763 题). 双曲线直径与双曲线的交点, 其共轭直径与共轭双曲线的交点为两共轭直径的端点, 它们的坐标分别为: $Q(x_1, y_1)$, $Q'(-x_1, -y_1)$;

$$R\left(\frac{a}{b}y_1,\ \frac{b}{a}x_1\right),\ R'\left(-\frac{a}{b}y_1,\ -\frac{b}{a}x_1\right). \qquad (6.38)$$

4. 以坐标轴为渐近线的等轴(或称等边)双曲线方程:

$$xy=c^2. \qquad (6.40)$$



(1) 参数方程:

$$\begin{cases} x=ct \\ y=\dfrac{c}{t} \end{cases} \quad (t\text{ 为参数}). \qquad (6.41)$$

(2) 过切点(x_1, y_1)的切线方程:

$$y_1x+x_1y=2c^2. \qquad (6.42)$$

*(3) 过双曲线上点(x_1, y_1)的法线方程:

$$x_1x-y_1y=x_1^2-y_1^2. \qquad (6.43)$$

(4) 过切点$\left(ct, \frac{c}{t}\right)$的切线方程(见第773题)：

$$\frac{x}{t}+yt=2c. \tag{6.44}$$

*(5) 过双曲线上点$\left(ct, \frac{c}{t}\right)$的法线方程：

$$t^2x-y=ct^3-\frac{c}{t}. \tag{6.45}$$

5. 共轭双曲线系(共渐近线双曲线系)方程：

(1) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$ （λ 为任意常数），

其渐近线为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$$

与

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-\lambda \text{ 互为共轭双曲线.} \tag{6.51}$$

(2) $(l_1x+m_1y+n_1)(l_2x+m_2y+n_2)=\lambda$ （λ 为任意常数），

其渐近线为 $l_1x+m_1y+n_1=0$

和

$$l_2x+m_2y+n_2=0. \tag{6.52}$$

6. 共焦点的有心锥线系方程(见第770题)：

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}=1 \quad (a^2>b^2,\ \lambda \text{ 为任意常数}).$$

当 $b^2<\lambda<a^2$ 时，为共焦双曲线系；

当 $\lambda<b^2<a^2$ 时，为共焦椭圆系；

当 $\lambda>a^2>b^2$ 时，无轨迹.

焦点：$F_1(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$，$F_2(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$. (6.60)

§1. 双曲线的方程

733. 已知双曲线的离心率是2, 准线方程是 $2x+y=0$, 焦点坐标为 $F(1, 0)$, 求此双曲线的方程.

[解] 设 $P(x, y)$ 为双曲线上任意一点, 根据双曲线的定义, 有 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}:\frac{|2x+y|}{\sqrt{5}}=2$. 化简即得所求双曲线的方程

$$11x^2+16xy-y^2+10x-5=0.$$

734. 已知对称轴分别平行于坐标轴的有心二次曲线过 $P\left(\frac{11}{3}, 9\right)$、$Q\left(\frac{7}{3}, 5-\sqrt{7}\right)$ 两点, 其中心坐标为 $(-3, 5)$, 求此曲线方程.

[解] 据已知条件, 可设此有心二次曲线方程为 $\frac{(x+3)^2}{A}+\frac{(y-5)^2}{B}=1$. 因曲线过点 P、Q, 故有 $\frac{400}{9A}+\frac{16}{B}=1\cdots$①, $\frac{256}{9A}+\frac{7}{B}=1\cdots$②. 解方程组 ①、②, 得 $B=-9$, $A=16$. 故所求曲线是双曲线, 其方程为

$$\frac{(x+3)^2}{16}-\frac{(y-5)^2}{9}=1.$$

735. 已知椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 的两个顶点在双曲线的焦点上, 而双曲线的两个顶点又在椭圆的焦点上, 求此双曲线的方程.

[解] 设所求的双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, 则它的顶点为 $(\pm a, 0)$, 焦点为 $(\pm c, 0)$. 而椭圆的顶点为 $(\pm 4, 0)$, 焦点为 $(\pm\sqrt{7}, 0)$, 于是 $a=\sqrt{7}$, $c=4$, 因此 $b=\sqrt{c^2-a^2}=3$. 故所求双曲线方程为

$$\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=1.$$

736. 一椭圆和一双曲线有公共的焦点, 它们的离心率之和为2, 若椭圆方程为 $25x^2+9y^2=1$, 求此双曲线的方程.

[分析] 因椭圆 $25x^2+9y^2=1$ 的焦点在 y 轴上，双曲线同它有公共的焦点，故此双曲线的方程为 $-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.

[解] 化椭圆方程为 $\frac{x^2}{\left(\frac{1}{5}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=1$，即 $a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{1}{5}$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{4}{15}$，$e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$. 设双曲线的方程为 $-\frac{x^2}{b'^2}+\frac{y^2}{a'^2}=1$，则 $e'=2-\frac{4}{5}=\frac{6}{5}$. $a'=\frac{c'}{e'}=\frac{c}{e'}=\frac{4}{15}\div\frac{6}{5}=\frac{2}{9}$，$b'=\sqrt{c'^2-a'^2}=\sqrt{\left(\frac{4}{15}\right)^2-\left(\frac{2}{9}\right)^2}=\frac{\sqrt{44}}{45}$. 故所求双曲线方程为 $\frac{y^2}{\left(\frac{2}{9}\right)^2}-\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{44}}{45}\right)^2}=1$，即

$$891y^2-2025x^2=44.$$

737. 已知椭圆中心在原点，焦点在坐标轴上，焦距为 $2\sqrt{13}$；另一双曲线和椭圆有公共焦点，且椭圆的半长轴比双曲线的半实轴大 4，椭圆离心率和双曲线离心率之比为 3:7. 求椭圆和双曲线的方程.

[解] 设焦点在横轴上，则椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，双曲线方程为 $\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1$. 根据条件有:

$$\begin{cases}a-m=4\\ \frac{c}{a}:\frac{c}{m}=3:7,\end{cases}\quad 解得\begin{cases}a=7\\ m=3.\end{cases}$$

由 $c=\sqrt{13}$，$a=7$，得 $b=\sqrt{7^2-13}=6$. 由 $c=\sqrt{13}$，$m=3$，得 $n=\sqrt{13-9}=2$. ∴ 椭圆方程为 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$；双曲线方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$.

设焦点在纵轴上，则椭圆方程为 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$，双曲线方程为 $-\frac{x^2}{n^2}+\frac{y^2}{m^2}=1$. 同理可得: $a=7$，$m=3$，$b=6$，$n=2$. 此时椭圆方程为 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{49}=1$；双曲线方程为 $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

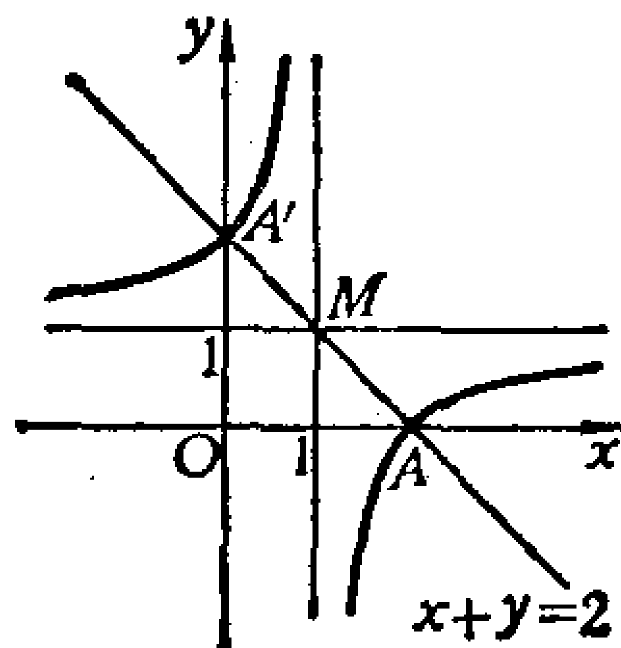
738. 等轴双曲线的中心在原点，焦点在 x 轴上，与直线 $x-$

$2y=0$ 交于两点 A、B，且 $|AB|=2\sqrt{15}$．求此等轴双曲线的方程．

［解］ 设等轴双曲线方程为 $x^2-y^2=a^2(a>0)$．由 $\begin{cases}x^2-y^2=a^2\\x-2y=0\end{cases}$ 解得交点 A、B 的坐标为 $\left(\frac{2a}{\sqrt{3}},\ \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$、$\left(-\frac{2a}{\sqrt{3}},\ -\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$． 由已知，$|AB|=\sqrt{\left(\frac{4a}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{2\sqrt{15}}{3}a=2\sqrt{15}$，$\therefore a=3$． 即所求双曲线方程为 $x^2-y^2=9$．

739．求以直线 $x+y=2$ 在坐标轴间的线段为实轴的等轴双曲线方程．

［分析］ 直线 $x+y=2$ 与两坐标轴成等腰直角三角形，故所求双曲线以此直角三角形斜边中点 M 为中心，并以过点 M 且平行于 x 轴和 y 轴的两直线为渐近线．



［解］ 直线 $x+y=2$ 与 x 轴、y 轴的交点分别为 $A(2, 0)$、$A'(0, 2)$．AA' 的中点 $M(1, 1)$ 是所求等轴双曲线的中心．等轴双曲线的两渐近线方程为 $x-1=0$，$y-1=0$． 设所求等轴双曲线方程为 $(x-1)(y-1)=\lambda$，因双曲线经过 $A(2,0)$，故 $\lambda=(2-1)(0-1)=-1$．所求等轴双曲线方程为

$$(x-1)(y-1)=-1.$$

［说明］ 若已知直线在两轴上截距的绝对值不相等，则不能直接写出等轴双曲线渐近线方程，但可先求出过双曲线中心且与已知直线垂直的直线方程，它们之间的角平分线方程即为两渐近线方程．

740．已知双曲线的两条渐近线方程为 $x+y=0$ 与 $x-y=0$，两顶点间距离为 2，试求此双曲线的方程．

［分析］ 因双曲线两渐近线方程为 $x\pm y=0$，故此双曲线是等轴双曲线．

［解］ 设双曲线方程为 $x^2-y^2=\pm a^2$．两顶点间距离 $2a=2$，$\therefore a=1$，代入即得所求双曲线方程为 $x^2-y^2=1$ 或 $x^2-y^2=-1$．

[说明] 本题有互成共轭双曲线的两解.

741. 求与双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 有共同渐近线，并且经过点 $(-3, 2\sqrt{3})$ 的双曲线方程.

[分析] 因双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的两渐近线方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=0$，故同它共渐近线的双曲线方程可表示为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=\lambda \quad (\lambda\neq 0)$.

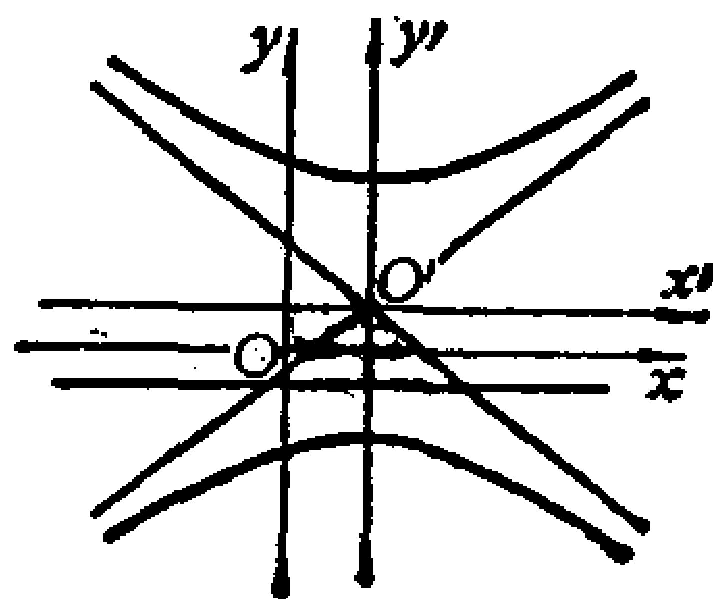
[解] 设所求双曲线方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=\lambda$，$\because$ 经过点 $(-3, 2\sqrt{3})$，$\therefore\ \lambda=\frac{(-3)^2}{9}-\frac{(2\sqrt{3})^2}{16}=\frac{1}{4}$. 故所求双曲线方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=\frac{1}{4}$，即 $16x^2-9y^2=36$.

742. 求与双曲线 $(x+2y-1)(2x-3y-5)=1$ 有公共渐近线，且过点 $(1, 1)$ 的双曲线方程.

[解] 设与双曲线 $(x+2y-1)(2x-3y-5)=1$ 有公共渐近线的双曲线方程为 $(x+2y-1)(2x-3y-5)=\lambda$. $\because$ 过点 $(1, 1)$，$\therefore \lambda=(1+2-1)\cdot(2-3-5)=-12$. 故所求双曲线方程为 $(x+2y-1)(2x-3y-5)=-12$.

743. 已知双曲线的两条渐近线方程为 $3x-4y-2=0$ 和 $3x+4y-10=0$，一条准线方程为 $5y+4=0$. 求此双曲线的方程以及顶点和焦点的坐标.

[分析] 因双曲线两渐近线的交点为双曲线中心 (h, k)，它的一条准线平行于 x 轴，它的实轴必平行于 y 轴. 于是双曲线的方程可表示为 $-\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$.



[解] 因准线方程为 $y=-\frac{4}{5}$，故准线平行于 x 轴，所求双曲线的实轴平行于 y 轴. 由两渐近线方程

$$\begin{cases}3x-4y-2=0\\3x+4y-10=0\end{cases}$$ 解得交点 $(2, 1)$.

故设所求双曲线方程为 $\frac{(y-1)^2}{a^2}-\frac{(x-2)^2}{b^2}=1$. 利用坐标轴平移公式: $\begin{cases}x=x'+2\\y=y'+1,\end{cases}$ 则双曲线方程为 $\frac{y'^2}{a^2}-\frac{x'^2}{b^2}=1\cdots$①, 渐近线方程为 $3x'\pm4y'=0$, 准线方程为 $y'=-\frac{9}{5}$. $\because \frac{a}{b}=\frac{3}{4}$, $\frac{a^2}{c}=\frac{9}{5}$, $\therefore a=3$, $b=4$, $c=5$. 代入①, 得 $\frac{y'^2}{9}-\frac{x'^2}{16}=1$. 故所求双曲线方程为 $\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x-2)^2}{16}=1$. 在 $x'O'y'$ 坐标系中, 顶点坐标为 $(0, \pm3)$, 焦点坐标为 $(0, \pm5)$. 在原坐标系中的顶点坐标为 $(2, 4)$、$(2, -2)$; 焦点坐标为 $(2, 6)$、$(2, -4)$.

744. 求渐近线为 $y=\pm\frac{1}{2}x$, 且与直线 $5x-6y-8=0$ 相切的双曲线方程.

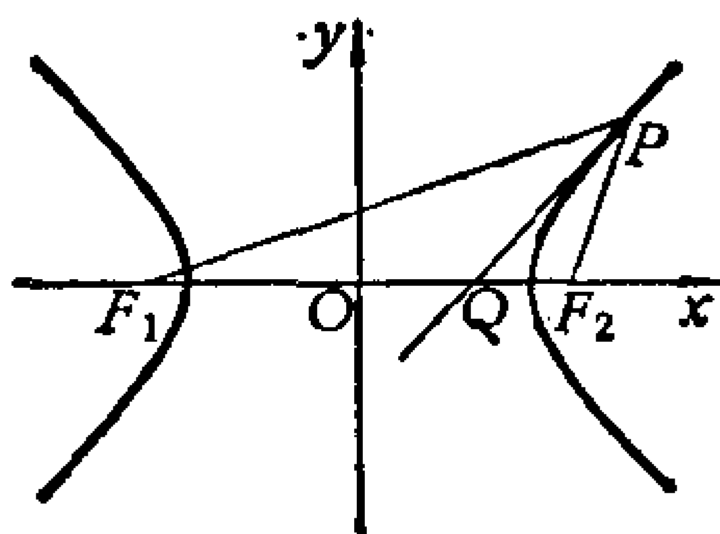
[分析] 因所求双曲线的两渐近线为 $y=\pm\frac{1}{2}x$, 故双曲线方程可表示为 $\frac{1}{4}x^2-y^2=t\quad(t\neq0)$.

[解一] 设双曲线 $\frac{1}{4}x^2-y^2=t\quad(t\neq0)$ 同直线 $5x-6y-8=0$ 相切. 由 $\begin{cases}\frac{1}{4}x^2-y^2=t\\5x-6y-8=0\end{cases}$ 消去 x, 整理得 $16y^2-24y+25t-16=0$. 它的判别式 $\Delta=(-24)^2-4\cdot16(25t-16)=0$, 解得 $t=1$. 故所求双曲线方程为 $\frac{1}{4}x^2-y^2=1$, 即 $x^2-4y^2=4$.

[解二] 因为双曲线的渐近线方程为 $x\pm2y=0$, 故可设双曲线方程为 $x^2-4y^2=\lambda(\lambda\neq0)$, 它与直线 $5x-6y-8=0\cdots$① 切于点 (x_1, y_1). 又切线方程为 $x_1x-4y_1y-\lambda=0\cdots$②. 因直线①与②重合, 故 $\frac{x_1}{5}=\frac{4y_1}{6}=\frac{\lambda}{8}$, 解得 $x_1=\frac{5}{8}\lambda$, $y_1=\frac{3}{16}\lambda$. 代入 $x_1^2-4y_1^2=\lambda$, 得 $\frac{25}{64}\lambda^2-4\cdot\frac{9}{16^2}\lambda^2=\lambda$. $\because\ \lambda\neq0$, $\therefore\ \lambda=4$. 故所求双曲线方程为 $x^2-4y^2=4$.

745. 双曲线的实轴、虚轴分别在 x、y 轴上, 双曲线上一点 P 到两焦点的距离分别为 $\frac{37}{3}$ 和 $\frac{13}{3}$, 过点 P 的切线与 x 轴的交点为 $Q\left(\frac{12}{5}, 0\right)$. 求双曲线的方程.

［分析］ 可利用“过双曲线上一点的切线平分这点和两焦点连线所成的角”这一性质来解.

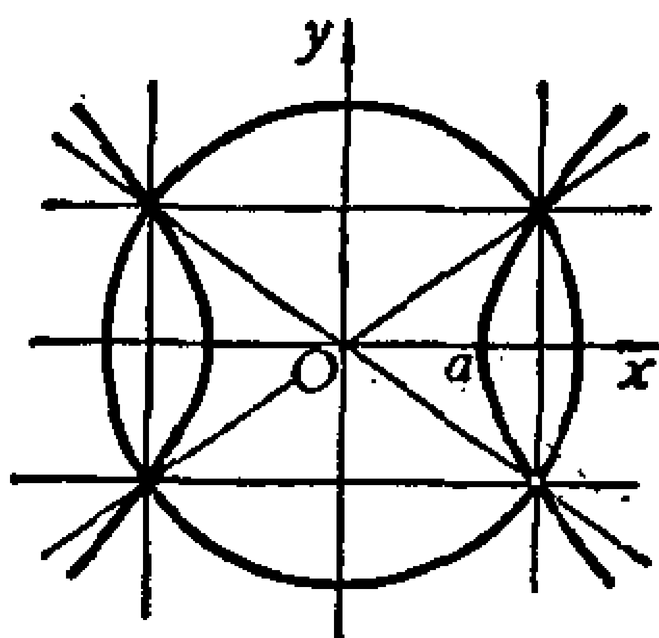


［解］ 因所求双曲线的实轴、虚轴分别在 x、y 轴上，故可设其方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，焦点为 $F_1(-c, 0)$、$F_2(c, 0)$. ∵ 点 P 在双曲线上，∴ $||PF_1|-|PF_2||=2a$，即 $\left|\frac{37}{3}-\frac{13}{3}\right|=2a$， ∴ $a=4$. 又 ∵ PQ 是切线，∴ PQ 平分 $\angle F_1PF_2$， 故 $\frac{|QF_1|}{|QF_2|}=\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$， 即 $\left(\frac{12}{5}+c\right):\left(c-\frac{12}{5}\right)=\frac{37}{3}:\frac{13}{3}$，∴ $c=5$. $b^2=c^2-a^2=5^2-4^2=9$. 故所求的双曲线方程为 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

§ 2. 直线与双曲线的位置关系

746. 求圆 $x^2+y^2=3a^2$ 与双曲线 $x^2-y^2=a^2(a>0)$ 的公共弦所在直线的方程.

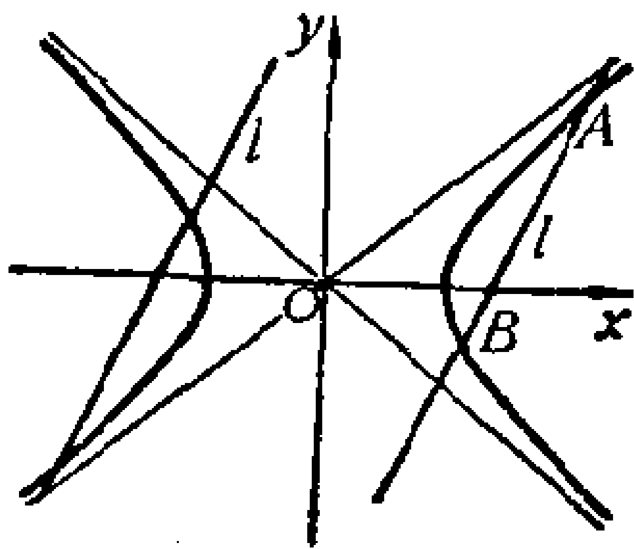
［解］ 由方程组$\begin{cases}x^2+y^2=3a^2\\x^2-y^2=a^2\end{cases}$ 解得已知圆与已知双曲线的交点为 $(\pm\sqrt{2}a, \pm a)$，$(\pm\sqrt{2}a, \mp a)$. 因每两交点的连线均构成公共弦，故所求公共弦方程为



$$x=\pm\sqrt{2}a,\ y=\pm a,\ y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x.$$

［说明］ 曲线上任意两点所连线段称为弦，故本题应有六解，不能遗漏.

747. 直线 l 在双曲线 $2x^2-3y^2=6$ 上截得的弦长为 4，其斜率为 2，求直线 l 的方程.



［解］ 设直线 l 的方程为 $y=2x+m$…①. 将①代入双曲线方程得 $2x^2-3(2x+m)^2=6$，即 $10x^2+12mx+3(m^2+2)=0$. 设直线 l 与双曲线的交点为 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$，由韦达定理

得 $x_1+x_2=-\frac{6}{5}m$，$x_1x_2=\frac{3}{10}(m^2+2)$. ∴ $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{6}{25}m^2-\frac{12}{5}$. 又 ∵ A、B 在直线 l 上，∴ $y_1=2x_1+m$，$y_2=2x_2+m$. ∴ $(y_1-y_2)^2=4(x_1-x_2)^2$. 已知 $|AB|=4$, 故 $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=4^2$, ∴ $5\left(\frac{6}{25}m^2-\frac{12}{5}\right)=16$. 解得 $m=\pm\frac{\sqrt{210}}{3}$. ∴ 直线 l 的方程为

$$y=2x\pm\frac{\sqrt{210}}{3}.$$

［说明］ 若直线同 x 轴垂直，在双曲线上截得的弦长为 4，此直线方程可用 $x=m$ 表示，代入 $2x^2-3y^2=6$, 得 $y=\pm\frac{1}{3}\sqrt{6m^2-18}$. $6m^2-18\geqslant0$, 故 $m\geqslant3$ 或 $m\leqslant-3$. ∵ $\frac{2}{3}\sqrt{6m^2-18}=4$, 解得 $m=\pm3$, 故此时直线方程为 $x=\pm3$.

748. 双曲线 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 的一弦中点坐标为 $(2a, b)$，求此弦两端点的坐标.

［分析］ 因为双曲线上平行弦（斜率为 k）的中点轨迹为双曲线的直径，其方程为 $b^2x-a^2ky=0$. 利用直径方程，求出以 $P(2a, b)$ 为中点的弦方程，即可求得弦和双曲线的交点坐标.

［解］ 设以 $P(2a, b)$ 为中点的弦的斜率为 k，则据提要(6.38)，和此弦相应的直径的斜率 $k'=\frac{b^2}{a^2k}$，直径方程为 $b^2x-a^2ky=0$. 因直径通过点 $P(2a, b)$，故 $2ab^2-a^2kb=0$，$k=\frac{2b}{a}$. 以点 P 为中点的弦方程为 $y-b=\frac{2b}{a}(x-2a)$. 由 $\begin{cases} b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2 \\ y-b=\frac{2b}{a}(x-2a) \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} x_1=\frac{(6+\sqrt{6})a}{3} \\ y_1=\frac{(3+2\sqrt{6})b}{3}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=\frac{(6-\sqrt{6})a}{3} \\ y_2=\frac{(3-2\sqrt{6})b}{3}. \end{cases}$$

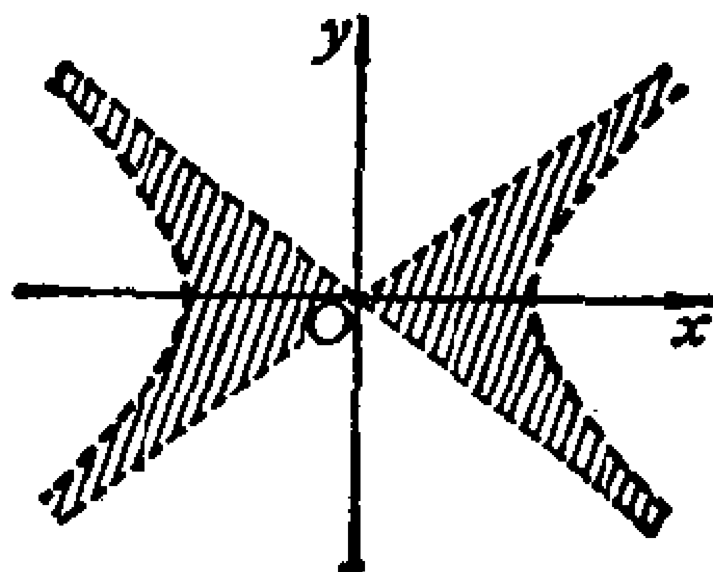
所以此弦和双曲线两交点的坐标为 $\left(\frac{6+\sqrt{6}}{3}a, \frac{3+2\sqrt{6}}{3}b\right)$ 和 $\left(\frac{6-\sqrt{6}}{3}a, \frac{3-2\sqrt{6}}{3}b\right)$.

749. 求双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的以 $P_0(x_0, y_0)$ 为中点的弦所在直线的方程.

[分析]　因以 P_0 为中点的弦的两个端点和 P_0 的距离相等，故此弦的方程宜用参数式 $\begin{cases} x=x_0+t\cos\theta \\ y=y_0+t\sin\theta \end{cases}$ 代入双曲线方程所得 t 的二次方程的两根必互为相反数，即 t 的一次项系数等于零，从而得解.

[解]　设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的以 $P_0(x_0, y_0)$ 为中点的弦所在直线的倾角为 θ，其方程为 $\begin{cases} x=x_0+t\cos\theta \\ y=y_0+t\sin\theta \end{cases}$ (t 为参数). 代入双曲线方程，整理得

$$(b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta)t^2+2(b^2x_0\cos\theta-a^2y_0\sin\theta)t$$
$$+b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2=0\cdots①.$$



方程 ① 的判别式为

$$\Delta=4(b^2x_0\cos\theta-a^2y_0\sin\theta)^2$$
$$-4(b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta)(b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2).$$

$\because$ P_0 为弦的中点，$\therefore$ 方程 ① 两根 t_1、t_2 等值而异号，即

$$t_1+t_2=0,\ b^2x_0\cos\theta-a^2y_0\sin\theta=0.$$

可令　$\cos\theta=\lambda a^2y_0,\quad \sin\theta=\lambda b^2x_0\quad(\lambda\neq0),$

$$\therefore\quad \Delta=-4\lambda^2a^2b^2(a^2y_0^2-b^2x_0^2)(b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2)$$
$$=4\lambda^2a^2b^2(b^2x_0^2-a^2y_0^2)(b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2).$$

当 $\begin{cases} b^2x_0^2-a^2y_0^2>0 \\ b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2>0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b^2x_0^2-a^2y_0^2<0 \\ b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2<0 \end{cases}$ 时，$\Delta>0$,

即点 $P_0(x_0, y_0)$ 在阴影以外的区域内时，弦与双曲线有两个实交点，弦所在直线的方程为

$$b^2x_0(x-x_0)-a^2y_0(y-y_0)=0.$$

当 $\begin{cases} b^2x_0^2-a^2y_0^2>0 \\ b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2<0 \end{cases}\cdots②$ 或 $\begin{cases} b^2x_0^2-a^2y_0^2<0 \\ b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2>0 \end{cases}\cdots③$ 时，$\Delta<0$.

由于 ② 的解为图中的阴影区域，而 ③ 无解，$\therefore$ 当 P_0 在阴影区域内时，弦与双曲线无实交点，以 P_0 为中点的弦不存在.

750. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任意两点 $P_1(a\sec\alpha,\ b\operatorname{tg}\alpha)$、$P_2(a\sec\beta,\ b\operatorname{tg}\beta)$，此两点的连线不过中心. (1)求连接 P_1、P_2 的直线方程；(2)若 P_1、P_2 重合于双曲线上另一点 $P(a\sec\varphi,\ b\operatorname{tg}\varphi)$，则 P_1P_2 转化为过点 P 的切线，试求过点 P 的双曲线切线方程.

[解] (1) 当 $\sec\alpha\neq\sec\beta$ 时，直线 P_1P_2 的方程为

$$y-b\operatorname{tg}\alpha=\frac{b\operatorname{tg}\alpha-b\operatorname{tg}\beta}{a\sec\alpha-a\sec\beta}(x-a\sec\alpha)\cdots①;$$

当 $\sec\alpha=\sec\beta$，但 $\operatorname{tg}\alpha\neq\operatorname{tg}\beta$ 时，直线 P_1P_2 的方程应为 $x=a\sec\alpha$，亦满足①. 故①式即为直线 P_1P_2 的方程，化简得 $a\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}(y-b\operatorname{tg}\alpha)=b\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}(x-a\sec\alpha)$，即 $\frac{x}{a}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{y}{b}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

(2) 令 $\alpha=\beta=\varphi$，得 $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\sin\varphi=\cos\varphi$. 此即双曲线在点 P 的切线方程.

751. 求过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 $(a\sec\varphi,\ b\operatorname{tg}\varphi)$ 的法线方程.

[分析] 过双曲线上一点的法线，即过此点且与过此点的双曲线的切线互相垂直的直线.

[解] 由上题可知，过切点 $(a\sec\varphi,\ b\operatorname{tg}\varphi)$ 的双曲线的切线方程为 $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\sin\varphi=\cos\varphi$，故法线方程为 $ax\sin\varphi+by=\lambda$. ∵ 法线过点 $(a\sec\varphi,\ b\operatorname{tg}\varphi)$，∴ $\lambda=a^2\sin\varphi\sec\varphi+b^2\operatorname{tg}\varphi=(a^2+b^2)\operatorname{tg}\varphi$. 故所求法线方程为 $ax\sin\varphi+by=(a^2+b^2)\operatorname{tg}\varphi$.

752. 双曲线 $x^2-y^2=4$ 的一切线夹在两坐标轴之间的线段长为 $\sqrt{15}$，求此切线的方程.

[解一] 设切线的斜率为 k，则双曲线的切线方程为 $y=kx\pm2\sqrt{k^2-1}$

…①. 它与x轴、y轴的交点分别为$\left(\mp\frac{2\sqrt{k^2-1}}{k},\ 0\right)$、$(0,\ \pm2\sqrt{k^2-1})$. 由已知 $\sqrt{\frac{4(k^2-1)}{k^2}+4(k^2-1)}=\sqrt{15}$, 即 $4k^4-15k^2-4=0$, $(k^2-4)\cdot(4k^2+1)=0$, $k^2=4$, $k=\pm2$. 代入①, 得所求切线方程为

$$y=2x\pm2\sqrt{3},\ y=-2x\pm2\sqrt{3}.$$

［解二］ 设切点坐标为$(2\sec\varphi,\ 2\operatorname{tg}\varphi)$, 则切线方程为 $x-y\sin\varphi=2\cos\varphi$. 它与两坐标轴的交点为 $(2\cos\varphi,\ 0)$、$(0,\ -2\operatorname{ctg}\varphi)$. $\therefore\ 4\cos^2\varphi+4\operatorname{ctg}^2\varphi=15$, 即 $4(1-\sin^2\varphi)(1+\sin^2\varphi)=15\sin^2\varphi$, $(4\sin^2\varphi-1)(\sin^2\varphi+4)=0$. $\therefore\ \sin\varphi=\pm\frac{1}{2}$. 即得 $\varphi=\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}$. 故所求切线方程为 $2x-y\mp2\sqrt{3}=0$ 与 $2x+y\pm2\sqrt{3}=0$.

753. 已知直线 $y=(1-x)\operatorname{tg}\theta$ 与双曲线 $-x^2+y^2\cos^2\theta=1$ 相切$\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$. 求切点坐标.

［解一］ $y=(1-x)\operatorname{tg}\theta$…①, $-x^2+y^2\cos^2\theta=1$…②. 将①代入②, 整理得$(\sin^2\theta-1)x^2-2x\sin^2\theta+\sin^2\theta-1=0$. 因直线与双曲线相切, 故判别式 $\Delta=4\sin^4\theta-4(\sin^2\theta-1)^2=0$. 化简得 $\sin^2\theta=\frac{1}{2}$, $\therefore\ \sin\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\because\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$, $\therefore\ \theta=\pm\frac{\pi}{4}$. 当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时, 代入①、②, 解得切点坐标为$(-1,\ 2)$; 当 $\theta=-\frac{\pi}{4}$ 时, 代入①、②, 解得切点坐标为$(-1,\ -2)$.

［解二］ 设切点为$(x_0,\ y_0)$, 则双曲线 $-x^2+y^2\cos^2\theta=1$ 的切线为 $-x_0x+y_0y\cos^2\theta=1$. 又已知直线 $x\operatorname{tg}\theta+y=\operatorname{tg}\theta$ 也是过切点$(x_0,\ y_0)$的切线, $\therefore\ \frac{-x_0}{\operatorname{tg}\theta}=\frac{y_0\cos^2\theta}{1}=\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$. 从而解得 $x_0=-1$, $y_0=\frac{1}{\operatorname{tg}\theta\cdot\cos^2\theta}$. $(x_0,\ y_0)$ 在双曲线上, $\therefore\ -1+\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\theta\cdot\cos^2\theta}\right)^2\cdot\cos^2\theta=1$, 解得 $\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore\ \theta=\pm\frac{\pi}{4}$, 即 $y_0=\pm2$. 故切点坐标为$(-1,\ 2)$和$(-1,\ -2)$.

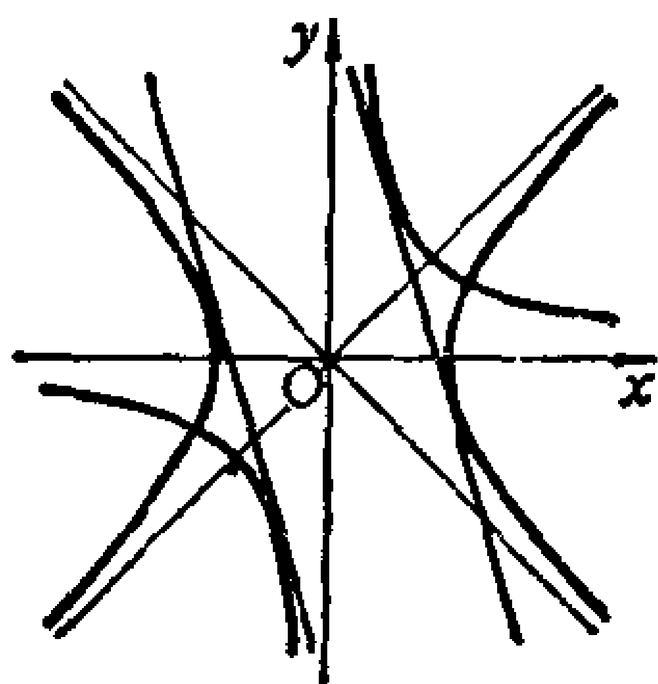
754. 已知双曲线 $x^2-4y^2=16$ 的一条切线在两坐标轴上的截距相等. 求切点的坐标.

［分析］ 可先从切线方程求出切线在坐标轴上的截距, 根据题设两截距

相等，以及切点在双曲线上的条件，列出方程求解.

［解］ 设切点 P 的坐标为$(x_1,\ y_1)$，则 $x_1^2-4y_1^2=16\cdots$①. 过点 P 的切线方程是 $x_1x-4y_1y=16\cdots$②，在②式中令 $x=0$，得 $y=-\dfrac{4}{y_1}$；令 $y=0$，得 $x=\dfrac{16}{x_1}$. 根据条件有 $-\dfrac{4}{y_1}=\dfrac{16}{x_1}$，$\therefore\ x_1=-4y_1\cdots$③. ③代入①，得 $16y_1^2-4y_1^2=16$，$\therefore\ y_1^2=\dfrac{4}{3}$，$y_1=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. 由③式即得相应的 $x_1=\mp\dfrac{8}{\sqrt{3}}$. 故切点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{8}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ 和 $\left(-\dfrac{8}{\sqrt{3}},\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

755. 求两双曲线 $x^2-y^2=3a^2$ 和 $xy=2a^2$ 的公切线方程及切点坐标.



［解一］ 设公切线在双曲线 $x^2-y^2=3a^2$ 上的切点为$(x_1,\ y_1)$，则公切线方程为

$$x_1x-y_1y=3a^2\cdots①;$$

又设公切线在双曲线 $xy=2a^2$ 上的切点为$(x_2,\ y_2)$，则公切线方程为 $x_2y+y_2x=4a^2\cdots$②.

因①、②重合，故 $\dfrac{x_1}{y_2}=\dfrac{-y_1}{x_2}=\dfrac{3}{4}\cdots$③. 由方程组 $\begin{cases}\dfrac{x_1}{y_2}=\dfrac{-y_1}{x_2}=\dfrac{3}{4}\\ x_1^2-y_1^2=3a^2\\ x_2y_2=2a^2\end{cases}$

解得

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{3\sqrt{6}}{4}a\\ y_1=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}a,\end{cases}\quad \begin{cases}x_2=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a\\ y_2=\sqrt{6}a;\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{3\sqrt{6}}{4}a\\ y_1=\dfrac{\sqrt{6}}{4}a,\end{cases}\quad \begin{cases}x_2=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}a\\ y_2=-\sqrt{6}a.\end{cases}$$

即两切点为 $\left(\dfrac{3\sqrt{6}}{4}a,\ -\dfrac{\sqrt{6}}{4}a\right)$ 与 $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}a,\ \sqrt{6}\,a\right)$ 的公切线方程为 $3x+y=2\sqrt{6}\,a$；两切点为 $\left(-\dfrac{3\sqrt{6}}{4}a,\ \dfrac{\sqrt{6}a}{4}\right)$ 与 $\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3}a,\ -\sqrt{6}\,a\right)$

的公切线方程为 $3x+y=-2\sqrt{6}\,a$.

［解二］ 设双曲线 $x^2-y^2=3a^2$ 的斜率为 k 的切线方程为 $y=kx\pm\sqrt{3a^2k^2-3a^2}\cdots①$，其中 $|k|\geqslant1$. 又设双曲线 $xy=2a^2$ 的切线方程为 $y=kx+m\cdots②$，代回原方程得 $x(kx+m)=2a^2$，即 $kx^2+mx-2a^2=0$. 因为相切，故判别式 $\Delta=m^2+8a^2k=0$，解得 $m=\pm\sqrt{-8a^2k}$. 因此切线方程 ② 即为 $y=kx\pm\sqrt{-8a^2k}\cdots③$，其中 $k\leqslant0$. 因为切线 ①、③ 重合，故 $\sqrt{3a^2k^2-3a^2}=\sqrt{-8a^2k}$，即 $3k^2+8k-3=0$. 解得 $k=-3$，或 $k=\frac{1}{3}$(舍去). 故所求公切线方程为 $y=-3x\pm2\sqrt{6}\,a$.

将公切线方程分别和两双曲线方程联立，即可解得切点坐标：$\left(\frac{3\sqrt{6}}{4}a,\ -\frac{\sqrt{6}}{4}a\right)$、$\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a,\ \sqrt{6}\,a\right)$及$\left(-\frac{3\sqrt{6}}{4}a,\ \frac{\sqrt{6}}{4}a\right)$、$\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}a,\ -\sqrt{6}\,a\right)$.

756. **求双曲线 $x^2-y^2=2a^2$ 与圆 $x^2+y^2=a^2$ 的公切线方程.**

［解］ 设公切线的斜率为 k，则圆 $x^2+y^2=a^2$ 的切线方程为 $y=kx\pm a\sqrt{1+k^2}\cdots①$；双曲线的切线方程为 $y=kx\pm a\sqrt{2(k^2-1)}\cdots②$. ∵ 切线 ① 与 ② 重合，∴ $\sqrt{1+k^2}=\sqrt{2(k^2-1)}$，解得 $k=\pm\sqrt{3}$. 代入 ①，即得所求公切线方程：$y=\sqrt{3}\,x\pm2a$，$y=-\sqrt{3}\,x\pm2a$.

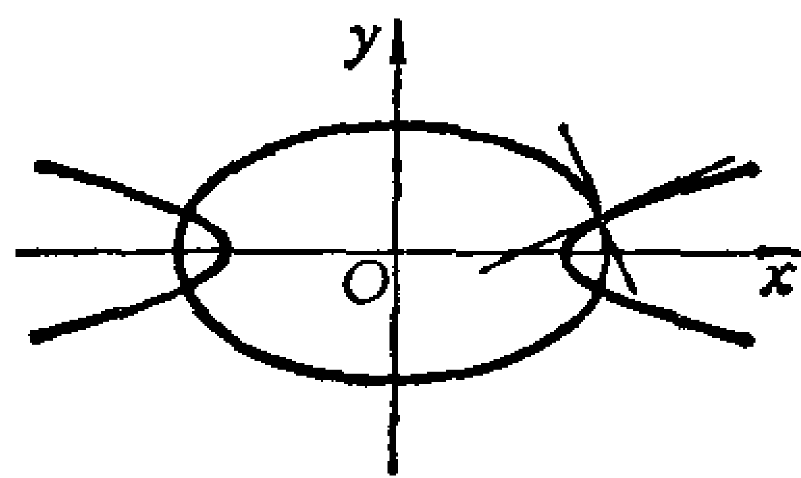
757. **求证椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 与双曲线 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 的公切线与 y 轴平行.**

［证］ 设椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$、双曲线 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 两公切线的切点分别为 $(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$、$(a\sec\beta,\ b\,\mathrm{tg}\,\beta)$，则椭圆的切线 $\frac{x}{a}\cos\alpha+\frac{y}{b}\cdot\sin\alpha=1\cdots①$，与双曲线的切线 $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\sin\beta=\cos\beta\cdots②$ 重合. ∴ $\cos\alpha=\lambda$，$\sin\alpha=-\lambda\sin\beta$，$\lambda\cos\beta=1$，$(\lambda\neq0)$. 消去 λ、β 得：$\sec^2\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha=1$，$\mathrm{tg}^2\alpha=0$. ∴ $\alpha=n\pi$，$\lambda=\cos\alpha=\cos n\pi=\pm1$，$\cos\beta=\pm1$. 故公切线方程为 $x=a$，$x=-a$. 即公切线与 y 轴平行.

758. **中心在原点，焦点在 x 轴的双曲线，其实轴长 $2\sqrt{15}$，且双曲线与椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 相交于四个交点，在每一交点处椭**

圆的切线与双曲线的切线互相垂直，试求此双曲线的方程.

[分析] 中心在原点，焦点在 x 轴的双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. 由实轴长 $2\sqrt{15}$，就可确定 a. 过双曲线与椭圆公共点的两切线互相垂直，故两切线的斜率之积等于 -1，从而可确定双曲线的方程.



[解一] 设所求双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. $\because$ $2a=2\sqrt{15}$, $\therefore$ $a^2=15$, 故所求双曲线方程为 $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{b^2}=1$. 设公共切点坐标为 (x_1, y_1)，椭圆切线方程为 $\frac{x_1x}{25}+\frac{y_1y}{9}=1$，双曲线切线方程为 $\frac{x_1x}{15}-\frac{y_1y}{b^2}=1$. $\because$ 在交点处椭圆切线与双曲线切线互相垂直，$\therefore$ $-\frac{9x_1}{25y_1}\cdot\frac{b^2x_1}{15y_1}=-1\cdots$①; 又 $\frac{x_1^2}{25}+\frac{y_1^2}{9}=1\cdots$②, $\frac{x_1^2}{15}-\frac{y_1^2}{b^2}=1\cdots$③. 由①、②、③解得 $b^2=1$. 故所求双曲线方程为 $\frac{x^2}{15}-y^2=1$.

[解二] 设椭圆与双曲线的交点坐标为 $(5\cos\varphi,\ 3\sin\varphi)$，则椭圆在交点处的切线方程为 $\frac{5\cos\varphi\cdot x}{25}+\frac{3\sin\varphi\cdot y}{9}=1$，$\therefore$ 椭圆切线斜率 $k_1=-\frac{3\cos\varphi}{5\sin\varphi}$. $\because$ 两切线互相垂直，$\therefore$ 双曲线切线斜率 $k_2=\frac{5\sin\varphi}{3\cos\varphi}$; 又双曲线切线方程为 $\frac{5\cos\varphi\cdot x}{15}-\frac{3\sin\varphi\cdot y}{b^2}=1$，其斜率为 $k_2=\frac{b^2\cos\varphi}{9\sin\varphi}$. $\therefore$ $\frac{5\sin\varphi}{3\cos\varphi}=\frac{b^2\cos\varphi}{9\sin\varphi}$, $b^2\cos^2\varphi=15\sin^2\varphi\cdots$①; 又 $\frac{25\cos^2\varphi}{15}-\frac{9\sin^2\varphi}{b^2}=1\cdots$②. 从①、②解得 $\cos^2\varphi=\frac{15}{16}$, $\sin^2\varphi=\frac{1}{16}$, $\therefore$ $b^2=1$. 故所求双曲线方程为 $\frac{x^2}{15}-y^2=1$.

759. 已知双曲线 $x^2-y^2=a^2$，如果它与直线 $x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0\ (p>0)$ 相切，求 a、p、φ 之间的关系.

[解] 若 $\sin\varphi\neq0$，则由直线方程 $x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0$，得 $y=\frac{p-x\cos\varphi}{\sin\varphi}$. 代入双曲线方程，得

$$x^2(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)+2px\cos\varphi-p^2-a^2\sin^2\varphi=0.$$

∵ 直线和双曲线相切，∴ 判别式

$$\Delta=4[p^2\cos^2\varphi+(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)(p^2+a^2\sin^2\varphi)]=0.$$

化简，即 $p^2=a^2\cos 2\varphi$.

若 $\sin\varphi=0$，可得 $p^2=a^2$，仍适合上述关系．故此直线和双曲线相切时，a、p、φ 间的关系为 $p^2=a^2\cos 2\varphi$.

760. 自 $P_0(x_0, y_0)$ 引双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两切线，求切点弦所在直线的方程.

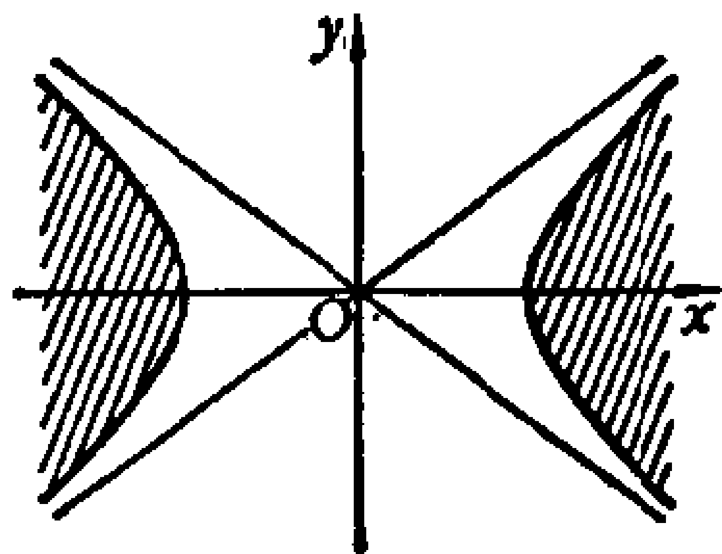
［分析］ 根据两切点 Q_1、Q_2 的坐标 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)，可写出两切线方程；运用两切线均过点 P_0 的条件，即可得解.

［解］ 设两切点的坐标分别为 $Q_1(x_1, y_1)$、$Q_2(x_2, y_2)$．∴ 两切线方程为：$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$，$\frac{x_2x}{a^2}-\frac{y_2y}{b^2}=1$．∵ 两切线均过 $P_0(x_0, y_0)$，∴ $\frac{x_0x_1}{a^2}-\frac{y_0y_1}{b^2}=1\cdots$①，$\frac{x_0x_2}{a^2}-\frac{y_0y_2}{b^2}=1\cdots$②．从①、②可知直线 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$ 过 $Q_1(x_1, y_1)$、$Q_2(x_2, y_2)$，故切点弦所在直线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

761. 过定点 $P_0(x_0, y_0)$ 的动直线与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两交点为 Q_1、Q_2，试求过 Q_1、Q_2 两点的切线交点的轨迹.

［分析］ 根据切点弦通过定点 P_0 的条件，即可得所求轨迹的方程.

［解］ 设 $P(\alpha, \beta)$ 为轨迹上任意一点，Q_1Q_2 为点 P 关于双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的切点弦，其方程为 $\frac{\alpha x}{a^2}-\frac{\beta y}{b^2}=1\cdots$①．∵ Q_1Q_2 通过点 $P_0(x_0, y_0)$，∴ $\frac{x_0\alpha}{a^2}-\frac{y_0\beta}{b^2}=1$．以 x、y 代换 α、β，即得所求轨迹方程 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.



［说明］ 由于双曲线两切线的交点不可能在双曲线外部(图中阴影部分)，故轨迹为直线 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$ 在双曲线内部的一段．此直线称为 P_0 关于双曲线的极线，P_0 为此直线的极．当 P_0 在双曲线外部时，P_0 的极线在双曲线内

部；当 P_0 在双曲线内部时，P_0 的极线与 P_0 的切点弦重合，但 P_0 不与双曲线中心重合.

762. 求证：双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的准线上任意一点关于双曲线的极线过焦点；焦点的极线为准线.

［证］ 设点 P_0 为右准线 $x=\frac{a}{e}$ 上任意一点，其坐标为 $\left(\frac{a}{e},\ y_0\right)$，它关于双曲线的极线方程为 $\frac{ax}{a^2e}-\frac{y_0y}{b^2}=1$，即 $\frac{x}{ae}-\frac{y_0y}{b^2}=1$，∴ 过右焦点 $F(ae,\ 0)$. 同理可证左准线上点的极线过左焦点.

右焦点 $F(ae,\ 0)$ 关于双曲线的极线方程为

$\frac{aex}{a^2}-\frac{0\cdot y}{b^2}=1$，即为右准线 $x=\frac{a}{e}$. 同理可证左焦点的极线为左准线.

763. 求双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的方向一定的弦的中点轨迹.

［分析］ 因弦的方向一定，故其倾角 θ 为定值，若设 $P(x_0,\ y_0)$ 为轨迹上任意一点，则平行弦系的方程可用直线参数方程 $\begin{cases}x=x_0+t\cos\theta\\ y=y_0+t\sin\theta\end{cases}$ 表示. 利用弦与双曲线的两交点的中点为 $P(x_0,\ y_0)$ 的条件，即可得轨迹方程.

［解］ 设弦的倾角为 θ，$P(x_0,\ y_0)$ 为轨迹上任意一点，则平行弦系的方程为 $\begin{cases}x=x_0+t\cos\theta\\ y=y_0+t\sin\theta\end{cases}$ …①. 代入双曲线方程，整理得

$$(b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta)t^2+2(b^2x_0\cos\theta-a^2y_0\sin\theta)t$$
$$+(b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2)=0\cdots②.$$

(1) 当 $\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$ 或 $\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$ 时，$b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta=0$，方程②只有一个实根，即弦与双曲线只有一个交点，故无轨迹可言.

(2) 当 $\theta\in\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a},\ \pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right)$ 时，方程②有两实根的条件为

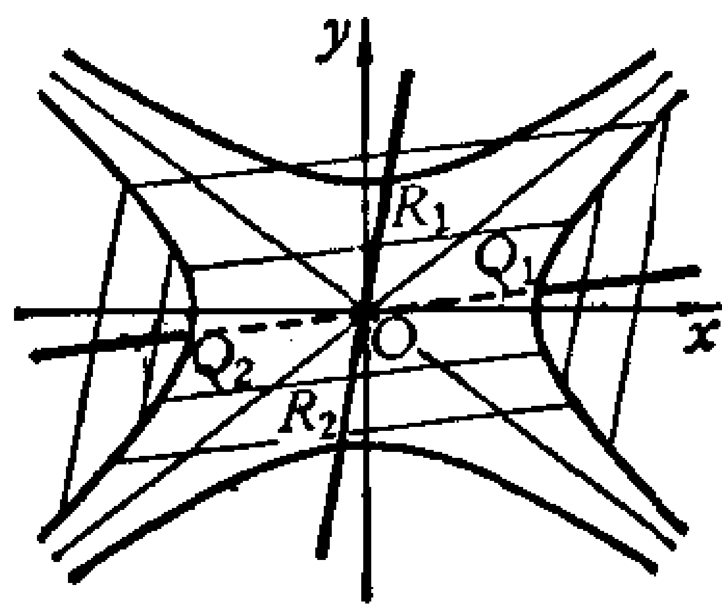
$$\Delta=4(b^2x_0\cos\theta-a^2y_0\sin\theta)^2$$
$$-4(b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta)(b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2)>0.$$

∵ $(x_0,\ y_0)$ 为弦的中点，∴ 方程②的两根 t_1、t_2 满足条件 $t_1+t_2=0$，即

$$b^2x_0\cos\theta-a^2y_0\sin\theta=0;$$

$$\because\quad \theta\in\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a},\ \pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right),\quad \therefore\quad b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta<0.$$

而 $\Delta>0$，故 $b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2>0$，即 $(x_0,\ y_0)$ 在双曲线外部（参见第 844 题），轨迹方程为 $b^2x_0\cos\theta-a^2y_0\sin\theta=0$． 若 $\theta\neq\frac{\pi}{2}$，$\operatorname{tg}\theta=m$，则轨迹方程为 $b^2x_0-a^2y_0m=0$．以 x、y 代换 x_0、y_0，即得 $b^2x-a^2my=0$．轨迹为此直线在双曲线外部的两射线．



(3) 当 $\theta\in\left(0,\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right)\cup\left(\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a},\ \pi\right)$ 时，$b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta>0$． $\because$ $(x_0,\ y_0)$为弦的中点，$\therefore$ $t_1+t_2=0$，即

$$b^2x_0\cos\theta-a^2y_0\sin\theta=0;$$

而 $\Delta>0$，故 $b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2<0$，即 $P(x_0,\ y_0)$ 在双曲线内部，轨迹为直线 $b^2x\cos\theta-a^2y\sin\theta=0$．若 $\theta\neq\frac{\pi}{2}$，$m=\operatorname{tg}\theta$，轨迹方程可化为

$$b^2x-a^2my=0.$$

［说明］ (1) 二次曲线平行弦系（不与渐近方向平行）中点的轨迹称为二次曲线的直径．双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 平分斜率为 m 的平行弦的直径方程为 $b^2x-a^2my=0$，即过中心的弦．当直径通过双曲线外部时，它与双曲线两交点间的距离 $|Q_1Q_2|$ 称为直径长；当直径在双曲线内部时，它与双曲线的共轭双曲线的两交点间的距离 $|R_1R_2|$ 称为直径长．

(2) 平分与直径 $b^2x-a^2my=0$ 平行的弦的直径称为 $b^2x-a^2my=0$ 的共轭直径． $\because$ $b^2x-a^2my=0$ 的斜率为 $k=\frac{b^2}{a^2m}$，$\therefore$ 其共轭直径方程为 $b^2x-a^2\frac{b^2}{a^2m}y=0$，即 $y=mx$．故两共轭直径的斜率 k、k' 满足关系：$k\cdot k'=\frac{b^2}{a^2m}\cdot m=\frac{b^2}{a^2}$．

764．试求双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $(a\sec\varphi,\ b\operatorname{tg}\varphi)$ 的直径的共轭直径方程及其端点坐标．

[分析] 根据共轭直径斜率所满足的关系: $k\cdot k'=\frac{b^2}{a^2}$,即可得解.

[解] 过点 $(a\sec\varphi,\ b\,\mathrm{tg}\,\varphi)$ 的直径的斜率 $k=\frac{b\,\mathrm{tg}\,\varphi}{a\sec\varphi}=\frac{b}{a}\sin\varphi$, 故其共轭直径的斜率 $k'=\frac{b^2}{a^2k}=\frac{b}{a\sin\varphi}$, 共轭直径的方程为 $bx-ay\sin\varphi=0$.

解方程组 $\begin{cases} bx-ay\sin\varphi=0 \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1, \end{cases}$ 得共轭直径的端点坐标为

$$(a\,\mathrm{tg}\,\varphi,\ b\sec\varphi)、(-a\,\mathrm{tg}\,\varphi,\ -b\sec\varphi).$$

[说明] 如果一直径的两端为 $Q_1(x_1,\ y_1)$、$Q_2(-x_1,\ -y_1)$, 则共轭直径的两端点坐标为$\left(\frac{a}{b}y_1,\ \frac{b}{a}x_1\right)$、$\left(-\frac{a}{b}y_1,\ -\frac{b}{a}x_1\right)$, 故两共轭直径相应的端点必在同一象限内.

765. 已知双曲线 $x^2-y^2=1$ 的两共轭直径之间的夹角为 $45°$, 求两共轭直径的方程.

[分析] 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两共轭直径的斜率 k 与 k' 满足 $kk'=\frac{b^2}{a^2}$, 而它们之间的夹角为 $\left|\frac{k-k'}{1+kk'}\right|=\mathrm{tg}\,45°=1$, 从而解出 k 与 k', 即得两共轭直径方程.

[解] 设双曲线 $x^2-y^2=1$ 的两共轭直径斜率为 k 与 k'. $\because\ a=b=1$, $\therefore kk'=1\cdots$①; 又 $\left|\frac{k-k'}{1+kk'}\right|=1\cdots$②. 以 ① 代入 ②, 得方程组

$$\begin{cases} kk'=1 \\ k-k'=\pm 2. \end{cases}\quad 解得\quad \begin{cases} k=\sqrt{2}\pm 1 \\ k'=\sqrt{2}\mp 1, \end{cases}\quad \begin{cases} k=-(\sqrt{2}\pm 1) \\ k'=-(\sqrt{2}\mp 1). \end{cases}$$

故所求两共轭直径方程为 $y=(\sqrt{2}\pm 1)x,\ y=(\sqrt{2}\mp 1)x$; 或

$$y=-(\sqrt{2}\pm 1)x,\ y=-(\sqrt{2}\mp 1)x.$$

766. 试证: 等轴双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 两共轭直径与 x 轴的夹角互余.

[分析] 欲证两共轭直径与 x 轴的夹角互余, 可从两共轭直径斜率之间的关系推求.

［证］ 等轴双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 中，设两共轭直径的倾角分别为 θ、θ'，当 $\theta\neq\frac{\pi}{2}$ 时，$\operatorname{tg}\theta\cdot\operatorname{tg}\theta'=\frac{b^2}{a^2}=1$，即 $\operatorname{tg}\theta=\operatorname{ctg}\theta'$，$\therefore\ \theta+\theta'=\frac{\pi}{2}$. 当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，两共轭直径分别为坐标轴，故它们的夹角互余.

767. **求双曲线 $x^2-xy+x+2y-7=0$ 的渐近线方程.**

［分析］ 因直线与双曲线最多有两个交点，若两个交点重合于无穷远，此直线便是双曲线的渐近线. 故设所求渐近线方程为 $\begin{cases}x=x_1+t\cos\theta\\ y=y_1+t\sin\theta,\end{cases}$ 其中 $(x_1,\ y_1)$ 为渐近线上的点，θ 为渐近线的倾角. 代入双曲线方程可得 t 的二次方程. 此直线与双曲线两个交点重合于无穷远的条件是 t 的二次项、一次项系数均趋近于零. 从而可得 θ 的值和渐近线上的点 $(x_1,\ y_1)$ 所满足的方程. 以 x、y 代换 x_1、y_1 即得渐近线方程.

［解］ 设渐近线的参数方程为 $\begin{cases}x=x_1+t\cos\theta\\ y=y_1+t\sin\theta,\end{cases}$ 代入双曲线方程得

$$(x_1+t\cos\theta)^2-(x_1+t\cos\theta)(y+t\sin\theta)$$
$$+(x_1+t\cos\theta)+2(y_1+t\sin\theta)-7=0,$$

整理成

$$\cos\theta(\cos\theta-\sin\theta)t^2+[(2x_1-y_1+1)\cos\theta-(x_1-2)\sin\theta]t$$
$$+x_1^2-x_1y_1+x_1+2y_1-7=0\cdots①.$$

$\because$ 渐近线与双曲线的两个交点重合于无穷远，

$$\therefore\quad \cos\theta(\cos\theta-\sin\theta)=0\cdots②,$$
$$(2x_1-y_1+1)\cos\theta-(x_1-2)\sin\theta=0\cdots③.$$

由 ② 得 $\cos\theta=0$，$\theta=\frac{\pi}{2}$；及 $\cos\theta-\sin\theta=0$，$\theta=\frac{\pi}{4}$. 分别代入 ③，得 $x_1-2=0$ 和 $x_1-y_1+3=0$. 以 x、y 代换 x_1、y_1，即得渐近线方程 $x-2=0$ 和 $x-y+3=0$.

［说明］ 本题所用求渐近线的方法，也适用于高次代数曲线.

768. **设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 两渐近线的包含焦点的夹角为 2θ，求证：$\cos\theta=\frac{1}{e}$（e 为离心率）.**

［证］ 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线方程为 $y=\frac{b}{a}x$，$y=-\frac{b}{a}x$，则

$\operatorname{tg}\theta=\frac{b}{a}$. $\therefore \sec\theta=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{c}{a}=e$, 即 $\cos\theta=\frac{1}{e}$.

769. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. 求证: (1)当双曲线的渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 上的点的横坐标绝对值无限增大时, 它到两个焦点距离之差的绝对值的极限是 $2a$; (2) 当双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的点的横坐标绝对值无限增大时,它的纵横坐标之比的极限是 $\frac{b}{a}$.

〔证〕 (1) 在双曲线渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 上任取一点 $P(x_1, y_1)$, 设点 P 在第一象限(不失一般性). F_1、F_2 为两焦点, 则

$$|PF_1|-|PF_2|=\sqrt{(x_1+c)^2+y_1^2}-\sqrt{(x_1-c)^2+y_1^2}$$

$$=\frac{4cx_1}{\sqrt{(x_1+c)^2+y_1^2}+\sqrt{(x_1-c)^2+y_1^2}}$$

$$=\frac{4cx_1}{\sqrt{x_1^2+2cx_1+c^2+y_1^2}+\sqrt{x_1^2-2cx_1+c^2+y_1^2}}$$

$$=\frac{4cx_1}{x_1\sqrt{1+\frac{2c}{x_1}+\frac{c^2}{x_1^2}+\frac{y_1^2}{x_1^2}}+x_1\sqrt{1-\frac{2c}{x_1}+\frac{c^2}{x_1^2}+\frac{y_1^2}{x_1^2}}}$$

$$=\frac{4c}{\sqrt{1+\frac{2c}{x_1}+\frac{c^2}{x_1^2}+\frac{b^2}{a^2}}+\sqrt{1-\frac{2c}{x_1}+\frac{c^2}{x_1^2}+\frac{b^2}{a^2}}}.$$

$$\therefore \lim_{x_1\to\infty}(|PF_1|-|PF_2|)=\frac{4c}{2\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}=\frac{4c}{2\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}}=2a.$$

(2) 设 $Q(x_2, y_2)$ 是双曲线上在第一象限的任一点(不失一般性), 则

$$\frac{y_2}{x_2}=\frac{\frac{b}{a}x_2\sqrt{1-\frac{a^2}{x_2^2}}}{x_2}=\frac{b}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x_2^2}}.$$

$$\therefore \lim_{x_2\to\infty}\frac{y_2}{x_2}=\frac{b}{a}.$$

§3. 共焦点的有心锥线系

770. (1) 证明 $\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}=1$ ($\lambda<a^2$, $a>b$, λ 为任意常数)为共焦点的有心锥线系；(2)共焦点的椭圆 $\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}=1$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2-\lambda'}-\frac{y^2}{\lambda'-b^2}=1$ 互相直交，其中

$$\lambda\in(-\infty,\ b^2),\ \lambda'\in(b^2,a^2).$$

［证］ (1) ∵ $\lambda<a^2$, $a>b$, λ 为任意常数，∴ 方程 $\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}=1$ 表示以原点为中心，坐标轴为对称轴的椭圆，此时 $\lambda\in(-\infty,\ b^2)$；或表示双曲线，此时 $\lambda\in(b^2,\ a^2)$. 即为有心锥线系. ∵ $c^2=a^2-\lambda-(b^2-\lambda)=a^2-b^2$, ∴ 有心锥线系共焦点. 焦点为$(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$、$(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$.

(2) 设此椭圆与双曲线的交点为$(x_1,\ y_1)$,

$$\therefore\quad \frac{x_1^2}{a^2-\lambda}+\frac{y_1^2}{b^2-\lambda}=1\cdots①,$$

$$\frac{x_1^2}{a^2-\lambda'}-\frac{y_1^2}{\lambda'-b^2}=1\cdots②.$$

①－②，得 $$\frac{x_1^2(a^2-\lambda'-a^2+\lambda)}{(a^2-\lambda)(a^2-\lambda')}+\frac{y_1^2(\lambda'-b^2+b^2-\lambda)}{(b^2-\lambda)(\lambda'-b^2)}=0,$$

即 $$(\lambda-\lambda')\left[\frac{x_1^2}{(a^2-\lambda)(a^2-\lambda')}-\frac{y_1^2}{(b^2-\lambda)(\lambda'-b^2)}\right]=0.\quad \because\ \lambda\neq\lambda',$$

$\therefore\ \frac{x_1^2}{(a^2-\lambda)(a^2-\lambda')}-\frac{y_1^2}{(b^2-\lambda)(\lambda'-b^2)}=0$. 此即过交点$(x_1,\ y_1)$的椭圆与双曲线的两切线 $\frac{x_1x}{a^2-\lambda}+\frac{y_1y}{b^2-\lambda}=1$, $\frac{x_1x}{a^2-\lambda'}-\frac{y_1y}{\lambda'-b^2}=1$ 互相垂直的充要条件，故此椭圆与双曲线互相直交.

771. 求与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ 共焦点，且过点 $Q(2,\ 1)$ 的有心锥线.

［解］ 与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ 共焦点的有心锥线系为 $\frac{x^2}{4-\lambda}+\frac{y^2}{1-\lambda}=1$.

∵ 曲线过点 $Q(2, 1)$，∴ $\frac{4}{4-\lambda}+\frac{1}{1-\lambda}=1$. 解此方程得 $\lambda=\pm 2$. 故所求的有心锥线为:

$$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{1}=1 \quad 或 \quad \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1.$$

772. 试求所有焦点均为 $(0, \pm 3)$ 的椭圆方程；在什么情况下，其方程可代表与椭圆有相同焦点的所有双曲线?

［解］ ∵ 所求的椭圆焦点在 y 轴上，且关于 x 轴成轴对称，故可设其方程为 $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$，其中 $n^2>m^2$. 又椭圆的半焦距为 3，∴ $m^2=n^2-9$. 故所有焦点为 $(0, \pm 3)$ 的椭圆方程为 $\frac{x^2}{n^2-9}+\frac{y^2}{n^2}=1$. 其中 $n^2-9>0$，即 $n>3$，或 $n<-3$.

当 $-3<n<3$ 时，上述方程可改写成 $-\frac{x^2}{9-n^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$. 此方程即可表示和上述椭圆有相同焦点的所有双曲线.

§ 4. 以坐标轴为渐近线的等轴双曲线

773. (1) 已知等轴双曲线 $xy=c^2 (c\neq 0)$ 上两点 P_1、P_2 的横坐标分别为 x_1、x_2. 试求过 P_1、P_2 的直线方程；(2) 求过等轴双曲线 $xy=c^2$ 上任意两点 $P_1\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right)$、$P_2\left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right)$ 的直线方程；若 P_1、P_2 都重合于 $P\left(ct, \frac{c}{t}\right)$，此直线转化为过点 P 的切线，试求此切线方程.

［解］ (1) 设已知等轴双曲线上两点 P_1、P_2 的纵坐标分别为 y_1、y_2，∵ $x_1\neq x_2$，∴ 过 P_1、P_2 的直线方程为 $y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$，即

$$(x_1-x_2)(y-y_1)=(y_1-y_2)(x-x_1).$$

$$\because \quad x_1y_1=c^2, \quad x_2y_2=c^2,$$

$$\therefore \quad (x_1-x_2)\left(y-\frac{c^2}{x_1}\right)=\left(\frac{c^2}{x_1}-\frac{c^2}{x_2}\right)(x-x_1).$$

即所求直线方程为 $c^2x+x_1x_2y=c^2(x_1+x_2)\cdots①$.

(2) 利用①, 过 $P_1\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right)$、$P_2\left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right)$ 的直线方程为 $c^2x+c^2t_1t_2y=c^2(ct_1+ct_2)$, 即 $x+t_1t_2y=c(t_1+t_2)\cdots②$.

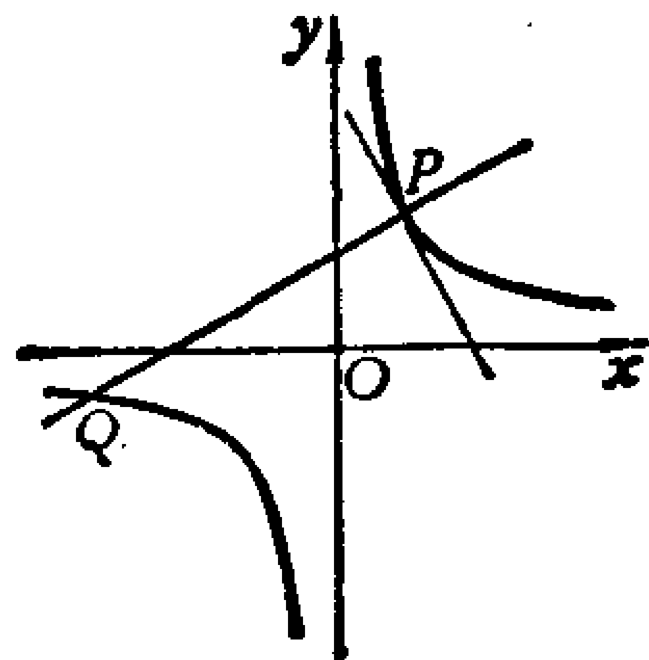
若点 P_1、P_2 都重合于点 $P\left(ct, \frac{c}{t}\right)$, 利用②式即得过点 P 的切线方程 $x+t^2y=2ct$.

774. 求等轴双曲线 $2xy=a^2$ 上以点 $(2a, 3a)$ 为中点的弦所在的直线方程.

[解] 设所求弦的斜率为 $k\left(k\neq 0,\text{ 因等轴双曲线无倾角为 } 0 \text{ 或 } \frac{\pi}{2} \text{ 的弦}\right)$, 弦所在直线方程为 $y-3a=k(x-2a)\cdots①$; 把①代入方程 $2xy=a^2$, 消去 y, 得 $2kx^2-2(2ak-3a)x-a^2=0$. 设 x_1、x_2 为弦的两端点的横坐标, 则 $x_1+x_2=\frac{2ak-3a}{k}$. 又 ∵ $(2a, 3a)$ 是弦的中点, ∴ $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2ak-3a}{2k}=2a$, 解得 $k=-\frac{3}{2}$. 代入①, 即得所求直线方程 $3x+2y-12a=0$.

775. 过等轴双曲线 $xy=c^2$ 上一点 $P\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ 的法线与此双曲线再交于点 $Q\left(ct', \frac{c}{t'}\right)$. 求证 $t^3t'=-1$.

[证] 据第 773 题, 过点 P 的切线方程是 $x+t^2y=2ct$. 从而得过点 P 的法线方程 $t^3x-ty+c-ct^4=0$. 因为法线和双曲线另一交点为 $Q\left(ct', \frac{c}{t'}\right)$. 所以



$$ct'\cdot t^3-t\cdot\frac{c}{t'}+c-ct^4=0,$$

即

$$t'^2t^3-t+t'-t't^4=0,$$

$$(t'-t)(t't^3+1)=0.$$

$$\because\ t'\neq t,\quad \therefore\ t't^3=-1.$$

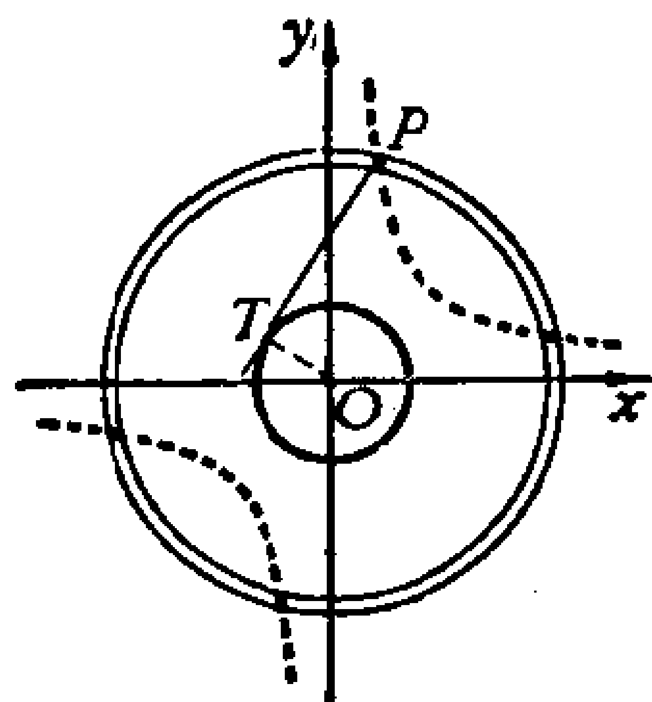
776. P 是等轴双曲线 $xy=4\sqrt{3}$ 上的任一点, 从点 P 引圆 $x^2+y^2=4$ 的切线 PT, T 为切点. 试确定适合不等式 $2\sqrt{3}\leqslant$

$|PT|\leqslant\sqrt{15}$ 的点 P 坐标的取值范围.

［解］ 设点 P 的坐标为 (x_0, y_0)，则 $|PT|^2=x_0^2+y_0^2-4$. 由条件 $2\sqrt{3}\leqslant|PT|\leqslant\sqrt{15}$，得 $12\leqslant|PT|^2\leqslant15$，$\therefore \begin{cases} x_0^2+y_0^2\leqslant19 \\ x_0^2+y_0^2\geqslant16 \end{cases}$…①. 又 $\because$ 点 P 在双曲线 $xy=4\sqrt{3}$ 上，$\therefore y_0=\dfrac{4\sqrt{3}}{x_0}$. 代入①，得 $\begin{cases} x_0^4-19x_0^2+48\leqslant0 \\ x_0^4-16x_0^2+48\geqslant0. \end{cases}$ 解此不等式组，得 $3\leqslant x_0^2\leqslant4$ 或 $12\leqslant x_0^2\leqslant16$…②. 当 $x_0>0$ 时，由②得 $\sqrt{3}\leqslant x_0\leqslant2$，或 $2\sqrt{3}\leqslant x_0\leqslant4$. 于是相应的有 $2\sqrt{3}\leqslant y_0\leqslant4$，或 $\sqrt{3}\leqslant y_0\leqslant2$. 当 $x_0<0$ 时，由②得 $-4\leqslant x_0\leqslant-2\sqrt{3}$，或 $-2\leqslant x_0\leqslant-\sqrt{3}$. 于是相应的有 $-2\leqslant y_0\leqslant-\sqrt{3}$，或 $-4\leqslant y_0\leqslant-2\sqrt{3}$. 综上所述，符合题意的点 P 的坐标取值范围为：

$$\begin{cases} \sqrt{3}\leqslant x_0\leqslant2 \\ 2\sqrt{3}\leqslant y_0\leqslant4 \\ x_0y_0=4\sqrt{3}, \end{cases} \quad \begin{cases} 2\sqrt{3}\leqslant x_0\leqslant4 \\ \sqrt{3}\leqslant y_0\leqslant2 \\ x_0y_0=4\sqrt{3}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4\leqslant x_0\leqslant-2\sqrt{3} \\ -2\leqslant y_0\leqslant-\sqrt{3} \\ x_0y_0=4\sqrt{3}, \end{cases} \quad \begin{cases} -2\leqslant x_0\leqslant-\sqrt{3} \\ -4\leqslant y_0\leqslant-2\sqrt{3} \\ x_0y_0=4\sqrt{3}. \end{cases}$$



这种点位于双曲线夹在两同心圆：$x^2+y^2=19$ 和 $x^2+y^2=16$ 之间的四段弧上（如图）.

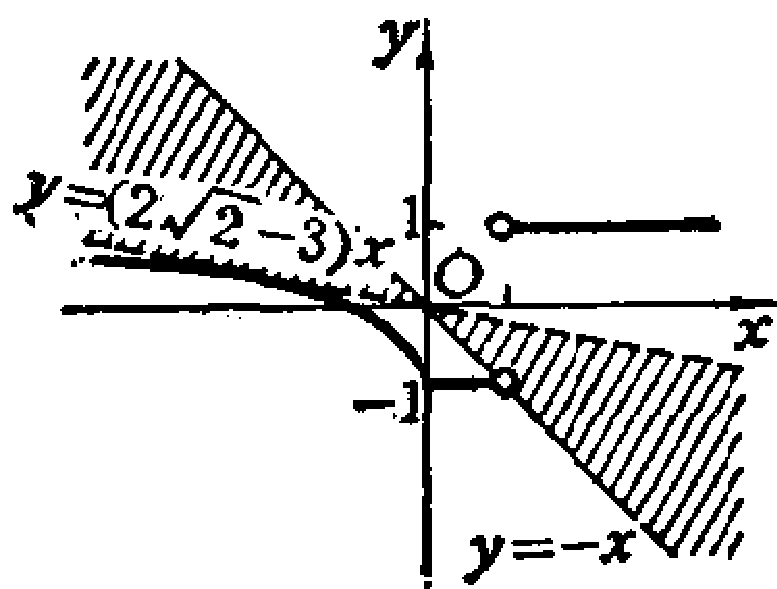
§5. 图象与区域

777. 设直线 $y=mx$ 与曲线 $y=\dfrac{|x|-1}{|x-1|}$ 无交点，求 m 的取值范围.

［解］ 曲线方程 $y=\dfrac{|x|-1}{|x-1|}$ 当 $x>1$ 时，为 $y=1$…①；当 $0\leqslant x<1$ 时，为 $y=-1$…②；当 $x\leqslant0$ 时，为双曲线 $y=1+\dfrac{2}{x-1}$…③. 曲线图象如图所示. 直线 $y=mx$ 过原点，当 $m<-1$ 或 $m\geqslant0$ 时，从图象上可见必与曲线相交. 当 $-1\leqslant m<0$ 时，则直线 $y=mx$ 与曲线③：$y=1+\dfrac{2}{x-1}$ 是否

相交，确定于方程 $mx=1+\frac{2}{x-1}$，即 $mx^2-(m+1)x-1=0$ 的判别式

$$\Delta=(m+1)^2+4m=m^2+6m+1.$$

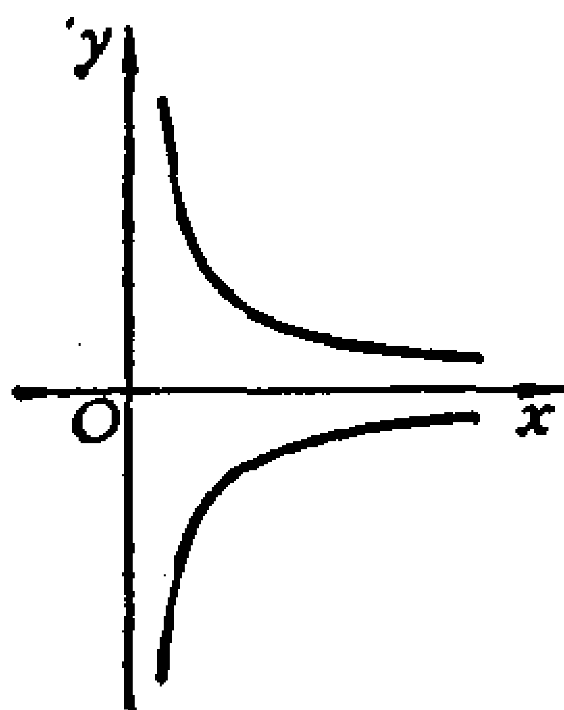


∵ 它们无交点，∴ $\Delta<0$，

$$-3-2\sqrt{2}<m<-3+2\sqrt{2}.$$

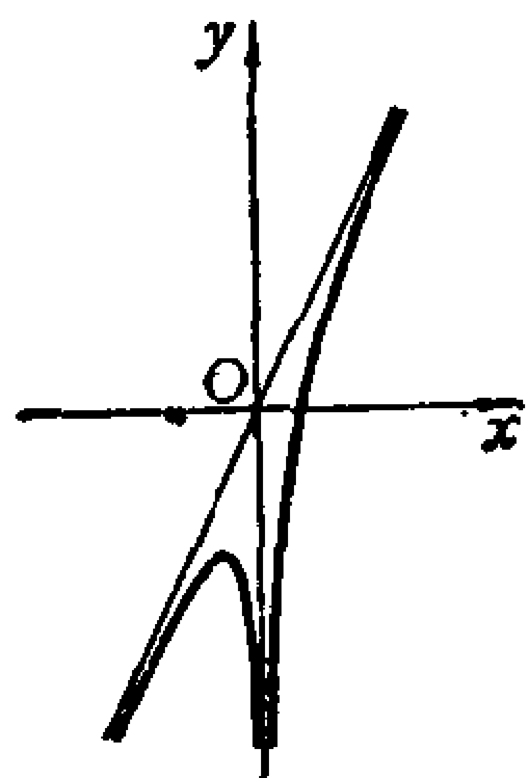
$$\therefore\quad -1\leqslant m<-3+2\sqrt{2}.$$

［说明］ 对于含有绝对值记号的问题，应以绝对值记号内的解析式为零的值作为划分区间的分界点，分定义域为若干区间进行研究．如本题中，$|x-1|$、$|x|$ 分别在 $x=1$、0 时为零，因此分三段 $(-\infty,\ 0]$、$[0,\ 1)$、$(1,\ +\infty)$ 进行讨论．



778．作方程 $x|y|=1$ 的图象．

［解］ ∵ $|y|\geqslant 0$，且 $x|y|=1$，∴ $x>0$，$y\neq 0$．当 $y>0$ 时，方程为 $xy=1(x>0)$，图象是双曲线 $xy=1$ 在第一象限内的一支；当 $y<0$ 时，方程为 $xy=-1(x>0)$，图象为双曲线 $xy=-1$ 在第四象限内的一支．



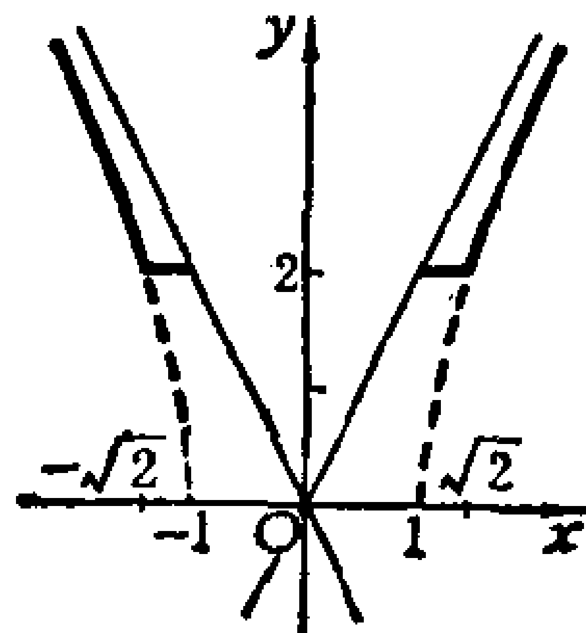
779．作方程 $y|x|=2x|x|-1$ 的图象．

［解］ 当 $x>0$ 时，原方程为 $xy=2x^2-1$，即 $2x^2-xy-1=0$．图象是此双曲线的右边一支．当 $x<0$ 时，原方程为 $-xy=-2x^2-1$，即

$$2x^2-xy+1=0.$$

图象是此双曲线的左边一支．

780．作方程 $y=\sqrt{x^2+2\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x^2-2\sqrt{x^2-1}}$ 的图象．



［解］ ∵ $x^2-1\geqslant 0$，

$$\therefore\quad x\in(-\infty,\ -1]\cup[1,\ +\infty).$$

$$\sqrt{x^2+2\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x^2-2\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\sqrt{x^2-1+2\sqrt{x^2-1}+1}+\sqrt{x^2-1-2\sqrt{x^2-1}+1}$$

$$=|\sqrt{x^2-1}+1|+|\sqrt{x^2-1}-1|.$$

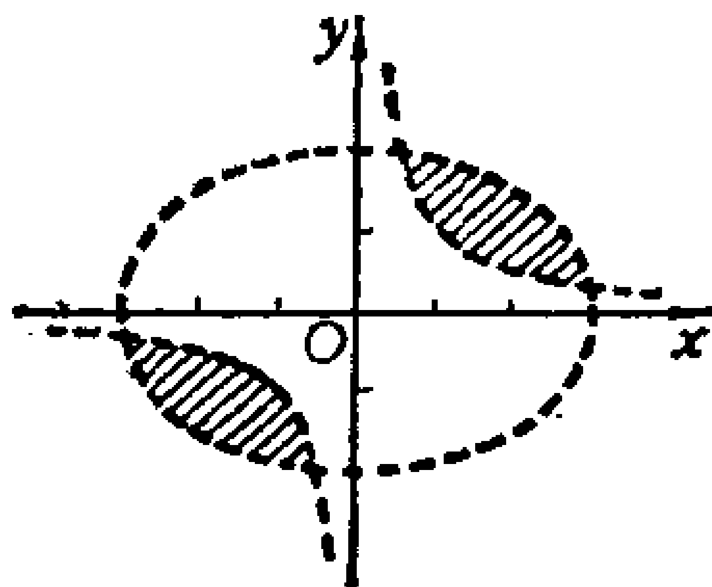
$$\because \quad \sqrt{x^2-1} \geqslant 0, \quad \therefore \quad \sqrt{x^2-1}+1>0.$$

当$x=\pm\sqrt{2}$时，$\sqrt{x^2-1}-1=0$，可分$(-\infty, -\sqrt{2}]$、$[-\sqrt{2}, -1]$、$[1, \sqrt{2}]$、$[\sqrt{2}, +\infty)$四段进行研究. 当$x\in(-\infty, -\sqrt{2}]$时，$y=2\sqrt{x^2-1}$，即$x^2-\frac{y^2}{4}=1$；当$x\in[-\sqrt{2}, -1]$时，$y=2$；当$x\in[1, \sqrt{2}]$时，$y=2$；当$x\in[\sqrt{2}, +\infty)$时，$y=2\sqrt{x^2-1}$，即$x^2-\frac{y^2}{4}=1$.

781. 作点集

$$D=\{(x, y)\,|\,4x^2+9y^2<36,\ xy>1\}$$

的图象.



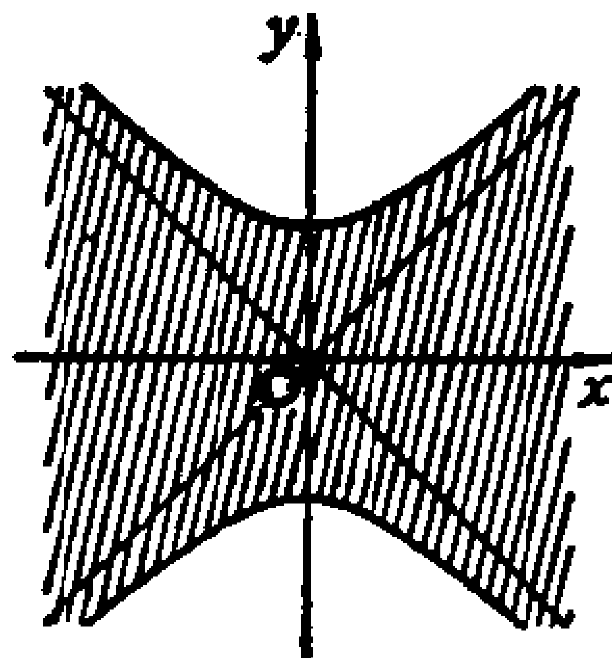
[解] 满足$4x^2+9y^2<36$的点(x, y)在椭圆$4x^2+9y^2=36$的内部. 满足$xy>1$的点(x, y)在双曲线$xy=1$的外部. D为此两点集的交集(图中阴影部分).

782. 设m为任意实数，求满足直线方程$(m^2-1)x+(m^2+1)y=2m$的点集.

[解] 将直线方程写成m的二次式$m^2(x+y)-2m+(y-x)=0\cdots$①. 当$x+y=0$时，$2m=y-x$，故$m$为实数. $\therefore$直线$x+y=0$上的点均满足条件；当$x+y\neq0$时，方程①有实根的充要条件为

$$\Delta=4[1-(x+y)(y-x)]\geqslant0,$$

即$y^2-x^2\leqslant1$. $\therefore$ 满足直线方程$(m^2-1)x+(m^2+1)y=2m$的点集如图中阴影部分，包括边界$y^2-x^2=1$上的点.



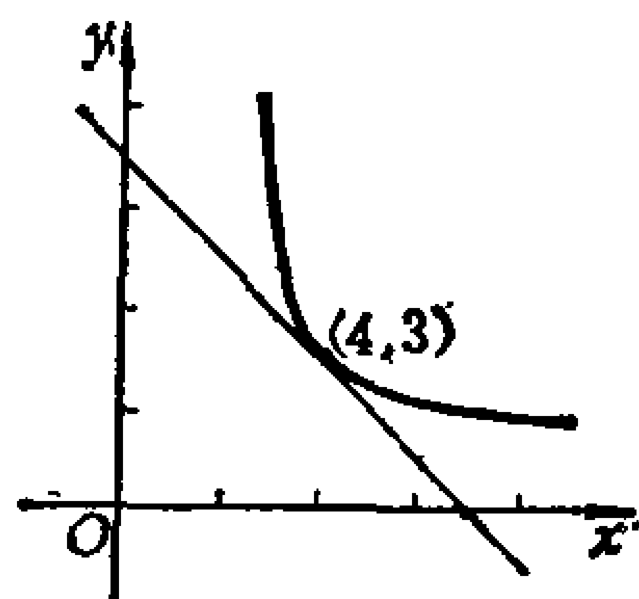
[说明] 过平面上阴影部分内的一点(x, y)，方程①有m的两实数解. 当且仅当点(x, y)在$x^2-y^2=-1$上时，对应的m的两实数解相等，此时直线与双曲线$x^2-y^2=-1$相切. 因而双曲线是直线$(m^2-1)x+(m^2+1)y=2m$的包络(参见第1203题).

§6. 平移、旋转、对称变换

783. 将曲线$\log_2 x+\log_2 y=2$沿x、y轴分别向右平移两个

单位，向上平移一个单位，此时与直线 $x+y=a$ 相切，试求 a 的值.

［分析］ 先求平移后曲线 $\log_2 x+\log_2 y=2$ 的方程，再利用与直线 $x+y=a$ 相切的条件，求 a 的值.



［解］ 曲线 $\log_2 x+\log_2 y=2\cdots$① 按题意平移后，方程①变为 $\log_2(x-2)+\log_2(y-1)=2$，即 $(x-2)(y-1)=4\quad(x>2,\ y>1)\cdots$②. 这时曲线②与直线 $x+y=a$ 相切，故

$$(x-2)(a-x-1)=4,$$

即 $x^2-(a+1)x+2a+2=0$ 的判别式 $\Delta=(a+1)^2-8(a+1)=0$. 解得 $a=-1$（此时 $x=0$，不合题意），$a=7$. $\therefore\ a=7$.

［说明］ 求变换后的曲线方程，可当作轨迹题来解. 设 $Q(x_1,\ y_1)$是变换前已知曲线 $F(x,\ y)=0$ 上任一点，经变换后到达 $P(x,\ y)$. 根据变换的条件建立方程 $\begin{cases}f_1(x,\ y,\ x_1,\ y_1)=0\cdots①\\ f_2(x,\ y,\ x_1,\ y_1)=0\cdots②.\end{cases}$ $\because\ Q(x_1,\ y_1)$在曲线 $F(x,\ y)=0$ 上，$\therefore F(x_1,\ y_1)=0\cdots$③. 从①、②、③消去参数 x_1、y_1，即得变换后曲线的方程.

784. 曲线 $xy=1$ 绕原点旋转过多少角度时，曲线与直线 $x-y=2$ 相切.

［解］ 设曲线 $xy=1$ 上任一点 $Q(x_1,\ y_1)$ 绕原点旋转角 θ 到达 $P(x,y)$，则 $\begin{cases}x_1=x\cos\theta+y\sin\theta\\ y_1=-x\sin\theta+y\cos\theta.\end{cases}$ $\because\ Q(x_1,\ y_1)$在曲线 $xy=1$ 上，$\therefore\ x_1y_1=1$，

即
$$(x\cos\theta+y\sin\theta)(-x\sin\theta+y\cos\theta)=1\cdots①.$$

$\because$ 曲线①与直线 $x-y=2$ 相切，

$$\therefore\ [(y+2)\cos\theta+y\sin\theta][-(y+2)\sin\theta+y\cos\theta]=1,$$

即
$$y^2\cos 2\theta+2(\cos 2\theta-\sin 2\theta)y-2\sin 2\theta-1=0$$

有等根. $\therefore\ \Delta=4(\cos 2\theta-\sin 2\theta)^2+4\cos 2\theta(2\sin 2\theta+1)=0$,

即 $\cos 2\theta=-1$. $\therefore\ \theta=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$. 旋转变换后双曲线方程为 $xy=-1$，与直线 $x-y=2$ 相切于点$(1,\ -1)$.

785. 方程$x^2-\sqrt{3}(a+1)xy-by^2=1$表示的曲线在坐标轴按逆时针方向旋转$\frac{\pi}{6}$后，可用方程$bx'^2+ay'^2=1$表示. 求$a$、$b$.

［解一］ 当坐标轴按逆时针方向旋转$\frac{\pi}{6}$后，同一点在两个不同的坐标系中的坐标关系为：

$$x=x'\cos\frac{\pi}{6}-y'\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}x'-y'}{2},$$

$$y=x'\sin\frac{\pi}{6}+y'\cos\frac{\pi}{6}=\frac{x'+\sqrt{3}y'}{2}.$$

代入方程$x^2-\sqrt{3}(a+1)xy-by^2=1$，整理得

$$\frac{-3a-b}{4}x'^2-\frac{2\sqrt{3}(a+b+2)}{4}x'y'+\frac{3a-3b+4}{4}y'^2=1.$$

和方程$bx'^2+ay'^2=1$比较，得 $-3a-b=4b$，即$3a+5b=0\cdots$①；$a+b+2=0\cdots$②；$3a-3b+4=4a$，即$a+3b=4\cdots$③. 由②、③可得$a=-5$，$b=3$，且满足①式. $\therefore a=-5$，$b=3$.

［解二］ 根据转轴后方程系数的不变式，有$\begin{cases}1-b=a+b\\-4ab=3(a+1)^2+4b,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=-5\\b=3,\end{cases}$ 或$\begin{cases}a=-1\\b=1.\end{cases}$ 由题意可知，$a\neq-1$，$\therefore a=-5$，$b=3$.

786. 设双曲线$x^2-y^2=\lambda$关于直线$x-y=2$对称的曲线与直线$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$相切，求$\lambda$的值.

［分析］ 先求双曲线$x^2-y^2=\lambda$关于直线$x-y=2$对称的曲线方程，根据相切条件，可得λ的值.

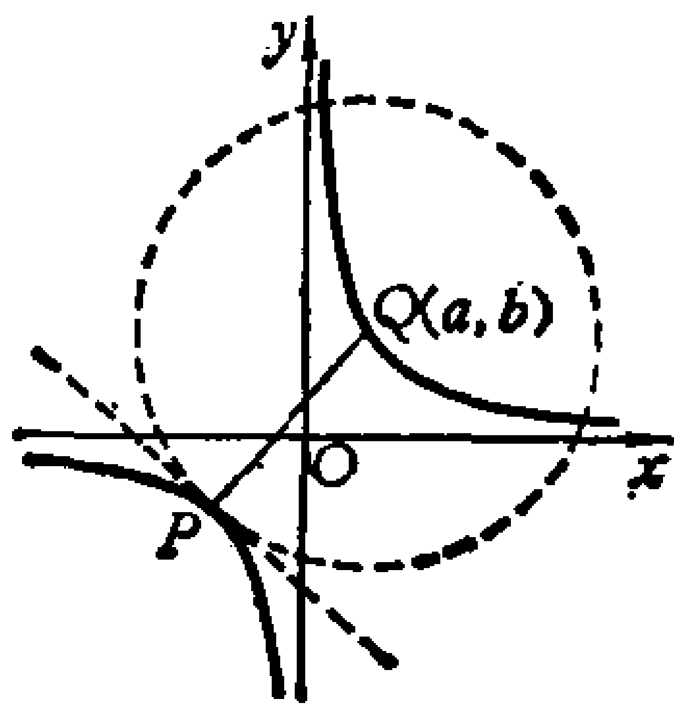
［解］ 设双曲线$x^2-y^2=\lambda$上任意一点$Q(x_1, y_1)$关于直线$x-y=2$的对称的点为$P(x, y)$，则$\frac{1}{2}(x+x_1)-\frac{1}{2}(y+y_1)=2\cdots$①；$\frac{y_1-y}{x_1-x}=-1$，即$x_1+y_1=x+y\cdots$②. $\because Q(x_1, y_1)$在双曲线$x^2-y^2=\lambda$上，$\therefore x_1^2-y_1^2=\lambda\cdots$③. 从①、②、③消去$x_1$、$y_1$，得双曲线$x^2-y^2=\lambda$关于直线$x-y=2$对称的曲线方程$(y+2)^2-(x-2)^2=\lambda\cdots$④. $\because$曲线④与直线$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$

相切，∴ $(y+2)^2-\left[3\left(1-\frac{y}{2}\right)-2\right]^2=\lambda$ 有等根，即 $5y^2-28y+4\lambda-12=0$ 的判别式 $\Delta=28^2-20(4\lambda-12)=0$. ∴ $\lambda=\frac{64}{5}$.

§7. 最大值、最小值

787. 求双曲线 $xy=1$ 在第一象限内一支上的一定点 $Q(a, b)$ 与它在第三象限内一支上的一动点 $P(x, y)$ 之间的最短距离（以 a 的解析式表示）.

［解］ 当以点 Q 为中心，$|QP|$ 为半径的圆与双曲线 $xy=1(x<0, y<0)$ 相切时，$|QP|$ 达到最小值. 此时过点 P 的双曲线 $xy=1(x<0, y<0)$ 的切线与 QP 垂直. 设切点 P 的坐标为 (x_1, y_1)，过 $P(x_1, y_1)$ 双曲线的切线方程为 $y_1x+x_1y=2$，故 $\frac{y_1-b}{x_1-a}\cdot\left(-\frac{y_1}{x_1}\right)=-1$.



且 $x_1y_1=1$, $ab=1$,

$$\therefore \quad \frac{\frac{1}{x_1}-\frac{1}{a}}{x_1-a}\cdot\frac{\frac{1}{x_1}}{x_1}=1,$$

即 $ax_1^3=-1$. ∴ $x_1=-a^{-\frac{1}{3}}$, $y_1=-a^{\frac{1}{3}}$.

$$|QP|^2=(x_1-a)^2+(y_1-b)^2$$

$$=(-a^{-\frac{1}{3}}-a)^2+(-a^{\frac{1}{3}}-a^{-1})^2=(a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{2}{3}})^3.$$

$$\therefore \quad |QP|_{\min}=(a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

788. 以曲线 $xy=a$ 与曲线 $y=x^2+x-a$ 的三交点为顶点的三角形面积，当 $a(0<a<1)$ 取何值时为最大？

［分析］ 求出两曲线的三交点坐标，就能写出三角形面积的解析表达式，再利用代数不等式处理即得解.

［解］ 解方程组 $\begin{cases}xy=a\cdots①\\ y=x^2+x-a\cdots②,\end{cases}$ 得三交点的坐标: $A(-1, -a)$、$B(\sqrt{a}, \sqrt{a})$、$C(-\sqrt{a}, -\sqrt{a})$. ∴ $\triangle ABC$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & -a & 1 \\ -\sqrt{a} & -\sqrt{a} & 1 \\ \sqrt{a} & \sqrt{a} & 1 \end{vmatrix}=\sqrt{a}(1-a).$$

$$\because \quad 0<a<1, \quad \therefore \quad 1-a>0.$$

$$\therefore \quad S^2=a(1-a)^2=\frac{1}{2}\cdot 2a(1-a)(1-a)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2a+1-a+1-a}{3}\right)^3=\frac{4}{27}.$$

$\therefore$ 当且仅当 $2a=1-a$, 即 $a=\frac{1}{3}$ 时, $S_{\max}=\frac{2}{9}\sqrt{3}$.

789. 求一双曲线 $xy=1$ 的切线, 使它被另一双曲线 $xy=\frac{3}{4}$ 所截得的线段长为最短.

[解] 设所求的切线方程为 $y=kx+b$, 代入 $xy=1$, 得 $kx^2+bx-1=0$. 令 $\varDelta=b^2-4k(-1)=0$, 解得 $k=-\frac{b^2}{4}$, 故切线方程为 $y=-\frac{b^2}{4}x+b$. 代入 $xy=\frac{3}{4}$, 得 $b^2x^2-4bx+3=0$, 求得交点为 $\left(\frac{3}{b}, \frac{b}{4}\right)$、$\left(\frac{1}{b}, \frac{3b}{4}\right)$, 则截得的线段长

$$l=\sqrt{\left(\frac{1}{b}-\frac{3}{b}\right)^2+\left(\frac{3b}{4}-\frac{b}{4}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}\geqslant\sqrt{2}.$$

当且仅当 $\left(\frac{2}{b}\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2$, 即 $b=\pm 2$ 时, l 取最小值 $\sqrt{2}$. 此时 $k=-1$, 故所求的切线方程为 $y=-x+2$, $y=-x-2$.

790. 在曲线 $\log_2 x+\log_2 y=1$ 上找一点 (x, y), 使 $x^2+y^2-2(x+y)$ 之值最小.

[解] $\log_2 x+\log_2 y=1$ 即 $xy=2(x>0, y>0)$. 此曲线为双曲线 $xy=2$ 在第一象限内的一支.

令
$$S=x^2+y^2-2(x+y)=(x+y)^2-2(x+y)-2xy$$
$$=(x+y)^2-2(x+y)-4=(x+y-1)^2-5.$$

$$\because \quad x>0, y>0, \quad \therefore \quad x+y\geqslant 2\sqrt{xy}=2\sqrt{2}.$$

$$\therefore \quad S\geqslant(2\sqrt{2}-1)^2-5=4-4\sqrt{2}.$$

$\therefore$ 当 $x=y=\sqrt{2}$ 时，$S_{\min}=4(1-\sqrt{2})$.

791. 在过动直线 $x+2y=p$ 与定直线 $2x-y=a$ 的交点(其中 $p\in(0,\ 3a]$)的等轴双曲线系 $x^2-y^2=\lambda$ 中，当 p 取何值时，λ 达到最大值与最小值?

[分析] 从双曲线系 $x^2-y^2=\lambda$ 过两直线的交点着手，建立 λ 与 p 的函数关系.

[解] 解方程组 $\begin{cases}x+2y=p\\2x-y=a,\end{cases}$ 得它们的交点坐标为 $Q\left(\dfrac{p+2a}{5},\dfrac{2p-a}{5}\right)$.

$\because$ 双曲线系 $x^2-y^2=\lambda$ 过点 Q,

$$\therefore\quad \lambda=x^2-y^2=\frac{-3p^2+8ap+3a^2}{25}$$

$$=\frac{-3\left(p-\dfrac{4}{3}a\right)^2+\dfrac{25}{3}a^2}{25},\qquad p\in(0,\ 3a].$$

当 $p=\dfrac{4}{3}a$ 时，$\lambda_{\max}=\dfrac{1}{3}a^2$. 又由 $0<p\leqslant 3a$,

得 $$-\frac{4}{3}a<p-\frac{4}{3}a\leqslant\frac{5}{3}a,\quad\therefore\quad \left|p-\frac{4}{3}a\right|\leqslant\frac{5}{3}a.$$

于是当 $p=3a$ 时，$\lambda_{\min}=0$.

§8. 其 它

792. 已知双曲线 C: $4x^2-9y^2-8x-18y-5-m=0(m>0)$，它的一准线方程为 $\sqrt{13}x=9+\sqrt{13}$，求 m 的值.

[解] 化简双曲线 C 的方程，得 $4(x-1)^2-9(y+1)^2=m$. $\because$ $m>0$, $\therefore$ 方程又可化为 $\dfrac{(x-1)^2}{\dfrac{m}{4}}-\dfrac{(y+1)^2}{\dfrac{m}{9}}=1$. 故其半实轴 $a=\sqrt{\dfrac{m}{4}}$, 半虚轴 $b=\sqrt{\dfrac{m}{9}}$, 而 $c^2=a^2+b^2=\dfrac{13m}{36}$. $\therefore$ 双曲线 C 的一准线方程为 $x-1=\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{3\sqrt{m}}{2\sqrt{13}}$, 即 $\sqrt{13}x=\dfrac{3\sqrt{m}}{2}+\sqrt{13}$. 另一准线方程 $\sqrt{13}x=-\dfrac{3\sqrt{m}}{2}+\sqrt{13}$,

显然不合题意. 将求得的准线方程和已知的准线方程比较,得 $\frac{3\sqrt{m}}{2}=9$,
$\therefore\ m=36$.

793. 已知双曲线 $\frac{x^2}{24\operatorname{tg}\alpha}-\frac{y^2}{16\operatorname{ctg}\alpha}=1$ （α为锐角）和圆 $(x-m)^2+y^2=r^2(r>0)$ 相切于点 $A(4\sqrt{3},4)$,求α、m、r的值.

[分析] 两曲线相切，在切点有公切线，分别写出两曲线在点 A 的切线,根据两直线重合的条件即得解.

[解] $\because$ 点 A 在双曲线上，$\therefore \frac{(4\sqrt{3})^2}{24\operatorname{tg}\alpha}-\frac{4^2}{16\operatorname{ctg}\alpha}=1$. 化简得 $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}\alpha-2=0$, 即 $(\operatorname{tg}\alpha+2)(\operatorname{tg}\alpha-1)=0$. $\therefore \operatorname{tg}\alpha=1$, 或 -2. $\because$ α为锐角, $\therefore\ \alpha=45°$. 于是双曲线方程为 $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{16}=1$. 它在点 A 的切线为 $\frac{4\sqrt{3}x}{24}-\frac{4y}{16}=1$, 即 $2\sqrt{3}x-3y=12\cdots$①. 而圆 $(x-m)^2+y^2=r^2$ 在点 A 的切线为 $(4\sqrt{3}-m)(x-m)+4y=r^2$, 即

$$(4\sqrt{3}-m)x+4y=r^2+(4\sqrt{3}-m)m\cdots②.$$

$\because$ 两曲线相切于点 A, 故直线 ① 和 ② 重合,

$$\therefore\quad \frac{4\sqrt{3}-m}{2\sqrt{3}}=\frac{4}{-3}=\frac{r^2+(4\sqrt{3}-m)m}{12}.$$

从而解得: $m=\frac{20}{3}\sqrt{3}$, $r^2=\frac{112}{3}$. $\because$ $r>0$, $\therefore$ $r=\frac{4}{3}\sqrt{21}$.

794. 已知双曲线方程为 $16x^2-9y^2+64x+18y-89=0$. 一个圆经过双曲线的两焦点,且与 x 轴交于两点,这两点间的距离为 8, 求此圆的方程.

[分析] 所求圆过双曲线的两焦点,而双曲线的两焦点关于虚轴成轴对称,故所求圆的圆心必在虚轴上,且半径长等于圆心到焦点的距离.

[解] 化已知双曲线方程为 $16(x+2)^2-9(y-1)^2=144$, 即

$$\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{16}=1,$$

故其半焦距 $c=\sqrt{9+16}=5$. $\because$ 所求圆过两焦点, $\therefore$ 圆心必在虚轴 $x=-2$ 上. 设圆心坐标为$(-2,\ b)$,则此圆方程可设为

$$(x+2)^2+(y-b)^2=5^2+(b-1)^2,$$

即 $$x^2+y^2+4x-2by+2b-22=0.$$

以 $y=0$ 代入，得 $$x^2+4x+2b-22=0.$$

令所求的圆与 x 轴的两交点的横坐标为 x_1、x_2，则

$$x_1+x_2=-4,\ x_1\cdot x_2=2b-22.$$

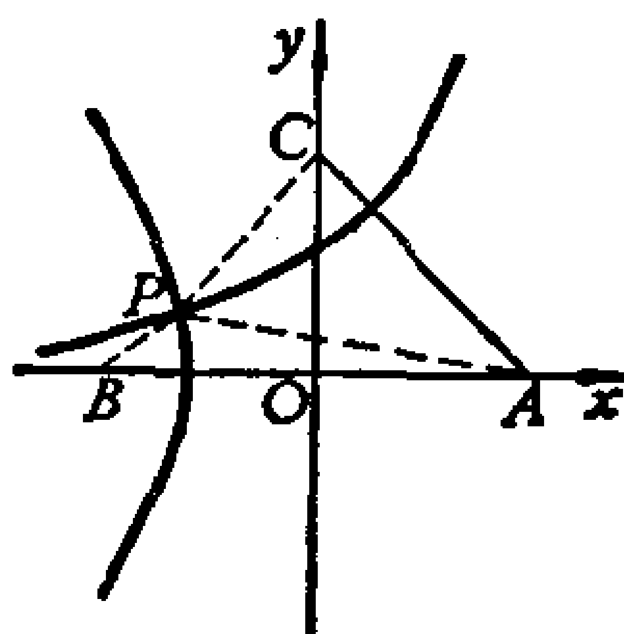
∵ 两交点的距离 $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=8$,

$$\therefore\ 16-4(2b-22)=64. \quad \therefore\ b=5.$$

故所求圆的方程为 $(x+2)^2+(y-5)^2=41$.

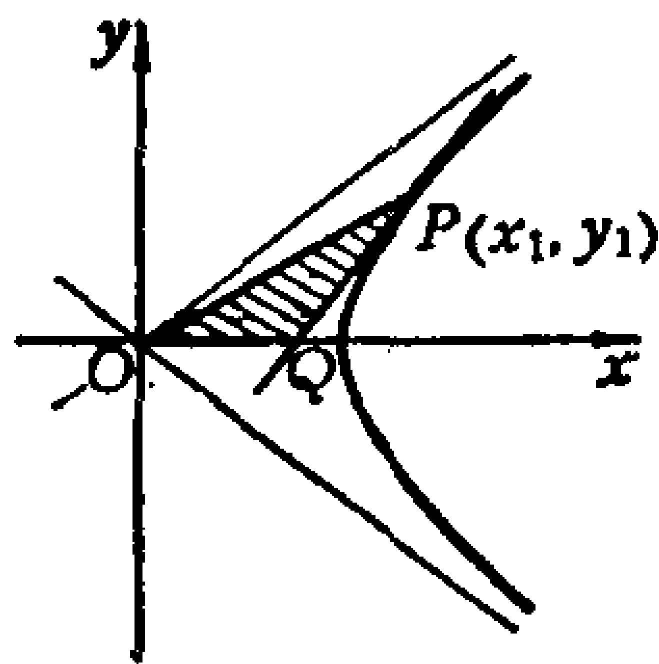
795. 三个观测站的坐标分别为 $A(a,0)$、$B(-a,0)$、$C(0,a)$，他们都测得敌人的炮声到达的时间，若 A、B 间的时间差为 t_1，A、C 间的时间差为 t_2，声速为 v，据此怎样测定敌人炮位的位置.

［解］ 设敌人炮位位于点 P，根据 A、B 间时间差为 t_1，可知点 P 应在以 A、B 为焦点，以 vt_1 为实轴长的双曲线上. 同理，根据 A、C 间时间差为 t_2，可知点 P 又在以 A、C 为焦点，实轴长为 vt_2 的双曲线上. ∴ 点 P 应在这两支双曲线的交点上，用作图方法即可求得点 P.



［说明］ 实际应用时，因为炮位离观测站较远，故炮位所在的双曲线常用它的渐近线代替，以两双曲线的渐近线的交点来测定炮位位置.

796. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 上一点 $P(x_1,y_1)$ $(x_1>0,\ y_1>0)$，以 P 为切点的切线与 x 轴的交点为 Q，原点为 O. (1)求以 x_1 表示的 $\triangle OPQ$ 的面积；(2) $x_1\to\infty$ 时，求 $\triangle OPQ$ 面积的极限.



［解］ (1) 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 在点 $P(x_1,\ y_1)$ 的切线方程为 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$，它与 x 轴的交点坐标为 $\left(\frac{a^2}{x_1},\ 0\right)$. ∵ 点 P

在双曲线上,

$$\therefore\ \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,\ \ y_1=\frac{b}{a}\sqrt{x_1^2-a^2}>0.$$

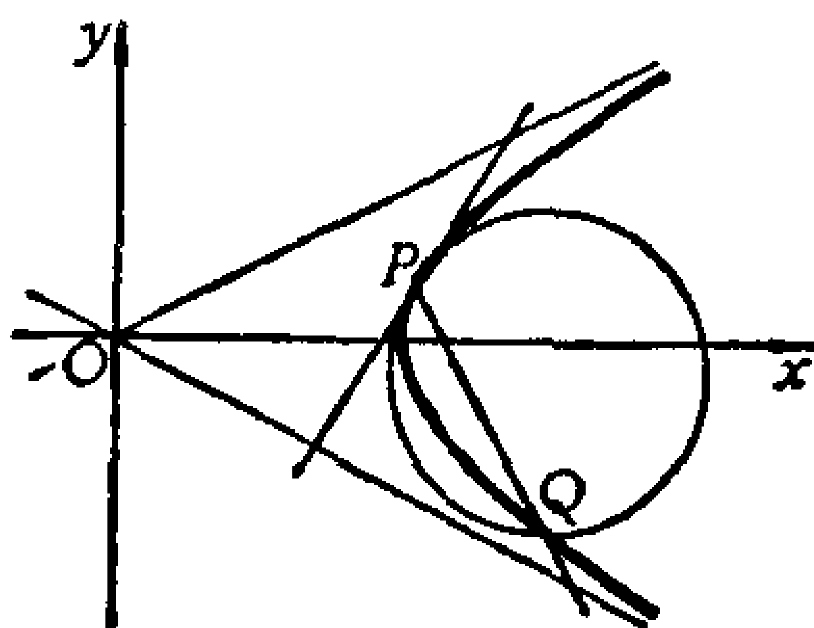
$$\therefore\ S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}\ |OQ|\cdot y_1=\frac{ab}{2x_1}\sqrt{x_1^2-a^2}.$$

(2) $$\because\ S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}ab\sqrt{1-\left(\frac{a}{x_1}\right)^2}\quad (x_1>0),$$

$$\therefore\ \lim_{x_1\to\infty}S_{\triangle OPQ}=\frac{ab}{2}\lim_{x_1\to\infty}\sqrt{1-\left(\frac{a}{x_1}\right)^2}=\frac{1}{2}ab.$$

797. 设圆 C 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的四个交点中至少有三个重合于点 $P(x_1, y_1)$, 求圆 C 的方程.

[分析] 设圆 C 与双曲线的四个交点为 P、P_1、P_2、Q, 当 P_1、P_2 与 P 重合时, 直线 PP_1、PP_2 均与过点 P 的切线重合, 直线 P_1Q 与 PQ 重合, 故圆 C 包括在过 P、P_1、P_2、Q 四点的二次曲线系中. 应用提要 (8.72) 可得此二次曲线系方程. 根据一般二次方程的曲线为圆的充要条件, 即得圆 C 的方程.



[解] 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上过点 $P(x_1, y_1)$ 的切线方程为 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$. 设直线 PQ 的倾角为 θ, 其方程为

$$(x-x_1)\sin\theta-(y-y_1)\cos\theta=0.$$

过圆 C 与双曲线四个交点(其中三点重合)的二次曲线系方程为:

$$(b^2x_1x-a^2y_1y-a^2b^2)(x\sin\theta-y\cos\theta-x_1\sin\theta+y_1\cos\theta)$$
$$=\lambda(b^2x^2-a^2y^2-a^2b^2)\cdots①.$$

方程 ① 表示圆的充要条件是 x^2、y^2 项的系数相等, xy 项的系数等于零, 故有

$$b^2x_1\sin\theta-\lambda b^2=a^2y_1\cos\theta+\lambda a^2\cdots②$$

和 $b^2x_1\cos\theta+a^2y_1\sin\theta=0$, 即

$$\frac{\cos\theta}{-a^2y_1}=\frac{\sin\theta}{b^2x_1}=\frac{1}{\pm\sqrt{b^4x_1^2+a^4y_1^2}}\cdots③.$$

以 ③ 代入 ②, 得

$\lambda=\dfrac{\pm\sqrt{b^4x_1^2+a^4y_1^2}}{a^2+b^2}$. 以 λ 之值与 ③ 代入 ①, 得

$$(a^2+b^2)(b^2x_1x-a^2y_1y-a^2b^2)(b^2x_1x+a^2y_1y-b^2x_1^2-a^2y_1^2)$$
$$=(b^4x_1^2+a^4y_1^2)(b^2x^2-a^2y^2-a^2b^2),$$
$$\because\quad b^2x_1^2-a^2y_1^2=a^2b^2,$$
$$\therefore\quad a^4b^4(x^2+y^2)-2b^4(a^2+b^2)x_1^3x+2a^4(a^2+b^2)y_1^3y$$
$$+a^4b^4(3x_1^2+3y_1^2-2a^2+2b^2)=0,$$

即 $x^2+y^2-\dfrac{2(a^2+b^2)x_1^3}{a^4}x+\dfrac{2(a^2+b^2)y_1^3}{b^4}y+(3x_1^2+3y_1^2-2a^2+2b^2)=0$.

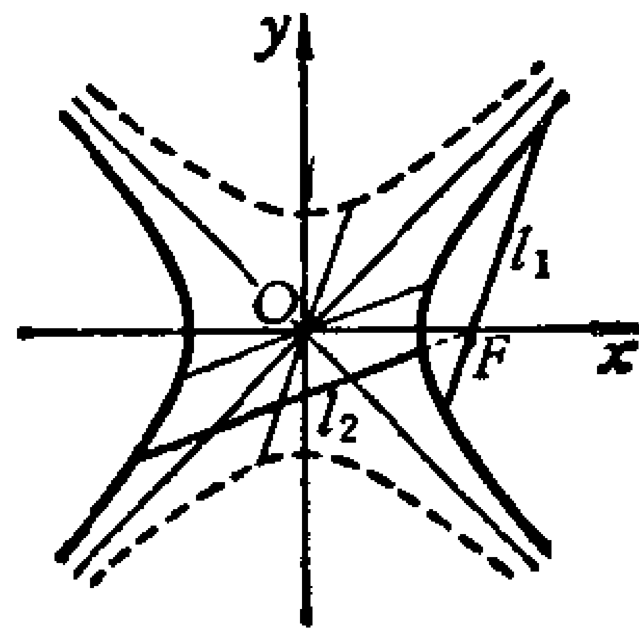
此即圆 C 的方程.

[说明] 此圆称为双曲线在点 $P(x_1, y_1)$ 的密切圆. 本题的另一解法参见第 872 题. 当点 P 为 $(a, 0)$ 或 $(-a, 0)$ 时, 直线 PQ 与过点 P 的切线重合, 因而点 Q 与点 P 也重合, 圆 C 的方程为 $x^2+y^2\pm2ae^2x+a^2+2b^2=0$.

§9. 证 明 题

798. 求证: 等轴双曲线中通过焦点且平行于一对共轭直径的两条弦彼此相等.

[分析] 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 两共轭直径的斜率为 m 与 m', 则 $m\cdot m'=\dfrac{b^2}{a^2}$, 对等轴双曲线即 $m\cdot m'=1$. 若设 $m=\operatorname{tg}\alpha$, $m'=\operatorname{tg}\beta$, 则 $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=1$, $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\beta$, $\therefore\ \alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$. 故可将通过等轴双曲线的焦点且倾角为 α(或 β)的弦的参数方程 $\begin{cases}x=c+t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$ 与双曲线方程联立而求得两弦的长.



[证] 设等轴双曲线的方程为 $x^2-y^2=a^2$, 过焦点分别与两共轭直径平行的两弦 l_1、l_2 的倾角为 α、β, 则 l_1 方程为

$$\begin{cases}x=\sqrt{2}a+t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}\cdots①.$$

将 ① 代入双曲线方程, 得 $t^2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+2\sqrt{2}at\cos\alpha+a^2=0$.

l_1 的长度$=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}$

$$=\sqrt{\frac{8a^2\cos^2\alpha}{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)^2}-\frac{4a^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}}=\sqrt{\frac{4a^2}{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)^2}}$$

$$=\left|\frac{2a}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}\right|=\left|\frac{2a}{\cos 2\alpha}\right|.$$

同理可证　　l_2 的长度$=\left|\frac{2a}{\cos 2\beta}\right|$. 而 $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$,

$$\therefore\ l_2 \text{ 的长度}=\left|\frac{2a}{\cos 2\beta}\right|=\left|\frac{2a}{\cos(\pi-2\alpha)}\right|=\left|\frac{2a}{\cos 2\alpha}\right|.$$

故 l_2 的长度和 l_1 的长度相等.

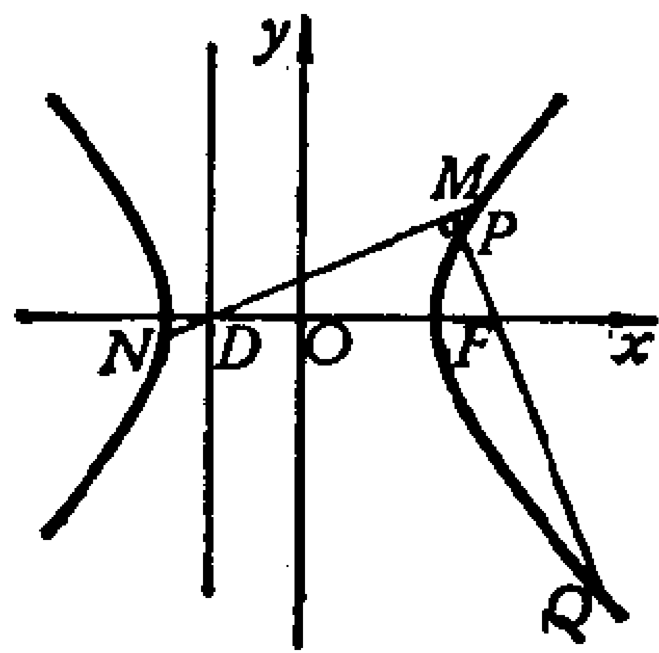
799. 求证：等轴双曲线两互相垂直的焦点弦的长度相等.

［证］ 设等轴双曲线的方程为 $x^2-y^2=a^2$，一条焦点弦 l_1 的倾角为 α，则另一条焦点弦 l_2 的倾角为 $\frac{\pi}{2}+\alpha$. 根据上题结论，l_1 的长度$=\left|\frac{2a}{\cos 2\alpha}\right|$，

$$l_2 \text{ 的长度}=\left|\frac{2a}{\cos 2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\right|=\left|\frac{2a}{-\cos 2\alpha}\right|.$$

故 l_1 的长度和 l_2 的长度相等.

800. 双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 的一条准线与实轴交于点 D，过 D 引一直线和双曲线交于 M、N 两点. 又过一个焦点 F 引一垂直于 MN 的直线和双曲线交于 P、Q 两点. 求证：$|FP|\cdot|FQ|=2|DM|\cdot|DN|$.



［分析］ 要计算 $|FP|\cdot|FQ|$ 与 $|DM|\cdot|DN|$ 这两个量，因为 $MN\perp PQ$，故采用 MN 与 PQ 的直线参数方程为宜.

［证］ ∵ 双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 的离心率为 $\sqrt{2}$，

∴ D、F 的坐标分别为$\left(-\frac{a}{\sqrt{2}},\ 0\right)$和$(\sqrt{2}a, 0)$.

设 MN 的倾角为 θ，则 PQ 的倾角为 $\theta+\frac{\pi}{2}$. 直线 MN 与 PQ 的参数方程为：$\begin{cases}x=-\frac{a}{\sqrt{2}}+t\cos\theta\\ y=t\sin\theta\end{cases}$ …①,

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}a+t\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}a-t\sin\theta \\ y=t\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=t\cos\theta \end{cases}\cdots②.$$

分别代入双曲线方程得:

$$\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}+t\cos\theta\right)^2-(t\sin\theta)^2=a^2,$$

$$(\sqrt{2}a-t\sin\theta)^2-(t\cos\theta)^2=a^2;$$

即

$$t^2\cos 2\theta-\sqrt{2}at\cos\theta-\frac{1}{2}a^2=0\cdots③,$$

$$t^2\cos 2\theta+2\sqrt{2}\ at\sin\theta-a^2=0\cdots④.$$

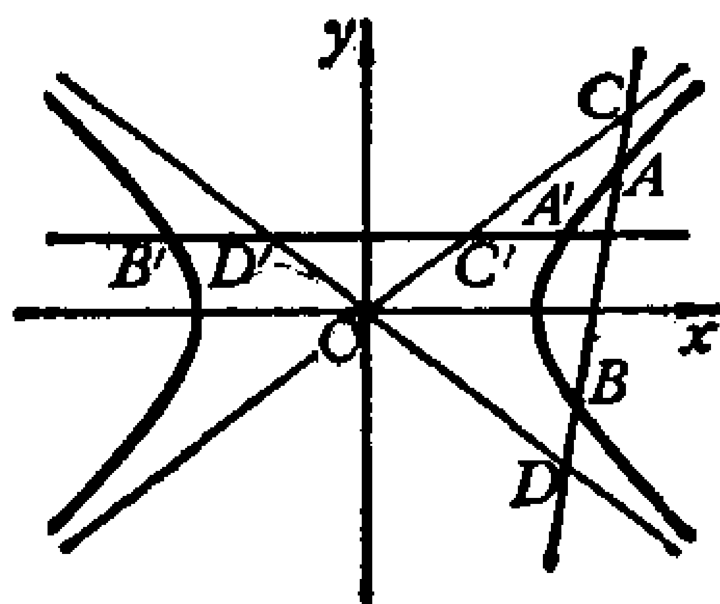
方程③的两根为 $t_1=DM$, $t_2=DN$, $\therefore |DM|\cdot|DN|=|t_1t_2|=\dfrac{a^2}{2|\cos 2\theta|}$.

方程④的两根为 $t_3=FP$, $t_4=FQ$, $\therefore |FP|\cdot|FQ|=|t_3t_4|=\dfrac{a^2}{|\cos 2\theta|}$.

$$\therefore\ |FP|\cdot|FQ|=2|DM|\cdot|DN|.$$

801．一直线交双曲线于 A、B 两点，交双曲线的渐近线于 C、D 两点．求证夹于渐近线和双曲线间的线段 AC 和 BD 相等．

［分析］ 只要证明 AB 的中点与 CD 的中点重合即可.



［证］ 设双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 则其渐近线方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$. 又设直线和 x 轴交于$(m, 0)$, 倾角为 θ, 则直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=m+t\cos\theta \\ y=t\sin\theta \end{cases}\cdots①.$$

将①式分别代入双曲线方程和渐近线方程，并化简得

$$(b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta)t^2+2b^2mt\cos\theta+b^2m^2-a^2b^2=0\cdots②,$$

$$(b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta)t^2+2b^2mt\cos\theta+b^2m^2=0\cdots③.$$

在直线与双曲线、渐近线分别有两实交点时，由方程②、③可以求出线段 AB 中点对应的参数值

$$t_1=-\frac{b^2m\cos\theta}{b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta};$$

线段 CD 中点对应的参数值

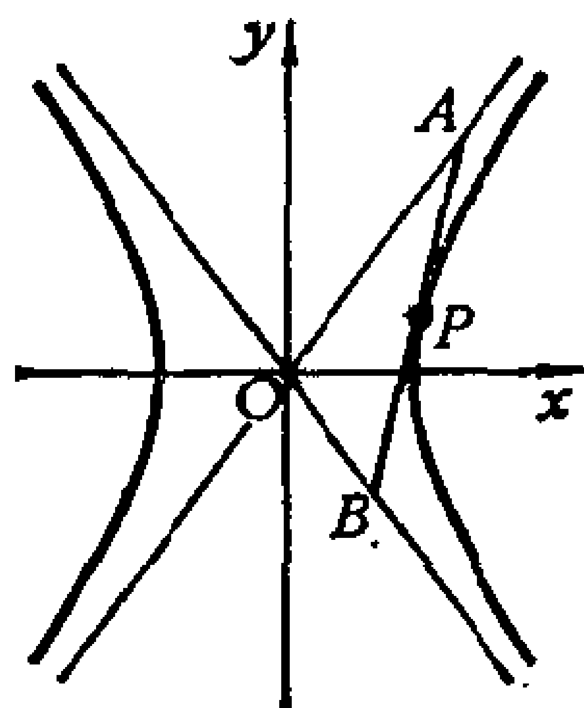
$$t_2=-\frac{b^2m\cos\theta}{b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta}. \quad t_1=t_2,$$

即线段 AB 的中点和线段 CD 的中点重合，故 $|AC|=|BD|$. 若直线和 x 轴没有交点，则直线必和 x 轴平行. 根据双曲线的对称性，上述结论显然成立.

［说明］ 有关直线与二次曲线的关系，一般可用直线参数方程代入二次曲线方程，然后利用韦达定理和判别式，推究所得关于 t 的二次方程.

802. **过双曲线上任一点 P 的切线与双曲线两渐近线交于 A、B 两点，求证点 P 是线段 AB 的中点.**

［证］ 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，两渐近线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$，双曲线上任一点 P 的坐标为 (x_1, y_1)，则过点 P 的切线方程为 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$. 切线与两渐近线的交点坐标是



$$\begin{cases}\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0\end{cases}$$

的解，消去 y，并整理得 $(b^2x_1^2-a^2y_1^2)x^2-2a^2b^2x_1x+a^4b^2=0$，

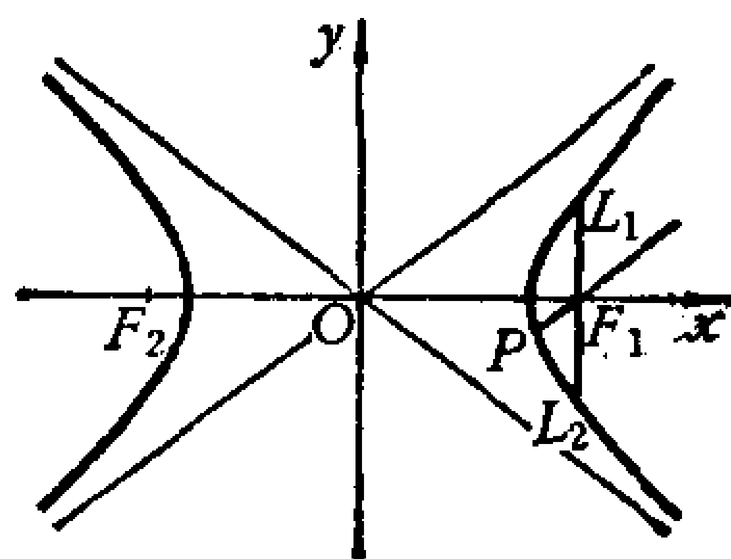
$$a^2b^2x^2-2a^2b^2x_1x+a^4b^2=0, \quad 即 \quad x^2-2x_1x+a^2=0.$$

根据韦达定理，线段 AB 的中点横坐标 $x=x_1$，代入切线方程得 $y=y_1$. 所以线段 AB 的中点坐标为 (x_1, y_1)，和点 P 坐标相同，亦即点 P 是线段 AB 的中点.

803. **设过双曲线焦点而与渐近线平行的直线交双曲线于点 P. 求证点 P 的焦半径长等于双曲线通径长的 $\frac{1}{4}$.**

［证］ 设双曲线方程是 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，则双曲线通径 $|L_1L_2|=\frac{2b^2}{a}$. 过

右焦点 $F_1(c,\ 0)$ 和渐近线 $ay-bx=0$ 平行的直线方程为 $ay-bx+bc=0$. 设它与双曲线交点坐标为 $P(x_1,y_1)$，解方程组



$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ ay-bx+bc=0,\end{cases}$$

得 $x_1=\dfrac{c^2+a^2}{2c}$. 故点 P 的焦半径

$$|PF_1|=|ex_1-a|=\left|\frac{c}{a}\cdot\frac{c^2+a^2}{2c}-a\right|=\left|\frac{c^2+a^2-2a^2}{2a}\right|$$
$$=\left|\frac{c^2-a^2}{2a}\right|=\frac{b^2}{2a}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2b^2}{a}.$$

即
$$|PF_1|=\frac{1}{4}|L_1L_2|.$$

[说明] 过点 $F_1(c,\ 0)$ 作和另一渐近线 $ay+bx=0$ 平行的直线，或过左焦点 $F_2(-c,\ 0)$ 作和两渐近线平行的直线，都有相同的结论.

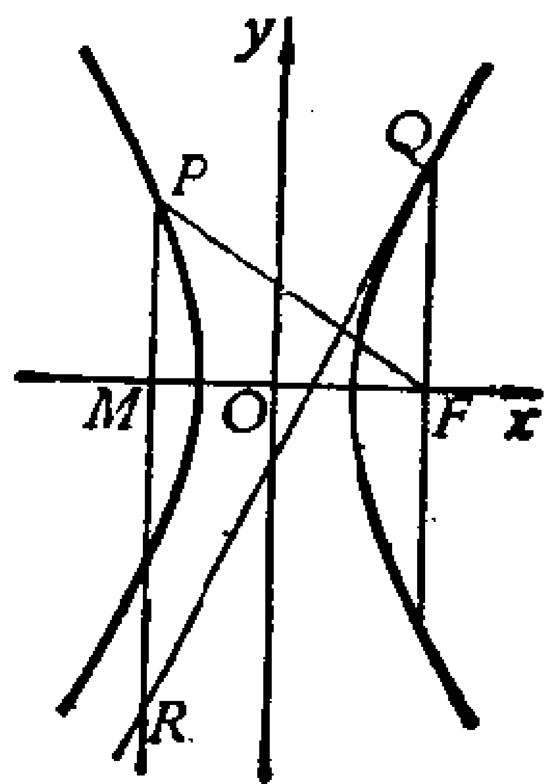
804. 求证：等轴双曲线上任一点到中心的距离，是它到两焦点距离的比例中项.

[证] 设等轴双曲线的方程为 $x^2-y^2=a^2$，双曲线上任一点 P 的坐标为 $(x_1,\ y_1)$，则 P 到中心 O 的距离 $|PO|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$. 等轴双曲线的离心率 $e=\sqrt{2}$，故点 P 到两焦点距离分别为 $|\sqrt{2}x_1+a|$ 和 $|\sqrt{2}x_1-a|$.

$$\therefore\quad |\sqrt{2}x_1+a|\cdot|\sqrt{2}x_1-a|=|2x_1^2-a^2|=|x_1^2-a^2+x_1^2|$$
$$=|y_1^2+x_1^2|=x_1^2+y_1^2=|PO|^2.$$

即得证.

805. 已知双曲线中过焦点 F 的通径上端点为 Q，点 P 为双曲线上任一点，点 P 在实轴上的射影为点 M，过点 Q 作双曲线的切线与直线 PM 交于点 R. 求证：$|MR|=|FP|$.



[分析] 由于 F、Q 的位置已知，关键为如何从点 P 坐标确定点 R 的坐标. 从过点 Q 的切线方程与直线 MP 的方程可得点 R 的坐标，从而可证 $|MR|=|FP|$.

[证] 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，焦点 F 坐标为 $F(c,\ 0)$，则通径上端点 Q 的坐标为$\left(c,\ \frac{b^2}{a}\right)$. 过点 Q 的切线 QR 方程为

$$\frac{cx}{a^2}-\frac{\frac{b^2}{a}y}{b^2}=1,$$

即
$$cx-ay=a^2\cdots①.$$

设点 P 坐标为 $(x_1,\ y_1)$，则点 M 坐标为 $(x_1,\ 0)$，直线 PM 方程为

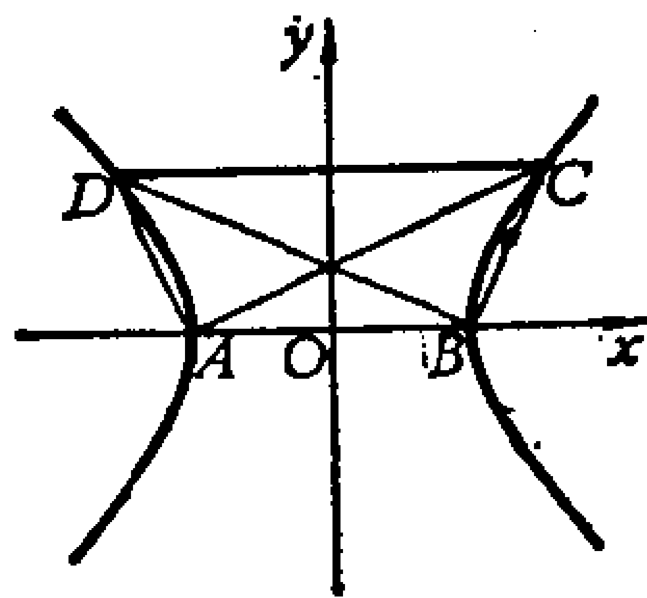
$$x=x_1\cdots②.$$

解①、②得点 R 的坐标为$\left(x_1,\ \frac{c}{a}x_1-a\right)$.

$$\therefore\quad |MR|=\left|\frac{c}{a}x_1-a\right|=|ex_1-a|,$$

而
$$|FP|=|ex_1-a|,\quad \therefore\quad |MR|=|FP|.$$

806. 求证：等轴双曲线平行于实轴的弦在两顶点所张之角均为直角.

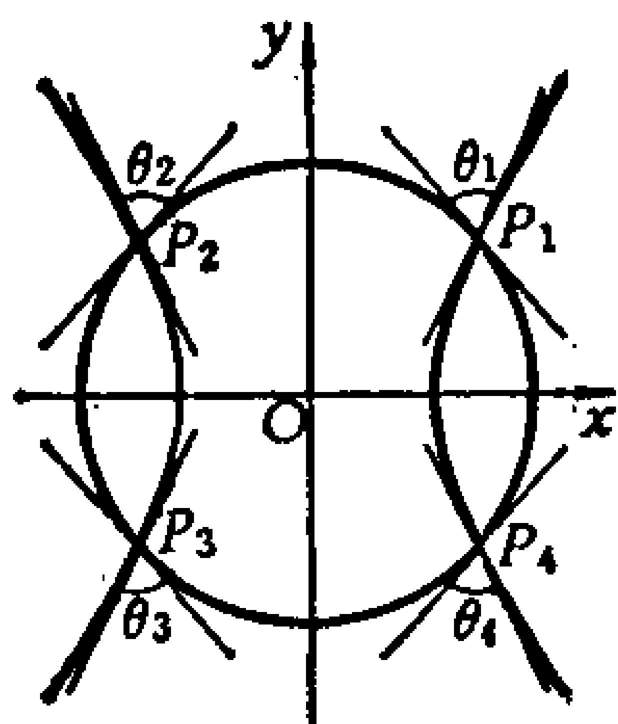


[证] 设等轴双曲线的方程是 $x^2-y^2=a^2$，DC 为平行于实轴的弦，点 C 坐标为 $(x_1,\ y_1)$，则点 D 坐标为 $(-x_1, y_1)$. 两顶点 A、B 坐标为 $(-a,\ 0)$、$(a,\ 0)$，直线 CA 的斜率 $k_1=\frac{y_1}{x_1+a}$，直线 DA 的斜率 $k_2=\frac{y_1}{-x_1+a}$，$k_1\cdot k_2=\frac{y_1^2}{a^2-x_1^2}$. ∵ 点 C 在双曲线上，$\therefore x_1^2-y_1^2=a^2$，代入上式得 $k_1\cdot k_2=\frac{y_1^2}{-y_1^2}=-1$. ∴ 直线 $CA\perp DA$，即 $\angle CAD=90°$. 同理可证 $\angle CBD=90°$.

807. 求证：过圆 $x^2+y^2=r^2$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(r>a)$ 的四个交点中任一交点处的两切线，所夹的锐角相等.

[证] 设圆与双曲线的四个交点为 P_1、P_2、P_3、P_4，点 P_1 的坐标为 $P_1(x_0,\ y_0)$. 根据对称性，点 P_2、P_3、P_4 的坐标分别为 $P_2(-x_0,\ y_0)$、$P_3(-x_0,\ -y_0)$、$P_4(x_0,\ -y_0)$. 过点 P_1 圆的切线方程是 $x_0x+y_0y=r^2$，双

曲线的切线方程是 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$. 设该点圆的切线和双曲线的切线所夹锐角为 θ_1, 则



$$\operatorname{tg}\theta_1=\left|\frac{\frac{b^2x_0}{a^2y_0}+\frac{x_0}{y_0}}{1-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\cdot\frac{x_0}{y_0}}\right|=\left|\frac{b^2x_0y_0+a^2x_0y_0}{a^2y_0^2-b^2x_0^2}\right|$$

$$=\left|\frac{x_0y_0(a^2+b^2)}{-a^2b^2}\right|.$$

过点 P_2 圆的切线方程是 $-x_0x+y_0y=r^2$, 双曲线的切线方程是 $\frac{-x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$. 设该点双曲线的切线和圆的切线所夹锐角为 θ_2, 则

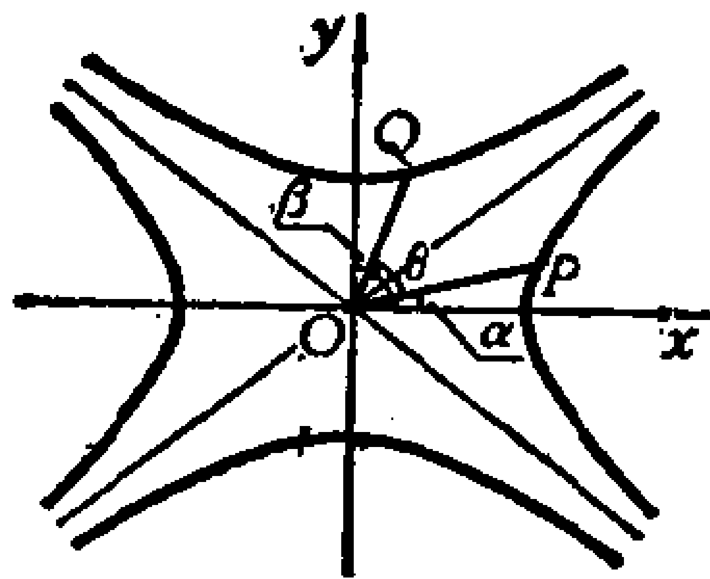
$$\operatorname{tg}\theta_2=\left|\frac{\frac{x_0}{y_0}+\frac{b^2x_0}{a^2y_0}}{1-\frac{b^2x_0^2}{a^2y_0^2}}\right|=\left|\frac{a^2x_0y_0+b^2x_0y_0}{a^2y_0^2-b^2x_0^2}\right|=\left|\frac{x_0y_0(a^2+b^2)}{-a^2b^2}\right|.$$

∵ $\operatorname{tg}\theta_1=\operatorname{tg}\theta_2$, 且 θ_1、θ_2 均为锐角, ∴ $\theta_1=\theta_2$.

同理可证 $\theta_1=\theta_2=\theta_3=\theta_4$.

808. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, 半直径 a' 和它的共轭半直径 b' 所成的角为 θ, 求证: $\sin\theta=\frac{ab}{a'b'}$.

[证] 设半直径为 OP, 其共轭半直径为 OQ, 点 P 的坐标为 (x_1, y_1), 则点 Q 的坐标为 $\left(\frac{a}{b}y_1, \frac{b}{a}x_1\right)$. 又设直线 OP 倾角为 α, 直线 OQ 倾角为 β, 则



$$\sin\alpha=\frac{y_1}{a'},\quad \cos\alpha=\frac{x_1}{a'};$$

$$\sin\beta=\frac{bx_1}{ab'},\quad \cos\beta=\frac{ay_1}{bb'}.$$

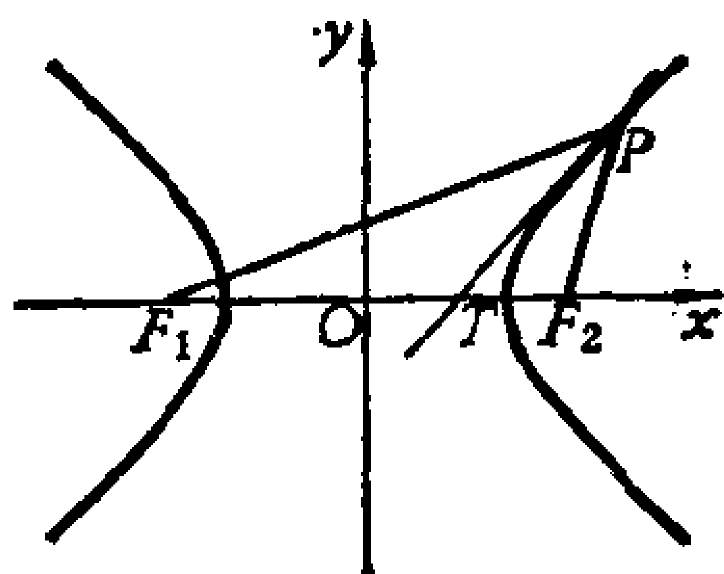
$$\therefore\quad \sin\theta=\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$$

$$=\frac{bx_1}{ab'}\cdot\frac{x_1}{a'}-\frac{ay_1}{bb'}\cdot\frac{y_1}{a'}=\frac{b^2x_1^2-a^2y_1^2}{aa'bb'}$$

$$=\frac{a^2b^2}{aa'bb'}=\frac{ab}{a'b'}.$$

809. 求证：双曲线上任意一点的切线，平分该点两焦半径的夹角.

［分析］ 如图，要证明 PT 平分 $\angle F_1PF_2$，只要证明 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|F_1T|}{|F_2T|}$.



［证］ 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$P(x_1,y_1)$ 为双曲线上一点. 过点 P 的切线交 x 轴于 T，F_1、F_2 分别是左、右焦点，则 $|PF_1|=|ex_1+a|$，$|PF_2|=|ex_1-a|$. 过点 P 的切线方程是 $b^2x_1x-a^2y_1y=a^2b^2$，切线 PT 和 x 轴交点 T 的坐标为 $\left(\frac{a^2}{x_1},\ 0\right)$. $\therefore\ |F_1T|=\left|c+\frac{a^2}{x_1}\right|$，$|F_2T|=\left|c-\frac{a^2}{x_1}\right|$.

$$\frac{|F_1T|}{|F_2T|}=\frac{\left|c+\frac{a^2}{x_1}\right|}{\left|c-\frac{a^2}{x_1}\right|}=\frac{|cx_1+a^2|}{|cx_1-a^2|},\quad \frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|ex_1+a|}{|ex_1-a|}=\frac{|cx_1+a^2|}{|cx_1-a^2|},$$

$\therefore\ \frac{|F_1T|}{|F_2T|}=\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$. 即切线 PT 平分两焦半径的夹角 $\angle F_1PF_2$.

810. 设圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 与等轴双曲线 $\begin{cases}x=ct\\ y=\frac{c}{t}\end{cases}$ (t 是参数)有四个交点，交点坐标为 $\left(ct_i,\ \frac{c}{t_i}\right)$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$. 求证：(1) $t_1t_2t_3t_4=1$；(2) 四个交点的平均中心(其坐标为各点坐标的算术平均数)平分双曲线和圆的中心连线.

［分析］ 将双曲线的参数方程代入圆方程后得关于 t 的四次方程，再用韦达定理可证之.

［证］ (1) 双曲线参数方程 $\begin{cases}x=ct\\ y=\frac{c}{t}\end{cases}$ 代入圆方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，消去 x、y，得 $c^2t^4+cDt^3+Ft^2+cEt+c^2=0$. 根据韦达定理即得 $t_1t_2t_3t_4=1$.

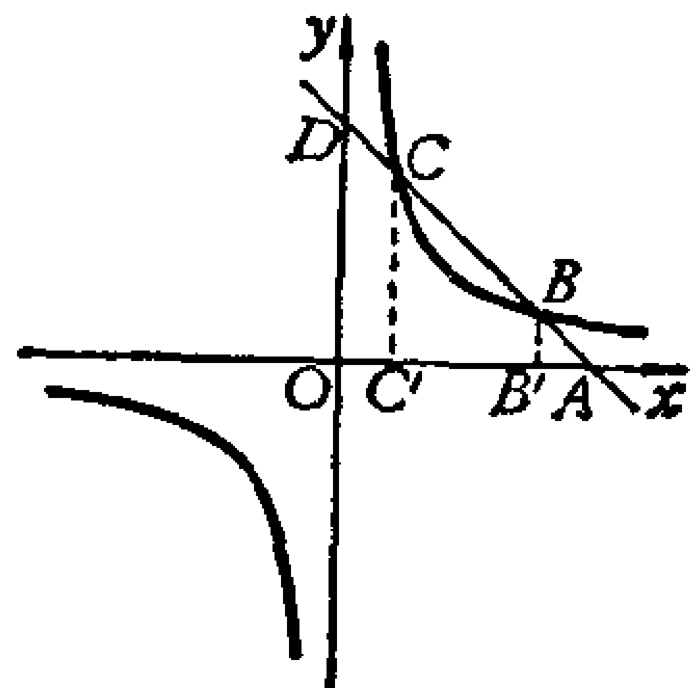
(2) 圆和双曲线的四交点坐标为 $\left(ct_i,\ \frac{c}{t_i}\right)$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$. 设平均中心

的坐标为(x, y),则 $x=\frac{c}{4}(t_1+t_2+t_3+t_4)=\frac{c}{4}\left(-\frac{D}{c}\right)=-\frac{D}{4}$,

$$y=\frac{c}{4}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\frac{1}{t_4}\right)=\frac{c}{4}\cdot\left(-\frac{E}{c}\right)=-\frac{E}{4},$$

即平均中心坐标为$\left(-\frac{D}{4},\ -\frac{E}{4}\right)$. 而双曲线和圆的中心坐标分别是$(0, 0)$和$\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2}\right)$. 连心线中点坐标为$\left(-\frac{D}{4},\ -\frac{E}{4}\right)$, 和平均中心坐标相同. 所以平均中心平分双曲线和圆的中心连线.

811. 已知双曲线 S: $xy=1$. 通过点 $A(a, 0)$ $(a>0)$, 作一条斜率为 $m(m<0)$ 的直线交 S 于 B、C 两点, 又交 y 轴于 D 点, 这些点的顺序为 A、B、C、D. (1) 证明 $|AB|=|CD|$; (2) 若 $|AB|=|BC|=|CD|$, 试把m用 a 表示出来, 并证明 $\triangle OAD$ 的面积是与 a 无关的一个定值.



[解] (1) 直线 AD 的方程为 $y=m(x-a)\cdots$①, 代入曲线 S 的方程, 并整理得 $mx^2-amx-1=0$. 因直线 AD 和曲线 S 相交, 故上述方程有两实根 x_1、x_2, 且 $x_1+x_2=a\cdots$②. $x_1\cdot x_2=-\frac{1}{m}\cdots$③. 设 $x_1>x_2$, 由题意可知 x_1 即点 B 的横坐标, x_2 即点 C 的横坐标. 若点 B'、C' 分别为点 B、C 在 x 轴上的射影, 则点 B' 的坐标为$(x_1, 0)$, 点 C' 的坐标为$(x_2, 0)$. 而 $|AB'|=a-x_1$, $|C'O|=x_2$. 由②得 $a-x_1=x_2$, $\therefore$ $|AB'|=|C'O|$, $|AB|=|CD|$.

(2) $\because$ $|BC|=|CD|$, $\therefore$ $|B'C'|=|C'O|$, 即 $x_1-x_2=x_2$, $\therefore$ $x_1=2x_2$. 由②得 $3x_2=a\cdots$④. 由③得 $2x_2^2=-\frac{1}{m}\cdots$⑤. 由④、⑤消去$x_2$, 即得 $m=-\frac{9}{2a^2}\cdots$⑥.

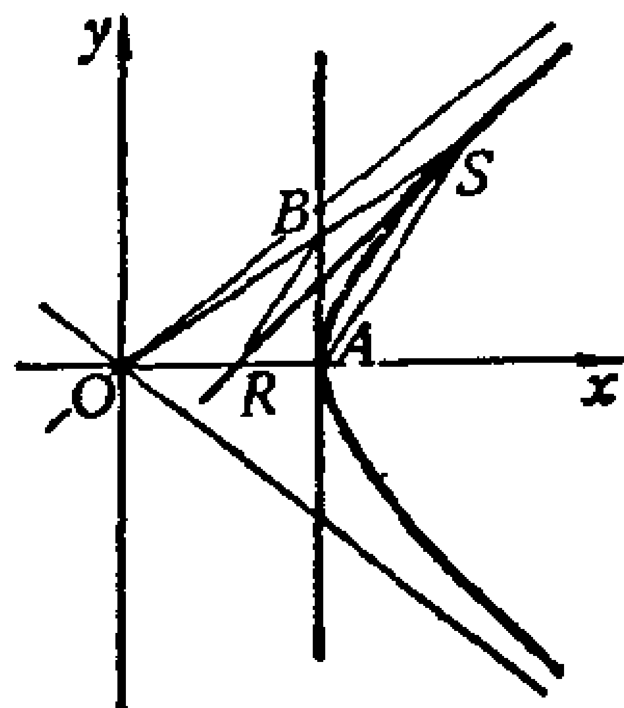
当 $x=0$ 时, 由 ① 求得点 D 的纵坐标为 $-am$. 故

$$S_{\triangle OAD}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OD|=\frac{1}{2}a(-am)=-\frac{1}{2}a^2m.$$

以 ⑥ 式代入, 得 $S_{\triangle OAD}=-\frac{1}{2}a^2\left(-\frac{9}{2a^2}\right)=\frac{9}{4}$.

$\therefore$ $\triangle OAD$ 的面积是与 a 无关的一个定值.

812. 设S为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上异于顶点A的任一点，AB、SR为切线，AB与OS交于点B，SR交实轴于点R. 求证$RB/\!/AS$.



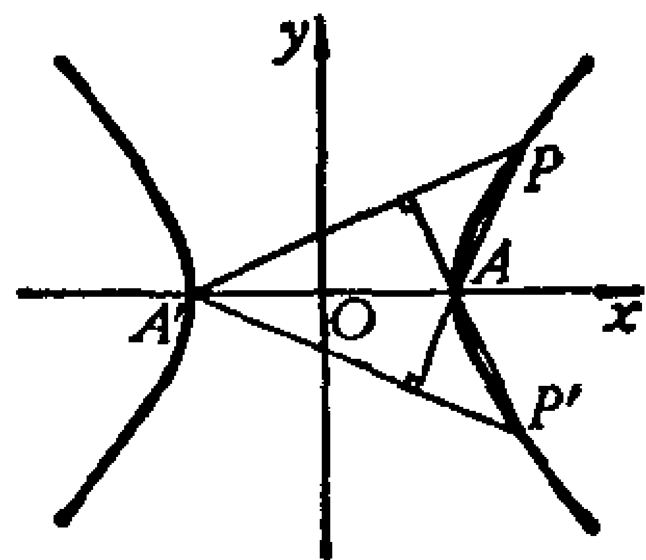
［证］ 设点S的坐标为(x_1, y_1)，显然$x_1\neq a$，过点S的切线方程为 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$，它与实轴交点的坐标为 $R\left(\frac{a^2}{x_1}, 0\right)$. 过点$A(a, 0)$的切线为$x=a$，$OS$的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1}x$，∴ 点B的坐标为 $\left(a, \frac{ay_1}{x_1}\right)$. 故$AS$的斜率 $k_{AS}=\frac{y_1}{x_1-a}$，RB的斜率

$$k_{RB}=\frac{y_1}{x_1}a\Big/\left(a-\frac{a^2}{x_1}\right)=\frac{y_1}{x_1-a}. \quad \therefore \quad RB/\!/AS.$$

813. 在等轴双曲线上一点张直角之弦平行于过此点的法线.

［证］ 设等轴双曲线的参数方程为 $\begin{cases}x=ct\\ y=\frac{c}{t}\end{cases}$，点$P$的坐标为 $P\left(ct, \frac{c}{t}\right)$，在点$P$张直角之弦的两端$Q_1$、$Q_2$的坐标分别为 $\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right)$、$\left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right)$，则$Q_1Q_2$的斜率为 $k_{Q_1Q_2}=\frac{c\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)}{c(t_1-t_2)}=-\frac{1}{t_1t_2}$. 同理，$PQ_1$、$PQ_2$的斜率分别为 $k_{PQ_1}=-\frac{1}{tt_1}$，$k_{PQ_2}=-\frac{1}{tt_2}$. ∵ $PQ_1\perp PQ_2$，∴ $\frac{1}{t^2t_1t_2}=-1$. ∴ $k_{Q_1Q_2}=-\frac{1}{t_1t_2}=t^2$. 而过点$P$的法线$PN$的斜率为过点$P$的切线$x+t^2y=2ct$斜率的负倒数，∴ $k_{PN}=t^2$. 故$Q_1Q_2/\!/PN$.

814. 设A、A'为等轴双曲线的顶点，P、P'为双曲线上关于双曲线实轴对称的两点，求证：$AP\perp A'P'$，$AP'\perp A'P$.



［证］ 设等轴双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 的两顶点为$A(a, 0)$、$A'(-a, 0)$，$P(x_1, y_1)$、$P'(x_1, -y_1)$为双曲线上关于实轴对称的两点，∴ $x_1^2-y_1^2=a^2\cdots$①.

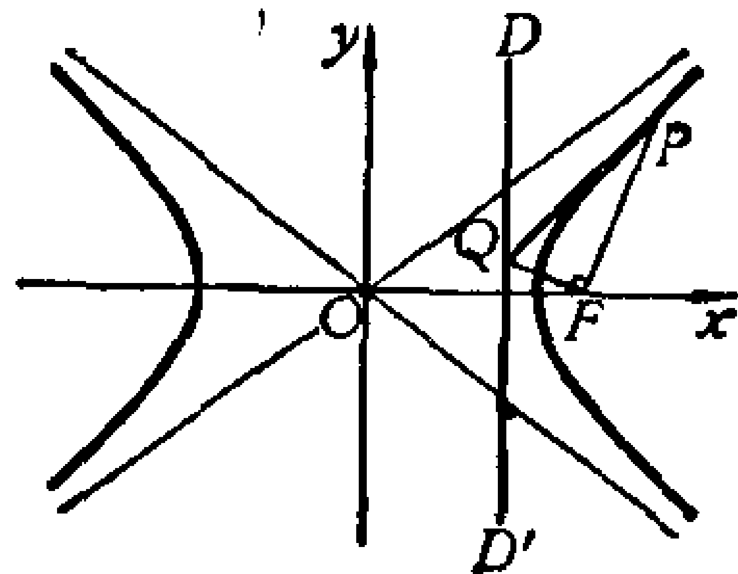
AP、$A'P'$、AP'、$A'P$ 诸直线的斜率分别为:

$$k_{AP}=\frac{y_1}{x_1-a},\quad k_{A'P'}=\frac{-y_1}{x_1+a},\quad k_{AP'}=\frac{-y_1}{x_1-a},\quad k_{A'P}=\frac{y_1}{x_1+a}.$$

$$\therefore\quad k_{AP}\cdot k_{A'P'}=\frac{-y_1^2}{x_1^2-a^2}=\frac{-y_1^2}{y_1^2}=-1,\quad k_{AP'}\cdot k_{A'P}=\frac{-y_1^2}{x_1^2-a^2}=-1.$$

即 $$AP\perp A'P',\quad AP'\perp A'P.$$

815. 过双曲线上任一点 P(非顶点)的切线交准线于点 Q, F 为此准线对应的焦点, 求证 $PF\perp QF$.



[证] 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, 过点 $P(x_1, y_1)$的切线方程为 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1\cdots$①, 准线方程为 $x=\frac{a}{e}\cdots$②, 对应焦点为 $F(ae, 0)$.

解方程①与②, 得点 Q 的坐标为 $\left(\frac{a}{e}, \frac{b^2(x_1-ae)}{aey_1}\right)$. 直线 PF、QF 的斜率分别为:

$$k_{PF}=\frac{y_1}{x_1-ae},\quad k_{QF}=\frac{\frac{b^2(x_1-ae)}{aey_1}}{\frac{a}{e}-ae}=\frac{b^2(x_1-ae)}{a^2(1-e^2)y_1}=\frac{x_1-ae}{-y_1}.$$

$$\therefore\quad k_{PF}\cdot k_{QF}=-1,\quad 故\quad PF\perp QF.$$

816. 已知 $x=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})\cos\theta$, $y=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})\sin\theta$. 试证: (1)若 t 为不等于零的常数, θ 为参数, 则点(x, y)的轨迹为椭圆; (2)若 θ 为常数, 且 $\theta\neq\frac{n\pi}{2}(n\in J)$, t 为参数, 则点(x, y)的轨迹为双曲线; (3)此椭圆和双曲线有共同的焦点; (4)椭圆与双曲线在交点处的两切线正交.

[证] (1) 由 $x=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})\cos\theta$ 得

$$\frac{x}{\frac{e^t+e^{-t}}{2}}=\cos\theta\cdots①,$$

由 $y=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})\sin\theta$ 得

$$\frac{y}{\frac{e^t-e^{-t}}{2}}=\sin\theta\cdots②.$$

①²+②², 得
$$\frac{x^2}{\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2}=1.$$

故点(x, y)的轨迹为椭圆.

(2) $\because\ \theta\neq\frac{n\pi}{2}\quad(n\in J)$, 由 $x=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})\cos\theta$ 得

$$\frac{2x}{\cos\theta}=e^t+e^{-t}\cdots③,$$

由 $y=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})\sin\theta$ 得

$$\frac{2y}{\sin\theta}=e^t-e^{-t}\cdots④.$$

③²-④², 得 $\frac{4x^2}{\cos^2\theta}-\frac{4y^2}{\sin^2\theta}=(e^t+e^{-t})^2-(e^t-e^{-t})^2=4,$

即
$$\frac{x^2}{\cos^2\theta}-\frac{y^2}{\sin^2\theta}=1.$$

故点(x, y)的轨迹为双曲线.

(3) $\because\ \left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2=1$, $\therefore$ 椭圆的焦点为$(-1, 0)$和$(1, 0)$. 又 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$, $\therefore$ 双曲线的焦点也为$(-1, 0)$和$(1, 0)$. 故此椭圆和双曲线有共同的焦点.

(4) 设(x_0, y_0)为椭圆和双曲线的任一交点, 则

$$\frac{x_0^2}{\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2}+\frac{y_0^2}{\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2}=1,\quad \frac{x_0^2}{\cos^2\theta}-\frac{y_0^2}{\sin^2\theta}=1.$$

两式相减, 得

$$x_0^2\left[\frac{1}{\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2}-\frac{1}{\cos^2\theta}\right]+y_0^2\left[\frac{1}{\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2}+\frac{1}{\sin^2\theta}\right]=0,$$

即 $$\left[\cos^2\theta-\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2\right]\left[\frac{x_0^2}{\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2\cos^2\theta}-\frac{y_0^2}{\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2\sin^2\theta}\right]=0.$$

$\because \cos^2\theta \leqslant 1$, 而 $\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2>1$, $\therefore \cos^2\theta-\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2\neq 0$, 故

$$\frac{x_0^2}{\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2\cos^2\theta}-\frac{y_0^2}{\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2\sin^2\theta}=0\cdots ⑤.$$

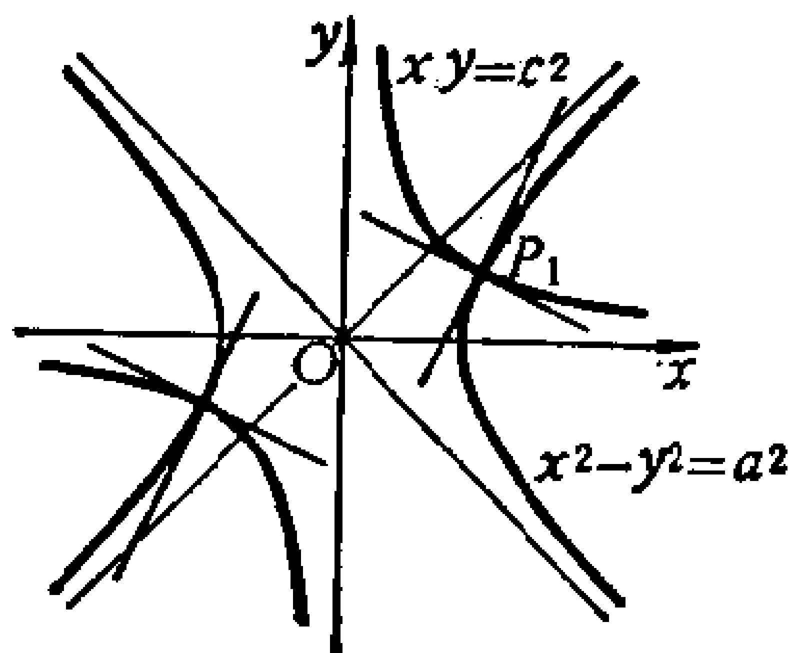
又椭圆和双曲线在(x_0, y_0)处的切线方程分别为

$$\frac{x_0x}{\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2}+\frac{y_0y}{\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2}=1 \quad 和 \quad \frac{x_0x}{\cos^2\theta}-\frac{y_0y}{\sin^2\theta}=1.$$

由 ⑤ 式可知两方程中 x、y 项的对应系数乘积之和等于零，故椭圆和双曲线在交点处的两切线正交.

817. 设一等轴双曲线的两渐近线为另一等轴双曲线的两轴，试证此两等轴双曲线互相直交.

［证］ 设一等轴双曲线方程为 $xy=c^2$, 另一等轴双曲线方程为 $x^2-y^2=a^2$. 过它们的交点 $P_1(x_1, y_1)$, 两曲线的切线分别为:

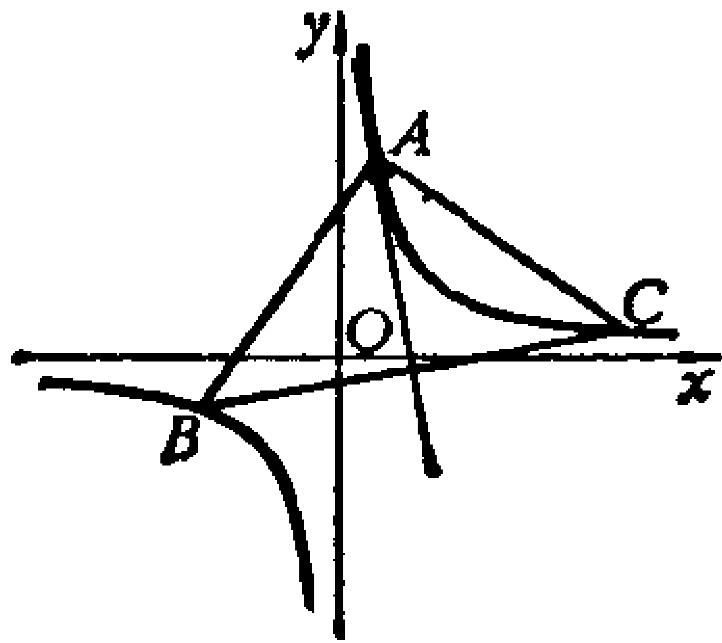


$$y_1x+x_1y=2c^2\cdots ①,$$
$$x_1x-y_1y=a^2\cdots ②.$$

$\because y_1x_1+x_1(-y_1)=0$, $\therefore$ 此两等轴双曲线互相直交.

818. 一直角三角形的三顶点在等轴双曲线上，求证直角顶点处的切线垂直于斜边.

［证］ 设等轴双曲线方程为 $xy=c^2$. 直角三角形 ABC 的三顶点在等轴双曲线上，设直角顶点 A 的坐标为 $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$, 其余两顶点为 $B\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right)$、$C\left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right)$. 直线 AB、AC、BC 的斜率分别为:



$$k_{AB}=\frac{c\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t_1}\right)}{c(t-t_1)}=-\frac{1}{tt_1},$$

$$k_{AC}=-\frac{1}{tt_2},\quad k_{BC}=-\frac{1}{t_1t_2}. \quad \because AB\perp AC, \quad \therefore \frac{1}{t^2t_1t_2}=-1.$$

过点 A 的切线为 $x+t^2y=2ct$，此切线的斜率

$$k=-\frac{1}{t^2}.\quad \therefore\quad k\cdot k_{BO}=\frac{1}{t^2t_1t_2}=-1.$$

故直角顶点 A 处的切线垂直于斜边.

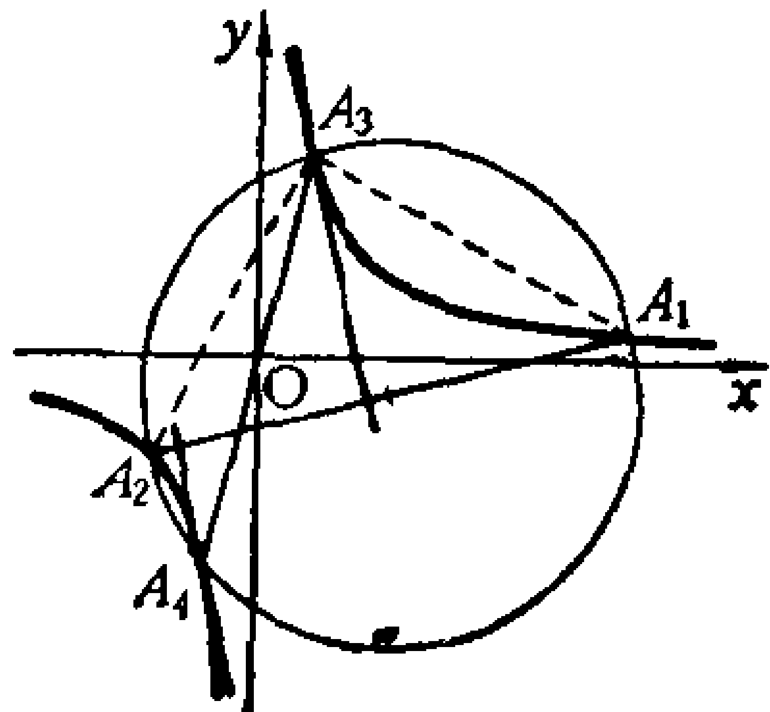
819. 设一圆和一等轴双曲线交于四点 A_1、A_2、A_3 和 A_4，其中 A_1 和 A_2 是圆的直径的一对端点，求证：(1) A_3 和 A_4 是等边双曲线一直径的端点；(2) 双曲线在 A_3 和 A_4 处的切线垂直于 A_1A_2.

[分析] 利用 A_1A_2 过圆心的条件，推出 A_3A_4 过双曲线中心，$\because$ A_1A_2 是圆的直径，$\therefore$ $\angle A_1A_3A_2=\angle A_1A_4A_2=$直角. 仿上题，可证得过 A_3 和 A_4 的切线与 A_1A_2 垂直.

[证] (1) 设等轴双曲线方程为 $\begin{cases}x=ct\\ y=\dfrac{c}{t}\end{cases}$ (t 为参数). 代入圆方程 $x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+f=0$，整理化简得 $c^2t^4-2cx_0t^3+ft^2-2cy_0t+c^2=0$. 设此方程的四个根为：$t_1$、$t_2$、$t_3$、$t_4$，四个交点的坐标为：$A_i\left(ct_i,\ \dfrac{c}{t_i}\right)(i=1,2,3,4)$. $\therefore$ $t_1t_2t_3t_4=1$. $\because$ A_1A_2 是圆的直径，$\therefore$ $A_1A_3\perp A_2A_3$. A_1A_3、A_2A_3 的斜率分别为：$k_{A_1A_3}=\dfrac{c\left(\dfrac{1}{t_3}-\dfrac{1}{t_1}\right)}{c(t_3-t_1)}=-\dfrac{1}{t_1t_3}$，$k_{A_2A_3}=-\dfrac{1}{t_2t_3}$，$\therefore$ $k_{A_1A_3}\cdot k_{A_2A_3}=\dfrac{1}{t_1t_2t_3^2}=-1$，代入 $t_1t_2t_3t_4=1$ 得 $t_3=-t_4$. A_3A_4 的方程为

$$y-\frac{c}{t_3}=-\frac{1}{t_3t_4}(x-ct_3),\quad 即\quad x+t_3t_4y=c(t_3+t_4).$$

$\because$ $t_3+t_4=0$，$\therefore$ A_3A_4 过原点，即过等轴双曲线的中心，故 A_3A_4 为双曲线一直径的端点.



(2) 过点 $A_3\left(ct_3,\ \dfrac{c}{t_3}\right)$的切线方程为 $x+t_3^2y=2ct_3$，其斜率为 $k=-\dfrac{1}{t_3^2}$，而 A_1A_2 的斜率为 $k_{A_1A_2}=-\dfrac{1}{t_1t_2}$，$\therefore$ $k\cdot k_{A_1A_2}=\dfrac{1}{t_1t_2t_3^2}=-1$，

故过点 A_3 的切线与 A_1A_2 垂直. 同理可证: 过点 A_4 的切线垂直于 A_1A_2.

[说明]　涉及等轴双曲线与圆的四个交点的问题,多数可用等轴双曲线的参数方程 $\begin{cases} x=ct \\ y=\dfrac{c}{t} \end{cases}$ 与圆方程 $x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+f=0$ 联立，化为 t 的四次方程,利用韦达定理进行论证.

820. 求证：双曲线上任一点到两渐近线距离之积是常数.

[分析]　取双曲线上任意一点 P_0的坐标(x_0, y_0)为参数,计算点 P 到两渐近线的距离之积,并用点 P_0 在双曲线上的条件,证明此积与 x_0、y_0 无关即得.

[证]　设双曲线方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 双曲线上任一点 $P_0(x_0, y_0)$到双曲线两渐近线距离之积为

$$\left|\frac{bx_0-ay_0}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\cdot\left|\frac{bx_0+ay_0}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=\frac{b^2x_0^2-a^2y_0^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\quad（定值）.$$

[说明]　证明定值问题，一般可取与变动因素有关的变量为参数，建立欲证为定值的几何量与参数之间的函数关系,并证明此函数为常函数.

821. 求证:椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 或双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的准线上的任意一点到两焦点的距离平方差的绝对值等于 $4a^2$.

[证]　设椭圆或双曲线的右准线 $x=\dfrac{a^2}{c}$ 上一点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{a^2}{c}, y_0\right)$, 点 P 到两焦点距离平方差的绝对值为

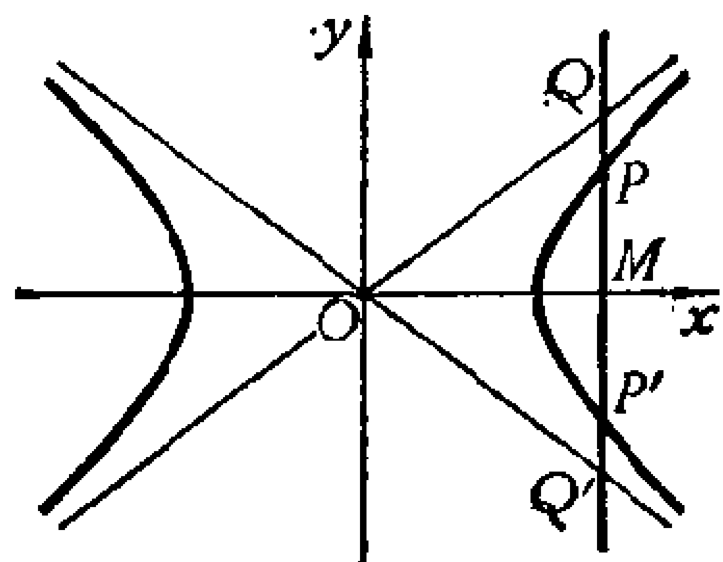
$$\left|\left(\frac{a^2}{c}-c\right)^2+y_0^2-\left[\left(\frac{a^2}{c}+c\right)^2+y_0^2\right]\right|=4a^2.$$

同理可证:左准线上任意一点到两焦点距离平方差为 $4a^2$.

822. 双曲线实轴的任一垂线, 垂足为 M, 交双曲线于 P, 交渐近线于 Q, 求证: $|MQ|^2-|MP|^2$ 为定值.

[证]　设双曲线的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 渐近线方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$,

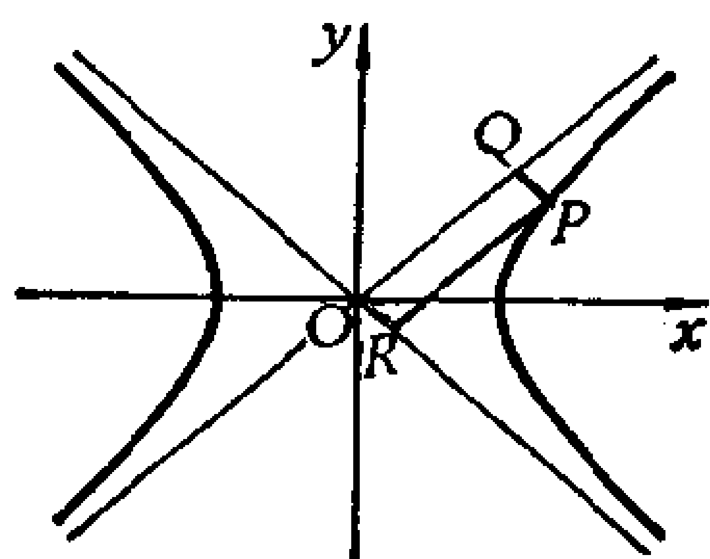
实轴的任一垂线的方程为 $x=x_0$，与双曲线及其渐近线交点 P、Q 的纵坐标分别为



$$y_P^2=\frac{b^2}{a^2}(x_0^2-a^2),\quad y_Q^2=\frac{b^2}{a^2}x_0^2.$$

故
$$|MQ|^2-|MP|^2=y_Q^2-y_P^2=\frac{b^2}{a^2}x_0^2-\frac{b^2}{a^2}(x_0^2-a^2)=b^2$$
(定值).

823. 设 $P(x_1, y_1)$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任意一点，过 P 作双曲线两条渐近线的平行线，分别与另一渐近线交于 Q、R，求证：$|PQ|\cdot|PR|=\frac{1}{4}(a^2+b^2)$.



［分析］ 设双曲线上点 P 的坐标为 (x_1, y_1) 或 $(a\sec\varphi,\ b\operatorname{tg}\varphi)$，以 x_1、y_1 或 φ 为参数，计算 PQ、PR 的值进行推证.

［证一］ 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，过 $P(x_1, y_1)$ 与渐近线平行的直线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}(x-x_1)+y_1$，与另一渐近线交点 Q、R 的横坐标为 $\frac{x_1}{2}-\frac{ay_1}{2b}$ 和 $\frac{x_1}{2}+\frac{ay_1}{2b}$. PQ、PR 在 x 轴上的投影分别为 $-\left(\frac{x_1}{2}+\frac{ay_1}{2b}\right)$ 和 $-\left(\frac{x_1}{2}-\frac{ay_1}{2b}\right)$，它们所在直线倾角余弦为 $\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 和 $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

$$\therefore\quad |PQ|\cdot|PR|=\left|\frac{-\left(\frac{x_1}{2}+\frac{ay_1}{2b}\right)}{-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}\cdot\frac{-\left(\frac{x_1}{2}-\frac{ay_1}{2b}\right)}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}\right|$$
$$=\frac{1}{4}(a^2+b^2)\left(\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}\right)=\frac{1}{4}(a^2+b^2).$$

［证二］ 设过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任意一点 $P(a\sec\varphi,\ b\operatorname{tg}\varphi)$ 与渐近线 $bx+ay=0$ 平行的直线参数方程为

$$\begin{cases} x=a\sec\varphi-\dfrac{at}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ y=b\operatorname{tg}\varphi+\dfrac{bt}{\sqrt{a^2+b^2}}, \end{cases}$$

交另一渐近线 $bx-ay=0$ 于点 Q, 则

$$b\left(a\sec\varphi-\frac{at}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)-a\left(b\operatorname{tg}\varphi+\frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=0.$$

$$\therefore\quad PQ=t=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}(\sec\varphi-\operatorname{tg}\varphi).$$

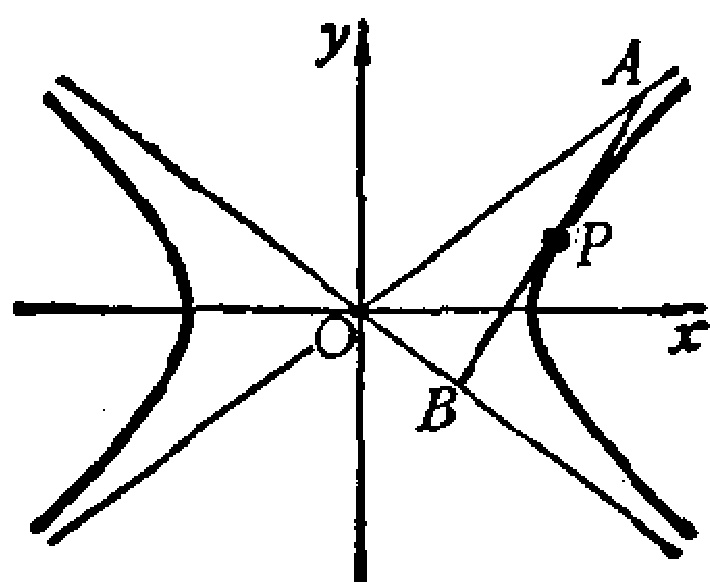
同理可得 $$PR=-\frac{\sqrt{a^2+b^2}(\sec\varphi+\operatorname{tg}\varphi)}{2}.$$

$$\therefore\quad |PQ|\cdot|PR|=(a^2+b^2)/4.$$

824. 过双曲线上任一点 P 的切线与两渐近线交于 A、B 两点, 双曲线中心为 O, 求证 $\triangle OAB$ 的面积为定值.

[证] 设双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 其上任一点 P 的坐标为 (x_0, y_0),

$\therefore$ $\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$. 过点 P 的切线方程为 $b^2x_0x-a^2y_0y=a^2b^2$, 它与双曲线的渐近线的交点 A、B 的坐标满足



$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0 \\ b^2x_0x-a^2y_0y=a^2b^2, \end{cases}$$

解得 $$\left(\frac{a^2b}{bx_0-ay_0}, \frac{ab^2}{bx_0-ay_0}\right)、\left(\frac{a^2b}{bx_0+ay_0}, -\frac{ab^2}{bx_0+ay_0}\right).$$

$$\therefore\quad \triangle OAB\text{ 的面积}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \dfrac{a^2b}{bx_0-ay_0} & \dfrac{ab^2}{bx_0-ay_0} & 1 \\ \dfrac{a^2b}{bx_0+ay_0} & \dfrac{-ab^2}{bx_0+ay_0} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\text{ 的绝对值}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a^3b^3}{b^2x_0^2-a^2y_0^2}=ab.$$

825. 求证: 双曲线两共轭直径的平方差为定值.

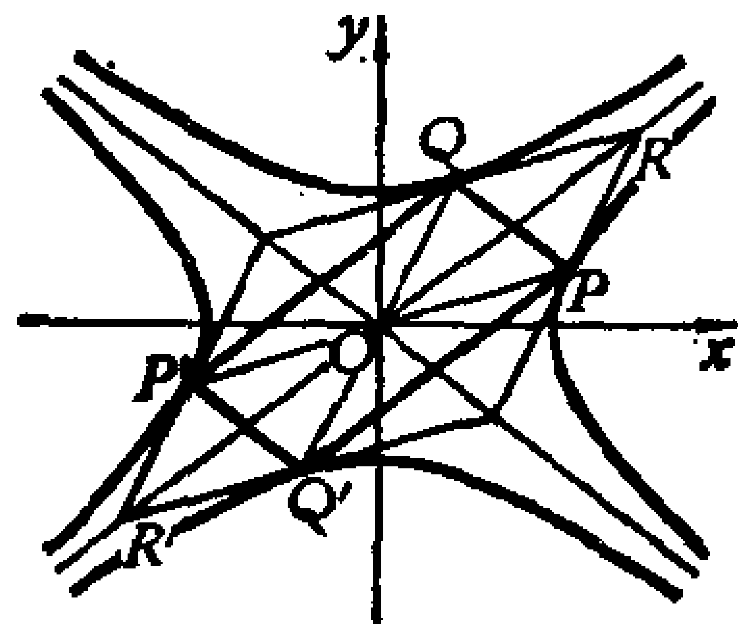
［证］ 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，两共轭直径的端点分别为 $P(a\sec\varphi,\ b\operatorname{tg}\varphi)$、$Q(a\operatorname{tg}\varphi,\ b\sec\varphi)$，故两共轭直径的平方差：

$$4(a^2\sec^2\varphi+b^2\operatorname{tg}^2\varphi)-4(a^2\operatorname{tg}^2\varphi+b^2\sec^2\varphi)$$
$$=4(a^2-b^2)(\sec^2\varphi-\operatorname{tg}^2\varphi)=4(a^2-b^2).$$

［说明］ 本题结论与相应的椭圆有关命题统称为阿波罗尼斯 (Apollonius) 定理.

826. **求证：双曲线两共轭直径四个端点组成的四边形，和过共轭直径四个端点的切线组成的四边形都是平行四边形，且面积均为定值.**

［分析］ 从双曲线一直径的端点坐标 $(x_1,\ y_1)$ 导出其共轭直径端点坐标，以点 $(x_1,\ y_1)$ 在双曲线上的条件，化简平行四边形的面积之值，即可得证.



［证］ 设 $P(x_1,\ y_1)$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 直径一端点，则另一端点为 $P'(-x_1,\ -y_1)$，而它的共轭直径端点分别为

$$Q\left(\frac{a}{b}y_1,\ \frac{b}{a}x_1\right)、Q'\left(-\frac{a}{b}y_1,\ -\frac{b}{a}x_1\right).$$

两直径互相平分，故两共轭直径四个端点为平行四边形四个顶点. 两共轭直径分平行四边形为四个等积的三角形，故其面积为

$$4\cdot\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ \frac{a}{b}y_1 & \frac{b}{a}x_1\end{matrix}\right|=2ab\left|\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}\right|=2ab,$$

即面积为定值.

过共轭直径四个端点引切线，分别平行于共轭直径，所以四切线也围成平行四边形. 因为 $\triangle OPQ$ 的面积是 ▱$OPRQ$ 的一半，而 ▱$OPRQ$ 的面积又是四切线围成的平行四边形面积 S 的四分之一，故

$$S=8\cdot\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ \frac{a}{b}y_1 & \frac{b}{a}x_1\end{matrix}\right|=4ab,$$

即面积为定值.

827. 已知以原点 C 为中心的任一等轴双曲线与半径为 r 的一个圆交于 P、Q、R、S 四点，试证 $PC^2+QC^2+SC^2+RC^2$ 为定值.

［证］ 设等轴双曲线的方程为 $xy=k\cdots$①，有定半径 r 的一个圆的方程为 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2\cdots$②. 由①、②消去 y，得 x 的四次方程

$$x^4-2x_0x^3+(x_0^2+y_0^2-r^2)x^2-2ky_0x+k^2=0,$$

P、Q、R、S 四点的横坐标是它的四个根，故

$$x_P+x_Q+x_R+x_S=2x_0,$$

$$x_Px_Q+x_Qx_R+x_Rx_S+x_Px_R+x_Px_S+x_Qx_S=x_0^2+y_0^2-r^2.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad x_P^2+x_Q^2+x_R^2+x_S^2&=(x_P+x_Q+x_R+x_S)^2\\&\quad-2(x_Px_Q+x_Px_R+x_Px_S+x_Qx_R+x_Qx_S+x_Rx_S)\\&=4x_0^2-2(x_0^2+y_0^2-r^2)=2x_0^2-2y_0^2+2r^2.\end{aligned}$$

同理，

$$y_P^2+y_Q^2+y_R^2+y_S^2=2y_0^2-2x_0^2+2r^2.$$

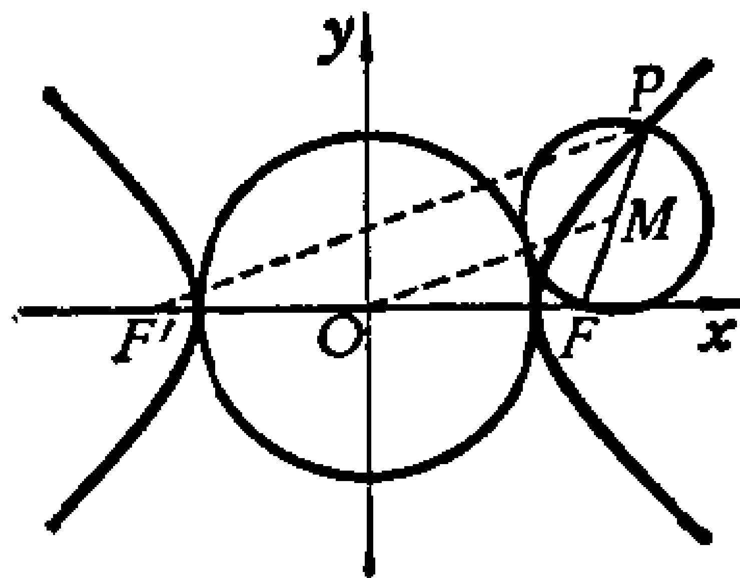
$$\therefore\quad PC^2+QC^2+RC^2+SC^2=x_P^2+y_P^2+x_Q^2+y_Q^2+x_R^2+y_R^2+x_S^2+y_S^2=4r^2,$$

为定值.

828. 求证：以双曲线任意焦半径为直径的圆与以实轴为直径的圆外切.

［分析］ 证明焦半径的中点与以实轴为直径的圆中心的距离等于两圆半径之和即可.

［证］ 设双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，其上任意一点为 $P(x_1, y_1)$，两焦点为 F、F'. PF 的中点为 M，而双曲线中心 O 为 FF' 的中点，



$$\therefore\quad |OM|=\frac{1}{2}|PF'|=\frac{1}{2}(ex_1+a).$$

但以实轴为直径的圆 $x^2+y^2=a^2$ 与以 PF 为直径之圆的半径之和为 $a+\dfrac{1}{2}|PF|=\dfrac{1}{2}(ex_1+a)$. 即命题得证.

829. 求证：与坐标轴围成三角形的面积为定值 k 的直线恒与等轴双曲线 $xy=\dfrac{k}{2}$ 或 $xy=-\dfrac{k}{2}$ 相切.

[证] 设此直线在坐标轴上的截距为 λ、μ, 则直线系的方程为

$$\frac{x}{\lambda}+\frac{y}{\mu}=1\cdots①.$$

又据题设, $\frac{1}{2}\lambda\mu=\pm k$ (定值)$\cdots$②. 从②得 $\mu=\pm\frac{2k}{\lambda}$, 代入①, 得 $\lambda^2y\mp2k\lambda\pm2kx=0$. 从 $\lambda^2y-2k\lambda+2kx=0$, 得

$$x=\frac{2k\lambda-\lambda^2y}{2k}\cdots③.$$

代入 $xy=\frac{k}{2}$, 得

$$y\left(\frac{2k\lambda-\lambda^2y}{2k}\right)=\frac{k}{2},\quad 即 (\lambda y-k)^2=0.$$

所以直线 $\lambda^2y-2k\lambda+2kx=0$ 与 $xy=\frac{k}{2}$ 相切.

同理可证, 直线 $\lambda^2y+2k\lambda-2kx=0$ 与 $xy=-\frac{k}{2}$ 相切.

830. 证明 $(bx-ay)^2+k(x-a)(y-b)=0$ 为过定点 (a, b) 的两直线; 且此两直线与双曲线 $4xy-k=0$ 相切 ($k>4ab$, 且 $k>0$).

[分析] 一般说来, 先证此方程表示过 (a, b) 的两直线, 再证与双曲线相切. 但把两种要求合起来, 可发现此方程即过 (a, b) 的双曲线的两切线方程, 故求出过曲线外一点的切线方程, 即得证.

[证] 设过点 (a, b) 的直线的参数方程为 $\begin{cases}x=a+t\cos\theta\\y=b+t\sin\theta,\end{cases}$ θ 为直线的倾角, t 为参数. 代入双曲线方程得

$$4(a+t\cos\theta)(b+t\sin\theta)-k=0,$$

即 $$4t^2\sin\theta\cos\theta+4(a\sin\theta+b\cos\theta)t+4ab-k=0.$$

若要此直线与双曲线相切, 则

$$\varDelta=16(a\sin\theta+b\cos\theta)^2-16\sin\theta\cos\theta(4ab-k)=0,$$

即 $$(a\sin\theta+b\cos\theta)^2-\sin\theta\cos\theta(4ab-k)=0\cdots①.$$

而 $x-a=t\cos\theta$, $y-b=t\sin\theta$, 代入①, 整理得

$$[b(x-a)-a(y-b)]^2+k(x-a)(y-b)=0,$$

即 $$b^2(x-a)^2-(2ab-k)(x-a)(y-b)+a^2(y-b)^2=0.$$

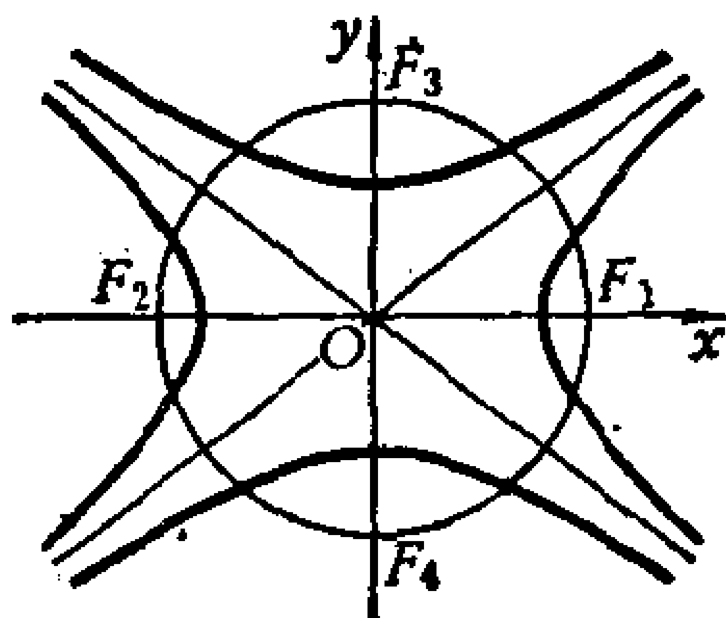
此为关于 $x-a$ 和 $y-b$ 的二次齐次式, 且 $\varDelta=k(k-4ab)>0$.

又，②式可化为 $(bx-ay)^2+k(x-a)(y-b)=0$，

$$\therefore \quad (bx-ay)^2+k(x-a)(y-b)=0$$

为过点(a, b)的双曲线 $4xy-k=0$ 的两条切线的方程.

831．证明两共轭双曲线的四个焦点共圆.



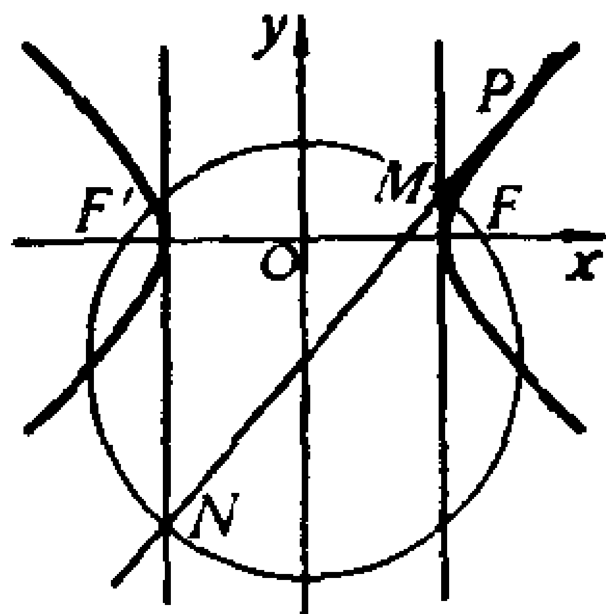
［证］ 设两共轭双曲线方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad 和 \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

前者焦点为 $F_1(\sqrt{a^2+b^2}, 0)$、$F_2(-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$；后者焦点为 $F_3(0, \sqrt{a^2+b^2})$、$F_4(0, -\sqrt{a^2+b^2})$. $\therefore F_1$、F_2、F_3、F_4 四点到原点的距离都为$\sqrt{a^2+b^2}$. 故此四焦点共圆.

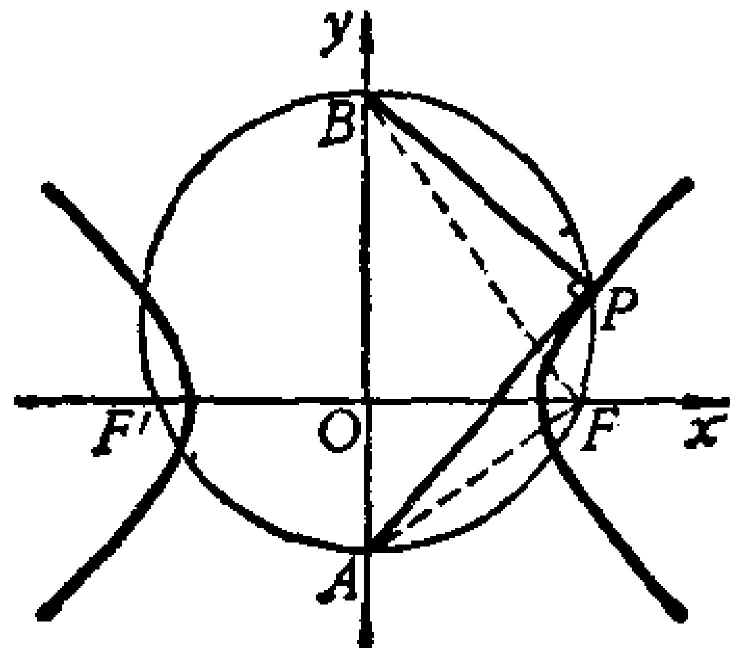
832．过双曲线上任一点 P 的切线与过两顶点的切线相交于 M、N，求证以 MN 为直径的圆过两焦点.

［分析］ 先求得 M、N 的坐标，导出以 MN 为直径的圆方程，进一步证明两焦点坐标满足此圆方程即得.



［证］ 设 $P(x_0, y_0)$为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任一点，过 P 的切线为 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$，过顶点的切线为 $x=\pm a$，它们相交于点 $M\left(a, \frac{b^2(x_0-a)}{ay_0}\right)$ 与 $N\left(-a, -\frac{b^2(a+x_0)}{ay_0}\right)$，利用第 385 题的结论，以 MN 为直径的圆方程为 $x^2+y^2+\frac{2ab^2}{ay_0}y-a^2-b^2=0$. 焦点坐标$(c, 0)$满足此圆方程，故焦点$(c, 0)$在以 MN 为直径的圆上. 同理可证焦点 $F'(-c, 0)$ 也在此圆上.

833．求证：过双曲线上一点的切线和法线与虚轴交成的三角形的外接圆必通过其焦点.



［分析］ 如图，$\because \angle APB=90°$，如果 $AF\perp BF$，则 A、F、P、B 四点共圆.

［证］ 设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, 双曲线上一点为 $P(x_0, y_0)$, 过此点的切线方程和法线方程分别为

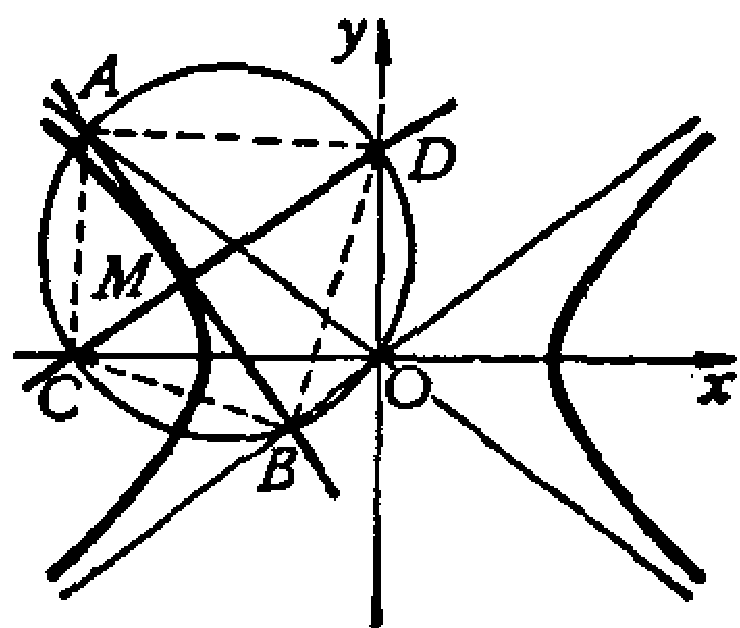
$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1 \quad 和 \quad \frac{y_0x}{b^2}+\frac{x_0y}{a^2}=\frac{x_0y_0}{b^2}+\frac{x_0y_0}{a^2},$$

与虚轴交点为 $A\left(0,\ -\frac{b^2}{y_0}\right)$、$B\left(0,\ \frac{y_0c^2}{b^2}\right)$; 焦点为 $F(c, 0)$, 则

$$k_{AF}=\frac{b^2}{y_0c},\quad k_{BF}=\frac{-y_0c}{b^2}.\qquad \therefore\ k_{AF}\cdot k_{BF}=-1,$$

故 $AF\perp BF$, $\angle BFA=90°$. 又, $\angle BPA=90°$, $\therefore$ A、F、B、P 四点共圆. 同理, $F'(-c, 0)$也在此外接圆上.

834. 已知过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任一点 M 的切线交两渐近线于 A、B, 过这点的法线交两坐标轴于 C、D. 求证: A、B、C、D 四点共圆, 且此圆经过双曲线的中心 O.



［分析］ 如图, $\because$ $\angle COD=90°$, 故若能证明 $\angle CAD=90°$, 则 A、C、O、D四点共圆. 同理, 证明 $\angle CBD=90°$, 则 C、B、O、D 四点共圆.

［证］ 设双曲线上任一点 $M(a\sec\theta, b\,\mathrm{tg}\,\theta)$, 其中 θ 为离心角, 则过点 M 的切线方程为 $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\sin\theta=\cos\theta$, 与渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 的交点为

$$A\left(\frac{a\cos\theta}{1+\sin\theta},\ \frac{-b\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)、B\left(\frac{a\cos\theta}{1-\sin\theta},\ \frac{b\cos\theta}{1-\sin\theta}\right).$$

过点 M 的法线方程为 $ax\sin\theta+by=(a^2+b^2)\mathrm{tg}\,\theta$, 分别与 x 轴、y 轴交于 $C\left(\frac{c^2}{a}\sec\theta,\ 0\right)$、$D\left(0,\ \frac{c^2}{b}\mathrm{tg}\,\theta\right)$.

$$\therefore\ k_{AD}=\frac{ab\cos^2\theta}{a^2\cos^2\theta-c^2(1-\sin\theta)},\quad k_{AC}=\frac{-a^2\cos^2\theta+c^2(1-\sin\theta)}{ab\cos^2\theta}.$$

$\because$ $k_{AD}\cdot k_{AC}=-1$, $\therefore$ $\angle CAD=90°$. 而 $\angle COD=90°$, $\therefore$ A、C、O、D 四点共圆. 同理可证 $\angle CBD=90°$, 即点 B 在过 A、C、O、D 的圆上.

835. 证明等轴双曲线$xy=c^2$上任意三个点$A\left(ct_1,\ \frac{c}{t_1}\right)$、$B\left(ct_2,\ \frac{c}{t_2}\right)$、$C\left(ct_3,\ \frac{c}{t_3}\right)$和点$D\left(\frac{c}{t_1t_2t_3},\ ct_1t_2t_3\right)$共圆.

［证一］ $\because\ k_{AB}=-\frac{1}{t_1t_2},\quad k_{AD}=-t_2t_3,\quad k_{BC}=-\frac{1}{t_2t_3},\quad k_{CD}=-t_1t_2,$

$$\therefore\quad |\mathrm{tg}\angle DAB|=\left|\frac{-t_2t_3+\frac{1}{t_1t_2}}{1+\frac{1}{t_1t_2}\cdot t_2t_3}\right|=\left|\frac{1-t_1t_2^2t_3}{t_2(t_1+t_3)}\right|,$$

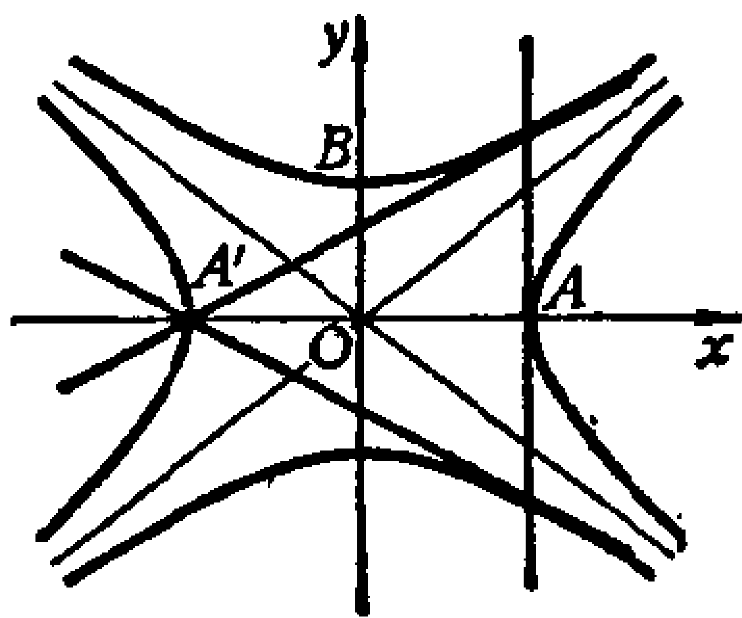
$$|\mathrm{tg}\ \angle DCB|=-\left|\frac{-t_1t_2+\frac{1}{t_2t_3}}{1+\frac{t_1t_2}{t_2t_3}}\right|=-\left|\frac{1-t_1t_2^2t_3}{t_2(t_1+t_3)}\right|.$$

即 $\angle DAB=\angle DCB$, 或 $\angle DCB+\angle DAB=\pi$,
故A、B、C、D四点共圆.

［证二］ 设过A、B、C的圆方程为$x^2+y^2+dx+ey+f=0$, 它与等轴双曲线的第四个交点为$D'\left(ct_4,\ \frac{c}{t_4}\right)$, 则$t_1$、$t_2$、$t_3$、$t_4$是方程$c^2t^4+cdt^3+ft^2+cet+c^2=0$的四个根. $\therefore\ t_1t_2t_3t_4=1$, 即$t_4=\frac{1}{t_1t_2t_3}$. $\therefore\ D'\left(\frac{c}{t_1t_2t_3},\ ct_1t_2t_3\right)$, 即$D'$与$D$重合. 故$A$、$B$、$C$、$D$四点共圆.

836. 过双曲线一顶点作切线交共轭双曲线于两点. 试证过交点所作共轭双曲线之两切线必通过原双曲线另一顶点.

［证］ 设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, 它的共轭双曲线为$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$, 过原双曲线的顶点$A(a,\ 0)$的切线为$x=a$, 交它的共轭双曲线于$(a,\ \sqrt{2}b)$、$(a,\ -\sqrt{2}b)$. 过点$(a,\ \sqrt{2}b)$的共轭双曲线的切线方程为$\frac{\sqrt{2}y}{b}-\frac{x}{a}=1$, 原双曲线另一顶点$A'(-a,\ 0)$满足$\frac{\sqrt{2}\,y}{b}-\frac{x}{a}=1$, $\therefore$ 此切线过点A'; 同理, 过$(a,\ -\sqrt{2}b)$的共轭双曲线切线也过原双曲线另一顶点A'.



837. 求证：与双曲线 $(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)=\lambda$ 的渐近线平行的直线同该双曲线只有一个实交点.

［证］ 双曲线的渐近线为 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2=0$. 由已知，有直线 $A_1x+B_1y+C_1+R=0(R\neq0)$ 平行于渐近线之一，它与双曲线的交点坐标满足方程组(I)

$$\begin{cases}(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)=\lambda\cdots①\\ A_1x+B_1y+C_1+R=0\cdots②.\end{cases}$$

由②得 $A_1x+B_1y+C_1=-R$，代入①，得

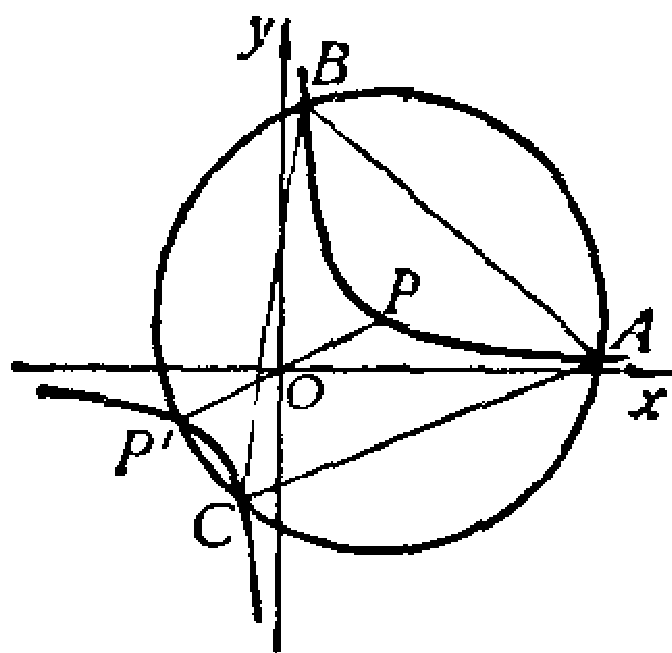
$$A_2x+B_2y+C_2=-\frac{\lambda}{R}\cdots③.$$

方程组(I)与(II)

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1+R=0\cdots②\\ A_2x+B_2y+C_2=-\dfrac{\lambda}{R}\cdots③\end{cases}$$

同解，而方程组(II)只有一组实数解，故原方程组(I)也只有一组实数解，即与双曲线只有一个实交点.

838. P 是双曲线 $xy=1$ 上任一点，P' 是 P 关于原点的对称点，以点 P 为圆心，$|PP'|$ 为半径作圆，求证：圆 P 与双曲线另外三个交点是一个正三角形的三个顶点.



［分析］ 如图，P 为 $\triangle ABC$ 的外心，如果 $\triangle ABC$ 是正三角形，则它的外心即重心，故只要证明 $x_0=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$，$y_0=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$ 即可.

［证］ 设点 P 与 P' 的坐标为 $(x_0,\ y_0)$、$(-x_0,\ -y_0)$. 以 P 为圆心，$|PP'|$ 为半径的圆方程为 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=(2x_0)^2+(2y_0)^2$，且 $x_0y_0=1$. 圆与双曲线的交点坐标满足 $\begin{cases}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=4(x_0^2+y_0^2)\\ xy=1\end{cases}$，消去 y，得

$$x^4-2x_0x^3-3(x_0^2+y_0^2)x^2-2y_0x+1=0,$$

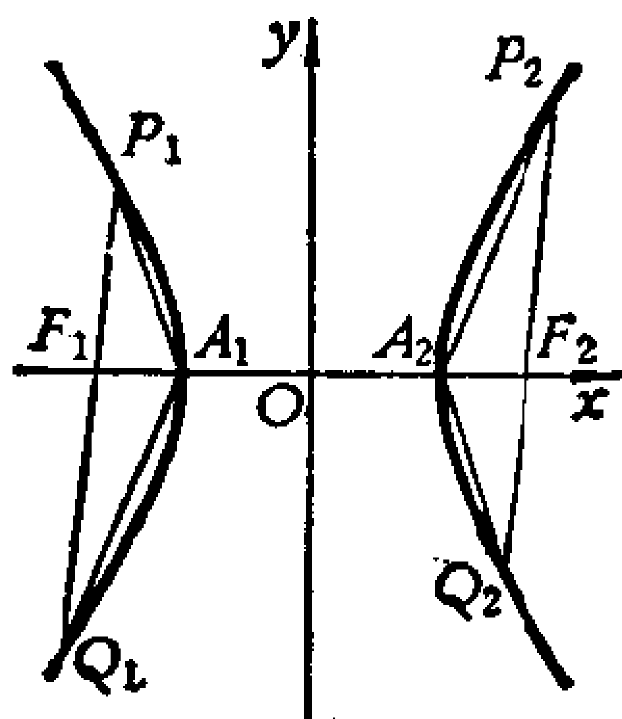
即
$$(x+x_0)(x^3-3x_0x^2-3y_0^2x+y_0)=0.$$

设另外三个交点坐标为 $A(x_1,\ y_1)$、$B(x_2,\ y_2)$、$C(x_3,\ y_3)$，根据韦达定理有

$$x_1+x_2+x_3=3x_0, \quad \therefore \quad \frac{x_1+x_2+x_3}{3}=x_0.$$

同理可得$\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=y_0$. ∴$\triangle ABC$的重心就是它外接圆的圆心$(x_0, y_0)$，故此三角形为等边三角形.

839. 设双曲线的两焦点为F_1、F_2，与其对应的顶点为A_1、A_2，分别过F_1、F_2的两平行直线与双曲线相交的对应点为P_1、Q_1、P_2、Q_2. 求证$\triangle A_1P_1Q_1$与$\triangle A_2P_2Q_2$面积相等.



［分析］ 因为两平行弦P_1Q_1和P_2Q_2分别过焦点F_1、F_2，故可证明这两弦长相等. 若再证明点A_1到直线P_1Q_1的距离和点A_2到直线P_2Q_2的距离相等，即得两三角形面积相等.

［证］ 设双曲线方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\cdots①,$$

两焦点为$F_1(-c, 0)$、$F_2(c, 0)$，弦P_1Q_1的倾角为α，则直线P_1Q_1的参数方程为

$$\begin{cases} x=-c+t\cos\alpha \\ y=t\sin\alpha \end{cases}\cdots②.$$

②代入①，并整理得

$$(b^2\cos^2\alpha-a^2\sin^2\alpha)t^2-2b^2ct\cos\alpha+b^4=0.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad |P_1Q_1|&=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}\\&=\sqrt{\left(\frac{2b^2c\cos\alpha}{b^2\cos^2\alpha-a^2\sin^2\alpha}\right)^2-\frac{4b^4}{b^2\cos^2\alpha-a^2\sin^2\alpha}}\\&=\frac{2ab^2}{|b^2\cos^2\alpha-a^2\sin^2\alpha|}.\end{aligned}$$

∵$P_2Q_2 /\!/ P_1Q_1$，∴弦P_2Q_2的倾角也为α. 同理可得

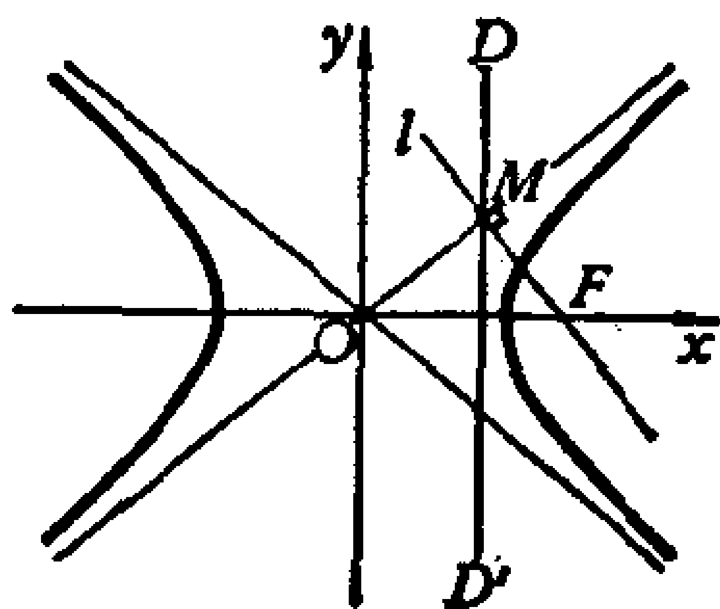
$$|P_2Q_2|=\frac{2ab^2}{|b^2\cos^2\alpha-a^2\sin^2\alpha|}.$$

∴$|P_1Q_1|=|P_2Q_2|$. 当P_1Q_1不平行于y轴时，设其斜率为k，则直线P_1Q_1的方程为$y=k(x+c)$，即$y-kx-ck=0$. 点A_1到直线P_1Q_1的距离$d_1=\frac{|ak-ck|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{k(c-a)}{\sqrt{1+k^2}}$. 同理，点$A_2$到直线$P_2Q_2$的距离

$$d_2=\frac{|ck-ak|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{k(c-a)}{\sqrt{1+k^2}}. \qquad \therefore \quad d_1=d_2.$$

当 P_1Q_1 与 P_2Q_2 都平行于 y 轴时，则 A_1 到 P_1Q_1 和 A_2 到 P_2Q_2 的距离均等于 $c-a$. $\therefore \triangle A_1P_1Q_1$ 与 $\triangle A_2P_2Q_2$ 等底等高，它们的面积相等.

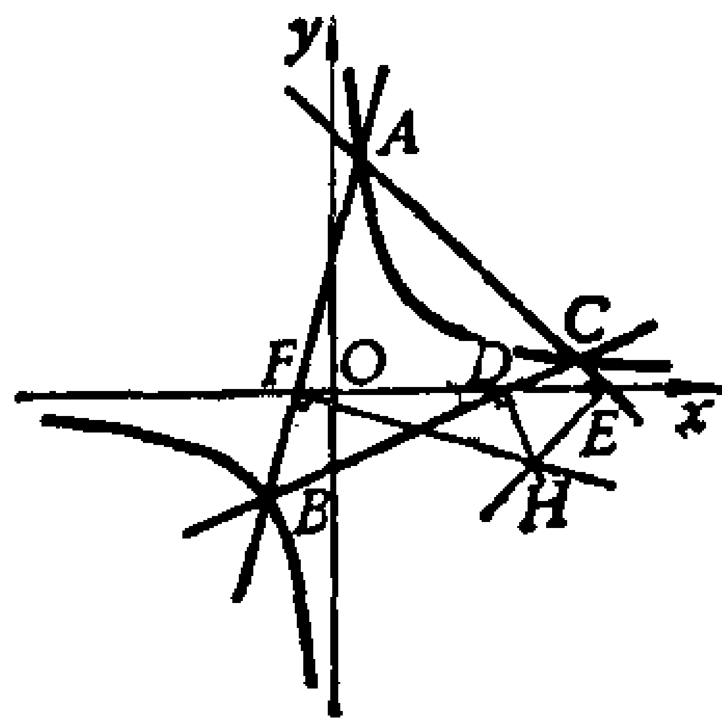
840. 求证：双曲线的渐近线，过焦点与该渐近线垂直的直线，以及对应此焦点的准线，此三直线共点.



［证］ 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，渐近线方程为 $ay-bx=0$，则过焦点 $(c,\ 0)$ 与渐近线垂直的直线 l 的方程为 $by+ax-ac=0$. 而与 $(c,\ 0)$ 对应的准线方程为 $x=\frac{a^2}{c}$，准线与 l 的交点为 $\left(\frac{a^2}{c},\ \frac{ab}{c}\right)$，它满足渐近线的方程 $ay-bx=0$，故三直线共点.

841. 在等轴双曲线 $xy=1$ 上有三点 A、B、C，三直线 BC、CA、AB 和 x 轴的交点分别为 D、E、F，过 D、E、F 分别作 BC、CA、AB 的垂线. 求证：三条垂线交于一点，并求交点坐标.

［证］ 设 A、B、C 三点坐标分别为 $A\left(x_1,\ \frac{1}{x_1}\right)$、$B\left(x_2,\ \frac{1}{x_2}\right)$、$C\left(x_3,\ \frac{1}{x_3}\right)$，过 B、C 的直线为



$$x_2x_3y+x-x_2-x_3=0,$$

与 x 轴的交点为 $D(x_2+x_3,\ 0)$，$\therefore$ 过点 D 与 BC 垂直的直线为

$$x_2x_3x-y-x_2x_3(x_2+x_3)=0.$$

同理，过点 E 与点 F 分别垂直于 CA、AB 的直线为

$$x_1x_3x-y-x_1x_3(x_1+x_3)=0 \quad 和 \quad x_1x_2x-y-x_1x_2(x_1+x_2)=0.$$

显然，三垂线两两不平行，且其方程的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} x_2x_3 & -1 & -x_2x_3(x_2+x_3) \\ x_1x_2 & -1 & -x_1x_2(x_1+x_2) \\ x_1x_3 & -1 & -x_1x_3(x_1+x_3) \end{vmatrix}$$

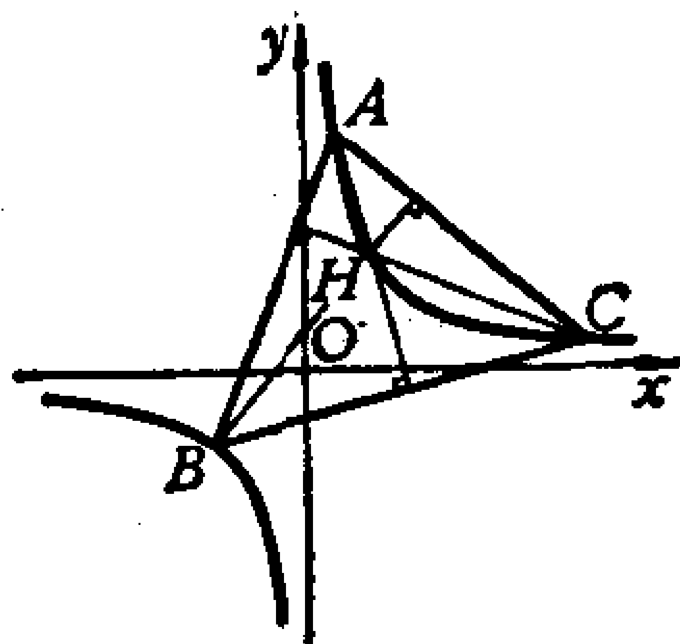
$$=\begin{vmatrix} x_2x_3 & -1 & -x_2x_3(x_2+x_3) \\ x_2(x_1-x_3) & 0 & x_2(x_3-x_1)(x_1+x_2+x_3) \\ x_3(x_1-x_2) & 0 & x_3(x_2-x_1)(x_1+x_2+x_3) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -1 & x_1+x_2+x_3 \\ -1 & x_1+x_2+x_3 \end{vmatrix} x_2x_3(x_1-x_3)(x_1-x_2)=0.$$

∴ 三垂线交于一点．交点 H 坐标为$(x_1+x_2+x_3,\ x_1x_2x_3)$.

842．设三角形的三个顶点都在同一等轴双曲线上，求证这个三角形的垂心也在此双曲线上．

［证］ 设等轴双曲线方程为$\begin{cases} x=ct \\ y=\dfrac{c}{t}, \end{cases}$ $\triangle ABC$ 三个顶点在双曲线上，它们的坐标分别为 $A\left(ct_A,\ \dfrac{c}{t_A}\right)$、$B\left(ct_B,\ \dfrac{c}{t_B}\right)$、$C\left(ct_C,\ \dfrac{c}{t_C}\right)$. 过 A、B 的直线方程为



$$y-\frac{c}{t_A}=-\frac{1}{t_At_B}(x-ct_A),$$

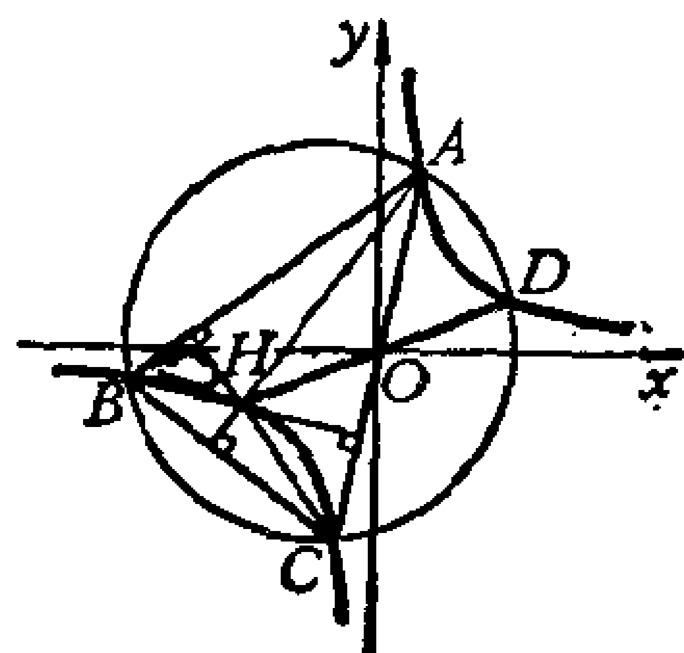
过点 C 垂直于 AB 的直线方程为 $y-\dfrac{c}{t_C}=t_At_B(x-ct_C)$，即 $y+ct_At_Bt_C=t_At_B\left(x+\dfrac{c}{t_At_Bt_C}\right)$. 同理，$BC$ 上的高为 $y+ct_At_Bt_C=t_Bt_C\left(x+\dfrac{c}{t_At_Bt_C}\right)$. 从此可得垂心 H 的坐标：$\left(\dfrac{-c}{t_At_Bt_C},\ -ct_At_Bt_C\right)$，它满足等轴双曲线方程 $xy=c^2$，故这个三角形的垂心 H 在此双曲线上．

843．设 $\triangle ABC$ 的外接圆与过 A、B、C 的等轴双曲线的第四个交点为 D，垂心为 H，求证 DH 过双曲线的中心．

［分析］ ∵ ABC 三顶点在等轴双曲线上，则垂心 H 也在等轴双曲线上(见上题)，而点 D 也在等轴双曲线上，要证 DH 过中心 O，只需证明过 HO 的直线与双曲线另一个交点在 $\triangle ABC$ 的外接圆上．

［证］ 设 $\triangle ABC$ 三顶点在等轴曲线 $xy=c^2$ 上，它们的坐标分别是

$A\left(ct_A,\ \frac{c}{t_A}\right)$、$B\left(ct_B,\ \frac{c}{t_B}\right)$、$C\left(ct_C,\ \frac{c}{t_C}\right)$，则它们的垂心 H 坐标为$\left(-\frac{c}{t_At_Bt_C},\right.$ $\left.-ct_At_Bt_C\right)$，故 H 在等轴双曲线 $xy=c^2$ 上. 连 HO 交双曲线于 $D'\left(\frac{c}{t_At_Bt_C},\ ct_At_Bt_C\right)$. $\because k_{AB}=-\frac{1}{t_At_B}$, $k_{BC}=-\frac{1}{t_Bt_C}$, $k_{AD'}=-t_Bt_C$, $k_{D'C}=-t_Bt_A$,



$$\therefore\quad |\mathrm{tg}\angle ABC|=\left|\frac{k_{AB}-k_{BC}}{1+k_{AB}\cdot k_{BC}}\right|=\left|\frac{t_B(t_A-t_C)}{1+t_At_B^2t_C}\right|,$$

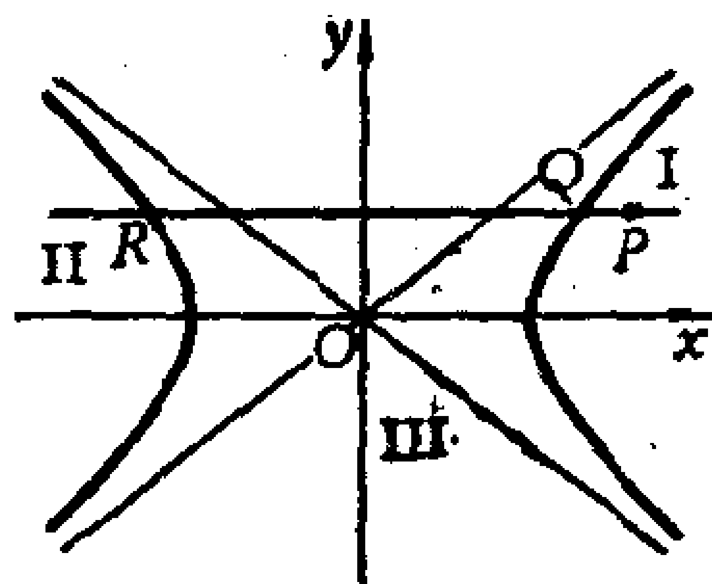
$$|\mathrm{tg}\angle AD'C|=\left|\frac{t_B(t_C-t_A)}{1+t_At_B^2t_C}\right|.$$

$$\therefore\quad \angle ABC=\angle AD'C,\quad 或\quad \angle ABC+\angle AD'C=\pi.$$

因此 A、B、C、D' 四点共圆，即 D' 与 D 重合；而 $D'H$ 过中心，故 DH 也过中心.

［说明］ 因 A、B、C、D 四点共圆，且均在双曲线 $xy=c^2$ 上，根据第835题可直接得点 D 的坐标为$\left(\frac{c}{t_At_Bt_C},\ ct_At_Bt_C\right)$，它与垂心 $H\left(-\frac{c}{t_At_Bt_C},\ -ct_At_Bt_C\right)$关于原点对称，故 DH 必过原点(即双曲线的中心).

844. 已知一点 $P_0(x_0,\ y_0)$与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，求证：(1) 当点 P_0 在双曲线外部（即图中包含焦点的区域 I 或 II)时，$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-1>0$；(2) 当点 P_0 在双曲线内部（即包含中心的区域 III)时，$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-1<0$.



［证］ 过 $P_0(x_0,\ y_0)$作直线 $y=y_0$，交双曲线于两点 $R(x_R,\ y_0)$、$Q(x_Q,\ y_0)$，则 $|x_R|=|x_Q|$. 当点 P 在双曲线外部时，$|x_0|>|x_R|$，即 $x_0^2>x_R^2$；而点 R 在双曲线上，$x_R^2=a^2\left(1+\frac{y_0^2}{b^2}\right)$，$\therefore x_0^2>a^2\left(1+\frac{y_0^2}{b^2}\right)$，即

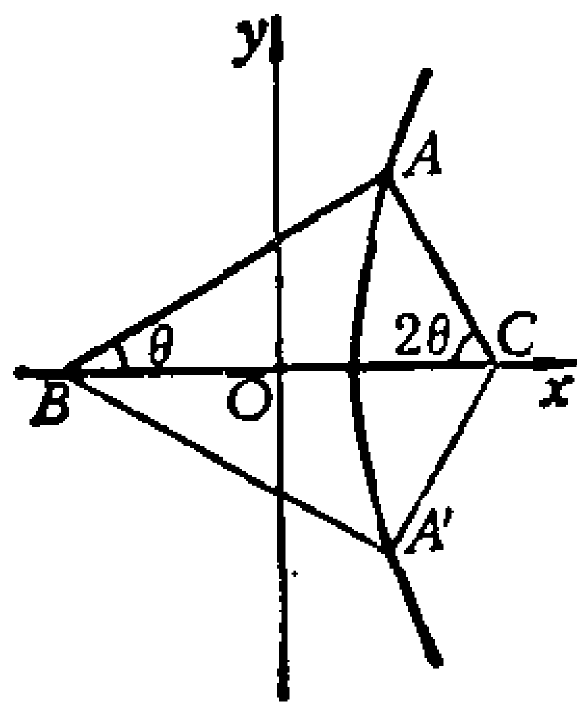
$$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-1>0.$$

当点 P 在双曲线内部时，$|x_0|<|x_R|$，同理可得 $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-1<0$.

§10. 轨 迹 题

845. $\triangle ABC$ 中，底边 $|BC|=2c$ 为定值，若 $2\angle ABC=\angle ACB$，试求顶点 A 的轨迹.

［分析］ 因 $\triangle ABC$ 中 $|BC|=2c$ 为定值，又 $2\angle ABC=\angle ACB$，故可通过 AB 与 AC 的斜率关系求得点 A 的轨迹.



［解］ 取 BC 中点 O 为原点，BC 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系如图，则顶点坐标分别为 $B(-c,\ 0)$、$C(c,\ 0)$. 设点 A 的坐标为$(x,\ y)$，若 $x\neq\pm c$，$y>0$，则

$$k_{AB}=\frac{y}{x+c}=\operatorname{tg}\theta\cdots①,$$

$$k_{AC}=\frac{y}{x-c}=\operatorname{tg}(180^\circ-2\theta)=-\operatorname{tg}2\theta=-\frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}\cdots②.$$

① 代入 ②，得 $\qquad y(3x^2-y^2+2cx-c^2)=0.$

$$\because\ y\neq0,\quad \therefore\ 3x^2-y^2+2cx-c^2=0.$$

(当点 A 在 x 轴下方时，$y<0$，$k_{AB}=\dfrac{y}{x+c}=\operatorname{tg}(180^\circ-\theta)=-\operatorname{tg}\theta$，$k_{AC}=\dfrac{y}{x-c}=\operatorname{tg}2\theta$，得同样的结果). 当 $x=c$ 时，代入方程 $3x^2-y^2+2cx-c^2=0$ 得 $y=\pm2c$. 这时 $\angle ABC=45^\circ$，$\angle ACB=90^\circ$. $\therefore$ 点$(c,\ \pm2c)$也是轨迹上的点. $\because\ 3x^2+2cx-c^2=y^2>0$，$(3x-c)(x+c)>0$，$\therefore\ x>\dfrac{c}{3}$ 或 $x<-c$. $\because\ 0<\theta+2\theta<180^\circ$，$\therefore\ 0<\theta<60^\circ$. 当 $y>0$ 时，$\operatorname{tg}\theta=\dfrac{y}{x+c}>0$，

$\therefore\ x>-c$；当 $y<0$ 时，$\operatorname{tg}\theta=-\dfrac{y}{x+c}>0$，$x>-c$. $\therefore\ x>\dfrac{c}{3}$.

即轨迹为双曲线 $3x^2-y^2+2cx-c^2=0$ 的右半支，除去点 $\left(\dfrac{c}{3},\ 0\right)$.

846. $\triangle ABC$ 中，底边 BC 的位置、长短一定，且 $|\angle B-\angle C|=\alpha$(定锐角)，求顶点 A 的轨迹方程.

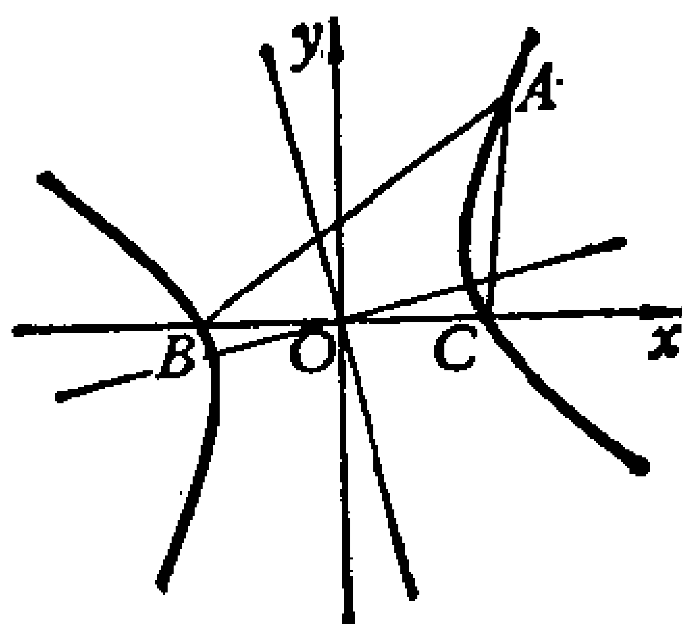
［解］ 取 BC 中点 O 为原点，BC 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系

如图. 若点 B、C 的坐标分别为 $(-a,\ 0)$、$(a,\ 0)$, 点 A 的坐标为 $(x,\ y)$, 且 $x\neq\pm a$, 则

$$\operatorname{tg}B=\frac{y}{x+a},\quad \operatorname{tg}C=-\frac{y}{x-a}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}|B-C|=\left|\frac{\operatorname{tg}B-\operatorname{tg}C}{1+\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C}\right|$$

$$=\left|\frac{\dfrac{y}{x+a}+\dfrac{y}{x-a}}{1-\dfrac{y}{x+a}\cdot\dfrac{y}{x-a}}\right|=\left|\frac{2xy}{x^2-a^2-y^2}\right|,$$



即 $$(x^2-y^2-a^2)\operatorname{tg}\alpha=\pm 2xy.$$

故点 A 轨迹为两双曲线, 除去它们和 x 轴的交点.

847. 在 $\triangle ABC$ 中, 固定底边 BC, 而让顶点 A 移动, 设 $|BC|=a$, 当满足下列条件之一时, 求点 A 的轨迹:

(1) $\sin C-\sin B=\dfrac{1}{2}\sin A$;　　(2) $b\cos B=c\cos C$.

[分析] 利用正弦定理和余弦定理可把已知条件分别化为 $\triangle ABC$ 的边之间的关系, 再由二次曲线的定义, 即能求得轨迹方程.

[解] 取 BC 的中点 O 为原点, BC 所在直线为 x 轴, 建立直角坐标系, 则 $B\left(-\dfrac{a}{2},\ 0\right)$、$C\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$.

(1) 利用正弦定理, 从 $\sin C-\sin B=\dfrac{1}{2}\sin A$, 得 $c-b=\dfrac{1}{2}a$, 即

$$|AB|-|AC|=\frac{1}{2}a$$

为定长. 由双曲线定义可知, 点 A 的轨迹是以 B、C 为焦点, 焦距为 a, 实轴长为 $\dfrac{a}{2}$, 虚轴长为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ 的双曲线的右支, 除去 $\left(\dfrac{a}{4},\ 0\right)$ 这点, 轨迹方程为

$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{a}{4}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\dfrac{\sqrt{3}a}{4}\right)^2}=1\quad\left(x>\frac{a}{4}\right).$$

(2) 当 $b\cos B=c\cos C$ 时，由 $b\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=c\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，得

$$(b^2-c^2)(a^2-b^2-c^2)=0,\quad 即\quad a^2=b^2+c^2\quad 或\quad b=c.$$

故点 A 轨迹由圆 $x^2+y^2=\dfrac{a^2}{4}$ 与直线 $x=0$ 所组成，除去 $\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$、$\left(-\dfrac{a}{2},\ 0\right)$ 及 $(0,\ 0)$ 这三点.

［说明］ 确定三角形中两顶点的位置且已知边角间两个独立条件，第三顶点必相应地在一特定轨迹上移动，所得轨迹中必须除去不能构成三角形的某些点．如果不利用正弦定理、余弦定理，而利用解析几何中的两直线交角公式来求轨迹，比较繁琐.

848. PQ 是圆 $x^2+y^2=r^2$ 中和 x 轴平行的动弦，在直线 PQ 上取一点 T，使 $PT^2+QT^2=k^2$（k 为定值），求点 T 的轨迹.

［解］ 设点 T 的坐标为 $(x,\ y)$，点 P 的坐标为 $(x_0,\ y_0)$，则

$$x_0^2+y_0^2=r^2\cdots①.$$

$\because PQ\parallel x$ 轴，$\therefore$ 点 Q 的坐标为 $(-x_0,\ y_0)$，且

$$y=y_0\cdots②.$$

而 $PT^2=(x-x_0)^2$，$QT^2=(x+x_0)^2$.

$$\because\quad PT^2+QT^2=k^2,\qquad\therefore\quad (x-x_0)^2+(x+x_0)^2=k^2,$$

即

$$x_0^2=\frac{k^2}{2}-x^2\cdots③.$$

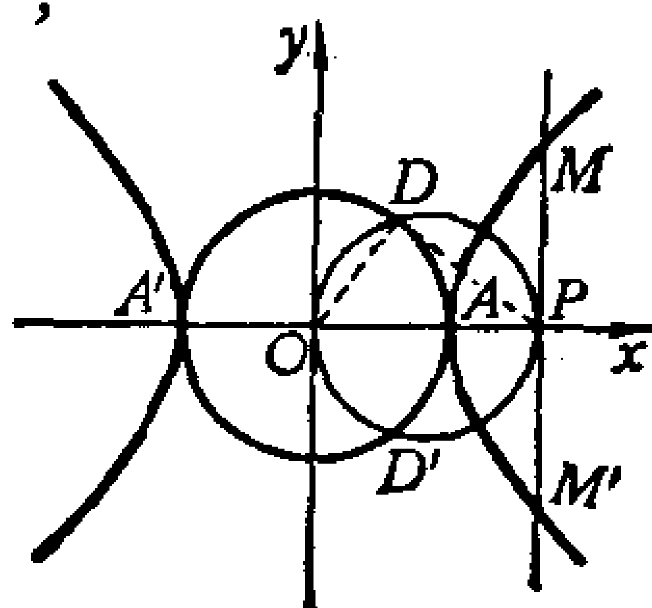
以②、③代入①，得

$$x^2-y^2=\frac{k^2}{2}-r^2\quad(-r\leqslant y\leqslant r).$$

当 $|k|=\sqrt{2}r$ 时，点 T 的轨迹为两条相交直线；当 $|k|\neq\sqrt{2}r$ 时，点 T 的轨迹为等轴双曲线夹在直线 $y=-r$，$y=r$ 之间的部分.

849. 设以原点 O 为中心的圆 O 与 x 轴交于 A、A'．在 x 轴上任取一点 P，$|OP|\geqslant|OA|=a$，以 OP 为直径作圆，交圆 O 于 D、D'．在过 P 与 x 轴垂直的直线上，以 P 为中心，PD 之长为半径截取两点 M、M'．求证：当点 P 在 x 轴上 $(-\infty,\ -a]\cup[a,\ +\infty)$ 运动时，点 M 的轨迹为等轴双曲线 $x^2-y^2=a^2$.

[证] 设点M的坐标为(x, y). $\because \angle ODP=90°$,



$\therefore \quad |OP|^2=|OD|^2+|PD|^2$.

$\because \quad |OP|=|x|$,

$|OD|=a,\ |PD|=|PM|=|y|$,

$\therefore \quad x^2=a^2+y^2$,

即 $$x^2-y^2=a^2.$$

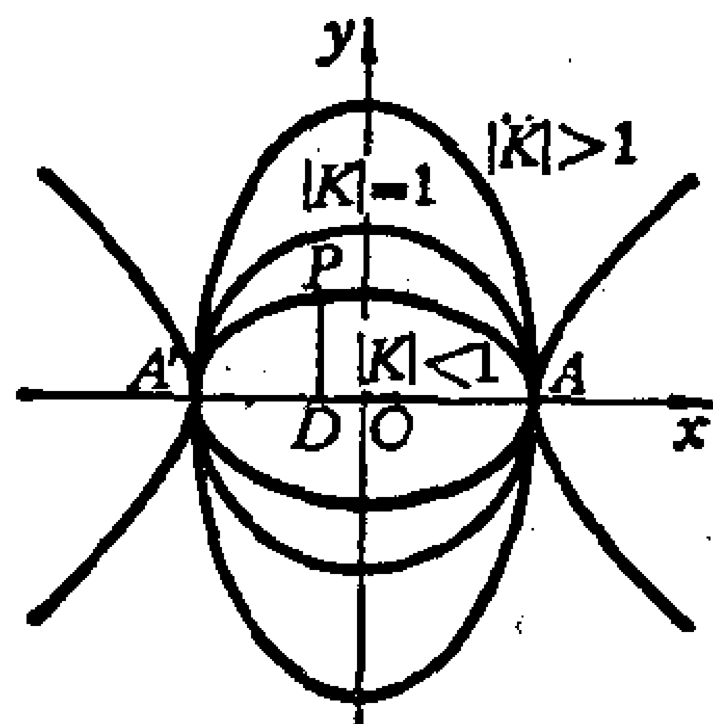
[说明] 按本题结论，可得已知等轴双曲线的实轴长，求作等轴双曲线的一种方法.

850. 设A、A'是两定点，$PD\perp AA'$交AA'于D，k是不为零的常数.

(1) 求满足$PD^2=k^2\cdot A'D\cdot DA$的动点$P$的轨迹;

(2) 求满足$PD^2=k^2\cdot|A'D|\cdot|DA|$的动点$P$的轨迹.

[解] 以$A'A$所在直线为x轴，$A'A$的垂直平分线为y轴，建立直角坐标系如图. 设$A'(-a, 0)$、$A(a, 0)$, $(a>0)$;



$P(x, y)$为轨迹上任意一点.

(1) $y^2=k^2(x+a)(a-x)$,

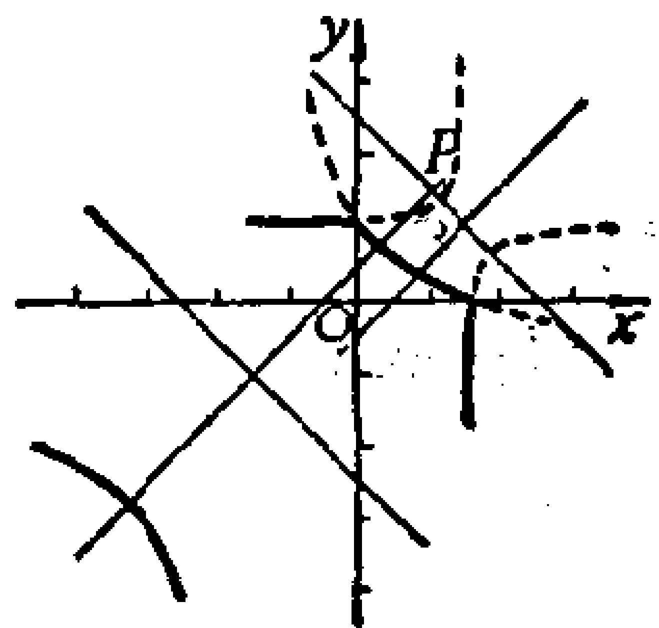
即 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{k^2a^2}=1.$$

当$|k|>1$时，轨迹是长轴在y轴上的椭圆;

当$|k|=1$时，轨迹是半径为a的圆;

当$|k|<1$时，轨迹是长轴在x轴上的椭圆.

(2) $y^2=k^2|a+x|\cdot|a-x|$. 当$|x|\leqslant a$时，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2k^2}=1$，轨迹同(1);
当$|x|>a$时，$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2k^2}=1$，不论$k$取不为零的何值，轨迹为过$A$与$A'$，实轴在$x$轴上的双曲线.



851. 设动点P到点$(2, 3)$的距离等于P到两坐标轴的距离之和，求动点P的轨迹.

[解] 设$P(x, y)$为轨迹上任意一点，则

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=|x|+|y|,$$

即
$$|xy|+2x+3y=\frac{13}{2}.$$

当 $xy>0$, 即在第一、第三象限内，方程可整理成 $(x+3)(y+2)=\frac{25}{2}$，轨迹为中心在 $(-3,\ -2)$ 的等轴双曲线在第一、第三象限内的部分. 当 $xy<0$ 时，方程可整理成 $(x-3)(y-2)=-\frac{1}{2}$，轨迹为中心在 $(3,\ 2)$ 的等轴双曲线在第二、第四象限内的部分.

852. 两定圆 O_1、O_2 的半径均为 r, 有一动圆 P 分别与两圆外切与内切，试求动圆圆心 P 的轨迹.

［分析］ 根据两定圆 O_1、O_2 的位置不同，分两圆相交，两圆外离，两圆外切三种情况分别考察点 P 与两定点 O_1、O_2 距离之和或差是否为一定值.

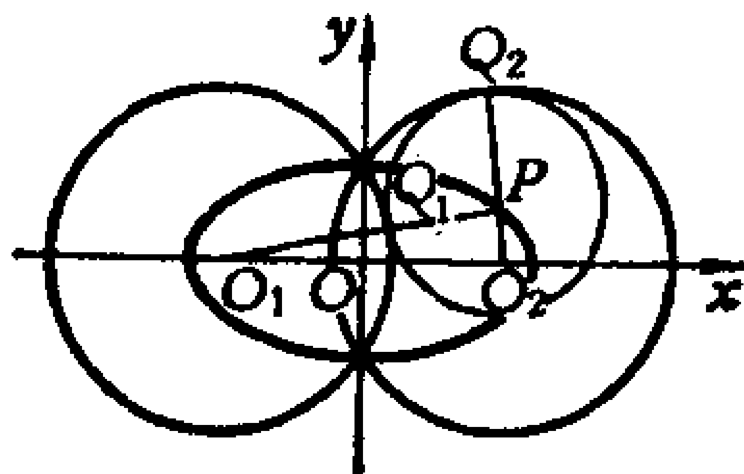


图 1

［解］ 取 O_1O_2 中点 O 为原点，直线 O_1O_2 为 x 轴，建立直角坐标系. 令 $|O_1O_2|=2c$，两定圆半径为 r，动圆和两定圆的切点为 Q_1、Q_2.

当两定圆 O_1、O_2 相交时，即 $c<r$ 时(图 1),

$$\because\quad |PO_1|+|PO_2|=|Q_1O_1|+|Q_2O_2|=2r,$$

由椭圆的定义，点 P 轨迹是以 O_1、O_2 为焦点，焦距为 $2c$，长轴长为 $2r$ 的椭圆. 它的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2-c^2}=1,$$

即 $(r^2-c^2)x^2+r^2y^2=r^2(r^2-c^2)\cdots$①.

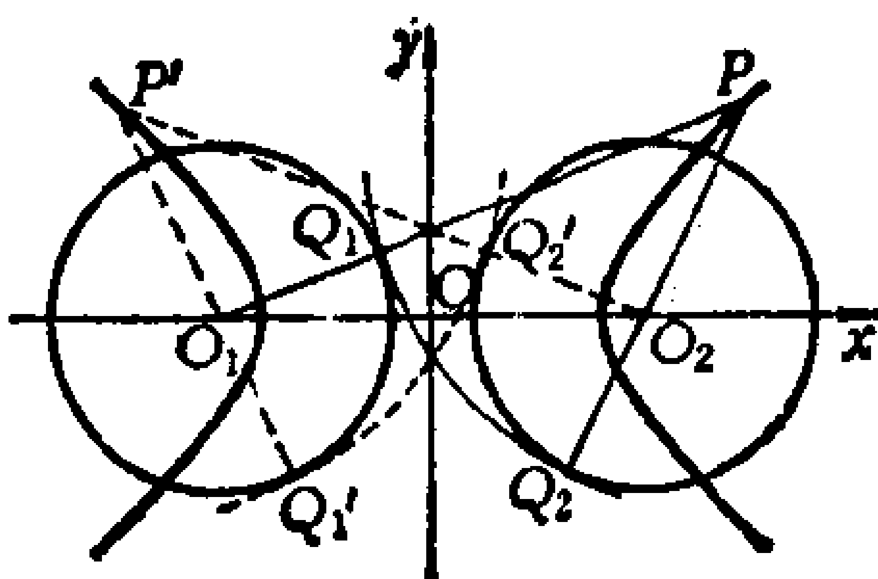


图 2

当两定圆 O_1、O_2 相离时，即 $c>r$ 时(图 2),

$$\because\quad |PO_1|-|PO_2|=(|PQ_1|+r)-(|PQ_2|-r)=2r,$$

或
$$|P'O_2|-|P'O_1|=(|P'Q_2'|+r)-(|P'Q_1'|-r)=2r,$$

由双曲线定义，点 $P(P')$ 轨迹是以 O_1、O_2 为焦点，焦距为 $2c$，实轴长为 $2r$ 的双曲线. 它的轨迹方程为 $\frac{x^2}{r^2}-\frac{y^2}{c^2-r^2}=1$，即

$$(c^2-r^2)x^2-r^2y^2=r^2(c^2-r^2)\cdots②.$$

当两定圆 O_1、O_2 相切时，即 $c=r$ 时(图3)，与两圆 O_1、O_2 分别内切、外切的圆 P 切点均在点 O，所以 P 点必在圆心连线 O_1O_2 上．这时，P 点轨迹是 x 轴，方程为

$$y=0\cdots③.$$

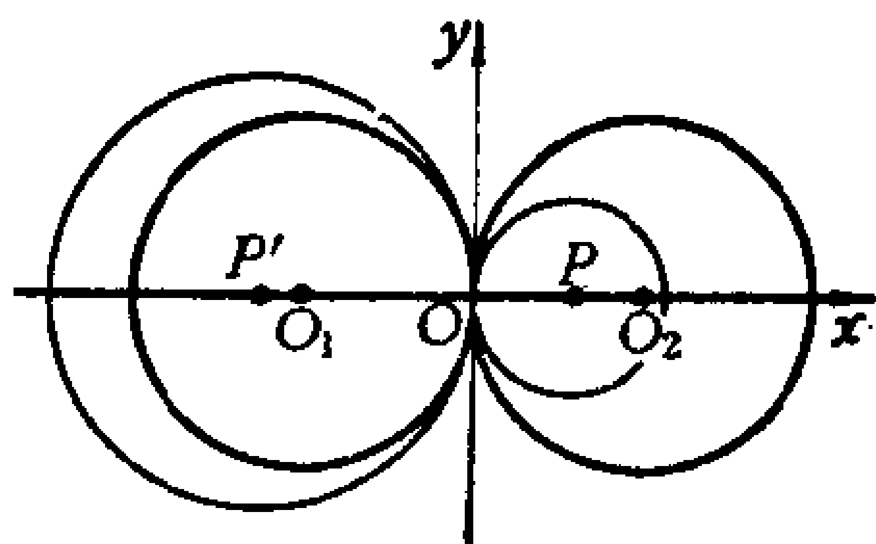


图 3

方程 ①、②、③ 可合并写成

$$(r^2-c^2)x^2+r^2y^2=r^2(r^2-c^2).$$

853．一动圆过定点 $(c,\ 0)$，且与定圆 $(x+c)^2+y^2=4a^2$ $(a>0,\ c>0)$ 相切，试分别情况求动圆圆心的轨迹．

[分析] 按定圆 $(x+c)^2+y^2=4a^2$ 与定点 $(c,\ 0)$ 的相关位置可分三种情况：(1) $a<c$ 时，定点在定圆外；(2) $a>c$ 时，定点在定圆内；(3) $a=c$ 时，定圆恰过定点．根据双曲线、椭圆的定义即可求出各自的轨迹．

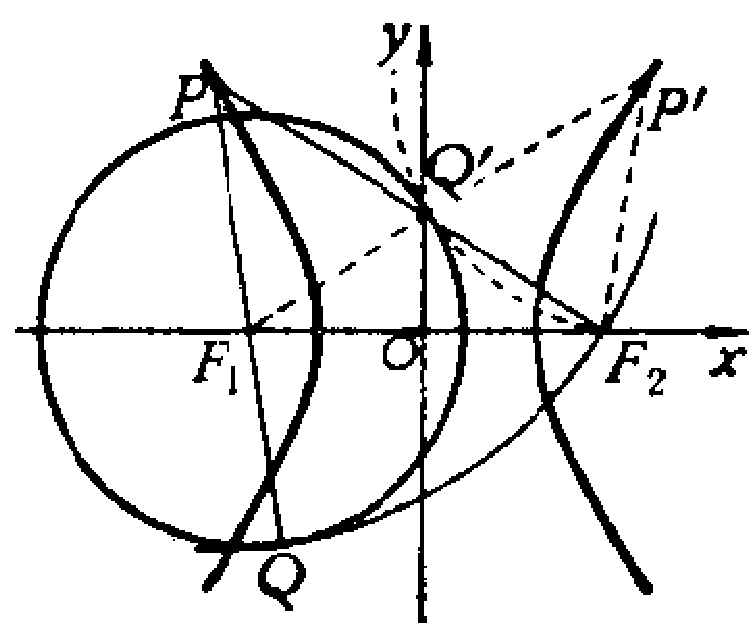


图 1

[解] (1) 当 $a<c$ 时，定点 F_2 在定圆 F_1 外(图1)．当动圆 P 与定圆 F_2 内切时，

$$|PF_2|-|PF_1|=|PQ|-|PF_1|=2a;$$

当动圆 P' 与定圆 F_1 外切时，

$$|P'F_1|-|P'F_2|=|P'F_1|-|P'Q'|=2a.$$

∴ 过定点 F_2 的动圆 P 与定圆 F_1 相切，则

$$||PF_1|-|PF_2||=2a.$$

点 P 轨迹是双曲线．∵ 焦距为 $2c$，F_1、F_2 为焦点，∴ 轨迹方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1.$$

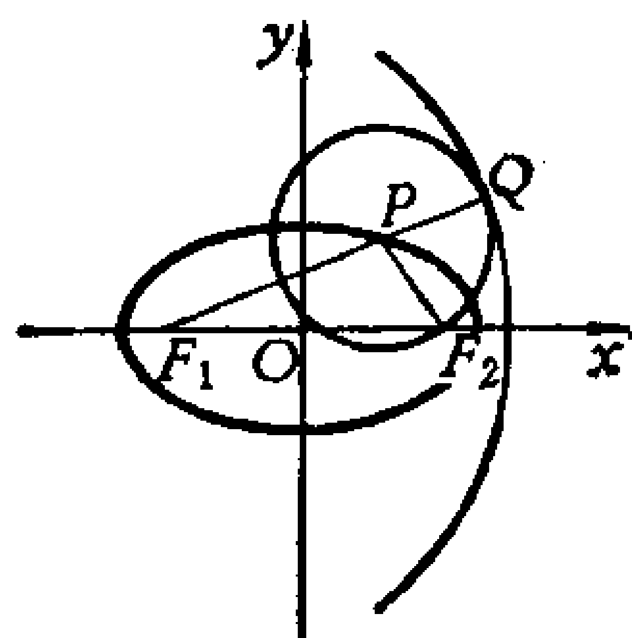


图 2

(2) 当 $a>c$ 时，定点 F_2 在定圆 F_1 内(图2)．动圆 P 只能与定圆 F_1 内切．这时，

$$|PF_1|+|PF_2|=|PF_1|+|PQ|=2a,$$

∴ 点 P 轨迹是椭圆．F_1、F_2 为焦点，焦距为 $2c$．轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1.$

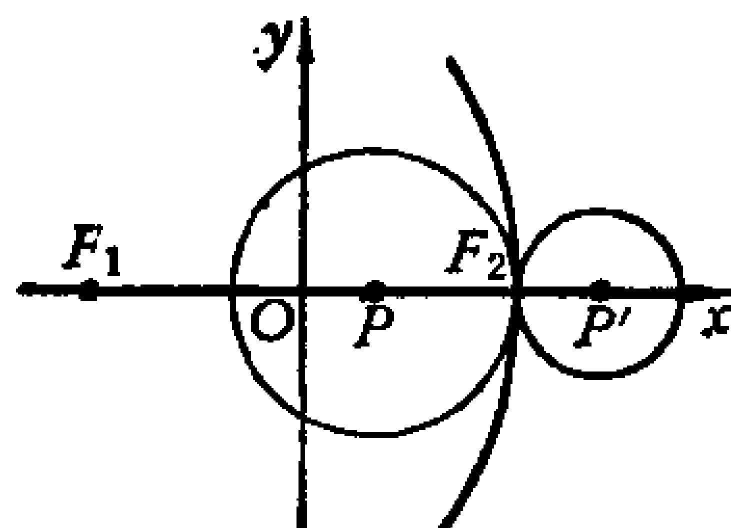
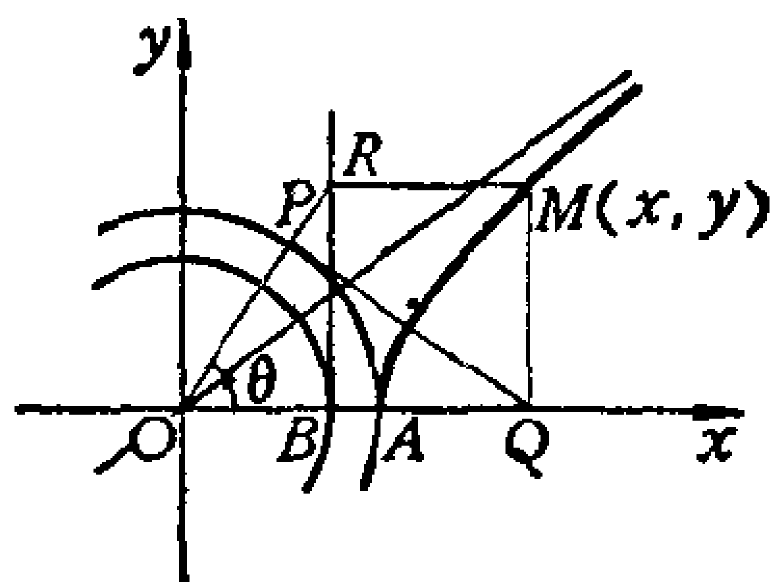


图 3

(3) 当 $a=c$ 时，定圆 F_1 恰过定点 F_2(图3)．

要使 F_2 为切点，与定圆 F_1 内切或外切的圆的圆心 P 只能在 F_1F_2 的连线上. ∴ 这时的轨迹为 x 轴本身，轨迹方程为 $y=0$.

854. 给定以原点为圆心，半径为 a 和 $b(a>b)$ 的两个同心圆，在第一象限内，过大圆上任意一点 P 引大圆的切线交 x 轴于点 Q. 又过小圆与 x 轴的交点 B，引小圆的切线，与 OP 交于点 R. 过点 Q 与 R 分别作 y 轴与 x 轴的平行线交于点 M，求点 M 的轨迹.



［解］ 设点 M 的坐标为 (x, y)，则点 Q 的坐标为 $(x, 0)$，点 R 的坐标为 (b, y). 令 $\angle QOP=\theta$， ∵ $OP\perp PQ$，∴ $x=a\sec\theta$；又 $RB\perp OB$， ∴ $y=b\operatorname{tg}\theta$.

即点 M 轨迹的参数方程为 $\begin{cases}x=a\sec\theta\\y=b\operatorname{tg}\theta,\end{cases}$ θ 为参数，且 $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. 消去参数，得 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(x>0,\ y>0)$. 其轨迹为此双曲线在第一象限内的一段.

［说明］ 这里选作参数的 $\theta=\angle QOP$ 称为此双曲线的离心角. 若 $\theta\in[0, 2\pi)$，且 $\theta\neq\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$，则轨迹为双曲线的全部.

855. 给定双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$. (1) 过点 $A(2, 1)$ 的直线 l 与所给双曲线交于两点 P_1 及 P_2，求线段 P_1P_2 的中点 P 的轨迹方程；(2) 过点 $B(1, 1)$ 能否作直线 m，使 m 与所给双曲线交于两点 Q_1 及 Q_2，且点 B 是线段 Q_1Q_2 的中点？这样的直线如果存在，求出它的方程；如果不存在，说明理由.

［解一］ (1) 设过点 A 的直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases}x=x_0+t\cos\theta\\y=y_0+t\sin\theta\end{cases}\quad (t\text{ 为参数})\cdots①,$$

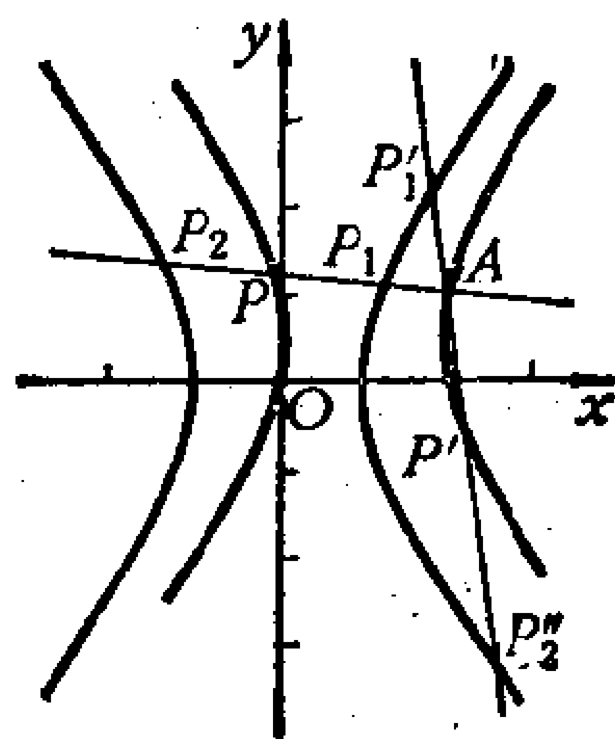
其中 $(x_0,\ y_0)$ 是线段 P_1P_2 的中点 P 的坐标. 以①式代入双曲线方程 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$，并化简得

$$(2\cos^2\theta-\sin^2\theta)t^2+2(2x_0\cos\theta-y_0\sin\theta)t+2x_0^2-y_0^2-2=0\cdots②.$$

因直线 l 和双曲线相交于两点 P_1、P_2，故 $2\cos^2\theta-\sin^2\theta\neq0$，方程 ② 必有两实根 t_1、t_2. 又 (x_0, y_0) 是线段 P_1P_2 的中点坐标，$\therefore t_1+t_2=0$. 即

$$2x_0\cos\theta-y_0\sin\theta=0\cdots③.$$

由①、③得直线 P_1P_2 的方程 $2x_0(x-x_0)-y_0(y-y_0)=0$. 因直线 P_1P_2 过点 $A(2, 1)$，$\therefore 2x_0(2-x_0)-y_0(1-y_0)=0$. 将 x、y 分别代换 x_0、y_0，即得所求的轨迹方程 $2x^2-y^2-4x+y=0$.



(2) 若存在这样的直线 m，则当 $x_0=1$, $y_0=1$ 时方程 ② 必有实根，且两实根之和仍为零，即

$$2\cos\theta-\sin\theta=0,\quad \therefore\quad \sin\theta=2\cos\theta.$$

代入 ②，得 $\quad -2t^2\cos^2\theta-1=0$.

此方程无实根，与以上所述矛盾. 故这样的直线 m 不存在.

[解二] (1) 设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+t\cos\theta\\ y=1+t\sin\theta.\end{cases}$ 代入双曲线方程 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$，整理得

$$(2\cos^2\theta-\sin^2\theta)t^2+2(4\cos\theta-\sin\theta)t+5=0\cdots①.$$

令方程 ① 的两根为 $t_1=AP_1$, $t_2=AP_2$，则

$$t_1+t_2=\frac{-2(4\cos\theta-\sin\theta)}{2\cos^2\theta-\sin^2\theta}.\quad \because\quad AP=t=\frac{1}{2}(t_1+t_2)=\frac{\sin\theta-4\cos\theta}{2\cos^2\theta-\sin^2\theta},$$

$\therefore$ 点 P 的坐标为:

$$x=2+\frac{\sin\theta-4\cos\theta}{2\cos^2\theta-\sin^2\theta}\cos\theta,\quad y=1+\frac{\sin\theta-4\cos\theta}{2\cos^2\theta-\sin^2\theta}\sin\theta.$$

此即轨迹的参数方程，其中参数 θ 满足条件 $2\cos^2\theta-\sin^2\theta\neq0$. 消去参数 θ，得 $2(x-2)^2-(y-1)^2=y-1-4(x-2)$，即 $2x^2-y^2-4x+y=0$.

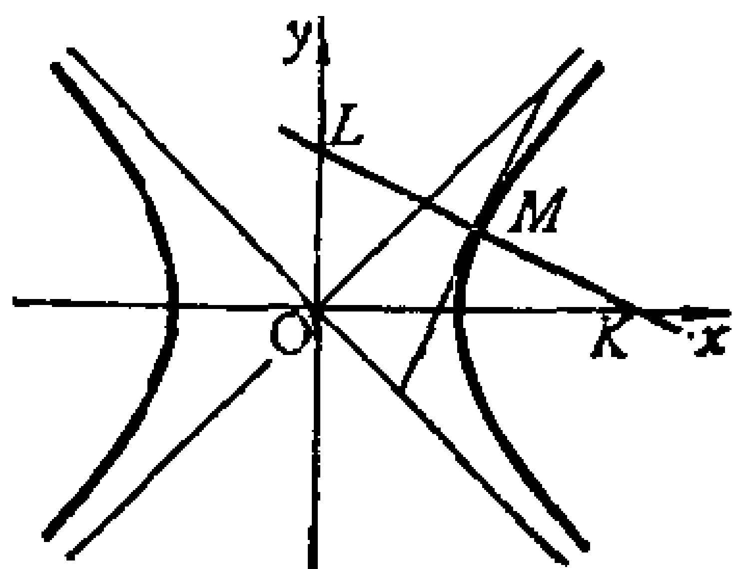
(2) 过 $B(1, 1)$ 的直线 m 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+t\cos\theta\\ y=1+t\sin\theta.\end{cases}$ 代入双曲线方程得 $(2\cos^2\theta-\sin^2\theta)t^2+2(2\cos\theta-\sin\theta)t-1=0$. 其判别式 $\Delta=8\cos^2\theta\cdot(-2\operatorname{tg}\theta+3)$. $\therefore$ 当 $\operatorname{tg}\theta>\dfrac{3}{2}$ 时，$\Delta<0$，直线 m 与双曲线无实交点. 如果 B 为 Q_1Q_2 的中点，则 $2\cos\theta-\sin\theta=0$, $\operatorname{tg}\theta=2>\dfrac{3}{2}$. 故这样的直线 m 不存在.

［说明］　以点$P_0(x_0, y_0)$为中点的双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的弦是否存在，参见第749题．

856．过等轴双曲线上任意一点M的法线和实轴、虚轴分别交于K、L．求线段KL中点的轨迹方程．

［解］　设等轴双曲线$x^2-y^2=a^2$上任意一点M的坐标为(x_0, y_0)，则$x_0^2-y_0^2=a^2$．过点M的切线方程为

$$x_0x-y_0y=a^2.$$

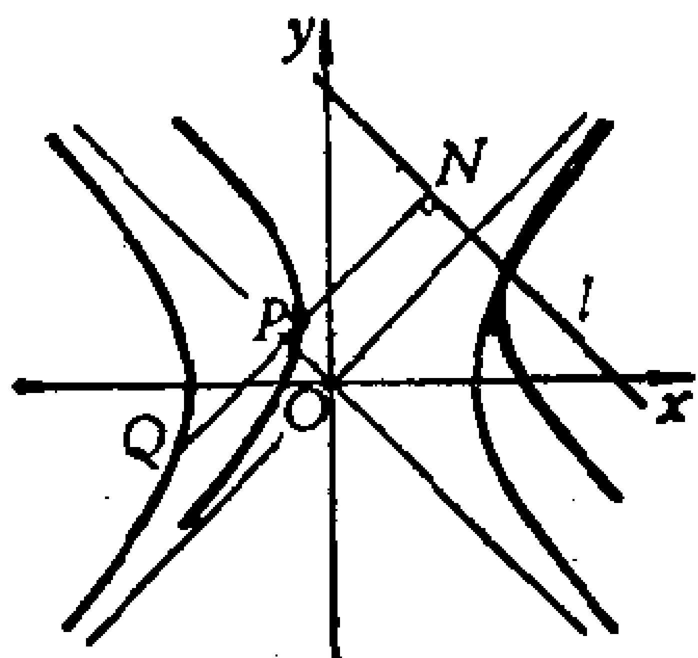


由于双曲线在同一点上的切线和法线互相垂直，故可令过点M的法线方程为$y_0x+x_0y=\lambda$．以点M的坐标代入上式，求得$\lambda=2x_0y_0$，∴此法线方程为$y_0x+x_0y=2x_0y_0$．且此法线和两坐标轴都相交，故$x_0\neq0$，$y_0\neq0$．由此可得法线与实轴、虚轴的交点K、L的坐标分别为$(2x_0, 0)$、$(0, 2y_0)$．

设线段KL的中点坐标为(x, y)，则$x=\frac{2x_0+0}{2}=x_0$，$y=\frac{0+2y_0}{2}=y_0$．故所求的轨迹方程即为原等轴双曲线方程$x^2-y^2=a^2$．

857．自双曲线$x^2-y^2=1$上一动点Q引直线l：$x+y=2$的垂线，垂足为N．求线段QN中点P的轨迹方程．

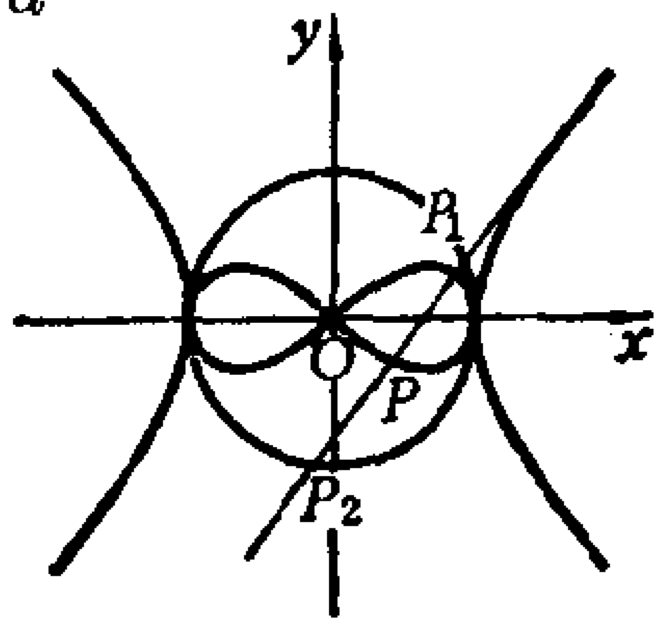
［解］　设点Q的坐标为$(\sec\theta, \operatorname{tg}\theta)$（$\theta$为参数）．∵$QN\perp l$，∴可设直线$QN$的方程为$x-y=\lambda$…①．以点$Q$的坐标代入①式，得$\lambda=\sec\theta-\operatorname{tg}\theta$，故直线$QN$的方程为$x-y=\sec\theta-\operatorname{tg}\theta$…②．又直线$l$的方程为$x+y=2$…③，从②、③解得点$N$的横坐标$x_N=1+\frac{\sec\theta-\operatorname{tg}\theta}{2}$．设线段$QN$中点$P$的坐标为$(x, y)$，则$x=\frac{x_N+x_Q}{2}=\frac{2+3\sec\theta-\operatorname{tg}\theta}{4}$…④．由②、④得$3x+y-2=2\sec\theta$…⑤，$x+3y-2=2\operatorname{tg}\theta$…⑥．⑤^2－⑥^2，化简即得所求的轨迹方程$2x^2-2y^2-2x+2y-1=0$．



858. 等轴双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 的动切线交圆 $x^2+y^2=a^2$ 于 P_1、P_2. 试求弦 P_1P_2 中点的轨迹方程.

[解] 设等轴双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 上任意一点 M 的坐标为 $(a\sec\theta, a\operatorname{tg}\theta)$ (θ 为参数), 则过点 M 的切线方程为 $x\sec\theta-y\operatorname{tg}\theta=a$, 即 $x-y\sin\theta=a\cos\theta\cdots$①. 又过圆 $x^2+y^2=a^2$ 的中心 $O(0, 0)$ 且与直线①垂直的直线方程为 $x\sin\theta+y=0\cdots$②. 直线①、②的交点即为 P_1、P_2 的中点 P. 从②得 $x\sin\theta=-y\cdots$③. 由①、③得 $x\cos\theta=\dfrac{x^2+y^2}{a}\cdots$④. ③^2+④^2, 化简即得所求的轨迹方程

$$(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0.$$



[说明] 把方程化成以原点为极点, 以 x 正半轴为极轴的极坐标方程为 $\rho^2=a^2\cos 2\theta$.

$$\because\ |\cos 2\theta|\leqslant 1,\quad \therefore\ |\rho|\leqslant|a|.$$

故点 P 的轨迹都在圆 $x^2+y^2=a^2$ 内和圆周上, 其曲线称为双纽线.

859. 过圆 $x^2+y^2=a^2\ (a>0)$ 上一动点 P 引等轴双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 的两切线, 求两切点连线的中点轨迹方程.

[分析一] 过 $x^2+y^2=a^2$ 上一动点 $P(x_0, y_0)$ 引等轴双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 两切线, 两切点的连线为切点弦, 它的方程为 $x_0x-y_0y=a^2$. 故可先求它与 $x^2-y^2=a^2$ 的交点, 再求出中点坐标.

[解] 设点 P 的坐标为 $(a\cos\theta, a\sin\theta)$, 则由点 P 向双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 所引两切线的切点连线方程为 $x\cos\theta-y\sin\theta=a\cdots$①. 由双曲线方程得 $x^2\sin^2\theta-y^2\sin^2\theta=a^2\sin^2\theta\cdots$②. ①代入②, 并化简得

$$(\sin^2\theta-\cos^2\theta)x^2+2ax\cos\theta-a^2(1+\sin^2\theta)=0,$$

当 $\theta\neq n\pi+\dfrac{\pi}{4}$ 时, 此方程恒有两实根 x_1、x_2, 且 $x_1+x_2=\dfrac{2a\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$. 设自点 P 向双曲线引两切线的切点连线的中点坐标为 (x, y), 则 $x=\dfrac{a\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$, 即 $x\cos 2\theta=a\cos\theta\cdots$③. 同理可得 $y\cos 2\theta=a\sin\theta\cdots$④. ③^2+④^2, 得 $(x^2+y^2)\cos^2 2\theta=a^2\cdots$⑤; ③^2−④^2, 得 $(x^2-y^2)\cos 2\theta=a^2\cdots$⑥. 由⑤、⑥可得 $(x^2-y^2)^2=a^2(x^2+y^2)$, $(x^2+y^2\neq 0)$. 此即所求的轨迹方程.

[分析二] 因双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 的以 (α, β) 为中点的弦方程易求, 而

圆上一动点 P 关于此双曲线的切点弦与上述中点弦重合，据此即可得轨迹方程.

［解二］ 设圆 $x^2+y^2=a^2$ 上动点 P 的坐标为 $(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$，则点 P 关于双曲线的切点弦方程为 $x\cos\theta-y\sin\theta=a\cdots$①. 设切点弦的中点为 $(\alpha,\ \beta)$，则该弦的方程又可写为 $\alpha x-\beta y=\alpha^2-\beta^2\cdots$②（参见第749题）.

∵ ① 与 ② 重合，∴ $\dfrac{\alpha}{\cos\theta}=\dfrac{\beta}{\sin\theta}=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{a}$.

故
$$\cos\theta=\frac{a\alpha}{\alpha^2-\beta^2},\quad \sin\theta=\frac{a\beta}{\alpha^2-\beta^2};$$
$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=\frac{a^2\alpha^2+a^2\beta^2}{(\alpha^2-\beta^2)^2}=1.$$

以 x、y 代换 α、β，即得所求的轨迹方程 $(x^2-y^2)^2=a^2(x^2+y^2)$，$(x^2+y^2\neq0)$.

860. 求等轴双曲线 $xy=c^2$ 的定长为 $2d$ 的弦的中点轨迹方程.

［解］ 设等轴双曲线 $xy=c^2$ 的定长为 $2d$ 的弦的两端点坐标为 $\left(ct_1,\dfrac{c}{t_1}\right)$ 和 $\left(ct_2,\ \dfrac{c}{t_2}\right)$，其中点坐标为 $(x,\ y)$，则

$$2x=c(t_1+t_2)\cdots①,\qquad 2y=\frac{c(t_1+t_2)}{t_1t_2}\cdots②.$$

由①、②得
$$t_1t_2=\frac{x}{y}\cdots③.$$

又
$$c^2(t_1-t_2)^2+c^2\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)^2=4d^2,$$

即
$$c^2(t_1+t_2)^2-4c^2t_1t_2+\frac{c^2(t_1+t_2)^2}{t_1^2t_2^2}-\frac{4c^2}{t_1t_2}=4d^2\cdots④.$$

以①、②、③代入④，得 $4x^2-4c^2\dfrac{x}{y}+4y^2-4c^2\dfrac{y}{x}=4d^2$，即
$$(x^2+y^2)(xy-c^2)=d^2xy.$$

此即所求的轨迹方程.

861. 求双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a<b)$ 在中心 O 张直角之弦的中点轨迹方程.

［解］ 设 $P(x_0,\ y_0)$ 为轨迹上任意一点，以 P 为中点的双曲线的弦方程

为 $b^2x_0(x-x_0)-a^2y_0(y-y_0)=0$，即 $b^2x_0x-a^2y_0y=b^2x_0^2-a^2y_0^2$. 此弦的两端为 Q_1、Q_2，根据提要(3.120)，直线 OQ_1、OQ_2 的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{b^2x_0x-a^2y_0y}{b^2x_0^2-a^2y_0^2}\right)^2.$$

$$\because\quad OQ_1\perp OQ_2,\quad\therefore\quad \frac{1}{a^2}-\left(\frac{b^2x_0}{b^2x_0^2-a^2y_0^2}\right)^2-\frac{1}{b^2}-\left(\frac{-a^2y_0}{b^2x_0^2-a^2y_0^2}\right)^2=0,$$

[据提要(3.113)]. 以 x、y 代换 x_0、y_0，并化简得 $\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}=\frac{b^4x^2+a^4y^2}{(b^2x^2-a^2y^2)^2}$，

即 $$(a^2-b^2)(b^2x^2-a^2y^2)^2+a^2b^2(b^4x^2+a^4y^2)=0.$$

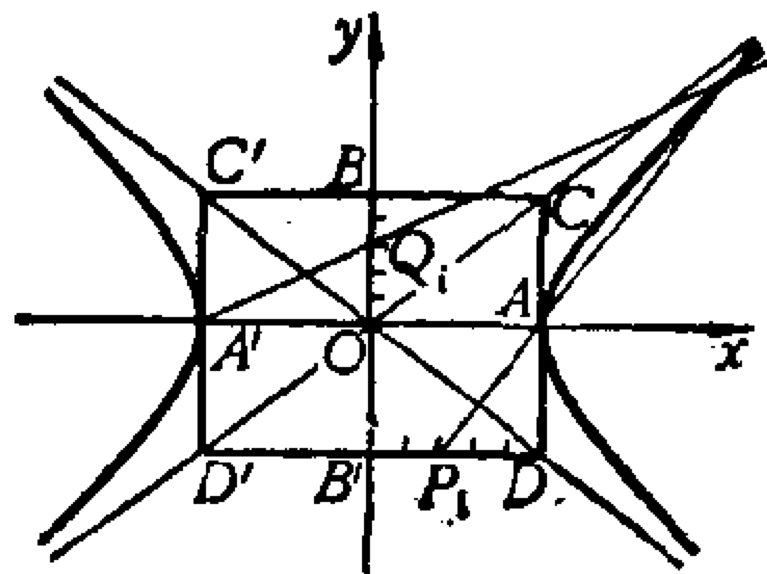
此轨迹方程中 x、y 的允许值范围参见第 749 题.

862. 过定点 $K(\alpha,\ \beta)$ 作椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 一动直径的垂线. 试求此垂线与动直径的共轭直径的交点的轨迹.

［解］ 取动直径的斜率 m 为参数. 过点 $K(\alpha,\ \beta)$ 与动直径垂直的直线为 $y-\beta=-\frac{1}{m}(x-\alpha)\cdots$①，动直径的共轭直径方程为 $y=-\frac{b^2}{a^2m}x\cdots$②. 从①与②消去参数 m，得 $y-\beta=\frac{a^2y}{b^2x}(x-\alpha)$，即 $(a^2-b^2)xy+b^2\beta x-a^2\alpha y=0$. 故轨迹为双曲线.

［说明］ 此双曲线称为阿波罗尼斯双曲线，其渐近线与椭圆的轴互相平行. 它也是过点 K 作椭圆的法线的法线足的轨迹.

863. 以 $2a$、$2b(a>b)$ 为边长的矩形 $CDD'C'$ 的中心为 O，取过 O 分别与矩形相邻两边平行的直线为 x、y 轴，x 轴与 CD、$C'D'$ 交于 A、A' 两点，y 轴与 CC'、DD' 交于 B、B' 两点. 将 OA、OB 分成 n 等分，OA 的等分点在 $B'D$ 上的射影为 P_i，OB 上的对应等分点为 Q_i(OB 上 i 自 O 算起，$B'D$ 上 i 自 D 算起)，则 AP_i 与 $A'Q_i$ 交点在定双曲线上.



［证］ 设 $|OA|=a$，$|OB|=b$，取 $\lambda=\frac{i}{n}$ 为参数，P_i、Q_i 的坐标分别为 $(a-\lambda a,\ -b)$、$(0,\ \lambda b)$. 直线 AP_i 的方程为

$$y=\frac{-b}{a-\lambda a-a}(x-a)\cdots①,$$

直线 $A'Q_t$ 的方程为

$$y=\frac{\lambda b}{a}(x+a)\cdots②.$$

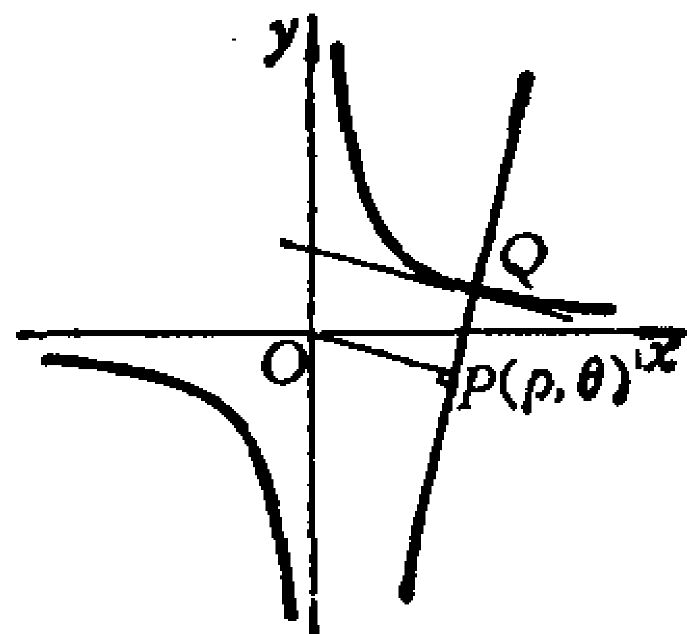
从①、②消去参数 λ，得 $y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$，即 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

［说明］ 按本题结论，若已知双曲线的实轴、虚轴之长，即可作出该双曲线．这是画双曲线的一种方法．

864．求等轴双曲线 $xy=c^2(c>0)$ 的中心在其动法线上射影的轨迹方程．

［解一］ 设动法线的切点坐标为 $Q\left(ct, \frac{c}{t}\right)$，取 t 为参数，法线方程为 $t^2x-y=ct^3-\frac{c}{t}\cdots①$．过中心 O 与法线垂直的直线 OP 的方程为 $x+t^2y=0\cdots②$．从①、②消去 t，即得

$$c^2(x^2-y^2)^2+xy(x^2+y^2)^2=0.$$



［解二］ 设轨迹上任一点 P 的极坐标为 (ρ, θ)，则与 OP 垂直的直线方程为

$$x\cos\theta+y\sin\theta=\rho\cdots①.$$

设点 $Q\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ 为双曲线上任一点，则过点 Q 的法线方程为

$$t^2x-y=ct^3-\frac{c}{t}\cdots②.$$

∵ 直线①与②重合，得

$$\frac{\cos\theta}{t^2}=\frac{\sin\theta}{-1}=\frac{\rho}{ct^3-\frac{c}{t}}\cdots③.$$

由③得 $t^2=-\operatorname{ctg}\theta$，消去 t，得 $\rho^2=-c^2\sec\theta\csc\theta\cos^2 2\theta$．此即所求轨迹的极坐标方程．化为直角坐标方程，即 $c^2(x^2-y^2)^2+xy(x^2+y^2)^2=0$.

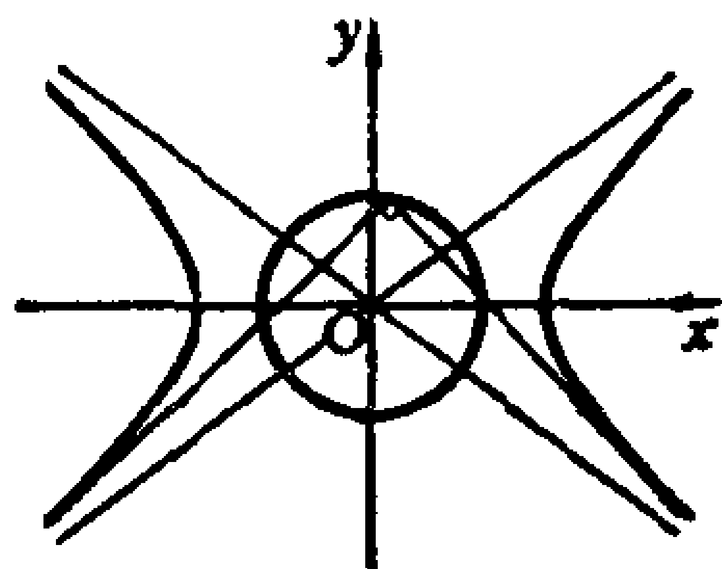
865．求双曲线的两条互相垂直的切线的交点轨迹．

［解］ 设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$．由于双曲线的两条互相垂直的切线其斜率一定存在，且不等于零，故可设其斜率分别为 k 和 $-\frac{1}{k}$，则两

切线方程分别为 $y=kx\pm\sqrt{a^2k^2-b^2}\cdots$①，和 $y=-\frac{1}{k}x\pm\sqrt{\frac{a^2}{k^2}-b^2}\cdots$②.

由①得

$$y^2-2kxy+k^2x^2=a^2k^2-b^2\cdots③.$$



由②得　　$k^2y^2+2kxy+x^2=a^2-b^2k^2\cdots④$.

③+④，得

$$(1+k^2)y^2+(1+k^2)x^2=a^2(1+k^2)-b^2(1+k^2),$$

即 $x^2+y^2=a^2-b^2$. 故当 $a>b$ 时，所求的轨迹为圆心在双曲线的中心，半径平方等于半实轴与半虚轴的平方差的圆；当 $a=b$ 时，轨迹即为双曲线的中心；当 $a<b$ 时，轨迹不存在.

［说明］ 此轨迹称为双曲线的准圆或蒙日(Monge)圆.

866. 求过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的动法线弦的两端的切线交点的轨迹方程.

［解］ 设动法线弦的一个端点坐标为 $(a\sec\theta,\ b\operatorname{tg}\theta)$，两切线的交点坐标为 $(x_0,\ y_0)$，则此动法线方程可表示为 $\frac{a}{\sec\theta}x+\frac{b}{\operatorname{tg}\theta}y=a^2+b^2\cdots$①. 根据切点弦方程，又有 $b^2x_0x-a^2y_0y=a^2b^2\cdots$②. ∵ ①与②表示同一直线，

$$\therefore\quad \frac{\frac{a}{\sec\theta}}{b^2x_0}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2},\quad \frac{\frac{b}{\operatorname{tg}\theta}}{-a^2y_0}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}.$$

于是

$$\sec\theta=\frac{a^3}{(a^2+b^2)x_0},\qquad \operatorname{tg}\theta=\frac{-b^3}{(a^2+b^2)y_0}.$$

又 ∵ $\sec^2\theta-\operatorname{tg}^2\theta=1$，∴ $\left[\frac{a^3}{(a^2+b^2)x_0}\right]^2-\left[\frac{-b^3}{(a^2+b^2)y_0}\right]^2=1.$

以 x、y 代换 x_0、y_0，化简即得所求的轨迹方程 $a^6y^2-b^6x^2=(a^2+b^2)^2x^2y^2$.

867. 设等轴双曲线 $x^2-y^2=1$ 上两动点 Q、R 的离心角分别为 α、β，且 $\sin\alpha+\sin\beta=-1$. 求以 OQ、OR 为直径的两圆的交点轨迹方程.

［解］ 设点 Q、R 的坐标分别为 $(\sec\alpha,\ \operatorname{tg}\alpha)$ 和 $(\sec\beta,\ \operatorname{tg}\beta)$，则据第 385 题，以 OQ 为直径的圆方程是 $x^2+y^2=x\sec\alpha+y\operatorname{tg}\alpha$，即 $(x^2+y^2)\cos\alpha=$

$x+y\sin\alpha\cdots$①. 同理，以 OR 为直径的圆方程为 $(x^2+y^2)\cos\beta=x+y\sin\beta\cdots$②. ①式两边平方，并整理为

$$[(x^2+y^2)^2+y^2]\sin^2\alpha+2xy\sin\alpha-(x^2+y^2)^2+x^2=0.$$

同理，由②式得

$$[(x^2+y^2)^2+y^2]\sin^2\beta+2xy\sin\beta-(x^2+y^2)^2+x^2=0.$$

$\therefore \sin\alpha$、$\sin\beta$ 为 λ 的方程

$$[(x^2+y^2)^2+y^2]\lambda^2+2xy\lambda-(x^2+y^2)^2+x^2=0$$

的两根. 当 $x\neq0$, $y\neq0$ 时，得 $\sin\alpha+\sin\beta=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2+y^2}$. 由已知条件 $\sin\alpha+\sin\beta=-1$，即得 $\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2+y^2}=1$, $\therefore (x^2+y^2)^2+y^2=2xy\cdots$③. 而 $x=0$, $y=0$ 仍为方程③的解，故所求的轨迹方程即为

$$(x^2+y^2)^2+y^2=2xy.$$

868. 求证双曲线 $2x^2-y^2-4x-4mx-4my-2m^2+4m=0$ 两顶点的轨迹为两互相平行的直线，其中 m 为实参数.

［分析］ 平移后，求出两顶点坐标，再消去参数 m.

［证］ 双曲线方程可化成 $\dfrac{(x-m-1)^2}{1}-\dfrac{(y+2m)^2}{2}=1$, $\therefore$ 两顶点的坐标分别为 $\begin{cases}x=m+2\\y=-2m,\end{cases}$ $\begin{cases}x=m\\y=-2m.\end{cases}$ 消去参数 m，两顶点的轨迹分别为直线 l_1: $y=-2x+4$ 和 l_2: $y=-2x$. $\therefore$ $l_1\parallel l_2$.

869. 倾角为 45° 的直线和共焦点的有心锥线系 $\dfrac{x^2}{25-k}+\dfrac{y^2}{9-k}=1$ 相切，求切点的轨迹.

［分析］ 固定参数 k，相应的切点 (x_1, y_1) 应在相应的圆锥曲线 $\dfrac{x^2}{25-k}+\dfrac{y^2}{9-k}=1$ 上；又从过切点 (x_1, y_1) 的切线的倾角为 45°，可得含 k 的另一方程. 由这两方程消去参数 k，即得切点的轨迹.

［解］ 设切点坐标为 (x_1, y_1)，则 $\dfrac{x_1^2}{25-k}+\dfrac{y_1^2}{9-k}=1\cdots$①，切线方程为 $\dfrac{x_1x}{25-k}+\dfrac{y_1y}{9-k}=1$. $\because$ 切线的倾斜角为 45°，$\therefore -\dfrac{x_1}{25-k}\div\dfrac{y_1}{9-k}=$

$\operatorname{tg}45°=1$，即 $\frac{x_1}{25-k}=-\frac{y_1}{9-k}\cdots$②. ②代入①，得 $x_1\left(\frac{-y_1}{9-k}\right)+\frac{y_1^2}{9-k}=1$，即 $-x_1y_1+y_1^2=9-k\cdots$③；$\frac{x_1^2}{25-k}+y_1\left(-\frac{x_1}{25-k}\right)=1$，即 $x_1^2-x_1y_1=25-k\cdots$④. 由③、④消去 k，得 $x_1^2-y_1^2=16$. 故所求切点轨迹为等轴双曲线 $x^2-y^2=16$.

[说明] 由切线方程可知，已知曲线系的切线都不过原点. 不过原点的直线其倾角为 45° 的充要条件是它在两坐标轴的截距互为相反数. 因此，若在两坐标轴上截距互为相反数的直线和圆锥曲线系 $\frac{x^2}{25-k}+\frac{y^2}{9-k}=1$ 相切，其切点的轨迹也是等轴双曲线 $x^2-y^2=16$.

870. 已知在坐标轴上截距相等的直线和共焦点有心锥线系 $\frac{x^2}{6-k}+\frac{y^2}{15-k}=1$ 相切，求切点的轨迹.

[解] 设 (x_1, y_1) 为切点坐标，则

$$\frac{x_1^2}{6-k}+\frac{y_1^2}{15-k}=1\cdots①;$$

切线方程为 $\frac{x_1x}{6-k}+\frac{y_1y}{15-k}=1$，∵ 切线在两坐标轴的截距相等，

$$\therefore\quad \frac{6-k}{x_1}=\frac{15-k}{y_1}\cdots②.$$

②代入①，得

$$x_1^2+y_1x_1=6-k\cdots③,$$

$$x_1y_1+y_1^2=15-k\cdots④.$$

④−③，得 $y_1^2-x_1^2=9$. 以 x、y 代换 x_1、y_1，即得所求轨迹为等轴双曲线 $y^2-x^2=9$.

871. 自一已知点作共渐近线的双曲线系的切线，试求切点的轨迹.

[解] 设已知点为 $M(x_0, y_0)$，共渐近线的双曲线系为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$，切点坐标为 $P(x_1, y_1)$，则切线方程为 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=\lambda$，且过点 $M(x_0, y_0)$，$\therefore \frac{x_1x_0}{a^2}-\frac{y_1y_0}{b^2}=\lambda\cdots$①；又切点 (x_1, y_1) 在双曲线系中相应的双曲线上，即

$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=\lambda\cdots$②. 由①、②消去$\lambda$,得$\frac{x_1^2-x_0x_1}{a^2}-\frac{y_1^2-y_0y_1}{b^2}=0$. 以$x$、$y$代换$x_1$、$y_1$,即得所求轨迹的方程

$$\frac{\left(x-\frac{x_0}{2}\right)^2}{a^2}-\frac{\left(y-\frac{y_0}{2}\right)^2}{b^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right).$$

轨迹是中心在$\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$的双曲线.

872. 设圆与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的四个交点中至少有三个重合于$P(a\sec\varphi, b\operatorname{tg}\varphi)$,其中$\varphi$为参数,求这些圆的中心轨迹方程.

［分析］ 要求圆心的轨迹,可先求圆系方程. 如圆与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的四个交点为$P$、$Q$、$R$、$S$,则$PS$与$QR$与双曲线的实轴的夹角互补(参见第1112题),即$PS$与$QR$的斜率互为相反数. 若点$Q$、$R$与点$P$重合,则$QR$与过点$P$的双曲线的切线重合. 因而从过点$P$的切线方程,可求出$PS$的方程,利用圆锥曲线系方程即得圆系方程.

［解］ 双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$过点$P(a\sec\varphi, b\operatorname{tg}\varphi)$的切线方程为$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\sin\varphi=\cos\varphi$. 设圆与该双曲线的第四个交点为$S$,因$PS$的斜率与此切线的斜率互为相反数,故$PS$的方程为$\frac{x-a\sec\varphi}{a}+\frac{y-b\operatorname{tg}\varphi}{b}\sin\varphi=0$,即$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\sin\varphi-\frac{1+\sin^2\varphi}{\cos\varphi}=0$. 因此满足条件的圆系方程为

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\sin\varphi-\frac{1+\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\sin\varphi-\cos\varphi\right)$$
$$=\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1\right)\cdots①,$$

其中λ满足条件$\frac{1}{a^2}-\frac{\lambda}{a^2}=\frac{\lambda}{b^2}-\frac{\sin^2\varphi}{b^2}$, $\therefore\ \lambda=\frac{b^2+a^2\sin^2\varphi}{a^2+b^2}$.代入①,得

$$x^2+y^2-\frac{2x}{a}(a^2+b^2)\sec^3\varphi+\frac{2y}{b}(a^2+b^2)\operatorname{tg}^3\varphi$$
$$+(a^2+2b^2)\sec^2\varphi+(2a^2+b^2)\operatorname{tg}^2\varphi=0.$$

其圆心坐标为 $\begin{cases} x=\dfrac{a^2+b^2}{a}\sec^3\varphi \\ y=-\dfrac{a^2+b^2}{b}\operatorname{tg}^3\varphi, \end{cases}$ 消去参数 φ，得圆心的轨迹方程

$$(ax)^{\frac{2}{3}}-(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2+b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

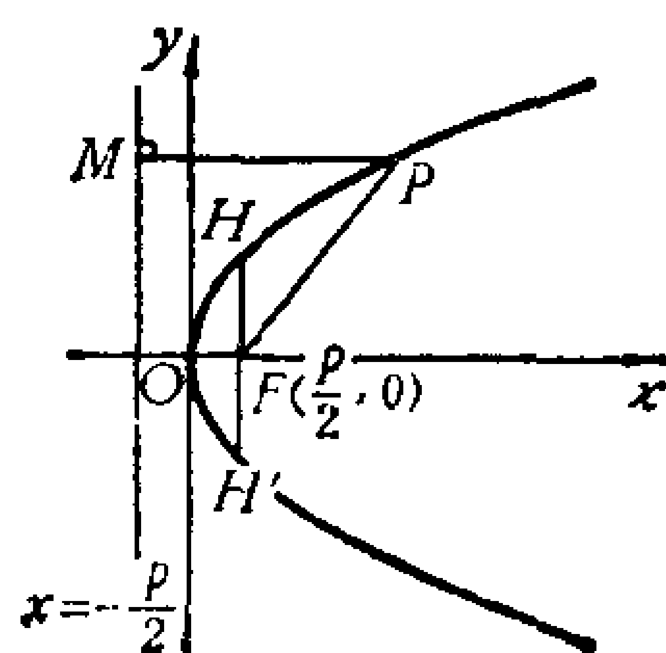
[说明]　本题所求的圆为双曲线在点 $P(a\sec\varphi,\ b\operatorname{tg}\varphi)$ 的密切（曲率）圆．密切圆中心的轨迹为渐屈线.

第七章　抛　物　线

1. 抛物线的标准方程:

$$y^2=2px \quad (p>0). \tag{7.10}$$

顶点: $O(0, 0)$;对称轴: $y=0$, 即 x 轴.



(1) 焦点:

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right).$$

(2) 离心率:

$$e=1.$$

(3) 准线:

$$x=-\frac{p}{2}. \tag{7.13}$$

(4) 焦半径:

$$|PF|=x+\frac{p}{2}. \tag{7.14}$$

(5) 通径:

$$|HH'|=2p. \tag{7.15}$$

(6) 参数方程:

$$\begin{cases} x=2pt^2 \\ y=2pt \end{cases} \quad (t\ 为参数). \tag{7.16}$$

2. 其它形式的抛物线方程

(1) 顶点在原点,焦点为$\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$,对称轴为 x 轴的方程:

$$y^2=-2px \quad (p>0). \tag{7.21}$$

(2) 顶点在原点,焦点为$\left(0, \frac{p}{2}\right)$,对称轴为 y 轴的方程:

$$x^2=2py \quad (p>0). \tag{7.22}$$

(3) 顶点在原点,焦点为$\left(0,\ -\frac{p}{2}\right)$,对称轴为 y 轴的方程:

$$x^2=-2py \quad (p>0). \tag{7.23}$$

(4) 顶点在$(x_0,\ y_0)$,焦点为$\left(x_0\pm\frac{p}{2},\ y_0\right)$,对称轴为 $y=y_0$ 的方程:

$$(y-y_0)^2=\pm 2p(x-x_0) \quad (p>0). \tag{7.24}$$

(5) 顶点在$(x_0,\ y_0)$,焦点为$\left(x_0,\ y_0\pm\frac{p}{2}\right)$,对称轴为 $x=x_0$ 的方程:

$$(x-x_0)^2=\pm 2p(y-y_0) \quad (p>0). \tag{7.25}$$

3. 抛物线 $y^2=2px$ 与直线的关系

(1) 过切点$(x_1,\ y_1)$的切线方程(见第 890 题):

$$y_1y=p(x+x_1). \tag{7.31}$$

(2) 过切点$(2pt^2,\ 2pt)$的切线方程(见第 891 题):

$$x-2ty+2pt^2=0. \tag{7.32}$$

(3) 已知斜率m的切线方程:

$$y=mx+\frac{p}{2m}. \tag{7.33}$$

(4) 过抛物线上点$(x_1,\ y_1)$的法线方程:

$$y_1x+py=py_1+x_1y_1. \tag{7.34}$$

(5) 过抛物线上点$(2pt^2,\ 2pt)$的法线方程(见第 891 题):

$$2tx+y=2pt+4pt^3. \tag{7.35}$$

*(6) 点$(x_0,\ y_0)$关于抛物线的切点弦方程(见第 902 题):

$$y_0y=p(x+x_0). \tag{7.36}$$

*(7) 点(x_0, y_0)关于抛物线的极线方程(见第903题):

$$y_0y=p(x+x_0). \tag{7.37}$$

(8) 平分斜率为 m 的一组平行弦的直径方程(见第906题):

$$my-p=0. \tag{7.38}$$

4. 共焦点的抛物线系方程(见第909题):

$$y^2=2\lambda\left(x+\frac{\lambda}{2}\right)\quad (\lambda\text{为任意常数}). \tag{7.40}$$

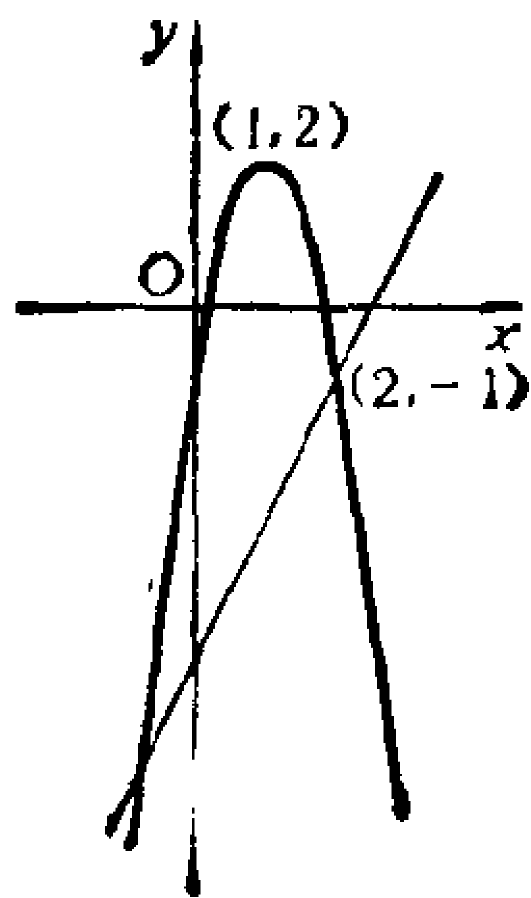
顶点: $C\left(-\frac{\lambda}{2}, 0\right)$; 焦点: $F(0, 0)$; 准线: $x=-\lambda$.

§1. 抛物线的方程

873. 已知抛物线的对称轴与 y 轴平行, 顶点为$(1, 2)$, 且与直线 $y=2x+k$ 相交于$(2, -1)$. 试求: (1) 抛物线方程; (2) k 的值; (3) 抛物线与直线 $y=2x+k$ 的另一交点的坐标.

[解] (1) 因抛物线的对称轴与 y 轴平行, 且顶点为$(1, 2)$, 故设所求的抛物线方程为

$$(x-1)^2=2p(y-2).$$



因抛物线过$(2, -1)$,

$$\therefore\quad (2-1)^2=2p(-1-2),$$

解得 $p=-\frac{1}{6}$. 即此抛物线方程为

$$(x-1)^2=-\frac{1}{3}(y-2).$$

(2) 因直线 $y=2x+k$ 过点$(2, -1)$,

$$\therefore\quad k=-5.$$

(3) 解方程组

$$\begin{cases}(x-1)^2=-\frac{1}{3}(y-2)\\ y=2x-5,\end{cases}$$

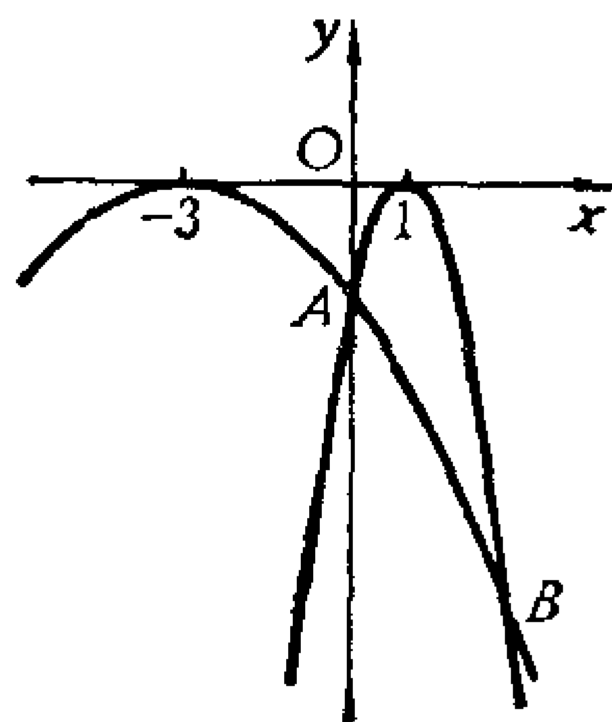
得另一交点的坐标为$\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{19}{3}\right)$.

[说明]　求抛物线方程，一般可利用抛物线标准方程. (1)如果抛物线的顶点是原点，对称轴和x轴或y轴重合，可用标准式$y^2=2px$或$x^2=2py$. 这时，只需给出另一条件来决定常数p；(2)如果已知对称轴和x轴或y轴平行时，可用标准式$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$或$(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$. 根据给出三个确定抛物线的条件，列出有关p、x_0、y_0的三个方程. 若给出顶点，即已给出两个条件，只要再有一个条件即可求出p. (3)对称轴平行于y轴的抛物线还可用二次函数$y=a(x+m)^2+k(a\neq 0)$来表示，$(-m, k)$为抛物线顶点的坐标. 这里也需给出三个条件来决定a、m、k的值.

874. 一对称轴与y轴平行的抛物线与x轴相切，且过定点$A(0, -2)$、$B(3, -8)$，试求此抛物线方程与切点坐标.

[解]　设所求抛物线方程为

$$(x-x_0)^2=2p(y-y_0).$$



而抛物线与x轴相切，故顶点在x轴上，即$y_0=0$. 又因抛物线经过$A(0, -2)$、$B(3, -8)$. 代入得

$$x_0^2=-4p\cdots①,$$

$$(3-x_0)^2=-16p\cdots②.$$

由①、②解得

$$x_0=-3,\ x_0'=1;$$

相应地，

$$p=-\frac{9}{4},\quad p'=-\frac{1}{4}.$$

故所求的抛物线方程为

$$(x+3)^2=-\frac{9}{2}y \quad 或 \quad (x-1)^2=-\frac{1}{2}y.$$

切点坐标分别为$(-3, 0)$和$(1, 0)$.

875. 抛物线顶点在$x+y=0$上，且过原点，顶点与原点间的距离为$2\sqrt{2}$，对称轴与y轴平行，求抛物线的方程.

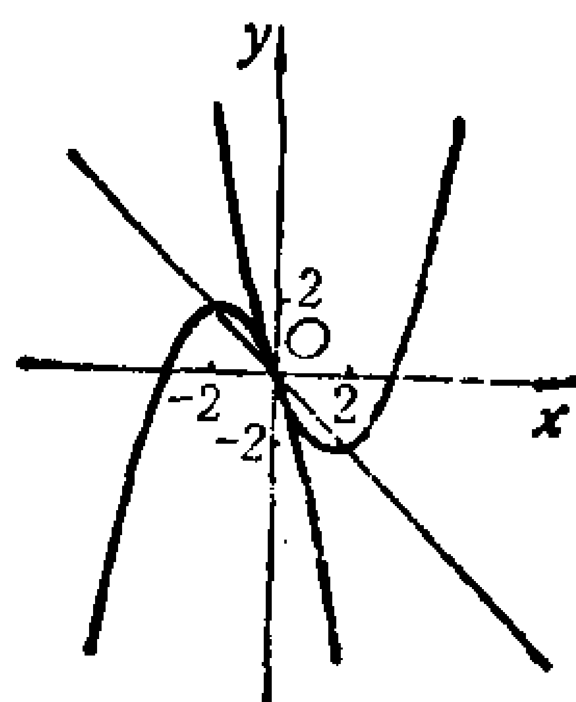
[解]　设所求抛物线方程为$(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$. 因顶点(x_0, y_0)在$x+y=0$上，故$x_0=-y_0$. 而顶点与原点间的距离为$2\sqrt{2}$，即

$$x_0^2+y_0^2=(2\sqrt{2})^2.$$

$$\therefore\quad 2x_0^2=8,\ x_0=\pm2,\ y_0=\mp2.$$

故

$$(x\mp2)^2=2p(y\pm2).$$



又因抛物线过原点，故

$$4=2p(\pm2),\ p=\pm1.$$

$$\therefore\quad (x\mp2)^2=\pm2(y\pm2).$$

即所求抛物线方程为

$$(x-2)^2=2(y+2)\quad 或\quad (x+2)^2=-2(y-2).$$

876. 一抛物线的对称轴与 y 轴平行，顶点在直线 $x+2y=1$ 上，且与直线 $y=x$, $y=0$ 相切，求此抛物线方程.

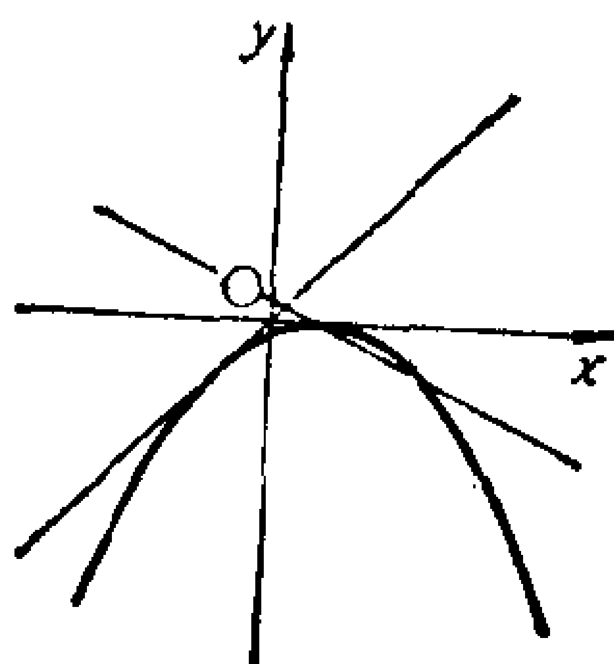
［解］ 设抛物线方程为

$$y=a(x-m)^2+n.$$

$\because$ 顶点在直线 $x+2y=1$ 上，$\therefore m+2n=1$. 而抛物线与 $y=0$相切，

$$\therefore\quad n=0,\ m=1.$$

又因抛物线与直线 $y=x$ 相切，



$$\therefore\quad x=a(x-1)^2,$$

即

$$ax^2-(2a+1)x+a=0$$

的判别式为零，亦即 $(2a+1)^2-4a^2=0$, $a=-\dfrac{1}{4}$.

故所求抛物线方程为 $y=-\dfrac{1}{4}(x-1)^2$.

877. 已知抛物线的顶点在$(-2,1)$，开口向下，对称轴平行于 y 轴，且焦参数 p 等于椭圆 $3x^2+4y^2-48=0$ 两准线间的距离，求此抛物线方程.

［解］ 椭圆方程可化为$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$. $\therefore a^2=16$, $b^2=12$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=2$. $\because$ 准线方程为 $x=\pm\dfrac{a^2}{c}$，即 $x=\pm8$. $\therefore$ 两准线间的距离 $p=16$. 故所求抛物线方程为$(x+2)^2=-32(y-1)$.

878. 已知抛物线的对称轴与 y 轴平行，在 x 轴上的一截距

等于另一截距的两倍，在 y 轴上截距为 -2，且过点 $\left(\frac{1}{2}, h\right)$、$\left(\frac{5}{2}, h\right)$. 试求：此抛物线方程和 h 的值，顶点和焦点的坐标，以及准线方程.

［解］ 设所求抛物线方程为 $y=ax^2+bx-2$，在 x 轴上截距为 x_1、$2x_1$，则

$$2x_1+x_1=-\frac{b}{a}, \quad 2x_1\cdot x_1=-\frac{2}{a},$$

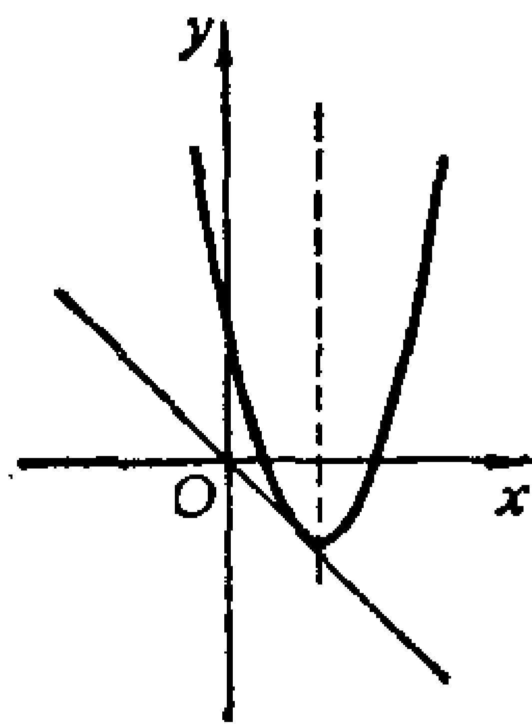
$$h=\frac{a}{4}+\frac{b}{2}-2, \quad h=\frac{25}{4}a+\frac{5b}{2}-2.$$

解上列四方程组成的方程组，得 $a=-1$, $b=3$, $h=-\frac{3}{4}$. 故所求抛物线方程为 $y=-x^2+3x-2=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$，即

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=-\left(y-\frac{1}{4}\right),$$

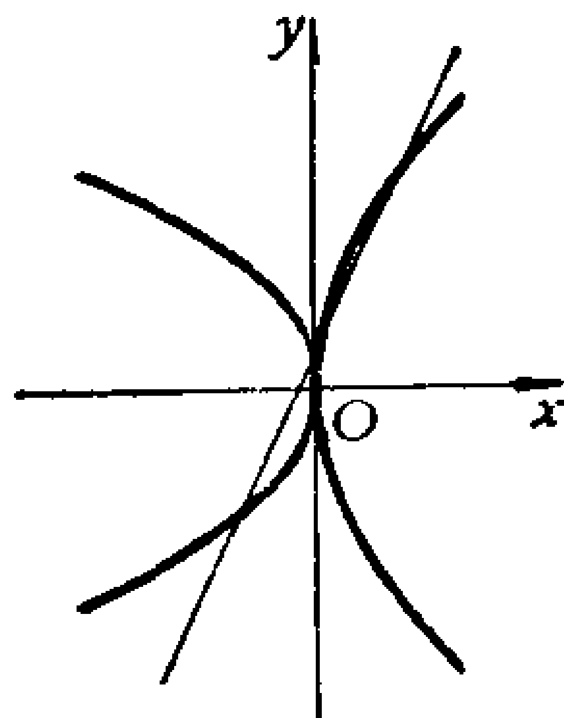
其顶点坐标为$\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$，焦点坐标为$\left(\frac{3}{2}, 0\right)$，准线方程为 $y=\frac{1}{2}$.

879. 设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 在 y 轴上的截距为 2，在 x 轴上两截距互为倒数，且与二、四象限的平分线相切. 求 a、b、c 的值和抛物线的顶点、焦点坐标及准线方程.



［解］ ∵ 抛物线和二、四象限的平分线 $y=-x$ 相切，∴ $ax^2+bx+c=-x$，即 $ax^2+(b+1)x+c=0$ 的判别式为零，故 $(b+1)^2-4ac=0$ ……①. 又抛物线在 y 轴上的截距为 2，在 x 轴上两截距互为倒数，∴ $c=2$, $\frac{c}{a}=1$, $a=2$, 又 $b^2-4ac>0$…②. 以 a、c 的值代入①式，得$(b+1)^2-16=0$, ∴ $b=-5$，或 $b=3$. 显然 $b=3$ 不符合②. ∴ $a=2$, $b=-5$, $c=2$，此抛物线方程为 $y=2x^2-5x+2$，即 $2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=y+\frac{9}{8}$. 其顶点坐标为 $\left(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)$，焦点坐标为$\left(\frac{5}{4}, -1\right)$，准线方程为 $y+\frac{9}{8}=-\frac{1}{8}$，即 $y=-\frac{5}{4}$.

880. 顶点在原点，焦点在x轴上的抛物线，被直线$y=2x+1$截得的弦长为$\sqrt{15}$，求此抛物线方程.



［分析］ 弦长可由距离公式

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

表出. 设直线$y=2x+1$与抛物线$y^2=2px$的交点为(x_1, y_1)、(x_2, y_2)，消去y，由韦达定理用p表示$(x_1-x_2)^2$和$(y_1-y_2)^2$，即得p的方程，求出p即可.

［解］ 设抛物线方程为$y^2=2px\cdots$①. 将$y=2x+1$代入①，得$4x^2+2(2-p)x+1=0$. 其判别式$\Delta=4(2-p)^2-16>0$，即$p>4$或$p<0$. 由韦达定理，

$$x_1+x_2=\frac{1}{2}(p-2)\cdots②,\qquad x_1x_2=\frac{1}{4}\cdots③.$$

$$\therefore\quad (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{1}{4}(p-2)^2-1.$$

$$\because\quad y_i=2x_i+1\ (i=1,\ 2),\quad \therefore (y_1-y_2)^2=4(x_1-x_2)^2.$$

$$\because\quad \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{15},\quad \therefore\quad \sqrt{5(x_1-x_2)^2}=\sqrt{15},$$

即$\frac{1}{4}(p-2)^2-1=3$. 解得$p=-2$或$p=6$. 故所求抛物线方程为

$$y^2=-4x \quad 或 \quad y^2=12x.$$

881. 已知抛物线的顶点在原点，焦点在x轴的正半轴上，其通径的两个端点与顶点连成的三角形的面积为4平方单位，求此抛物线方程.

［解］ 设抛物线方程为$y^2=2px$，则它的焦点为$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$，通径$AB$的长为$2p$. $\because S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OF|\cdot|AB|=4$，即$\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2}\cdot 2p=4$，解得$p=2\sqrt{2}$. 故所求抛物线方程为$y^2=4\sqrt{2}x$.

882. 抛物线$y^2=2px$有一内接直角三角形，直角的顶点在原点，一直角边的方程是$y=2x$，斜边长是$5\sqrt{3}$，求此抛物线方程.

［解］ 由$\begin{cases}y^2=2px\\ y=2x\end{cases}$解得直角三角形一顶点$A$的坐标为$\left(\frac{p}{2}, p\right)$.

$\because$ 另一直角边的方程是 $y=-\dfrac{1}{2}x$，同样可得它与抛物线交点 B 的坐标为 $(8p,\ -4p)$，$\therefore\left(8p-\dfrac{p}{2}\right)^2+(-4p-p)^2=(5\sqrt{3})^2$，解得 $p=\pm\dfrac{2}{13}\sqrt{39}$. 故所求抛物线方程为 $y^2=\pm\dfrac{4}{13}\sqrt{39}\,x$.

883. 从抛物线 $y^2=2px$ 外一点 $A(-2,\ -4)$ 引倾角为 $45°$ 的抛物线的割线，与抛物线交点为 P_1、P_2，若 AP_1、P_1P_2、AP_2 成等比数列，试求此抛物线方程.

［分析］ 由于有向线段 AP_1、P_1P_2、AP_2 的数量成等比数列，又已知点 A 坐标和过点 A 的割线倾角，故运用直线的参数方程和参数 t 的几何意义，由韦达定理表示出弦 P_1P_2 的数量，即可得解.

［解］ 设过 A 的割线的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+t\cos 45°\\ y=-4+t\sin 45°,\end{cases}$

即
$$\begin{cases}x=-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=-4+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\end{cases}$$

代入抛物线方程得 $\left(-4+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2=2p\left(-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)$，即 $t^2-(8\sqrt{2}+2\sqrt{2}p)t+32+8p=0$. $\because$ AP_1、P_1P_2、AP_2 成等比数列，$\therefore (t_2-t_1)^2=t_1t_2$，即 $(t_1+t_2)^2=5t_1t_2$. 由韦达定理，$(8\sqrt{2}+2\sqrt{2}p)^2=5(32+8p)\cdots$①，且 $\Delta=(8\sqrt{2}+2\sqrt{2}p)^2-4(32+8p)>0$，即 $p>0$ 或 $p<-4\cdots$②. 由①解得 $p=1$，$p=-4$（不符合②，舍去）. 故所求抛物线方程为 $y^2=2x$.

884. 求对称轴与 y 轴平行，且与 $y=x^2$ 垂直相交于不同两点的抛物线系方程.

［分析］ 因所求抛物线的对称轴与 y 轴平行，故设抛物线系方程为 $y=ax^2+bx+c$. 利用两抛物线交于不同两点且互相直交的条件，可列出两交点横坐标所满足的两方程. 又因这两方程同解，即得 a、b、c 所满足的两个关系式，由此消去 a、b、c 中的两个参数，即得解.

［解］ 设所求抛物线系方程为 $y=ax^2+bx+c$，它与已知抛物线 $y=x^2$ 两交点的横坐标 x_1、x_2 是方程 $(a-1)x^2+bx+c=0$ 的两实根. 因两抛物

线互相直交，故它们在交点处切线斜率之积

$$2x(2ax+b)=-1,\quad 即\quad 4ax^2+2bx+1=0.$$

x_1、x_2 也是此方程的两实根. 故

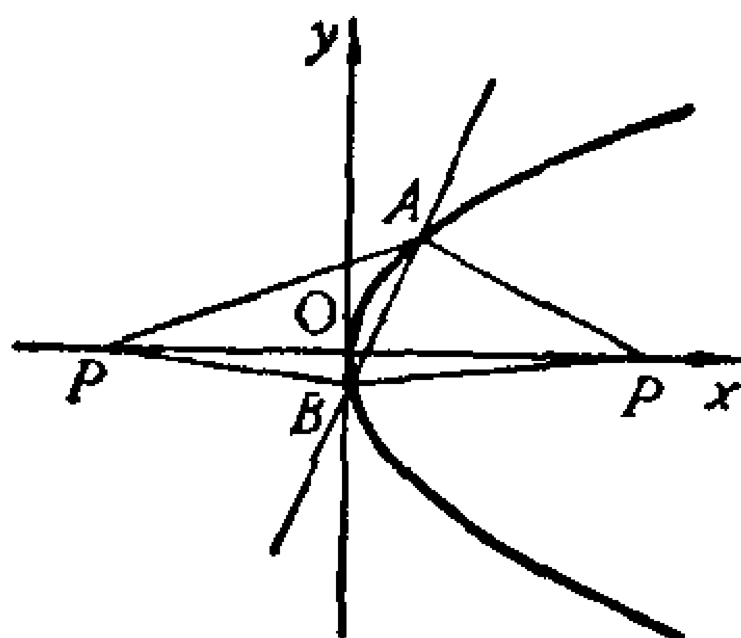
$$\frac{b}{a-1}=\frac{b}{2a}\cdots①,\qquad \frac{c}{a-1}=\frac{1}{4a}\cdots②.$$

当 $b=0$ 时，由 ② 得 $c=\frac{a-1}{4a}$，所求抛物线系方程为 $y=ax^2+\frac{a-1}{4a}$，其中 $a<0$($\because \Delta=4b^2-16a=-16a>0$). 当 $b\neq0$ 时，$a=-1$，$c=\frac{1}{2}$，故所求抛物线系方程为 $y=-x^2+bx+\frac{1}{2}$，其中 b 为任意实数.

§2. 直线与抛物线的位置关系

885. 设抛物线 $y^2=4x$ 截直线 $y=2x+k$ 所得的弦 AB 长为 $3\sqrt{5}$，(1) 求 k 的值；(2) 以弦 AB 为底边，以 x 轴上的点 P 为顶点组成的三角形的面积为 39 时，求点 P 的坐标.

［分析］ 因弦长 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=3\sqrt{5}$，其中 (x_1, y_1)、(x_2, y_2) 为直线与抛物线的交点. 把 $(x_1-x_2)^2$ 与 $(y_1-y_2)^2$ 分别表示成 k 的代数式，即可求得 k. 又因点 P 的坐标为 $(x, 0)$，弦 AB 为三角形底边，故可用 x 表示三角形的高，由三角形面积公式列出方程，解得 x.



［解］ (1) 设抛物线 $y^2=4x$ 和直线 $y=2x+k$ 的两交点为 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$，则 $y_1=2x_1+k$，$y_2=2x_2+k$. 以 $y=2x+k$ 代入抛物线方程，得 $(2x+k)^2=4x$，即 $4x^2+4(k-1)x+k^2=0$. $\therefore \Delta=16(k-1)^2-16k^2>0$，即 $k<\frac{1}{2}$. 又 $x_1+x_2=1-k$，$x_1\cdot x_2=\frac{k^2}{4}$，$\therefore (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2=(1-k)^2-k^2=1-2k$. $\because |AB|=3\sqrt{5}$，且 $y_1-y_2=2(x_1-x_2)$，$\therefore (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(3\sqrt{5})^2$，即 $5(x_1-x_2)^2=45$. 故 $1-2k=9$，$k=-4$.

(2) 设点 P 的坐标为 $(x, 0)$，则点 P 到 AB 的距离 $d=\frac{|2x-4|}{\sqrt{5}}$.

$\therefore \frac{1}{2}\cdot\frac{|2x-4|}{\sqrt{5}}\cdot 3\sqrt{5}=39$, 即$|x-2|=13$. $\therefore x=15$, 或$x=-11$. 故点 P 的坐标为$(15, 0)$或$(-11, 0)$.

［说明］ 二次曲线 $F(x, y)=0$ 截直线 $y=kx+m$ 所得的弦长

$$l=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+k^2(x_1-x_2)^2}$$
$$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$
$$=\sqrt{(1+k^2)}\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-4\cdot\frac{c}{a}}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|},$$

其中 a、b、c 是方程组$\begin{cases}F(x, y)=0\\ y=kx+m\end{cases}$消去 y 后所得关于 x 的二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的系数，Δ 为其判别式. 故不必求出交点就可解决有关弦长的问题.

886. 已知直线 l 的斜率是 2, 且过抛物线 $y^2=2px$ 的焦点. 求直线 l 被抛物线截得的弦长.

［解］ 设直线 l 的方程为 $y=2x+b$. $\because$ 此直线过$\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, $\therefore 0=p+b$, 即 $b=-p$. 故直线 l 的方程为 $y=2x-p$……①. 设直线 l 和抛物线 $y^2=2px$ 的交点为(x_1, y_1)、(x_2, y_2)，则 $y_1=2x_1-p$, $y_2=2x_2-p$. 以①代入方程 $y^2=2px$, 得 $4x^2-6px+p^2=0$. $\because \Delta>0$, 故方程有两实根 x_1、x_2, 且 $x_1+x_2=\frac{3p}{2}$, $x_1x_2=\frac{p^2}{4}$. $\therefore (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{5}{4}p^2$. 故直线 l 被抛物线截得的弦长

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(2x_1-2x_2)^2}$$
$$=\sqrt{5(x_1-x_2)^2}=\frac{5}{2}p.$$

887. 过点 $P(a, b)$引抛物线 $y^2=2px$ 的两切线 PA、PB, A、B 为切点，求弦 AB 的长.

［解］ 设 A、B 两点的坐标分别为$(2pt_1^2, 2pt_1)$、$(2pt_2^2, 2pt_2)$，则过点 A、B 引抛物线 $y^2=2px$ 的两切线方程为 $x-2yt_i+2pt_i^2=0\ (i=1, 2)$. $\because$ 这两条切线都过点 $P(a, b)$，$\therefore a-2bt_i+2pt_i^2=0$. $t_1+t_2=\frac{b}{p}$, $t_1t_2=\frac{a}{2p}$. 而

$$(t_1-t_2)^2=(t_1+t_2)^2-4t_1t_2=\frac{b^2-2ap}{p^2},$$

$$\therefore\quad |AB|=\sqrt{(2pt_1^2-2pt_2^2)^2+(2pt_1-2pt_2)^2}$$
$$=\sqrt{4p^2(t_1-t_2)^2[(t_1+t_2)^2+1]}$$
$$=\frac{2}{p}\sqrt{(b^2+p^2)(b^2-2ap)}.$$

888. 抛物线 $y^2=2px$ 内一点 $A(a,\ b)$. 求被 A 平分的抛物线的弦所在直线的方程.

［解］ 设过点 $A(a,\ b)$且被 A 所平分的抛物线的弦的倾角为 θ, 其方程为$\begin{cases}x=a+t\cos\theta\\y=b+t\sin\theta\end{cases}$ (t 为参数), 代入抛物线方程得

$t^2\sin^2\theta+2(b\sin\theta-p\cos\theta)t+b^2-2pa=0\cdots$①, 其两根为 t_1、t_2.
$\because$ A 为弦的中点, $\therefore$ $t_1+t_2=0$, 故 $b\sin\theta-p\cos\theta=0\cdots$②.

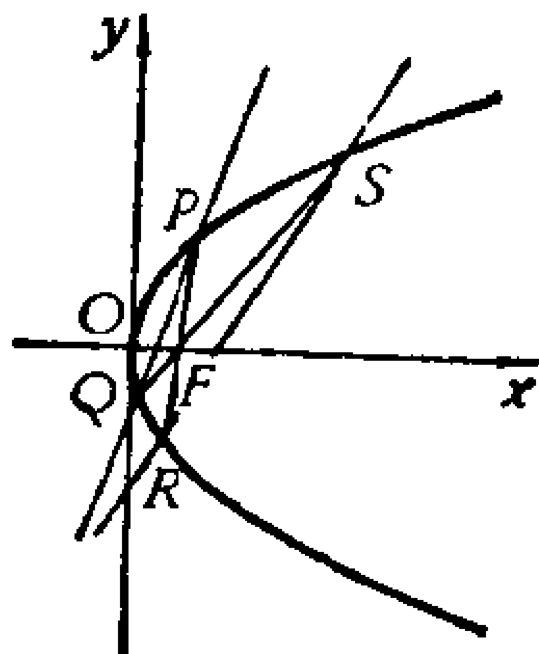
当 $\begin{cases}\sin\theta\neq0\\\Delta=-4\sin^2\theta(b^2-2pa)>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sin\theta\neq0\\b^2-2pa<0\end{cases}$ 时,

弦与 x 轴不平行; 且点 A 在抛物线开口内部, 故以 A 为中点的弦存在. 以 $t\cos\theta=x-a$, $t\sin\theta=y-b$ 代入②, 即得此弦所在的直线方程

$$b(y-b)-p(x-a)=0.$$

［说明］ 凡涉及直线与抛物线的关系问题, 要注意直线与抛物线有实交点的条件, 否则易造成错误.

889. 设直线 $lx+my+n=0$ 与抛物线 $y^2=4ax$ 相交于点 P、Q, F 为抛物线的焦点. PF、QF 交抛物线于 R、S 两点, 求直线 RS 的方程.



［分析］ 设抛物线的参数方程为$\begin{cases}x=at^2\\y=2at,\end{cases}$ 由于点 P、F、R 和 Q、F、S 分别共线, 因此可求得 P、R、和 Q、S 对应的参数 t_1、t_1' 和 t_2、t_2' 之间存在的关系. 又因点 P、Q 在直线 $lx+my+n=0$ 上, 点 R、S 在所求直线 $Ax+By+C=0$ 上, 故由韦达定理即可求解.

［解］ 设 P、Q 的坐标分别为$(at_1^2,\ 2at_1)$、$(at_2^2,\ 2at_2)$, R、S 的坐标分别

为$(at_1'^2, 2at_1')$、$(at_2'^2, 2at_2')$，则直线 PR 的方程为 $y-2at_1=\frac{2a(t_1-t_1')}{a(t_1^2-t_1'^2)}\cdot(x-at_1^2)$，即 $2x-(t_1+t_1')y+2at_1t_1'=0$. $\because$ PR 过焦点 $F(a, 0)$，$\therefore$ $2a+2at_1t_1'=0$，$t_1'=-\frac{1}{t_1}$. 同理可得 $t_2'=-\frac{1}{t_2}$. $\therefore$ 点 R、S 的坐标分别为$\left(\frac{a}{t_1^2}, -\frac{2a}{t_1}\right)$、$\left(\frac{a}{t_2^2}, -\frac{2a}{t_2}\right)$. $\because$ 点 P、Q 在直线 $lx+my+n=0$ 上，$\therefore$ $lat_1^2+2amt_1+n=0$, $lat_2^2+2amt_2+n=0$. 即 t_1、t_2 为方程 $al\lambda^2+2am\lambda+n=0$ 的两根. $\therefore$ $t_1+t_2=-\frac{2m}{l}$, $t_1t_2=\frac{n}{al}$. 如果所求直线 RS 的方程为 $Ax+By+C=0$, 则 $\frac{Aa}{t_1^2}-\frac{2aB}{t_1}+C=0$, $\frac{Aa}{t_2^2}-\frac{2aB}{t_2}+C=0$. 即 t_1、t_2 为方程 $C\mu^2-2aB\mu+Aa=0$ 的两根. $\therefore$ $t_1+t_2=\frac{2aB}{C}$, $t_1t_2=\frac{Aa}{C}$. 从而 $-\frac{2m}{l}=\frac{2aB}{C}$, $\frac{n}{al}=\frac{Aa}{C}$; 即 $\frac{B}{C}=-\frac{m}{la}$, $\frac{A}{C}=\frac{n}{la^2}$. 故所求直线 RS 的方程为 $\frac{nx}{la^2}-\frac{my}{la}+1=0$, 即 $nx-may+la^2=0$.

［说明］ 从本题可理解抛物线参数方程的作用，利用它可避免解方程组求交点坐标，从而简化解题过程.

890. (1) 已知抛物线 $y^2=2px$ 上两点 P_1、P_2 的纵坐标分别为 y_1、y_2，求 P_1、P_2 的连线方程；(2)如果此连线过抛物线的焦点，求证 $y_1y_2=-p^2$；(3)如果点 P_2 与 P_1 重合，则此连线转化为过点 $P_1(x_1, y_1)$的切线，求此切线方程.

［解］ (1) 设抛物线上两点 P_1、P_2 的横坐标分别为 x_1、x_2, 则 $y_1^2=2px_1$, $y_2^2=2px_2$. $\therefore$ $y_1^2-y_2^2=2p(x_1-x_2)$. 若 $x_1\neq x_2$，则 P_1P_2 连线的斜率 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{2p}{y_1+y_2}$. 故 P_1P_2 的方程为 $y-y_1=\frac{2p}{y_1+y_2}(x-x_1)$, $2px-(y_1+y_2)y-2px_1+y_1^2+y_1y_2=0$，即 $2px-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$. 若 $x_1=x_2$，则 $y_1=-y_2$，$\therefore$ P_1P_2 的方程为 $2px+y_1y_2=0$. 故所求 P_1P_2 的方程为 $2px-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$.

(2) 如果 P_1P_2 过焦点 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 则 $p^2+y_1y_2=0$, 即 $y_1y_2=-p^2$.

(3) 如果点 P_2 与 P_1 重合，则连线转化为过点 $P_1(x_1, y_1)$ 的切线，其方程为 $2px-2y_1y+y_1^2=0$，$\because y_1^2=2px_1$，故切线方程为 $y_1y=p(x+x_1)$.

891. 试求：(1) 抛物线 $y^2=2px$ 上任意两点 $P_1(2pt_1^2, 2pt_1)$ 和 $P_2(2pt_2^2, 2pt_2)$ 的连线方程；(2) 过点 $P_1(2pt_1^2, 2pt)$ 的切线方程；(3) 过点 $P(2pt^2, 2pt)$ 的法线方程；(4) 过 $P_1(2pt_1^2, 2pt)$ 和 $P_2(2pt_2^2, 2pt_2)$ 两点的切线的交点坐标.

[分析] 为求得过点 $P(2pt^2, 2pt)$ 的法线方程，可先写出与过点 P 的切线相垂直的直线系方程，并利用过点 P 的条件即得.

[解] (1) 过两点 $P_1(2pt_1^2, 2pt_1)$ 与 $P_2(2pt_2^2, 2pt_2)$ 的直线方程为

$$\frac{y-2pt_1}{2p(t_1-t_2)}=\frac{x-2pt_1^2}{2p(t_1^2-t_2^2)},$$

整理得 $$x-(t_1+t_2)y+2pt_1t_2=0\cdots①.$$

(2) 若点 P_2 与 P_1 重合，则它们的连线转化为过点 P_1 的切线. 在①中令 $t_2=t_1$，得切线方程为 $x-2t_1y+2pt_1^2=0\cdots②$.

(3) 由②知，与切线相垂直的直线系方程为 $2tx+y=\lambda$. $\because$ 法线过 P 点，$\therefore$ $\lambda=2pt+4pt^3$. 故过点 P 的法线方程为 $2tx+y=2pt+4pt^3\cdots③$. $\because$ 当 $t=0$ 时，抛物线在 $(0, 0)$ 点的法线即为 x 轴，也满足③. $\therefore$ 过点 P 的法线方程即 $2tx+y=2pt+4pt^3$.

(4) 利用②，过 $(2pt_1^2, 2pt_1)$ 的切线方程为 $x-2t_1y+2pt_1^2=0$，过 $(2pt_2^2, 2pt_2)$ 的切线方程为 $x-2t_2y+2pt_2^2=0$. 解方程组，得两切线交点坐标为 $(2pt_1t_2, p(t_1+t_2))$.

892. 由平面上一点 $A(0, 1)$，向曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 引切线，求切点 B 的坐标.

[分析] 先求过点 A 和曲线相切的切线方程，再求切点坐标.

[解] 曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 是抛物线 $y^2=x-1$ 的上半支. 设切点为 (x_0,y_0) $(x_0\geqslant 1, y_0\geqslant 0)$，则切线方程为 $y_0y=\dfrac{x+x_0}{2}-1$，即 $x-2y_0y=2-x_0$. $\because$ 点 $A(0, 1)$ 在切线上，$\therefore$ 由方程组 $\begin{cases}-2y_0=2-x_0\\ y_0^2=x_0-1\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=4+2\sqrt{2}\\ y_0=\sqrt{2}+1,\end{cases}$ 即切点为 $B(4+2\sqrt{2}, \sqrt{2}+1)$.

893. 已知由原点到曲线$\begin{cases}x=3+m\\y=5-m^2\end{cases}$可引切线，求切线的长.

［解一］ 设切点坐标为$(3+m_0,\ 5-m_0^2)$，故由原点向已知曲线所引的切线方程为$(3+m_0)y=(5-m_0^2)x$. 以$x=3+m$, $y=5-m^2$代入，得$(3+m_0)m^2+(5-m_0^2)m+3(5-m_0^2)-5(3+m_0)=0$. 由$\Delta=(5-m_0^2)^2-12(3+m_0)(5-m_0^2)+20(3+m_0)^2=0$，即$[(5-m_0^2)-10(3+m_0)]\cdot[(5-m_0^2)-2(3+m_0)]=0$，亦即$(m_0+5)^2(m_0+1)^2=0$，得$m_0=-5$或$m_0=-1$. 由原点到曲线$\begin{cases}x=3+m\\y=5-m^2\end{cases}$的切线长$l=\sqrt{(3+m_0)^2+(5-m_0^2)^2}$，故当$m_0=-5$时，$l=2\sqrt{101}$；当$m_0=-1$时，$l=2\sqrt{5}$.

［解二］ 设由原点到曲线$\begin{cases}x=3+m\\y=5-m^2\end{cases}$引的切线方程为$\begin{cases}x=t\cos\theta\\y=t\sin\theta,\end{cases}$ θ为切线的倾角. 代入曲线方程，消去m得$t^2\cos^2\theta+(\sin\theta-6\cos\theta)t+4=0$. $\because\ \Delta=0$, $\therefore\ \sin^2\theta-12\sin\theta\cos\theta+20\cos^2\theta=0$. 从而解得$\operatorname{tg}\theta=2$，或$\operatorname{tg}\theta=10$. 故切线长$|t|=\left|\dfrac{6\cos\theta-\sin\theta}{2\cos^2\theta}\right|=\left|\dfrac{6-\operatorname{tg}\theta}{2\cos\theta}\right|$. 当$\operatorname{tg}\theta=2$时，为$2\sqrt{5}$；当$\operatorname{tg}\theta=10$时，为$2\sqrt{101}$.

894. 求抛物线$y^2=4ax$的已知斜率为m的法线方程.

［解］ 设过点$(at^2,\ 2at)$的抛物线法线方程为$tx+y=at^3+2at$（参见第891题），$\therefore\ t=-m$. 代回上式即得已知斜率为m的法线方程

$$y=mx-2am-am^3.$$

［说明］ 如果抛物线方程为$y^2=2px$，同样可得斜率为m的法线方程

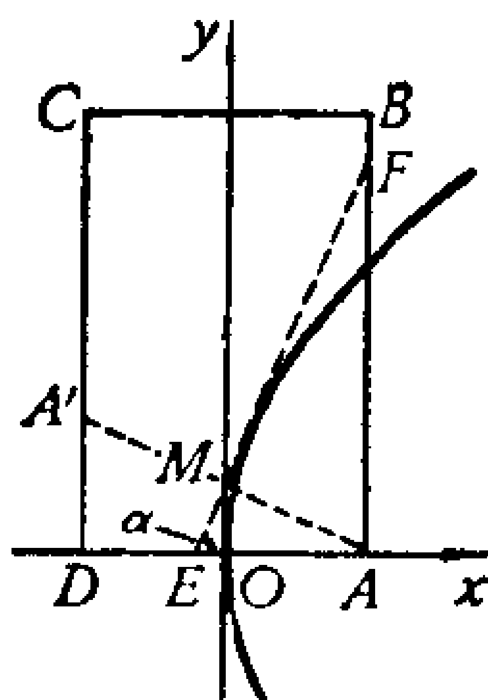
$$y=mx-pm-\frac{pm^3}{2}.$$

895. 折叠矩形$ABCD$，使A落在CD上. 试证这条折痕必与以CD为准线，以A为焦点的抛物线相切.

［分析］ 因折痕与以A为焦点，CD为准线的抛物线相切，故可求出以A为焦点、CD为准线的抛物线方程与折痕所在的直线方程，然后验证.

［证］ 取DA为x轴，AD的垂直平分线为y轴，建立直角坐标系. 令

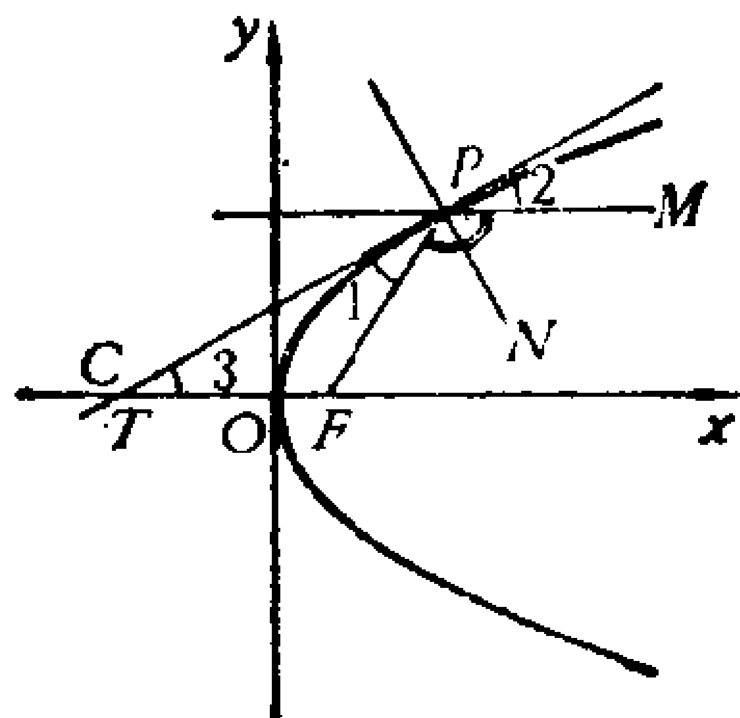
$|AD|=p$，则抛物线方程为 $y^2=2px$. 设折痕 EF 的倾角为 α，点 A 与 CD 上的 A' 重合，则点 A' 的坐标为 $\left(-\frac{p}{2},\ p\operatorname{ctg}\alpha\right)$，$AA'$ 的中点 M 的坐标为 $\left(0, \frac{p}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right)$，故折痕 EF 所在的直线方程为 $y-\frac{p}{2}\operatorname{ctg}\alpha=x\operatorname{tg}\alpha$，即 $y=x\operatorname{tg}\alpha+\frac{p}{2\operatorname{tg}\alpha}$. 此即抛物线 $y^2=2px$ 的已知斜率 $k=\operatorname{tg}\alpha$ 的切线方程，故此折痕与抛物线相切.



896. P 为抛物线 $y^2=2px$ 上任意一点，以其焦点 F 为圆心，FP 为半径作弧交 x 轴左边于点 C，求证 PC 即经过抛物线上点 P 的切线.

［证一］ 设点 P 的坐标为(x_1, y_1)，$\because |OC|=|FC|-|FO|=|FP|-|FO|=\left(x_1+\frac{p}{2}\right)-\frac{p}{2}=x_1$，故点 C 的坐标为 $(-x_1, 0)$. 直线 PC 的方程为 $y-y_1=\frac{y_1}{2x_1}(x-x_1)$. $\because$ $y_1^2=2px_1$，$\therefore$ $y-y_1=\frac{p}{y_1}(x-x_1)$，$y_1y-y_1^2=px-px_1$，$y_1y=p(x+x_1)$. 此即过点 P 的抛物线的切线.

［证二］ 根据抛物线切线、法线的性质(参见第 968 题)，过点 P 平行于 x 轴的直线 PM 与 FP 所成角的平分线，即为抛物线过点 P 的切线 PT 与法线 PN(如图). $\therefore \angle 1=\angle 2=\angle 3$，即 $|FP|=|FT|$. 因此点 C 与点 T 重合，即 PC 是抛物线过点 P 的切线.



897. 设抛物线方程为 $y^2=4ax$. 过抛物线上一点 $P(at_1^2, 2at_1)$ $(t_1\neq 0)$，作抛物线的法线交抛物线于另一点 $Q(at_2^2, 2at_2)$，求证 $t_2=-t_1-\frac{2}{t_1}$.

［分析］ 因点 Q 的坐标满足过点 P 的法线方程，即得点 P 和点 Q 坐标间的关系.

［证］ 过点 P 的法线方程为 $y+t_1x-2at_1-at_1^3=0$. 因法线与抛物线

的另一交点为 $Q(at_2^2, 2at_2)$, $\therefore$ $2at_2+at_1t_2^2-2at_1-at_1^3=0$, 即$(t_2-t_1)\cdot[2+t_1(t_1+t_2)]=0$. $\because$ $t_1\neq t_2$, $t_1\neq 0$, $\therefore$ $t_2=-t_1-\dfrac{2}{t_1}$.

898. 求圆 $x^2+y^2+4ax=0$ 与抛物线 $y^2=4ax$ 的公切线方程.

[分析] 所求公切线既属于圆的切线系方程,又属于抛物线的切线系方程. 由两切线重合(截距相等),即可求得公切线方程.

[解] 设公切线的斜率为 k, 则圆$(x+2a)^2+y^2=(2a)^2$ 的切线方程为 $y=k(x+2a)\pm 2a\sqrt{1+k^2}\cdots$①, 抛物线 $y^2=4ax$ 的切线方程为 $y=kx+\dfrac{a}{k}\cdots$②. $\because$ 直线①与②重合, $\therefore$ $\dfrac{a}{k}=2ak\pm 2a\sqrt{1+k^2}$, $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, 即所求公切线方程为 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x+2\sqrt{2}a$ 与 $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x-2\sqrt{2}a$. 当斜率 k 不存在时, 圆的切线仅有两条: $x=-4a$ 与 $x=0$, 抛物线的切线仅有一条 $x=0$. 故它们的公切线为 $x=0$. 综上所述, 所求公切线有三条: $x=0$, $y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x+2\sqrt{2}a$ 与 $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x-2\sqrt{2}a$.

[说明] 求两条二次曲线的公切线,通常可采用如下三种方法:
(1) 分别在两条二次曲线上设切点坐标为(x_1, y_1)、(x_2, y_2), 因切点在各自的曲线上, 故可分别写出过切点的两切线方程; 因两切线重合, 可得另两个方程, 解这四个联立方程, 可得切点坐标, 从而得公切线方程. (2) 先设公切线方程(通常采用截斜式, 这时需讨论斜率 k 不存在的情况),由于切线与两二次曲线的交点都唯一,使消元后所得二次方程的判别式为零,可列出两个方程, 从而求得公切线方程中的两个系数. (3) 设公切线的斜率为 k, 先分别写出两二次曲线的切线系方程 (斜率 k 为任意常数), 再利用两切线截距相等求得 k. 这里同样要讨论 k 不存在时有无公切线存在.

899. 求抛物线 $y^2=2ax$ 及圆 $x^2+y^2=r^2$ 的公切线方程.

[解] 设公切线的法线式为 $x\cos\theta+y\sin\theta=p$, $\because$ $p=r$, $\therefore$ $x\cos\theta+y\sin\theta=r\cdots$①. 设$P(x_1, y_1)$为公切线与 $y^2=2ax$ 的切点,则 $y_1y=a(x+x_1)\cdots$②. $\because$ 公切线①、②重合, $\therefore$ $\dfrac{a}{\cos\theta}=\dfrac{-y_1}{\sin\theta}=\dfrac{ax_1}{-r}$. $x_1=-\dfrac{r}{\cos\theta}$,

$y_1=-\frac{a\sin\theta}{\cos\theta}\cdots$③. 将③代入 $y^2=2ax$, 得 $\frac{a^2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=-\frac{2ar}{\cos\theta}$. 即 $a\sin^2\theta=-2r\cos\theta$, $a\cos^2\theta-2r\cos\theta-a=0$. $\therefore\ \cos\theta=\frac{r\pm\sqrt{r^2+a^2}}{a}$ $\left(\because |\cos\theta|\leqslant 1,\ \therefore \cos\theta=\frac{r+\sqrt{r^2+a^2}}{a}\text{ 应舍去}\right)$.

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{r^2-2r\sqrt{r^2+a^2}+r^2+a^2}{a^2}$$
$$=\frac{-2r^2+2r\sqrt{r^2+a^2}}{a^2}.$$
$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{\pm\sqrt{2r\sqrt{r^2+a^2}-2r^2}}{a}.$$

即公切线方程为

$$(r-\sqrt{r^2+a^2})x\pm(\sqrt{2r\sqrt{r^2+a^2}-2r^2})\cdot y=ar.$$

900. 求两抛物线 $y^2=2px$, $x^2=2py\,(p\neq 0)$ 的公切线方程.

[解一] 设公切线的方程为 $y=kx+m\cdots$①. 将①分别代入两抛物线方程, 得 $(kx+m)^2=2px$, $(y-m)^2=2k^2py$. 即 $k^2x^2+2(km-p)x+m^2=0$, $y^2-2(m+k^2p)y+m^2=0$. ∵ 直线①与两抛物线都相切, ∴ $(km-p)^2-k^2m^2=0$, $(m+k^2p)^2-m^2=0$. 即 $2km=p\cdots$②, $k^2(2m+k^2p)=0\cdots$③. 由②知 $k\neq 0$, 故③可化为 $2m+k^2p=0$, 即 $2km+k^3p=0$. 将②式代入, 得 $-k^3=1$, ∴ $k=-1$. 再由②得 $m=-\frac{p}{2}$. ∴ 公切线方程为

$$y=-x-\frac{p}{2},\quad\text{即}\quad 2x+2y+p=0.$$

[解二] 设公切线斜率为 k, 则抛物线 $y^2=2px$ 的切线方程为 $y=kx+\frac{p}{2k}\cdots$①, 抛物线 $x^2=2py$ 的切线方程为 $y=kx-\frac{pk^2}{2}\cdots$②. ∵ 直线①与②重合, ∴ $\frac{p}{2k}=-\frac{pk^2}{2}$, $k^3=-1$, ∴ $k=-1$, 代入①, 得 $y=-x-\frac{p}{2}$. ∴ 公切线方程为 $2x+2y+p=0$. 此两抛物线没有与 y 轴平行的公切线, 故它们的公切线只有这一条.

901. 求两曲线 $y=x^2+4x+8$ 和 $y=x^2+8x+4$ 的公切线方程.

[解] 设两曲线的切线为 $\frac{y+y_1}{2}=x_1x+4\cdot\frac{x+x_1}{2}+8$ 与 $\frac{y+y_2}{2}=x_2x+8\cdot\frac{x+x_2}{2}+4$, 其中 (x_1, y_1)、(x_2, y_2) 分别为切点. 整理得切线方程为

$$y=(2x_1+4)x+4x_1+16-(x_1^2+4x_1+8)$$

与

$$y=(2x_2+8)x+8x_2+8-(x_2^2+8x_2+4).$$

∵ 两切线重合,

$$\therefore \begin{cases} 2x_1+4=2x_2+8 \\ 4x_1+16-(x_1^2+4x_1+8)=8x_2+8-(x_2^2+8x_2+4), \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1-x_2=2 \\ x_1^2-x_2^2=4, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=0. \end{cases}$$

故所求公切线方程为 $y=8x+4$.

902. **自抛物线 $y^2=2px$ 外一点 $P_0(x_0, y_0)$ 引两切线, 求切点弦方程.**

[解] 设两切点坐标分别为 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$, 则两切线方程为 $y_1y=p(x+x_1)$, $y_2y=p(x+x_2)$. ∵ 两切线均过 $P_0(x_0, y_0)$, ∴ $y_0y_1=p(x_0+x_1)$…①, $y_0y_2=p(x_0+x_2)$…②. 从①与②可知, P_1、P_2 均在直线 $y_0y=p(x+x_0)$ 上. ∴ $y_0y=p(x+x_0)$ 即所求切点弦方程.

[说明] 切点弦方程的形式虽与切线方程相同, 但意义不同. 当点 (x_0, y_0) 位于曲线上时, 切点弦即与切线重合.

903. **过点 $P_0(x_0, y_0)$ 的动直线交抛物线 $y^2=2px$ 于点 P_1、P_2, 试求过点 P_1、P_2 的切线交点的轨迹方程.**

[解] 设 $P(\alpha, \beta)$ 为轨迹上任意一点, 据上题可得直线 P_1P_2 的方程为 $\beta y=p(x+\alpha)$. ∵ 直线 P_1P_2 过点 P_0, ∴ $y_0\beta=p(x_0+\alpha)$. 以 x、y 代换 α、β, 即得轨迹方程 $y_0y=p(x+x_0)$.

[说明] 此轨迹为一直线, 称为点 $P_0(x_0, y_0)$ 关于抛物线 $y^2=2px$ 的极线, 点 P_0 称为此直线的极. 当点 P_0 在抛物线上时, P_0 的极线与点 P_0 的切线重合; 当点 P_0 在抛物线外时, P_0 的极线与 P_0 的切点弦所在直线重合; 当 P_0 在抛物线内部时, P_0 的极线在抛物线外部.

904. **试求直线 $lx+my+n=0\,(lmn\neq0)$ 关于抛物线 $y^2=2px$ 的极.**

［解］ 设极的坐标为(x_0, y_0)，则极线 $y_0y=p(x+x_0)$与 $lx+my+n=0$ 重合．∴ $\frac{p}{l}=\frac{y_0}{-m}=\frac{px_0}{n}$，得 $x_0=\frac{n}{l}$，$y_0=-\frac{mp}{l}$．即极的坐标为 $\left(\frac{n}{l}, -\frac{mp}{l}\right)$.

905. 试问圆 $x^2+y^2=1$ 的动切线关于抛物线 $y^2=2px$ 的极在什么曲线上运动？

［解］ 圆 $x^2+y^2=1$ 的动切线为 $x\cos\theta+y\sin\theta=1\cdots$①，设它关于抛物线的极为 (x_0, y_0)，则极线为 $y_0y=p(x+x_0)\cdots$②．直线①与②重合，∴ $p=\lambda\cos\theta\cdots$③，$-y_0=\lambda\sin\theta\cdots$④，$px_0=-\lambda\cdots$⑤，$(\lambda\neq0)$．③^2+④^2，得 $p^2+y_0^2=\lambda^2\cdots$⑥．由⑤、⑥消去λ，得 $p^2x_0^2-y_0^2=p^2$．故极(x_0, y_0)在双曲线$x^2-\frac{y^2}{p^2}=1$ 上运动．

906. 求抛物线 $y^2=2px$ 的一组斜率为 m 的平行弦的中点轨迹．

［解］ 设斜率为 m 的平行弦方程为 $y=mx+b$，即 $x=\frac{y-b}{m}$．代入抛物线方程 $y^2=2px$，得 $y^2=2p\cdot\frac{y-b}{m}$，即 $my^2-2py+2pb=0$．当其判别式 $\varDelta=4p(p-2mb)>0$，即 $p>2mb$ 时，方程有两实根 y_1、y_2，且 $y_1+y_2=\frac{2p}{m}$．设此弦的中点坐标为(x, y)，则 $y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{p}{m}$．故所求的轨迹方程为 $my-p=0$．其轨迹为平行于 x 轴的直线 $y=\frac{p}{m}$ 在抛物线内部的一射线，此射线的端点在抛物线上，为轨迹的极限点．

［说明］ 抛物线的平行弦中点的轨迹称为此抛物线的直径，它必平行于抛物线的轴．

907. 求抛物线 $y=x^2$ 的一组斜率为 2 的平行弦中点的轨迹．

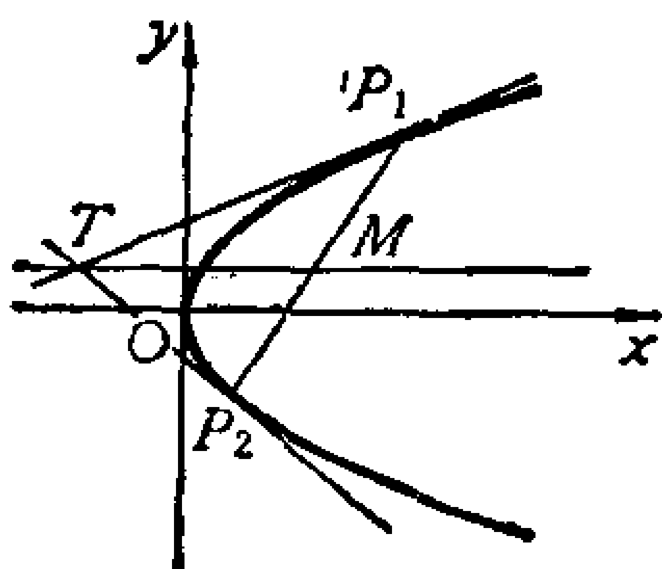
［解］ 设斜率为 2 的平行弦方程为 $y=2x+\lambda\cdots$①，代入抛物线方程，得 $x^2=2x+\lambda$，即 $x^2-2x-\lambda=0$．当 $\varDelta=4+4\lambda\geqslant0$，即 $\lambda\geqslant-1$ 时，有两实根 x_1、x_2．∴平行弦的中点 $P(x, y)$的轨迹方程为 $x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=1$．又

因点 P 在弦 $y=2x+\lambda$ 上，而 $\lambda\geqslant-1$，$\therefore y=2+\lambda\geqslant1$. 故所求中点轨迹(抛物线直径)为射线 $x=1\quad(y\geqslant1)$.

908. 求证：经过抛物线 $y^2=2px$ 上任意两点的弦的中点的直径，其延长线必通过此两点切线的交点.

［证］ 设抛物线 $y^2=2px$ 上任意两点分别为 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$，则过 P_1P_2 中点 M 的直径方程为

$$y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)\cdots①.$$



过点 P_1、P_2 的切线方程为:

$$y_1y=p(x+x_1),\quad y_2y=p(x+x_2).$$

它们交点 T 的纵坐标 $y_0=\dfrac{p(x_1-x_2)}{y_1-y_2}$.

$$\because\ y_1^2=2px_1,\quad y_2^2=2px_2,\quad \therefore\ y_1^2-y_2^2=2p(x_1-x_2).$$

$\therefore y_0=\dfrac{p(x_1-x_2)}{y_1-y_2}=\dfrac{1}{2}(y_1+y_2)$. 即两切线的交点 T 必在直径①所在的直线上.

§3. 共焦点的抛物线系

909. (1) 证明 $y^2=2\lambda\left(x+\dfrac{\lambda}{2}\right)$ (λ 为任意常数)为共焦点的抛物线系；(2) 共焦点的两抛物线互相直交.

［证］ (1) $\because\lambda$ 为任意常数，$\therefore$ 方程 $y^2=2\lambda\left(x+\dfrac{\lambda}{2}\right)$表示抛物线系. 其焦点均为$(0, 0)$，故为共焦点的抛物线系.

(2) 设共焦点的两抛物线系 $y^2=2\lambda_1\left(x+\dfrac{\lambda_1}{2}\right)$ 和 $y^2=2\lambda_2\left(x+\dfrac{\lambda_2}{2}\right)$ $(\lambda_1\neq\lambda_2)$的交点为 $P(x_1, y_1)$，则

$$y_1^2=2\lambda_1\left(x_1+\frac{\lambda_1}{2}\right)\cdots①,\qquad y_1^2=2\lambda_2\left(x_1+\frac{\lambda_2}{2}\right)\cdots②.$$

①－②，得 $2(\lambda_1-\lambda_2)x_1+\lambda_1^2-\lambda_2^2=0$，即 $2x_1+\lambda_1+\lambda_2=0\cdots③$. 以 $x_1=$

$-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}$ 代入①，得 $y_1^2=-\lambda_1\lambda_2\cdots$④．过点 P 的抛物线的两切线方程分别为 $y_1y=\lambda_1(x+x_1)+\lambda_1^2$ 和 $y_1y=\lambda_2(x+x_1)+\lambda_2^2$．$\because y_1y_1+\lambda_1\lambda_2=y_1^2+\lambda_1\lambda_2=0$，$\therefore$ 此两切线互相垂直，即此两抛物线互相直交．

910．求在共焦点的抛物线系 $y^2=2\lambda\left(x+\frac{\lambda}{2}\right)$ 中与定直线 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ 相切的一条抛物线方程．

［解］设切点坐标为 $P_1(x_1,\ y_1)$，则 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p\cdots$① 与 $y_1y=\lambda(x+x_1)+\lambda^2\cdots$② 重合．$\therefore \lambda=\mu\cos\alpha$，$y_1=-\mu\sin\alpha$，$\lambda x_1+\lambda^2=-p\mu$．由此得 $x_1=-p\sec\alpha-\lambda$，$y_1=-\lambda\operatorname{tg}\alpha$．$\because P_1(x_1,\ y_1)$ 在抛物线系上，

$$\therefore\quad (-\lambda\operatorname{tg}\alpha)^2=2\lambda\left(-p\sec\alpha-\lambda+\frac{\lambda}{2}\right).$$

$$\because \lambda\neq 0,\quad \therefore \lambda\operatorname{tg}^2\alpha=-2p\sec\alpha-\lambda,\quad \lambda=-2p\cos\alpha.$$

即所求的抛物线方程为

$$y^2=-4p\cos\alpha(x-p\cos\alpha).$$

911．求证：定点 $P_0(x_0,\ y_0)$ 关于共焦点的抛物线系 $y^2=2\lambda\cdot\left(x+\frac{\lambda}{2}\right)$ 的极线必与定抛物线 $(x+x_0)^2=-4y_0y$ 相切．

［分析］只要证明极线与定抛物线的两个交点重合即可．

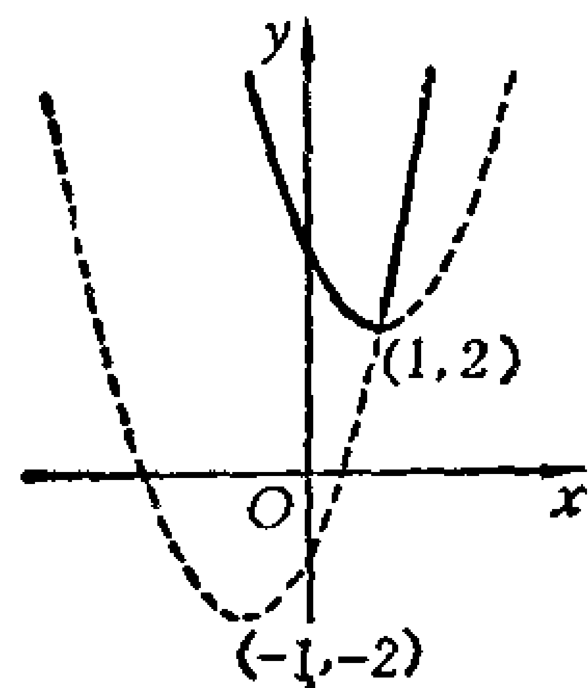
［证］点 $P_0(x_0,\ y_0)$ 关于共焦点的抛物线系 $y^2=2\lambda\left(x+\frac{\lambda}{2}\right)$ 的极线方程为 $y_0y=\lambda(x+x_0)+\lambda^2\cdots$①．从定抛物线方程 $(x+x_0)^2=-4y_0y\cdots$② 得 $y_0y=-\frac{1}{4}(x+x_0)^2$，代入①，得 $-\frac{1}{4}(x+x_0)^2=\lambda(x+x_0)+\lambda^2$，即 $(x+x_0+2\lambda)^2=0\cdots$③．因为由①、②组成的方程组与①、③组成的方程组同解，故直线①与抛物线②的两个交点重合，即极线①与定抛物线②相切．

［说明］把极线方程 $y_0y=\lambda(x+x_0)+\lambda^2$ 看作 λ 的二次方程，则其判别式 $\Delta=(x+x_0)^2+4y_0y=0$ 即与其相切的定抛物线方程．此抛物线为极线①的包络（参见第 1203 题）．

§4. 图象与区域

912. 作方程 $y=x^2+2|x-1|+1$ 的曲线.

[解] 当 $x\in(-\infty, 1]$ 时，$y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$，其图象是以 $(1, 2)$ 为顶点，$x-1=0$ 为对称轴，开口向上的一段抛物线.



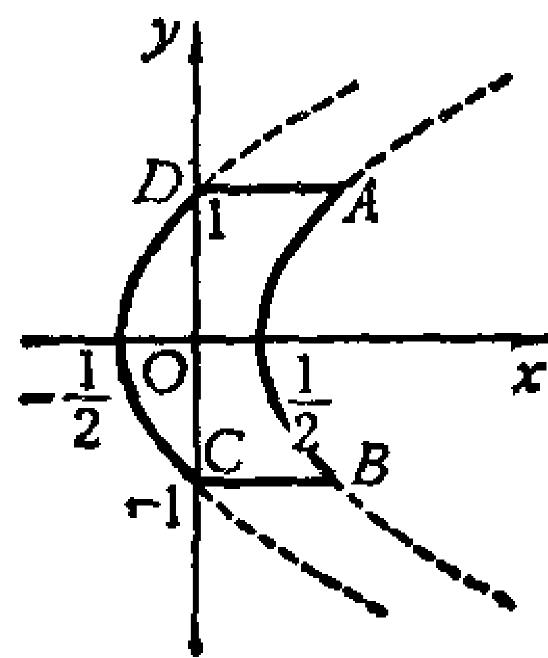
当 $x\in[1, +\infty)$ 时，

$$y=x^2+2x-1=(x+1)^2-2,$$

其图象是以 $(-1, -2)$ 为顶点，$x+1=0$ 为对称轴，开口向上的一段抛物线.

913. 作方程 $|x-y^2|=1-|x|$ 的曲线.

[解] 当 $x\geqslant0, x-y^2\geqslant0$ 时，方程为 $x-y^2=1-x$，即 $y^2=2x-1$. 图象为抛物线弧 AB.



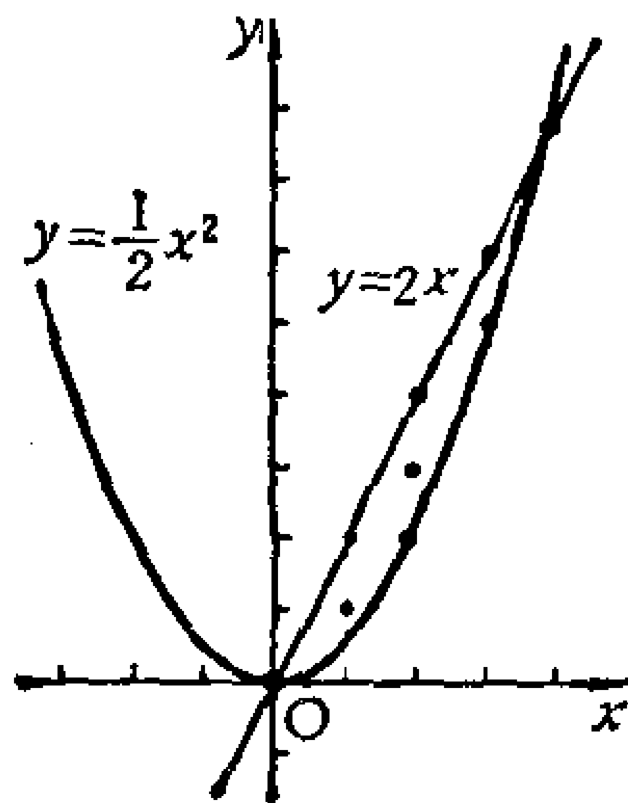
当 $x\geqslant0, x-y^2\leqslant0$ 时，方程为 $y^2-x=1-x$，即 $y^2=1$，$y=\pm1$. 图象为两线段 DA、CB.

当 $x<0, x-y^2\geqslant0$ 时，方程为 $x-y^2=1+x$，即 $y^2=-1$. 因此无图象.

当 $x\leqslant0, x-y^2\leqslant0$ 时，方程为 $y^2-x=1+x$，即 $y^2=2x+1$. 图象为抛物线弧 CD.

914. 求适合条件 $y\leqslant2x$ 和 $y\geqslant\frac{1}{2}x^2$ 的所有整数坐标的点.

[分析] 适合条件 $y\leqslant2x$ 的点在直线 $y=2x$ 上及其下方，适合条件 $y\geqslant\frac{1}{2}x^2$ 的点在抛物线上及其内部，故所求的点应在这两个区域的公共部分内.



[解] 解方程组 $\begin{cases}y=2x\\ y=\frac{1}{2}x^2,\end{cases}$

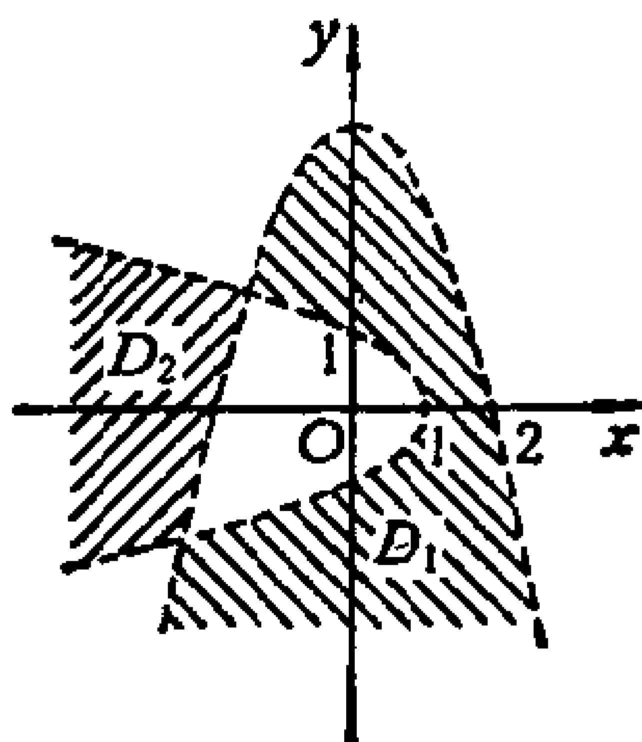
得
$$\begin{cases}x=0\\y=0,\end{cases}\quad\begin{cases}x=4\\y=8.\end{cases}$$

当 $x=1$ 时，$\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 2$，∴ $y=1、2$；

当 $x=2$ 时，$2\leqslant y\leqslant 4$，∴ $y=2、3、4$；

当 $x=3$ 时，$\frac{9}{2}\leqslant y\leqslant 6$，∴ $y=5、6$.

故适合条件的点有：(0, 0)、(1, 1)、(1, 2)、(2, 2)、(2, 3)、(2, 4)、(3, 5)、(3, 6)、(4, 8) 九个.



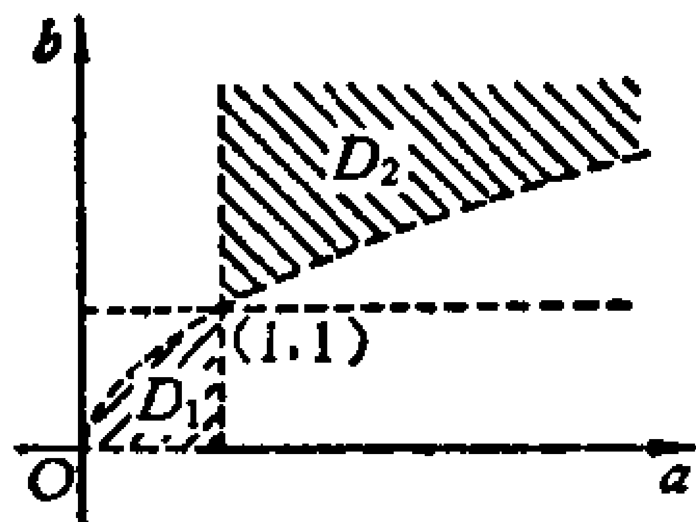
915. 作出点集

$$D=\{(x,\ y)\,|\,(x+y^2-1)(x^2+y-4)<0\}.$$

[解] 令 $D_1=\{(x,\ y)|x+y^2-1>0,\quad 且\quad x^2+y-4<0\}$,

$D_2=\{(x,\ y)|x+y^2-1<0,\quad 且\quad x^2+y-4>0\}$.

D_1 为抛物线 $y^2=-x+1$ 的外部与抛物线 $x^2=-y+4$ 的内部. D_2 为抛物线 $y^2=-x+1$ 的内部与抛物线 $x^2=-y+4$ 的外部. 所求点集 D 为D_1、D_2 的并集，即图中的阴影部分，不包括边界.



916. (1) 抛物线

$$y=x^2\log_a b+2x\log_b a+8$$

的图形全在 x 轴上方，求 a、b 应满足的条件；并作出点 $(a,\ b)$ 所在的区域.

[解] (1) ∵ a、b 是对数的底数与真数，∴ $a>0,\ a\neq1;b>0,\ b\neq1$.
∴ $\log_a b\neq0$. ∵ $y=x^2\log_a b+2x\log_b a+8$ 的图象在 x 轴上方，

$$\therefore\ \begin{cases}\log_a b>0\\ \Delta=4(\log_b a)^2-32\log_a b<0,\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}0<a<1,\ 0<b<1\\ \dfrac{1-(2\log_a b)^3}{(\log_a b)^2}<0\end{cases}\cdots①;$$

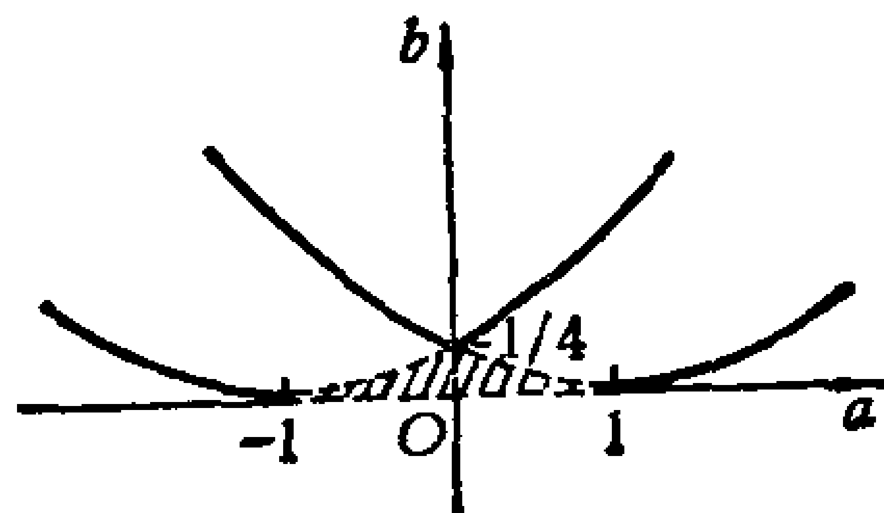
或 $$\begin{cases} a>1,\ b>1 \\ \dfrac{1-(2\log_a b)^3}{(\log_a b)^2}<0 \end{cases}\cdots②.$$

从①得 $$0<b<a^{\frac{1}{2}}<1,$$

从②得 $$1<a^{\frac{1}{2}}<b.$$

作 $D_1=\{(a,\ b)\,|\,0<b<a^{\frac{1}{2}}<1\}$，$D_2=\{(a,\ b)\,|\,1<a^{\frac{1}{2}}<b\}$.
即图中的阴影部分，不包括边界.

917. 要使抛物线 $y=x^2+ax+b$ 与折线 $y=|x|$ 有四个相异的交点，求系数 a、b 满足的条件，并画出满足条件的点集 $(a,\ b)$.



［分析］ 根据题意，$y=x^2+ax+b$ 和 $y=x$ 应有两个交点，且在右半平面，从而可以列出 a、b 应满足的条件；$y=x^2+ax+b$ 和 $y=-x$ 也有两个交点，且在左半平面，从而可以列出 a、b 满足的另一条件. 合起来即得解.

［解］ 当 $x\geqslant0$ 时，由方程组 $\begin{cases} y=x^2+ax+b \\ y=x \end{cases}$ 消去 y，得 $x^2+(a-1)x+b=0\cdots①$. 方程①应有两个正根，$\therefore \begin{cases} (a-1)^2-4b>0 \\ a-1<0 \\ b>0, \end{cases}$

即 $$\begin{cases} b<\dfrac{(a-1)^2}{4} \\ a<1 \\ b>0 \end{cases}\cdots②.$$

当 $x<0$ 时，由方程组 $\begin{cases} y=x^2+ax+b \\ y=-x \end{cases}$ 消去 y，得

$x^2+(a+1)x+b=0\cdots③$. 方程③应有两个负根，

$$\therefore \begin{cases} (a+1)^2-4b>0 \\ a+1>0 \\ b>0, \end{cases} \quad 即 \begin{cases} b<\dfrac{(a+1)^2}{4} \\ a>-1 \\ b>0 \end{cases}\cdots④.$$

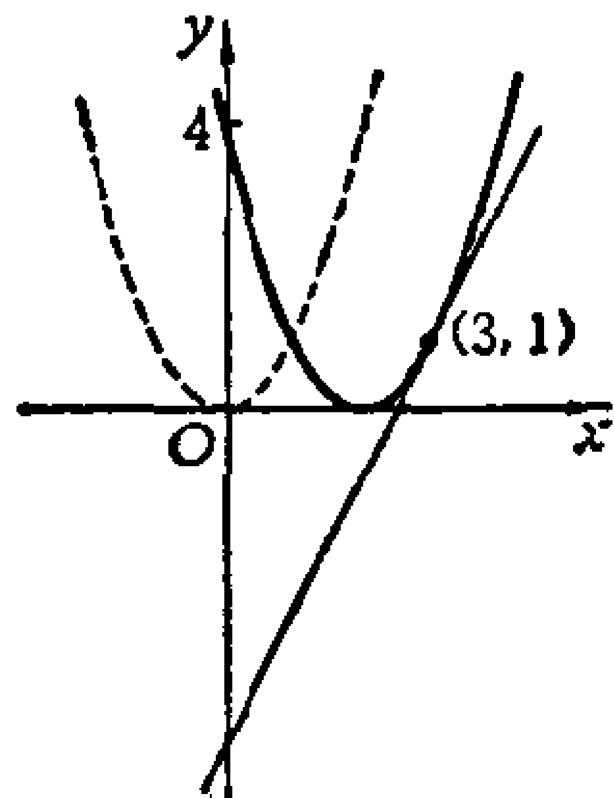
综合 ②、④, a、b 应同时满足下列条件:

$$b<\frac{(a-1)^2}{4},\ b<\frac{(a+1)^2}{4},\ |a|<1,\ b>0.$$

点(a, b)在图中阴影部分内,不包括边界.

§5. 平移、旋转、对称变换

918. 求抛物线 $y=x^2$ 沿 x 轴、y 轴各平移几个单位后与直线 $2x-y-5=0$ 相切于点(3, 1).



[解] 设抛物线 $y=x^2$ 上任意一点 $P_1(x_1,y_1)$,经过沿 x 轴向右平移 a 个单位,再沿 y 轴向上平移 b 个单位后,坐标变为(x, y), 则 $\begin{cases}x=x_1+a\\y=y_1+b.\end{cases}$

$$\therefore\ \begin{cases}x_1=x-a\\y_1=y-b\end{cases}\cdots①.$$

$\because$ 点 P_1 在抛物线 $y=x^2$ 上, $\therefore$ $y_1=x_1^2\cdots②$. 以 ① 代入 ②, 得 $y-b=(x-a)^2$. $\because$ 此抛物线与直线 $2x-y-5=0$ 相切于点(3, 1), $\therefore 1-b=(3-a)^2$, 即 $a^2-6a+b+8=0\cdots③$. 又方程 $2x-5-b=(x-a)^2$ 即 $x^2-2(a+1)x+a^2+b+5=0$ 有等根, $\therefore$ $4(a+1)^2-4(a^2+b+5)=0$, 即 $2a-b-4=0\cdots④$. 由 ③、④ 解得 $a=2$, $b=0$. $\therefore$ 抛物线 $y=x^2$ 沿 x 轴向右平移两个单位后,与直线 $2x-y-5=0$ 相切于点(3, 1).

[说明] 变换问题可看作轨迹问题, 已知曲线 $F(x, y)=0$ 上的任意点 $P_1(x_1, y_1)$经过变换后变为(x, y). 根据变换条件,建立变换方程:

$$x_1=f(x, y)\cdots①,$$
$$y_1=g(x, y)\cdots②.$$

$\because$ 点 P_1 在已知曲线 $F(x, y)=0$ 上,

$$\therefore\ F(x_1, y_1)=0\cdots③.$$

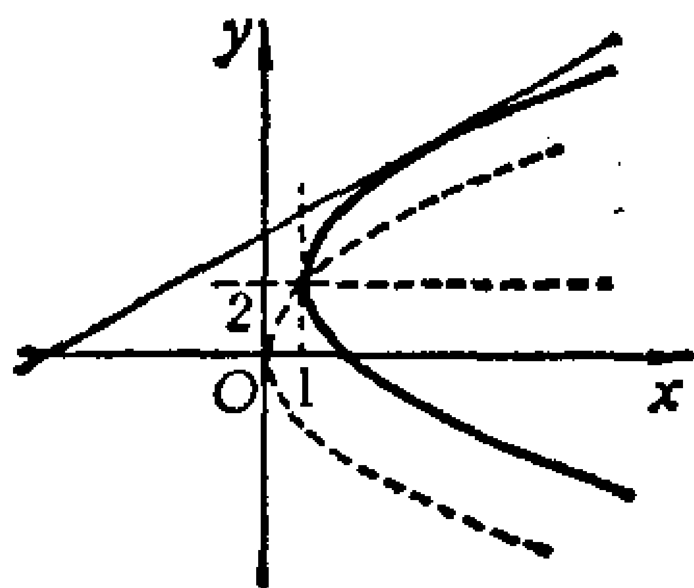
从联立方程 ①、②、③ 中消去 x_1、y_1, 即得变换后的曲线方程

$$F(f(x, y),\ g(x, y))=0.$$

919. 设抛物线 $y^2=4x$ 向右平移一个单位、向上平移两个单

位后与直线 $x-2y+b=0$ 相切，求 b 的值及切点坐标.

[解] 设抛物线上的点(x_1, y_1)平移后的坐标为(x, y)，则



$$\begin{cases}x=x_1+1\\y=y_1+2,\end{cases}\quad\therefore\quad\begin{cases}x_1=x-1\\y_1=y-2.\end{cases}$$

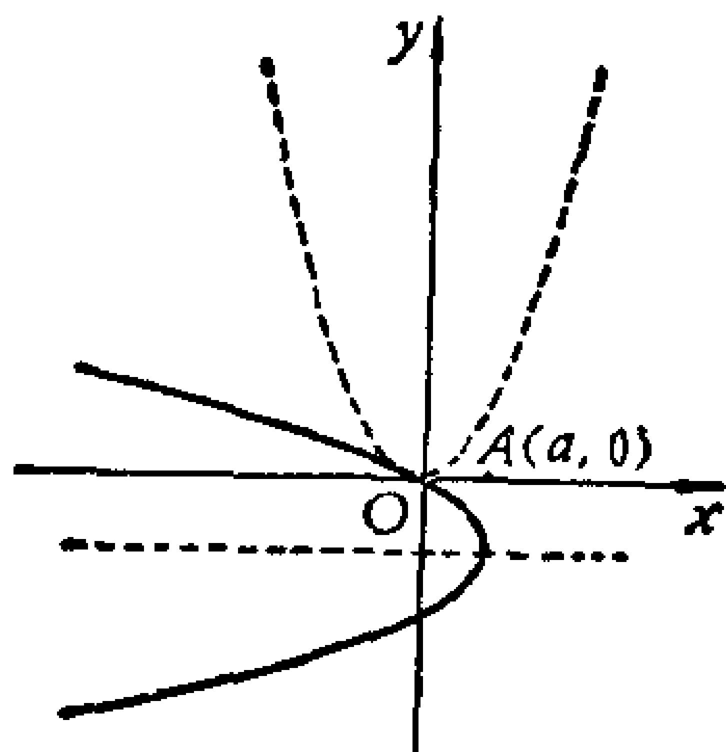
$\because\quad y_1^2=4x_1,$

$\therefore\quad (y-2)^2=4(x-1),$

即 $y^2-4x-4y+8=0$. $\because$ 此抛物线与 $x-2y+b=0$ 相切，$\therefore$ 方程 $y^2-4(2y-b)-4y+8=0$ 有等根. 于是 $\Delta=12^2-16(b+2)=0$, $b=7$. 故此直线方程为 $x-2y+7=0$, 切点的坐标为$(5, 6)$.

920. 求抛物线 $y=x^2$ 绕点 $A(a, 0)$按逆时针方向旋转$90°$后的方程.

[解] 设点 $P_1(x_1, y_1)$绕点 $A(a, 0)$按逆时针方向旋转 $90°$ 后坐标变为(x, y).

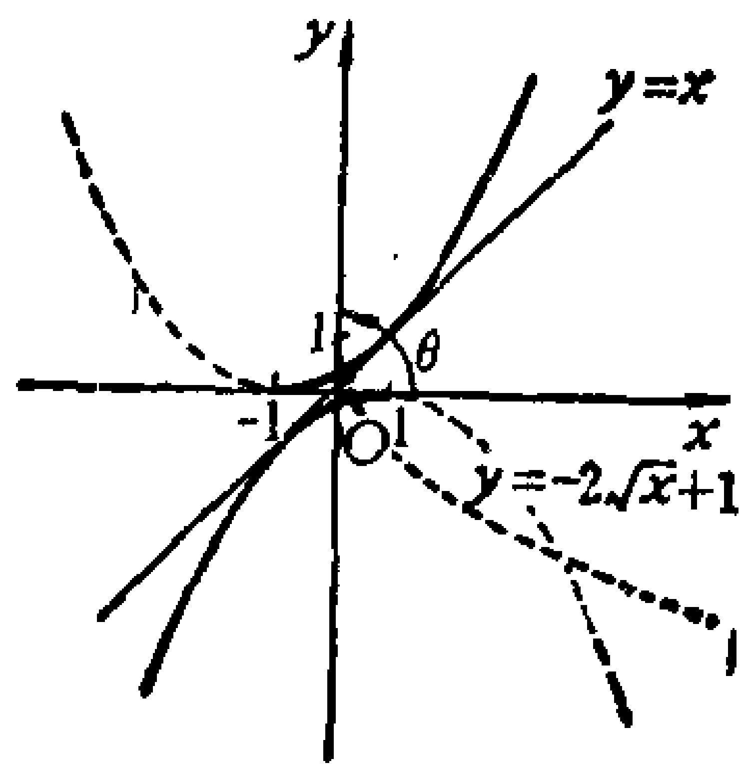


$$\because\quad \begin{pmatrix}x-a\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 90° & -\sin 90°\\ \sin 90° & \cos 90°\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1-a\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y_1\\x_1-a\end{pmatrix},$$

$\therefore$ $x=a-y_1$, $y=x_1-a$. 即 $x_1=a+y$, $y_1=a-x$. 代入抛物线方程，得 $a-x=(a+y)^2$. 即抛物线 $y=x^2$ 绕点 $A(a, 0)$按逆时针方向旋转 $90°$ 后的方程为$(y+a)^2=-(x-a)$.

921. 设将曲线 $y=-2\sqrt{x}+1$ 绕原点旋转 θ 角后与 $y=x$ 相切，求 θ 的值.

[解] 设已知曲线上的点(x', y')绕原点 O 按逆时针旋转 θ 角后的坐标为(x, y)，则



$$x'=x\cos\theta+y\sin\theta,\ y'=-x\sin\theta+y\cos\theta.$$

代入 $$y=-2\sqrt{x}+1,$$

得 $$(-x\sin\theta+y\cos\theta)=-2\sqrt{x\cos\theta+y\sin\theta}+1.$$

$\because$ 此曲线与 $y=x$ 相切，$\therefore (-x\sin\theta+x\cos\theta)=-2\sqrt{x(\cos\theta+\sin\theta)}+1$，即 $x(\cos\theta-\sin\theta)+2\sqrt{\cos\theta+\sin\theta}\cdot\sqrt{x}-1=0$ 有等根.

$$\therefore\quad \Delta=4(\cos\theta+\sin\theta)+4(\cos\theta-\sin\theta)=0,\ \cos\theta=0,$$

$\theta=\frac{\pi}{2}$ 或 $-\frac{\pi}{2}$. 即将曲线 $y=-2\sqrt{x}+1$ 绕原点按逆时针方向旋转 90°，或按顺时针方向旋转 90° 后与直线 $y=x$ 相切.

922. **将曲线 $y=-\sqrt{4px}$ 绕原点按逆时针方向旋转角 θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 后与 x 轴交于另一点 $A(a,\ 0)$ $(a\neq 0)$. 设旋转后的曲线上纵坐标最小的点是 $(b,\ c)$. 试用 θ 的式子表示 $\frac{b}{a}$，并求当 $\frac{b}{a}=\frac{5}{16}$ 时 θ 的值.**

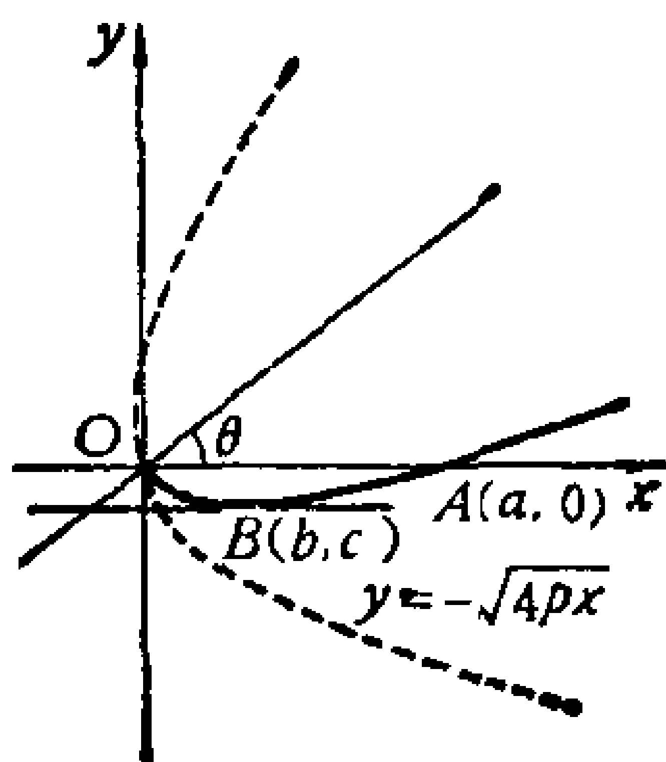
[分析] 用旋转变换公式 $\begin{cases}x=x'\cos\theta+y'\sin\theta\\ y=-x'\sin\theta+y'\cos\theta,\end{cases}$ 使旋转后的曲线通过点 $A(a,\ 0)$，由此求得用 θ 表示 a 的式子. $\because$ θ 是锐角，故旋转后曲线上纵坐标最小的点 $B(b,\ c)$ 必在 x 轴下方，并且和直线 $y=c$ 相切于 B 点. 由此可得用 θ 表示 b 和 c 的式子，从而求得 $\frac{b}{a}$.

[解] 设点 $P(x,\ y)$ 绕原点按逆时针方向旋转角 θ 后的坐标为 $(x',\ y')$，则 $\begin{cases}x=x'\cos\theta+y'\sin\theta\\ y=-x'\sin\theta+y'\cos\theta.\end{cases}$ 以此代入曲线方程 $y=-\sqrt{4px}$，

得
$$-x'\sin\theta+y'\cos\theta=-\sqrt{4p(x'\cos\theta+y'\sin\theta)}.$$

以 x、y 分别代换 x'、y'，得

$$-x\sin\theta+y\cos\theta=-\sqrt{4p(x\cos\theta+y\sin\theta)}\qquad\cdots①.$$



此即曲线 $y=-\sqrt{4px}$ 按逆时针方向旋转 θ 角以后所得的曲线方程. $\because$ 曲线① 过点 $A(a,\ 0)$ $(a\neq 0)$，

$$\therefore\quad a\sin\theta=\sqrt{4pa\cos\theta}.$$

又
$$0<\theta<\frac{\pi}{2},$$

$$\therefore\quad a>0,\quad \sin\theta>0,\quad \cos\theta>0.$$

故 $a^2\sin^2\theta=4pa\cos\theta$, 即 $a=\dfrac{4p\cos\theta}{\sin^2\theta}\cdots$②. 由 ① 式两边平方，得

$$x^2\sin^2\theta-2xy\sin\theta\cos\theta+y^2\cos^2\theta=4p(x\cos\theta+y\sin\theta)\cdots③.$$

$\because$ θ 是锐角，且点 $B(b,\ c)$ 在曲线 ① 上，即为曲线③上纵坐标最小的点，$\therefore$ 点 B 也是曲线 ③ 和直线 $y=c$ 的切点. 故在 ③ 中令 $y=c$，所得的关于 x 的二次方程

$$x^2\sin^2\theta-2x(c\sin\theta\cos\theta+2p\cos\theta)+c^2\cos^2\theta-4pc\sin\theta=0\ \cdots④$$

的判别式 $\Delta=0$，即

$$(c\sin\theta\cos\theta+2p\cos\theta)^2-\sin^2\theta(c^2\cos^2\theta-4pc\sin\theta)=0,$$

$$\therefore\quad c\sin\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=-p\cos^2\theta,\quad c=\frac{-p\cos^2\theta}{\sin\theta}.$$

此时方程 ④ 的根即为点 B 的横坐标，故

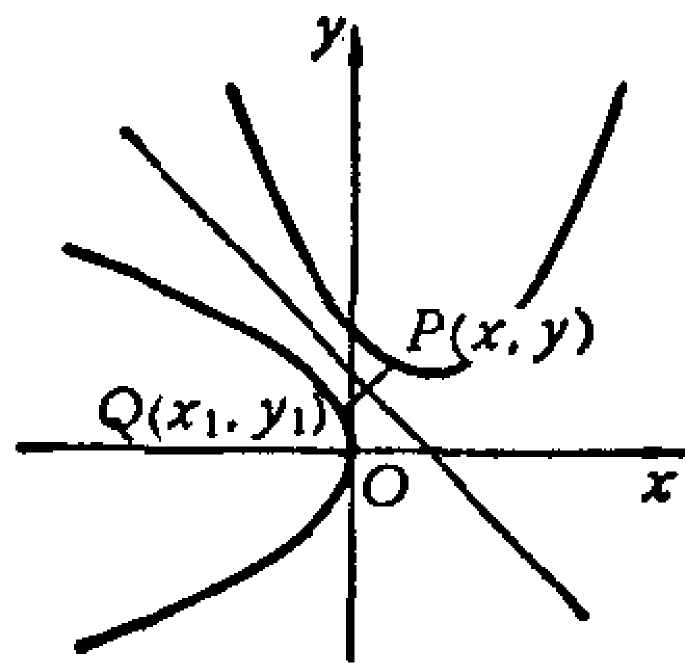
$$b=\frac{c\sin\theta\cos\theta+2p\cos\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}(-p\cos^3\theta+2p\cos\theta)$$

$$=\frac{p\cos\theta}{\sin^2\theta}(1+\sin^2\theta)\ \cdots⑤.$$

由 ②、⑤ 即得 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{1+\sin^2\theta}{4}$. 当 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{5}{16}$ 时，$\dfrac{1+\sin^2\theta}{4}=\dfrac{5}{16}$.

$$\therefore\ \sin\theta=\pm\frac{1}{2},\ 又\ \because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2},\ \therefore\ \theta=\frac{\pi}{6}.$$

923. 求曲线 C: $y^2=-4x$ 关于直线 $x+y=2$ 对称的曲线 C' 的方程.



[分析] 先求曲线 C 上任意一点 $Q(x_1,\ y_1)$ 关于直线 $x+y=2$ 的对称点 $P(x,\ y)$的坐标，利用点 Q 在曲线 C 上的条件，即可得曲线 C' 的方程.

[解] $\because$ P、Q 关于直线 $x+y=2$ 对称，$\therefore$ PQ 的中点$\left(\dfrac{x_1+x}{2},\ \dfrac{y_1+y}{2}\right)$在该直线上，故$\dfrac{1}{2}(x_1+x)+\dfrac{1}{2}(y_1+y)=2$，即 $x_1+y_1=4-x-y\cdots$①. PQ 与直线 $x+y=2$ 垂直，$\therefore$ $\dfrac{y_1-y}{x_1-x}\cdot(-1)=-1$，即 $x_1-y_1=x-y\cdots$②. $\because$ 点 Q 在曲线 C 上，$\therefore$ $y_1^2=-4x_1\cdots$③. 从 ① 与 ② 得: $x_1=2-y$, $y_1=2-x$, 代入 ③，得曲线 C' 方程

$(2-x)^2=-4(2-y)$，即 $(x-2)^2=4(y-2)$.

924. 设抛物线 $y=x^2+3x-1$ 上存在关于直线 $x+y=0$ 对称的相异两点，求此两点的坐标.

［解一］ 点 (p, q) 关于 $x+y=0$ 的对称点的坐标为 $(-q, -p)$，且此两点在抛物线 $y=x^2+3x-1$ 上，

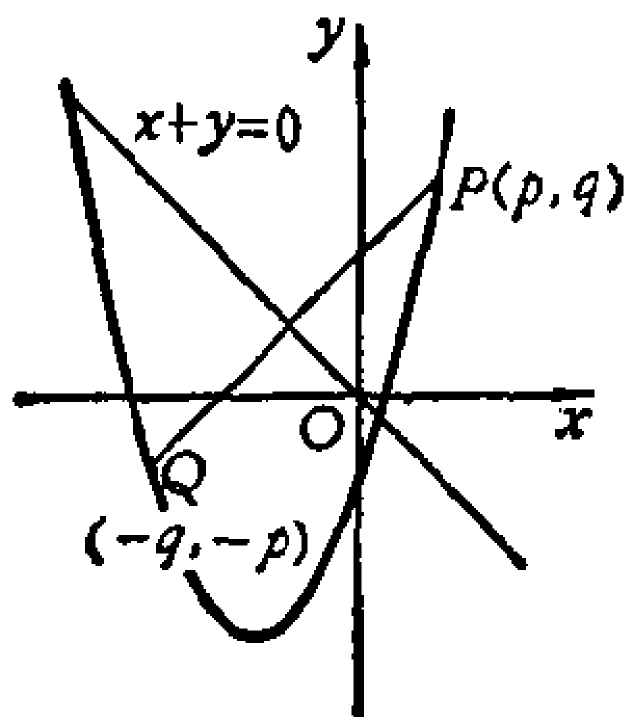
$$\therefore \begin{cases} q=p^2+3p-1 & \cdots① \\ -p=q^2-3q-1 & \cdots② \end{cases}$$

且 $p\neq -q$. ①－②，得 $p+q=(p-q)(p+q)+3(p+q)$ $(p+q\neq 0)$，$\therefore$ $p-q+3=1$. 以 $p=q-2$ 代入②，

得
$$q^2-2q-3=0.$$

$$\therefore \begin{cases} p=1 \\ q=3, \end{cases} \text{或} \begin{cases} p=-3 \\ q=-1. \end{cases}$$

此两点的坐标为 $(1, 3)$、$(-3, -1)$.



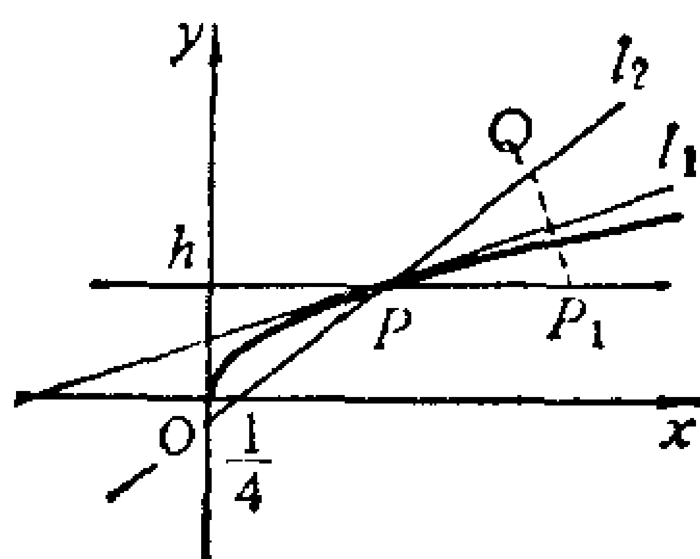
［解二］ 设 P、Q 关于直线 $x+y=0$ 对称，则直线 PQ 的方程为 $x-y=\lambda\cdots①$. 代入抛物线方程 $y=x^2+3x-1$ 得 $x-\lambda=x^2+3x-1$，即 $x^2+2x+\lambda-1=0\cdots②$. 方程②的两个根 x_1、x_2 即点 P、Q 的横坐标. $\therefore$ PQ 的中点的横坐标为 $x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=-1$. 此中点的横坐标也可从方程组 $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=\lambda \end{cases}$ 解得，即 $x=\frac{\lambda}{2}$，$\therefore$ $\lambda=-2$. 方程②即为 $x^2+2x-3=0$，$\therefore$ $x_1=1$，$x_2=-3$；从而 $y_1=3$，$y_2=-1$. 此两点的坐标为 $(1, 3)$、$(-3, -1)$.

925. 设 P 为曲线 $y=\sqrt{x}$ 和直线 $y=h$ $(h>0)$ 的交点. (1) 求 $y=\sqrt{x}$ 的经过点 P 的切线 l_1 的方程；(2) 求直线 $y=h$ 关于 l_1 的对称直线 l_2 的方程；(3) l_2 通过一个与 h 无关的定点，求此定点的坐标.

［解］ (1) 点 P 的坐标为 $P(h^2, h)$. 过点 P 的切线 l_1 的方程为

$$hy=\frac{x+h^2}{2}，\text{即 } y=\frac{x}{2h}+\frac{h}{2}.$$

(2) 设 $y=h$ 上的点 $P_1(x_1, h)$ 关于 l_1 的对称点为 $Q(x, y)$，则 P_1Q 的中点在 l_1 上，并且 $P_1Q\perp l_1$，从而得



$$\frac{y+h}{2}=\frac{1}{2h}\cdot\frac{x+x_1}{2}+\frac{h}{2}\cdots①,$$

$$2h(x-x_1)+y-h=0\cdots②.$$

由①、②消去 x_1，即得对称直线 l_2 的方程为

$$4hx+(1-4h^2)y-h=0.$$

(3) 将直线 l_2 的方程整理得 $4yh^2+(1-4x)h-y=0$，即 $y(4h^2-1)+(1-4x)h=0$. 它所通过的与 h 无关的点应满足 $y=0$ 和 $1-4x=0$. 从而解得 $x=\frac{1}{4}$, $y=0$. 故所求定点坐标为 $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$.

926. 若抛物线 $y=ax^2-1$ 上存在关于直线 $x+y=0$ 成轴对称的两个点，试求 a 的取值范围.

[解] 设点 $P(x_1, y_1)$ 关于直线 $x+y=0$ 的对称点 Q 的坐标为 $(-y_1, -x_1)$，而点 P、Q 在抛物线 $y=ax^2-1$ 上，$\therefore$ $y_1=ax_1^2-1\cdots①$, $-x_1=a(-y_1)^2-1\cdots②$. ①$-$②，得 $x_1+y_1=a(x_1^2-y_1^2)$. $\because$ 点 P 不在直线 $x+y=0$ 上，$\therefore x_1+y_1\neq0$，故 $a(x_1-y_1)=1$, $x_1=\frac{1}{a}+y_1$. 代入②，得

$$ay_1^2+y_1+\frac{1}{a}-1=0\cdots③.$$

如果点 P、Q 存在，则 y_1 为实数，故方程③有两不等的实根，

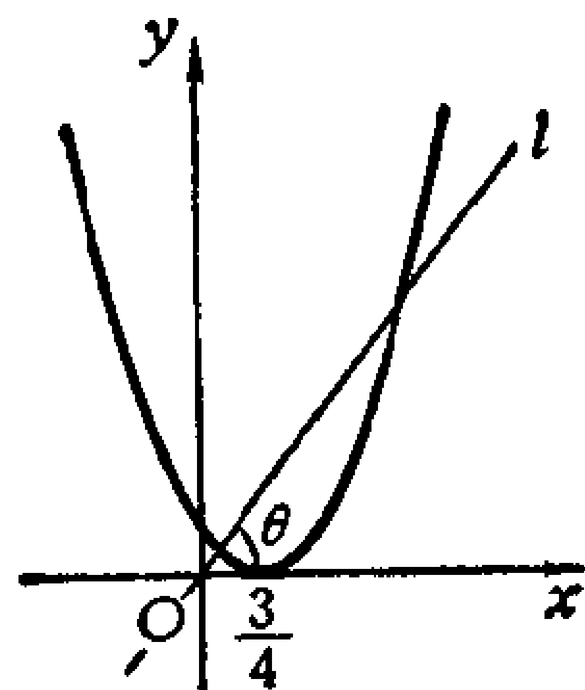
$$\therefore\quad \Delta=1-4a\left(\frac{1}{a}-1\right)>0,\quad 即\quad a>\frac{3}{4}.$$

927. 已知抛物线 $y=\left(x-\frac{3}{4}\right)^2$ 和直线 l: $y=x\operatorname{tg}\theta$, $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. 为使抛物线上存在关于直线 l 的对称点，求 θ 的取值范围.

[解] 设抛物线 $y=\left(x-\frac{3}{4}\right)^2$ 上关于直线 l: $y=x\operatorname{tg}\theta$ 对称的两点为 $P\left(x_1, \left(x_1-\frac{3}{4}\right)^2\right)$ 和 $Q\left(x_2, \left(x_2-\frac{3}{4}\right)^2\right)$，则 $PQ\perp l$，且线段 PQ 的中点

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{\left(x_1-\frac{3}{4}\right)^2+\left(x_2-\frac{3}{4}\right)^2}{2}\right)$$

在直线 l 上.



$\because\ \theta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right),\quad \therefore\ x_1\neq x_2.$

故 $$\frac{\left(x_1-\frac{3}{4}\right)^2-\left(x_2-\frac{3}{4}\right)^2}{x_1-x_2}\cdot\operatorname{tg}\theta=-1,$$

即 $$\left(x_1+x_2-\frac{3}{2}\right)\operatorname{tg}\theta=-1\cdots①,$$

$$\frac{\left(x_1-\frac{3}{4}\right)^2+\left(x_2-\frac{3}{4}\right)^2}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}\operatorname{tg}\theta\cdots②.$$

由 ① 得 $(x_1+x_2)\operatorname{tg}\theta=\frac{3}{2}\operatorname{tg}\theta-1$, 代入 ②,

得 $$\frac{3}{2}\operatorname{tg}\theta-1=\left(x_1-\frac{3}{4}\right)^2+\left(x_2-\frac{3}{4}\right)^2\cdots③.$$

$$\because\ \left(x_1-\frac{3}{4}\right)^2+\left(x_2-\frac{3}{4}\right)^2>\frac{1}{2}\left(x_1+x_2-\frac{3}{2}\right)^2,$$

$\therefore$ 由 ①、③ 得 $\frac{3}{2}\operatorname{tg}\theta-1>\frac{1}{2\operatorname{tg}^2\theta}$, 即 $3\operatorname{tg}^3\theta-2\operatorname{tg}^2\theta-1>0$,

$$(\operatorname{tg}\theta-1)(3\operatorname{tg}^2\theta+\operatorname{tg}\theta+1)>0.$$

$$\because\ 3\operatorname{tg}^2\theta+\operatorname{tg}\theta+1=3\left(\operatorname{tg}\theta+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{11}{12}>0,$$

$\therefore\ \operatorname{tg}\theta>1$. 故 θ 的取值范围为 $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

§6. 最大值、最小值

928. 求过抛物线 $y^2=2px$ 焦点的弦长的最小值.

[分析]　可先求出任一条焦点弦长度的解析式，再求其极值.

[解一]　设抛物线 $y^2=2px$ 的弦的两端点为 $A(x_1,\ y_1)$ 和 $B(x_2,\ y_2)$，它

所在的直线方程是 $x=my+a$. ∵ 弦 AB 过焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, ∴ $a=\frac{p}{2}$, 故直线 AB 的方程为 $x=my+\frac{p}{2}\cdots$①, 于是 $x_1=my_1+\frac{p}{2}$, $x_2=my_2+\frac{p}{2}$. 以①代入 $y^2=2px$, 得 $y^2-2pmy-p^2=0$. ∴ $y_1+y_2=2pm$, $y_1y_2=-p^2$.

$$\because\quad (y_1-y_2)^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2=4p^2(m^2+1),$$

$$\therefore |AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{m^2(y_1-y_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$
$$=\sqrt{(m^2+1)(y_1-y_2)^2}=2p(m^2+1)\geqslant 2p.$$

故当 $m=0$, 即过焦点的弦垂直 x 轴时, 它的长度最小, 其最小值为 $2p$.

[解二] 以焦点 F 为极点, 抛物线的对称轴为极轴建立极坐标系（图1), 则 $y^2=2px$ 相应的极坐标方程为 $\rho=\frac{p}{1-\cos\theta}$. 设焦点弦 AB 的两端点的极坐标为 $A(\rho_1,\theta_1)$、$B(\rho_2,\theta_2)$, 且 $\theta_2=\theta_1+\pi$. 于是

$$|AB|=\frac{p}{1-\cos\theta_1}+\frac{p}{1+\cos\theta_1}=\frac{2p}{1-\cos^2\theta_1}=\frac{2p}{\sin^2\theta_1}\geqslant 2p.$$

∴ 当 $\theta_1=\frac{\pi}{2}$ 时, 焦点弦 $|AB|$ 最小, 其最小值为 $2p$.

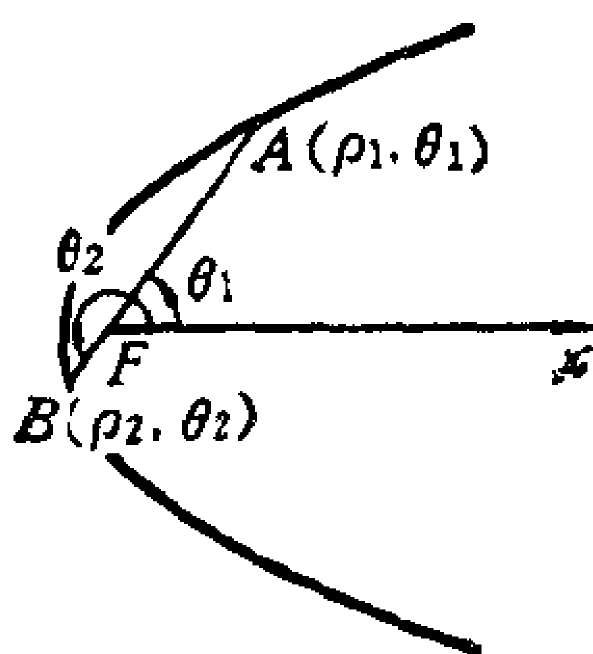


图 1

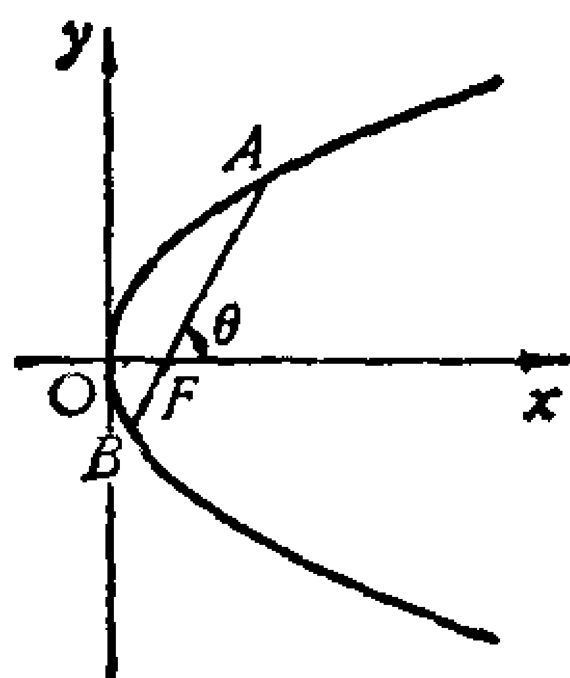


图 2

[解三] 设焦点弦所在直线方程为

$$\begin{cases} x=\frac{p}{2}+t\cos\theta \\ y=t\sin\theta \end{cases}\cdots①,$$

其中 t 为参数, θ 为直线的倾角(图2). 代入抛物线方程 $y^2=2px$, 得

$$t^2\sin^2\theta-2pt\cos\theta-p^2=0.$$

于是

$$|AB|^2=(t_1-t_2)^2=(t_1+t_2)^2-4t_1t_2$$
$$=\left(\frac{2p\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)^2+\frac{4p^2}{\sin^2\theta}=\frac{4p^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{\sin^4\theta},$$

$\therefore |AB|=\frac{2p}{\sin^2\theta}\geqslant 2p$. 故当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，焦点弦 $|AB|$ 最小，其最小值为 $2p$.

［说明］ (1) 求几何量的极值，一般都可用上述方法，先把要求的几何量表示为某一参变数的解析式，再根据解析式的具体情况，用适当方法求其极值. (2) 抛物线 $y^2=2px$ 的弦不可能平行于 x 轴，但可以平行于 y 轴，故在［解一］中设弦所在的直线方程为 $x=my+a$. (3) 与焦点弦有关的问题有时化为极坐标来解较为简单，如［解二］.

929. 抛物线 $y=x^2$ 和定点 A 的坐标为 $(0, a)\left(a>\frac{1}{2}\right)$，$P$ 是抛物线 $y=x^2$ 上的动点.

(1) 求使 $|AP|^2$ 有最小值的点 P 的横坐标 x；

(2) 假设在(1)中求出的 x 的正值为 x_0，求证抛物线在 $P_0(x_0, x_0^2)$ 的切线和 AP_0 垂直.

［解］ (1) 设点 P 的坐标为 $P(x, x^2)$，$|AP|^2=u$，则

$$u=x^2+(x^2-a)^2=\left(x^2+\frac{1-2a}{2}\right)^2+a-\frac{1}{4}.$$

$\because a>\frac{1}{2}$，$\therefore 2a-1>0$. 当 $x^2=\frac{2a-1}{2}$，即 $x=\pm\sqrt{\frac{2a-1}{2}}$ 时，u 有最小值. 故点 P 的横坐标为 $x=\sqrt{\frac{2a-1}{2}}$ 或 $x=-\sqrt{\frac{2a-1}{2}}$.

(2) $\because x_0=\sqrt{\frac{2a-1}{2}}$，$\therefore$ 点 P_0 的坐标为 $\left(\sqrt{\frac{2a-1}{2}}, \frac{2a-1}{2}\right)$. 直线 AP_0 的斜率

$$k_1=\frac{a-\frac{2a-1}{2}}{-\sqrt{\frac{2a-1}{2}}}=\frac{-1}{\sqrt{4a-2}}.$$

抛物线在点 P_0 的切线方程是

$$\frac{1}{2}\left(y+\frac{2a-1}{2}\right)=\sqrt{\frac{2a-1}{2}}\,x,$$

切线的斜率

$$k_2=\frac{\sqrt{\frac{2a-1}{2}}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{4a-2}\ .$$

$\therefore k_1\cdot k_2=-1$. 即过点 P_0 的切线和 AP_0 垂直.

930. 设有过原点且互相垂直的两直线分别交抛物线 $y^2=4p(x+p)$ $(p>0)$ 于 A、B 和 C、D 四点. 试求 $|AB|+|CD|$ 的最小值.

[解] 设弦 AB 所在直线的方程为 $\begin{cases}x=t\cos\theta\\ y=t\sin\theta\end{cases}\cdots$①, 则弦 CD 所在直线的方程为 $\begin{cases}x=t\cos(90^\circ+\theta)=-t\sin\theta\\ y=t\sin(90^\circ+\theta)=t\cos\theta\end{cases}\cdots$②. ① 代入 $y^2=4p(x+p)$ 并化简, 得 $t^2\sin^2\theta-4pt\cos\theta-4p^2=0\cdots$③. $\because AB$ 与抛物线有两个交点, $\therefore \theta\neq n\pi\quad(n\in J)$. 故方程 ③ 有两根, 设其为 t_1, t_2, 于是

$$t_1+t_2=\frac{4p\cos\theta}{\sin^2\theta},\quad t_1t_2=-\frac{4p^2}{\sin^2\theta}.$$

$$|AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}$$

$$=\sqrt{\frac{16p^2\cos^2\theta}{\sin^4\theta}+\frac{16p^2}{\sin^2\theta}}=\frac{4p}{\sin^2\theta}.$$

同理, ② 代入 $y^2=4p(x+p)$, 可得 $|CD|=\frac{4p}{\cos^2\theta}$.

$$|AB|+|CD|=\frac{4p}{\sin^2\theta}+\frac{4p}{\cos^2\theta}=\frac{16p}{\sin^2 2\theta}\geqslant 16p.$$

故当 $\theta=\frac{(2n+1)\pi}{4}$ 时, $|AB|+|CD|$ 的值最小, 其最小值为 $16p$.

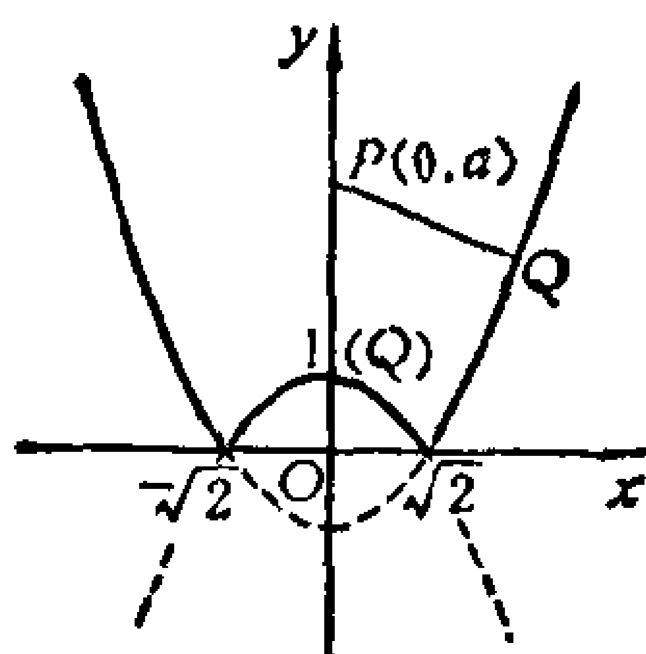
931. 试用 a 表出从点 $P(0, a)$ 到曲线 $y=\left|\frac{x^2}{2}-1\right|$ 上的点 $Q(x, y)$ 的距离的最小值 $(a>1)$.

[解] 当 $\frac{x^2}{2}-1\geqslant 0$, 即 $x\geqslant\sqrt{2}$ 或 $x\leqslant-\sqrt{2}$ 时, $y=\left|\frac{x^2}{2}-1\right|=\frac{x^2}{2}-1$, 故点 Q 的坐标可表为 $\left(x,\ \frac{x^2}{2}-1\right)$. 于是

$$|PQ|^2=x^2+\left[\left(\frac{x^2}{2}-1\right)-a\right]^2=\left(\frac{x^2}{2}-a\right)^2+2a+1.$$

$\because a>1$，而$\frac{x^2}{2}\geqslant 1$，$\therefore$ 在$\frac{x^2}{2}=a$时，$|PQ|$有最小值为$\sqrt{2a+1}$.

当 $\frac{x^2}{2}-1<0$，即 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$时，$y=\left|\frac{x^2}{2}-1\right|=1-\frac{x^2}{2}$，故点 Q 的坐标可表为$\left(x,\ 1-\frac{x^2}{2}\right)$. 于是



$$|PQ|^2=x^2+\left[\left(1-\frac{x^2}{2}\right)-a\right]^2$$
$$=\frac{x^4}{4}+ax^2+(a-1)^2.$$

$\because a>1$，$\therefore$ 在 $x=0$ 时，$|PQ|$有最小值为 $a-1$.

$\because (a-1)^2-(2a+1)=a^2-4a=a(a-4)$，$\therefore$ 当 $1<a\leqslant 4$ 时，$a-1\leqslant\sqrt{2a+1}$；当 $a>4$ 时，$a-1>\sqrt{2a+1}$. 故所求距离的最小值在 $1<a\leqslant 4$ 时为 $a-1$；在 $a>4$ 时为$\sqrt{2a+1}$.

932. 已知二次函数 $y=x^2-2x\sec\alpha+\frac{2+\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha}$($\alpha$为参数，$\cos\alpha\neq 0$). (1) 求证此抛物线系的顶点轨迹为双曲线；(2) 求抛物线 $y=x^2+2x+6$ 到上述双曲线的渐近线的最短距离.

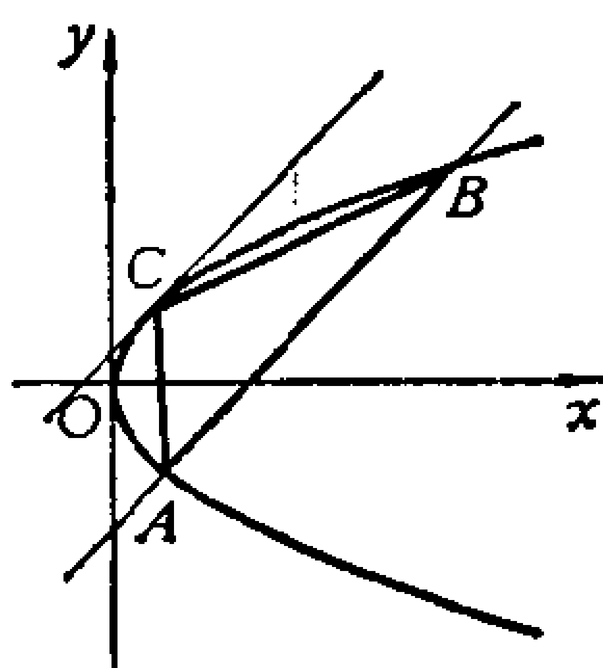
［解］ (1) $y=x^2-2x\sec\alpha+\sec^2\alpha-\sec^2\alpha+\frac{2+\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha}=(x-\sec\alpha)^2+\operatorname{tg}\alpha$. 设$(x,\ y)$为轨迹上任意一点，则$\begin{cases}x=\sec\alpha\\ y=\operatorname{tg}\alpha,\end{cases}$ 消去参数 α，即得 $x^2-y^2=1$. 故顶点轨迹为双曲线.

(2) 抛物线 $y=x^2+2x+6$ 上任意一点$(x_1,\ x_1^2+2x_1+6)$到双曲线 $x^2-y^2=1$ 的渐近线：$x-y=0$，$x+y=0$ 的距离分别为

$$d_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_1^2-2x_1-6)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(x_1+\frac{1}{2}\right)^2+6-\frac{1}{4}\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(x_1+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23}{4}\right],$$
$$d_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+x_1^2+2x_1+6)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(x_1+\frac{3}{2}\right)^2+6-\frac{9}{4}\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(x_1+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\right].$$

∴ 当$x_1=-\frac{1}{2}$时，d_1的最小值为$\frac{23\sqrt{2}}{8}$；当$x_1=-\frac{3}{2}$时，d_2的最小值为$\frac{15\sqrt{2}}{8}$. 故在此抛物线上点$\left(-\frac{3}{2}, \frac{21}{4}\right)$到双曲线的渐近线$x+y=0$的距离最短，其值为$\frac{15\sqrt{2}}{8}$.

933. 设抛物线$y^2=4ax$的弦AB的方程为$x-y=4a$. (1)求以AB为底，抛物线的内接$\triangle ABC$的重心的轨迹；(2)问点C位于抛物线弧$\overset{\frown}{AOB}$上何处时，内接$\triangle ABC$的面积最大.



[分析] $\triangle ABC$的顶点A、B是定点，顶点C在抛物线上运动时，$\triangle ABC$的重心G随着运动，因而可以通过建立重心G与动点C的坐标之间的关系来解. 由于$|AB|$是定值，要使$\triangle ABC$的面积最大，只要使过点C的切线平行于AB.

[解] 设$G(x, y)$为轨迹上任意一点，A、B、C的坐标分别为(x_1, y_1)、(x_2, y_2)及$(at^2, 2at)$. 由$\begin{cases} y^2=4ax \\ x-y=4a \end{cases}$得$x^2-12ax+16a^2=0$，∴ $x_1+x_2=12a$，$y_1+y_2=x_1+x_2-8a=4a$. 代入重心坐标公式$3x=x_1+x_2+at^2$与$3y=y_1+y_2+2at$，得$3x-12a=at^2\cdots$①，$3y-4a=2at\cdots$②，由①、②消去t，得

$$\left(\frac{3y-4a}{2a}\right)^2=\frac{3x-12a}{a}, \text{ 即 } \left(y-\frac{4a}{3}\right)^2=\frac{4a}{3}(x-4a).$$

故所求轨迹是以$\left(4a, \frac{4}{3}a\right)$为顶点的抛物线，其开口方向与已知抛物线相同.

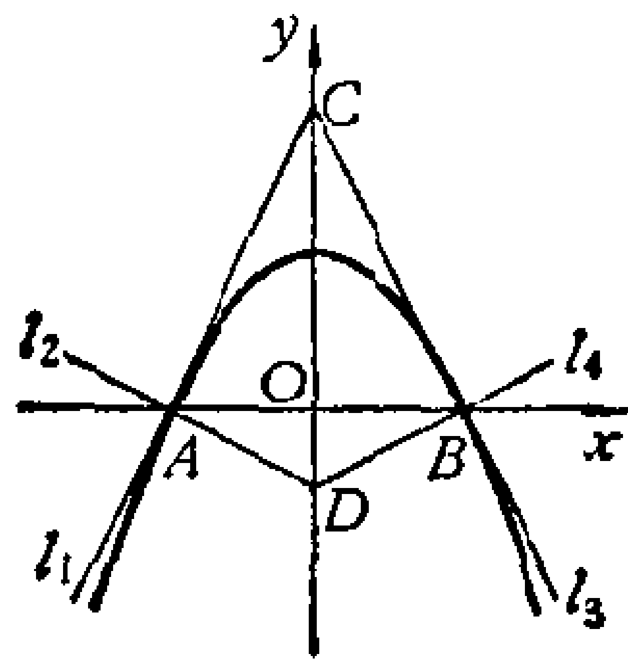
当过点C的切线与弦AB平行时，内接$\triangle ABC$的面积最大. 而过点C的切线斜率$k=\frac{2a}{y_C}=1$，得$y_C=2a$，因而$x_C=a$. 即当点C的坐标为$(a, 2a)$时，$\triangle ABC$面积最大.

[说明] 涉及曲线上的点到定直线距离的极值问题，常可归结为求已知斜率的切线的切点. 本题因AB的长为定值，故也可由点C到AB的距离

$$d=\left|\frac{at^2-2at-4a}{\sqrt{2}}\right|=\frac{a}{\sqrt{2}}(4+2t-t^2)=\frac{a}{\sqrt{2}}[5-(t-1)^2]$$

进行研究．当 $t=1$ 时，d 最大．即当 C 位于$(a, 2a)$时，$\triangle ABC$ 的面积最大．

934．设过点 $A(-1, 0)$、$B(1, 0)$，且对称轴为 y 轴的抛物线在 A、B 两点的切线分别为 l_1、l_3，法线分别为 l_2、l_4，又 C、D 分别为两切线 l_1、l_3 和两法线 l_2、l_4 的交点．(1)求证 A、B、C、D 四点共圆，并写出圆方程；(2)在何种情况下，圆的面积最小？



［解］ (1) 因为过曲线上一点的切线和法线互相垂直，$\therefore l_1\perp l_2$，$l_3\perp l_4$，则四边形 $ABCD$ 对角互补，故 A、B、C、D 四点共圆．

设抛物线方程为 $y=ax^2+c\ (a\neq 0)$．$\because$ 它过 $A(-1, 0)$、$B(1, 0)$，$\therefore a+c=0$，$c=-a$，则抛物线方程为 $ax^2-y-a=0$．两切线 l_1 与 l_3 的方程分别为 $2ax+y+2a=0$ 与 $2ax-y-2a=0$．$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, -2a)$．两法线 l_2 与 l_4 的方程分别为 $x-2ay=-1$ 与 $x+2ay=1$ $\therefore$ 点 D 的坐标为$\left(0, \dfrac{1}{2a}\right)$．$CD$ 为圆的直径，CD 中点的坐标为$\left(0, \dfrac{1-4a^2}{4a}\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}|CD|=\left|\dfrac{1+4a^2}{4a}\right|$．

故过这四点的圆方程为 $x^2+\left(y-\dfrac{1-4a^2}{4a}\right)^2=\left(\dfrac{1+4a^2}{4a}\right)^2$．

(2) 因圆的半径

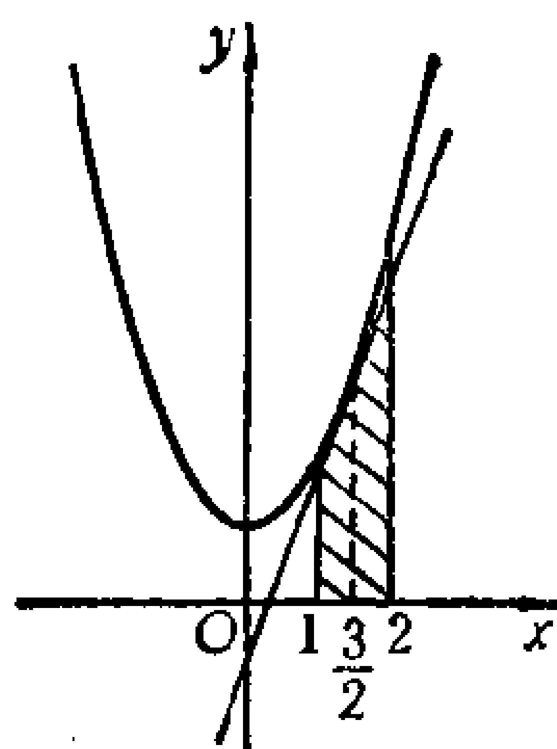
$$r=\frac{1+4a^2}{4|a|}=\frac{1}{4|a|}+|a|\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{4|a|}\cdot|a|}=1,$$

故当且仅当 $\dfrac{1}{4|a|}=|a|$，即 $|a|=\dfrac{1}{2}$，$a=\pm\dfrac{1}{2}$ 时，圆的半径最小，从而圆面积的最小值 $S_{min}=\pi$．

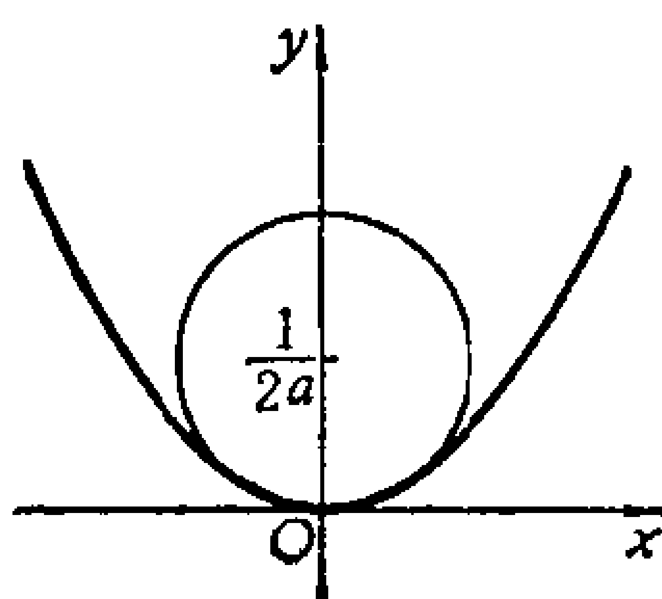
935．曲边梯形由曲线 $y=x^2+1$ 及直线 $y=0$，$x=1$，$x=2$ 所围成，试问通过曲线 $y=x^2+1$，$x\in[1, 2]$上的哪一点作切线，能使此切线从曲边梯形上切出一个最大面积的普通梯形．

［解］ 设 $x_1\in[1, 2]$，点(x_1, x_1^2+1)为曲线 $y=x^2+1$ 上一点．过这点

的切线方程为 $\frac{y+x_1^2+1}{2}=x_1x+1$，即 $y=2x_1x-x_1^2+1\cdots$①. 切线①与直线 $x=1$ 的交点的纵坐标为 $y_1=2x_1-x_1^2+1$，与直线 $x=2$ 的交点的纵坐标为 $y_2=4x_1-x_1^2+1$. ∴ 切线①在曲边梯形上切出梯形的中位线长 $\frac{y_1+y_2}{2}=3x_1-x_1^2+1$，梯形的高为 1. 故普通梯形的面积 $S=3x_1-x_1^2+1=-\left(x_1-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$. 当 $x_1=\frac{3}{2}$ 时，S 为最大. 故过点 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{13}{4}\right)$ 作切线，能切出最大面积的普通梯形.



936. 在抛物线 $y=ax^2(a>0)$ 的上方 $(y\geqslant ax^2)$，求出一个与抛物线相切于原点的最大的圆的方程.



[解] 由于所求的圆和抛物线 $y=ax^2$ 切于原点，故可设它的方程为 $x^2+(y-b)^2=b^2$. ∵ 圆在抛物线 $y=ax^2(a>0)$ 上方，∴ $b>0$，且 $y\geqslant ax^2$，即 $x^2\leqslant\frac{y}{a}$. 以此代入圆方程，得

$$\frac{y}{a}+(y-b)^2\geqslant b^2,\ \text{即}\ y\left(y-2b+\frac{1}{a}\right)\geqslant 0.$$

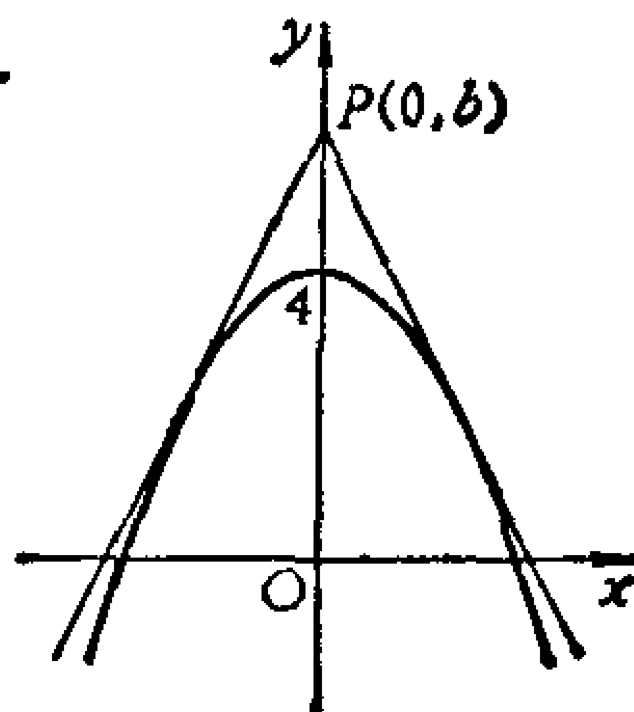
∵ $y\geqslant 0$. ∴ $y-2b+\frac{1}{a}\geqslant 0$，即 $2b\leqslant y+\frac{1}{a}\cdots$①. ∵ 不等式①对于任意的 $y\geqslant 0$ 都成立，∴ $2b\leqslant\frac{1}{a}$，$b\leqslant\frac{1}{2a}$. 故 b 的极大值为 $\frac{1}{2a}$，所求的圆方程为 $x^2+\left(y-\frac{1}{2a}\right)^2=\frac{1}{4a^2}$.

937. 已知抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+4$. 在 y 轴上求一点 P，使从点 P 向抛物线所作两切线和 x 轴所围成的三角形的面积最小.

[分析] 设点 P 的纵坐标为自变量，过点 P 所作两切线和 x 轴围成的三角形面积为因变量，列出函数式，再求其最小值.

[解] 设点 P 的坐标为 $(0,\ b)$，过点 P 的抛物线切线方程为 $y=kx+b$.

由方程组 $\begin{cases} y=kx+b \\ y=-\dfrac{1}{2}x^2+4 \end{cases}$ 得 $x^2+2kx+2b-8=0$. ∵直线是抛物线的切线，∴ $\Delta=4k^2-8b+32=0$, $k=\pm\sqrt{2b-8}$. 则两切线在 x 轴上截距分别是 $\dfrac{b}{\sqrt{2b-8}}$ 和 $\dfrac{-b}{\sqrt{2b-8}}$. 两切线和 x 轴围成的三角形面积 $S=\dfrac{b^2}{\sqrt{2b-8}}$. ∵ $b>4$, 可令 $b=4\sec^2\varphi$ $\left(0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$.



$$\therefore\quad S=\frac{16\sec^4\varphi}{2\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi}=\frac{16}{2\sqrt{2}\sin\varphi\cos^3\varphi}=\frac{4\sqrt{2}}{\sin\varphi\cos^3\varphi}.$$

令 $u=\sin\varphi\cos^3\varphi$, ∵ $u>0$,

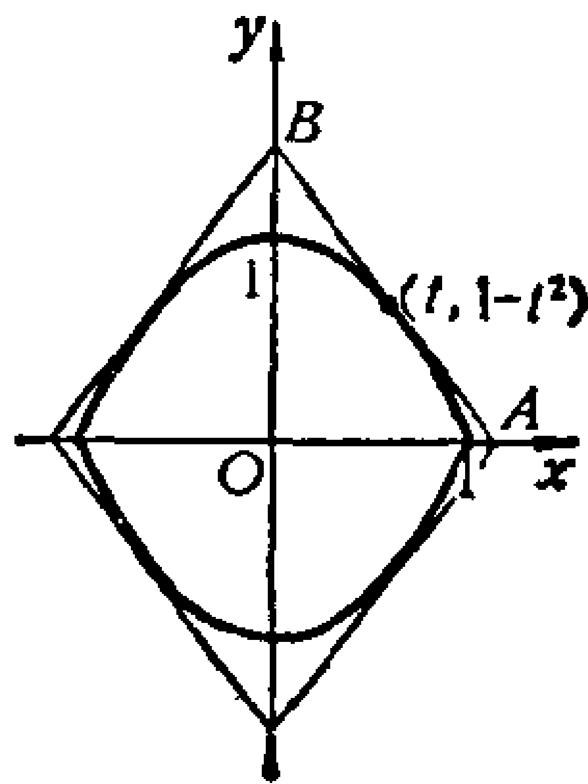
$$\therefore\quad u=\sqrt{\cos^6\varphi\sin^2\varphi}=\sqrt{\frac{\cos^2\varphi\cdot\cos^2\varphi\cdot\cos^2\varphi\cdot3\sin^2\varphi}{3}}$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{\cos^2\varphi+\cos^2\varphi+\cos^2\varphi+3\sin^2\varphi}{4}\right)^2$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{9}{16}=\frac{9}{16\sqrt{3}}.$$

当 $\cos^2\varphi=3\sin^2\varphi$, 即 $\mathrm{tg}^2\varphi=\dfrac{1}{3}$ 时，等号成立. ∵ $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$, ∴当 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ 时，u 有最大值 $\dfrac{9}{16\sqrt{3}}$, 从而 $S=\dfrac{4\sqrt{2}}{u}$ 有最小值 $\dfrac{64\sqrt{6}}{9}$. 此时，$b=4\sec^2\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{16}{3}$. ∴当点 P 的坐标为 $\left(0,\ \dfrac{16}{3}\right)$时，过点 P 所作两切线和 x 轴围成的三角形面积最小.

938. **求曲线 $|y|=1-x^2(-1\leqslant x\leqslant1)$ 的外切菱形面积的最小值(菱形顶点在坐标轴上).**



［解］ 因曲线 $|y|=1-x^2$ 关于两轴均对称，故菱形面积 $S=4S_{\triangle AOB}$. 在第一象限内，曲线为 $y=1-x^2$. 设切点为 $(t,\ 1-t^2)$, 切线方程为

$\frac{y+1-t^2}{2}=1-tx$, 即 $y=-2tx+t^2+1$. 它在 x、y 轴上的交点分别为 A、B, $\therefore OA=\frac{t^2+1}{2t}, OB=t^2+1$. $S=4\cdot\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB=\frac{(t^2+1)^2}{t}$.

令 $t=\operatorname{tg}\theta$, 则 $S=\frac{1}{\cos^3\theta\cdot\sin\theta}$. 而

$$\cos^3\theta\cdot\sin\theta=\sqrt{\cos^6\theta\cdot\sin^2\theta}\leqslant\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{\cos^2\theta+\cos^2\theta+\cos^2\theta+3\sin^2\theta}{4}\right)^4}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^4}=\frac{9}{16\sqrt{3}},$$

$\therefore$ 当 $\cos^2\theta=3\sin^2\theta$, 即 $\operatorname{tg}\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $S_{\min}=\frac{16\sqrt{3}}{9}$.

939. 已知抛物线 C: $y=x^2-x\cos\theta+2\sin\theta-1$ (θ 为参数). 求抛物线在 x 轴上两截距的平方和的最小值和最大值.

[解] 设抛物线 C 在 x 轴上的两截距为 x_1、x_2, 则 x_1、x_2 为方程 $x^2-x\cos\theta+2\sin\theta-1=0$ 的两实根. $\therefore$ 当 $\cos^2\theta-4(2\sin\theta-1)\geqslant0\cdots①$ 时, $x_1+x_2=\cos\theta$, $x_1\cdot x_2=2\sin\theta-1$. 故 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\cos^2\theta-2(2\sin\theta-1)=-(\sin\theta+2)^2+7$. 但由 ① 得 $\sin^2\theta+8\sin\theta-5\leqslant0$, 即 $(\sin\theta+4+\sqrt{21})(\sin\theta+4-\sqrt{21})\leqslant0$. $\because \sin\theta+4+\sqrt{21}>0$, $\therefore -1\leqslant\sin\theta\leqslant\sqrt{21}-4$, 于是 $1\leqslant\sin\theta+2\leqslant\sqrt{21}-2$, $1\leqslant(\sin\theta+2)^2\leqslant(\sqrt{21}-2)^2$,

$$\therefore\quad -(\sqrt{21}-2)^2+7\leqslant-(\sin\theta+2)^2+7\leqslant-1+7,$$

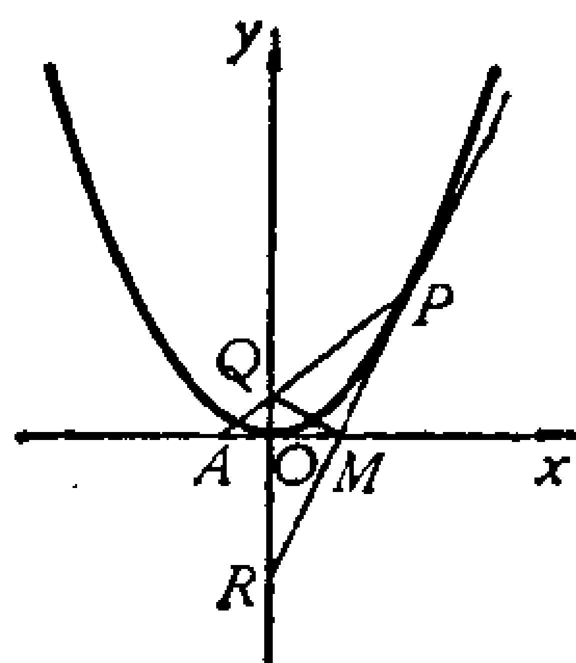
即 $4\sqrt{21}-18\leqslant x_1^2+x_2^2\leqslant6$. 故当 $\sin\theta=\sqrt{21}-4$ 时, $x_1^2+x_2^2$ 有最小值, 其值为 $4\sqrt{21}-18$; 当 $\sin\theta=-1$ 时, $x_1^2+x_2^2$ 有最大值, 其值为 6.

§7. 其　它

940. 已知抛物线 $y=x^2$ 与定点 $A\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$. 过抛物线右半支上一点 P 的切线和 y 轴交于点 R, AP 与 y 轴交于点 Q, 且 $|PQ|=|RQ|$. 求点 P 的坐标.

[分析] 因 $\triangle PQR$ 是等腰三角形, 故 PR 的中点 M 与点 Q 的连线与

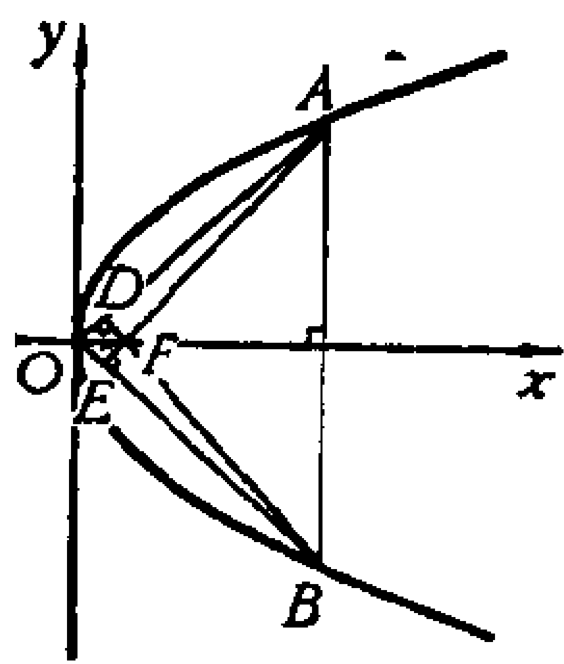
PR 垂直. 从此即可得解.



[解] 设点 P 的坐标为$(t, t^2)(t>0)$,则过点 P 的切线方程为$\frac{y+t^2}{2}=tx$. 令 $x=0$, 得 $y=-t^2$, 即点 R 的坐标为$(0, -t^2)$. 直线 AP 的方程为 $y=\frac{t^2}{t+\frac{1}{3}}\left(x+\frac{1}{3}\right)$, 令 $x=0$, 则 $y=\frac{t^2}{3t+1}$, 即点 Q 的坐标为$\left(0, \frac{t^2}{3t+1}\right)$. 而 PR 中点 M 的坐标为$\left(\frac{t}{2}, 0\right)$. $\because |PQ|=|QR|$, $\therefore$ $MQ\perp PR$, $2t\cdot\left(\frac{-2t}{3t+1}\right)=-1$, 即 $4t^2-3t-1=0$. 解得 $t=1$. 故点 P 的坐标为$(1, 1)$.

[说明] 本题如利用$|PQ|=|RQ|$也可获得方程,但得到的是关于 t 的四次方程,比较麻烦.

941. 抛物线 $y^2=2px$ 的内接 $\triangle OAB$ 的垂心为抛物线的焦点,O 为原点,求点 A、B 的坐标.



[分析] 从条件可知 $AB\perp Ox$. 若设定点 A 的坐标,则点 B 的坐标也确定. 根据 $BF\perp AO$ 或 $AF\perp BO$, 列出点 A 坐标满足的方程, 即可得解.

[解] 设点 A 的坐标为(x_0, y_0), 则点 B 的坐标为$(x_0, -y_0)$. $\because$ 点 A 在抛物线上, $\therefore y_0^2=2px_0\cdots$①. 直线 OA 的斜率 $k_1=\frac{y_0}{x_0}$, 直线 BF 的斜率 $k_2=\frac{-y_0}{x_0-\frac{p}{2}}$. $\because BF\perp OA$, $\therefore \frac{y_0}{x_0}\cdot\frac{-y_0}{x_0-\frac{p}{2}}=-1$, 化简得 $y_0^2=x_0^2-\frac{p}{2}x_0\cdots$②. ①代入②, 得$x_0\left(x_0-\frac{5}{2}p\right)=0$. $\because$ $x_0\neq0$, $\therefore$ $x_0=\frac{5}{2}p$, $y_0=\sqrt{5}p$. 故点 A 的坐标为$\left(\frac{5}{2}p, \sqrt{5}p\right)$, 点 B 的坐标为$\left(\frac{5}{2}p, -\sqrt{5}p\right)$.

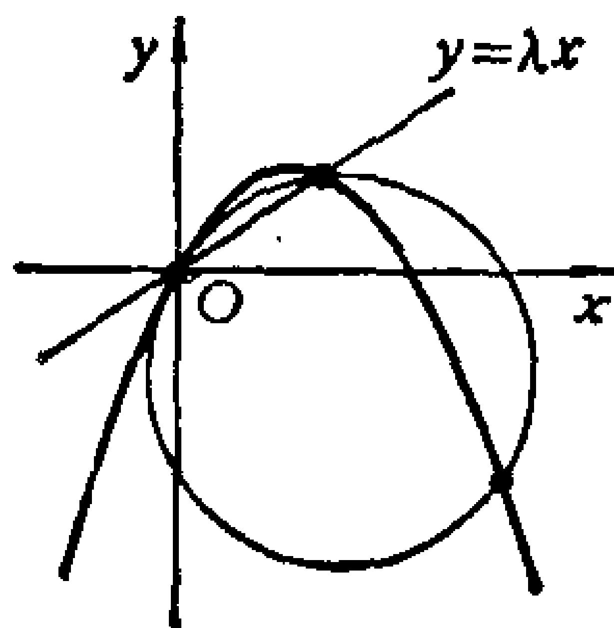
942. 设抛物线 $y^2=4p(x-a)$ 与 $x^2=4qy$ 相切, 且 $a\neq0$. 求证切点的横坐标仅由 a 确定.

[分析] 设两抛物线相切于点 M, 则过点 M 的两抛物线的切线重合,

由此可求出切点坐标.

［证］ 设两抛物线 $y^2=4p(x-a)\cdots$① 与 $x^2=4qy\cdots$② 相切于点 $M(x_0,y_0)$. 抛物线①、②过点 M 的切线方程分别为 $y_0y=4p\left(\frac{x+x_0}{2}-a\right)$, 即 $2px-y_0y+2px_0-4pa=0\cdots$③; $x_0x=2q(y+y_0)$, 即 $x_0x-2qy-2qy_0=0\cdots$④. ∵ ③、④两条直线重合, ∴ $\frac{2p}{x_0}=\frac{y_0}{2q}=\frac{2px_0-4pa}{-2qy_0}$ $(x_0\neq0, y_0\neq0, q\neq0)$, $-2qy_0^2=4pqx_0-8pqa$. 又因点 M 在抛物线①上, 故 $y_0^2=4px_0-4pa$; 代入上式, 得 $12pqx_0=16pqa$, 而 $p\neq0$, $q\neq0$, ∴ $x_0=\frac{4}{3}a$. 即切点的横坐标仅由 a 确定.

943. 求抛物线 $y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{x^2}{4R\cos^3\alpha}$ 与圆 $(x-R\sin\alpha)^2+(y+R\cos\alpha)^2=R^2$ 的交点坐标.



［分析］ 由于原方程均无常数项, 故(0, 0)是方程组的一个解, 即原点是抛物线与圆的一个交点. 于是过原点的直线 $y=\lambda x$ 与两二次曲线各另有一交点. 所以用 $y=\lambda x$ 代入两二次方程后, 可提取公因式 x, 使之变为一次方程, 从而确定 λ 的值, 即可得解.

［解］ 解方程组

$$\begin{cases} y=x\operatorname{tg}\alpha-\dfrac{x^2}{4R\cos^3\alpha}\cdots① \\ (x-R\sin\alpha)^2+(y+R\cos\alpha)^2=R^2\cdots②. \end{cases}$$

令 $y=\lambda x$, 代入①、②, 得

$$\begin{cases} x\left(\dfrac{x}{4R\cos^3\alpha}+\lambda-\operatorname{tg}\alpha\right)=0\cdots③ \\ x[(1+\lambda^2)x+2R(\lambda\cos\alpha-\sin\alpha)]=0\cdots④. \end{cases}$$

由③、④得 $x=0$, 和

$$\begin{cases} \dfrac{x}{4R\cos^3\alpha}+\lambda-\operatorname{tg}\alpha=0\cdots⑤ \\ (1+\lambda^2)x+2R(\lambda\cos\alpha-\sin\alpha)=0\cdots⑥. \end{cases}$$

由⑤得 $$x=-4R\lambda\cos^3\alpha+4R\cos^2\alpha\sin\alpha\cdots⑦,$$

由⑥得 $$x=\frac{2R}{1+\lambda^2}(\sin\alpha-\lambda\cos\alpha)\cdots⑧,$$

$$\therefore \quad -4R\lambda\cos^3\alpha+4R\cos^2\alpha\sin\alpha=\frac{2R(\sin\alpha-\lambda\cos\alpha)}{1+\lambda^2},$$

即$(\sin\alpha-\lambda\cos\alpha)[4R(1+\lambda^2)\cos^2\alpha-2R]=0$. 由此得 $\lambda=\mathrm{tg}\,\alpha$, 或

$$\lambda^2=\frac{1}{2}(\sec^2\alpha-2)=\frac{1}{2}(\mathrm{tg}^2\alpha-1), \quad 即 \quad \lambda=\pm\sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2\alpha-1}{2}}.$$

以 $\lambda=\mathrm{tg}\,\alpha$ 代入 ⑦, 得 $x=0$, $y=0$.

以 $\lambda=\pm\sqrt{\dfrac{\mathrm{tg}^2\alpha-1}{2}}$ 代入 ⑦, 得

$$x=4R\cos^3\alpha\left(\mathrm{tg}\,\alpha\mp\sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2\alpha-1}{2}}\right),$$

$$y=\pm4R\cos^3\alpha\left(\mathrm{tg}\,\alpha\sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2\alpha-1}{2}}\mp\frac{\mathrm{tg}^2\alpha-1}{2}\right).$$

故交点坐标为(0, 0)、

$$\left(4R\cos^3\alpha\left(\mathrm{tg}\,\alpha-\sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2\alpha-1}{2}}\right),\ 4R\cos^3\alpha\left(\mathrm{tg}\,\alpha\sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2\alpha-1}{2}}-\frac{\mathrm{tg}^2\alpha-1}{2}\right)\right)、$$

$$\left(4R\cos^3\alpha\left(\mathrm{tg}\,\alpha+\sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2\alpha-1}{2}}\right),-4R\cos^3\alpha\left(\mathrm{tg}\,\alpha\sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2\alpha-1}{2}}+\frac{\mathrm{tg}^2\alpha-1}{2}\right)\right).$$

944. 抛物线 $y+k=x^2$ 与圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 相切, 求 k 和切点的坐标.

[解] 把 $y=x^2-k\cdots$① 代入 $x^2+(y-1)^2=1\cdots$②, 得

$$x^4-(2k+1)x^2+k^2+2k=0\cdots③.$$

当 $k^2+2k=0$, 即 $k=0$ 或 $k=-2$ 时, ③ 式有一个等于零的重根.

令 $k=0$, $x=0$, 代入 ①, 得 $y=0$. 故当 $k=0$ 时, 抛物线与圆相切于(0, 0). 令 $k=-2$, $x=0$, 代入 ①, 得 $y=2$. 故当 $k=-2$ 时, 抛物线与圆相切于(0, 2).

当 $\varDelta=(2k+1)^2-4(k^2+2k)=-4k+1=0$, 即 $k=\dfrac{1}{4}$ 时, 代入 ③, 得

$$x^4-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{16}=0, \quad 即 \quad \left(x^2-\frac{3}{4}\right)^2=0.$$

故方程 ③ 有两个重根 $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 以 $k=\dfrac{1}{4}$, $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 代入①, 得 $y=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore$ 当 $k=\frac{1}{4}$ 时，抛物线与圆相切于 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 和 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

945. 问 a 为何值时，抛物线 $y^2=\frac{1}{2}x$ 与圆 $x^2+y^2-2ax+a^2-1=0$ (1) 有四个交点；(2) 只有三个交点；(3) 只有两个交点；(4) 只有一个交点；(5) 无交点.

[分析] 讨论两曲线的交点个数，只需讨论由这两曲线方程所组成的方程组的解的组数即可.

[解] 以 $y^2=\frac{1}{2}x$ 代入圆方程，整理得 $x^2+\left(\frac{1}{2}-2a\right)x+a^2-1=0\cdots$①，其判别式 $\Delta=-2a+\frac{17}{4}$.

(1) 当方程①有两不等的正实根时，有 $\begin{cases}-2a+\frac{17}{4}>0\\ \frac{1}{2}-2a<0\\ a^2-1>0.\end{cases}$ 解得 $1<a<\frac{17}{8}$. 此时抛物线和圆有四个交点.

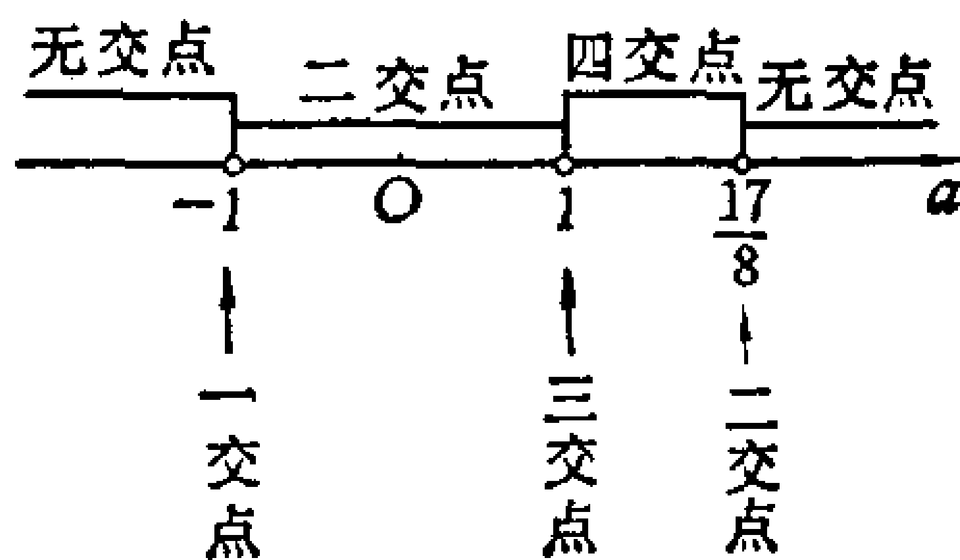
(2) 当方程①有一正实根、一零根时，有 $\begin{cases}\frac{1}{2}-2a<0\\ a^2-1=0.\end{cases}$ 解得 $a=1$. 此时抛物线和圆只有三个交点.

(3) 当方程①有两相等的正实根，或一正实根、一负实根时，有

$$\begin{cases}-2a+\frac{17}{4}=0\\ \frac{1}{2}-2a<0,\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}-2a+\frac{17}{4}>0\\ a^2-1<0.\end{cases}$$

解得 $a=\frac{17}{8}$，或 $-1<a<1$. 此时抛物线和圆只有两个交点.

(4) 当方程①只有零根，或一零根、一负根时，有



$$\begin{cases}\frac{1}{2}-2a=0\\ a^2-1=0,\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}\frac{1}{2}-2a>0\\ a^2-1=0.\end{cases}$$

前者无解，后者解得 $a=-1$. 此时抛物线

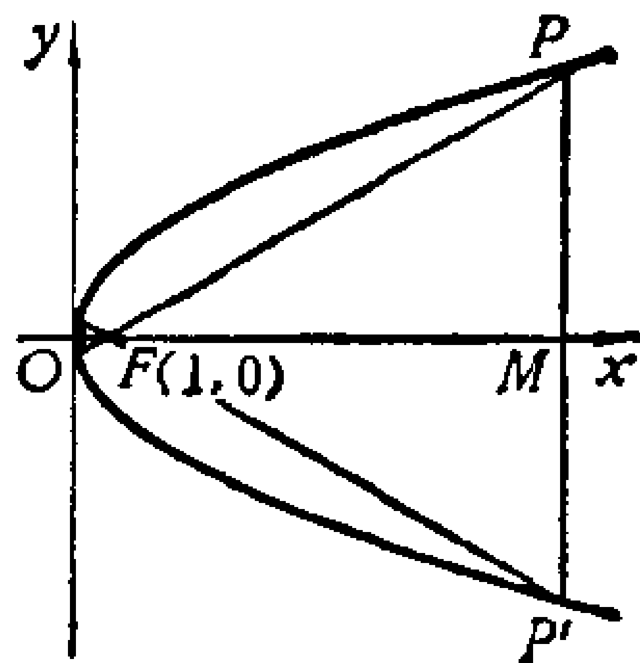
和圆只有一个交点.

(5) 当方程 ① 无实根或只有负根时，有

$$-2a+\frac{17}{4}<0, \quad 或 \quad \begin{cases} -2a+\frac{17}{4}\geqslant 0 \\ \frac{1}{2}-2a>0 \\ a^2-1>0. \end{cases}$$

前者解得 $a>\frac{17}{8}$，后者解得 $a<-1$. 故在 $a>\frac{17}{8}$ 或 $a<-1$ 时，抛物线和圆无交点.

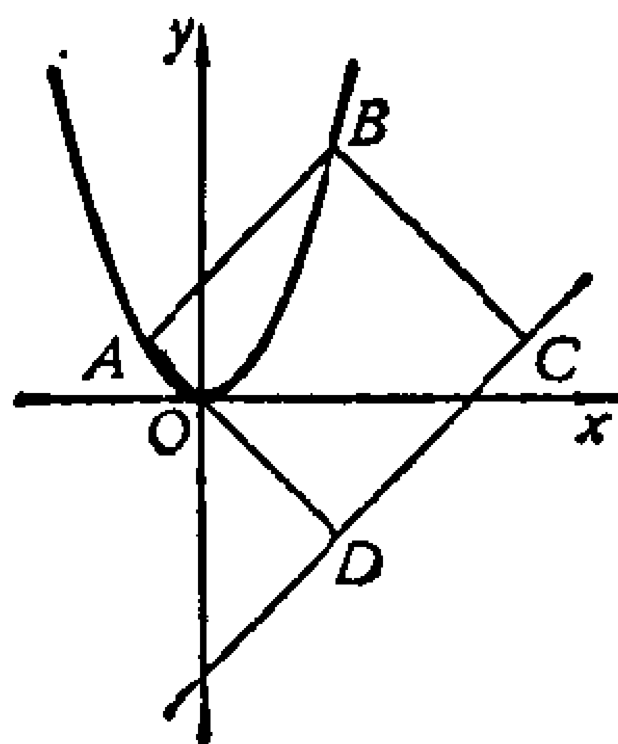
946. 已知 F 是抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，P、P' 是抛物线上的两点. 若 $\triangle PFP'$ 是正三角形. 求正三角形的边长.



[分析] 利用抛物线和正三角形对称性以及正三角形的内角都是 60°，即可得此正三角形的边长和点 P 纵坐标之间的关系.

[解] 设点 P 的坐标为 (x_0, y_0)，其中 $x_0>0$，$y_0>0$. ∵ $\triangle PFP'$ 是正三角形，PP' 交 x 轴于 M，故 $|FP|=|FP'|$，$PP'\perp FM$，$\angle MFP=30°$. 于是 $|FP|=2|MP|=2y_0$. $\frac{|MP|}{|FM|}=\operatorname{tg}30°$，即 $\frac{y_0}{|x_0-1|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ …①. ∵ 点 P 在抛物线上，∴ $y_0^2=4x_0$. 代入 ①，得 $y_0^2\mp 4\sqrt{3}\,y_0-4=0$. ∴ $y_0=4\pm 2\sqrt{3}$. 故正 $\triangle PFP'$ 的边长 $|FP|=2y_0=4(2\pm\sqrt{3})$.

947. 一正方形 $ABCD$ 的 A、B 两顶点在抛物线 $y=x^2$ 上，C、D 两顶点在直线 $y=x-4$ 上. 求正方形的边长 d.



[解] 设 A、B 两点的坐标分别为 (t_1, t_1^2)、(t_2, t_2^2). ∵ $AB\parallel CD$，∴ $\frac{t_1^2-t_2^2}{t_1-t_2}=t_1+t_2=1$ …①. 又

$$\begin{aligned} d^2&=|AB|^2=(t_1-t_2)^2+(t_1^2-t_2^2)^2 \\ &=(t_1-t_2)^2[1+(t_1+t_2)^2] \\ &=[(t_1+t_2)^2-4t_1t_2][1+(t_1+t_2)^2]. \end{aligned}$$

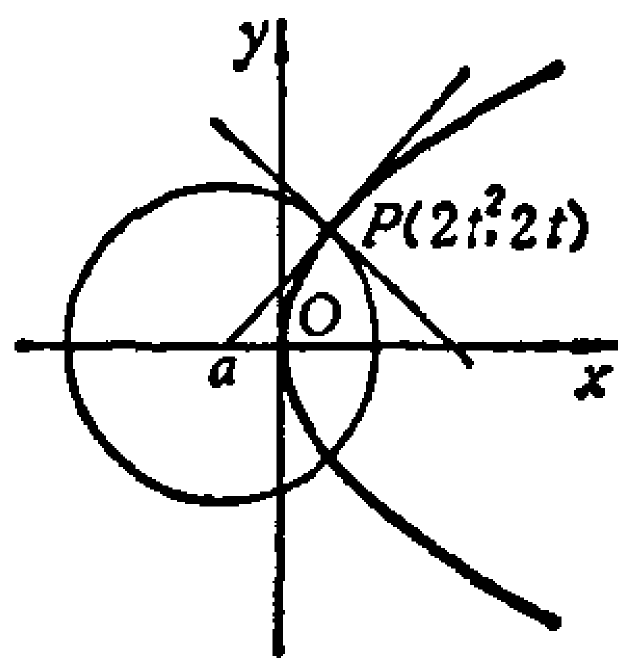
以 ① 代入，得 $d^2=2-8t_1t_2$，即

$$t_1t_2=\frac{2-d^2}{8}\cdots②.$$

$$\because\quad d=|AD|=\frac{|t_1-t_1^2-4|}{\sqrt{2}}=\frac{|t_1(1-t_1)-4|}{\sqrt{2}}\cdots③,$$

由 ① 得 $t_2=1-t_1$，代入 ③，则 $d=\dfrac{|t_1t_2-4|}{\sqrt{2}}$，　$\therefore$　$2d^2=(t_1t_2-4)^2\cdots④$.
② 代入 ④，得 $d^2-8\sqrt{2}d+30=0$. $\therefore d_1=5\sqrt{2}$，$d_2=3\sqrt{2}$. 故正方形 $ABCD$ 的边长 d 为 $5\sqrt{2}$ 或 $3\sqrt{2}$.

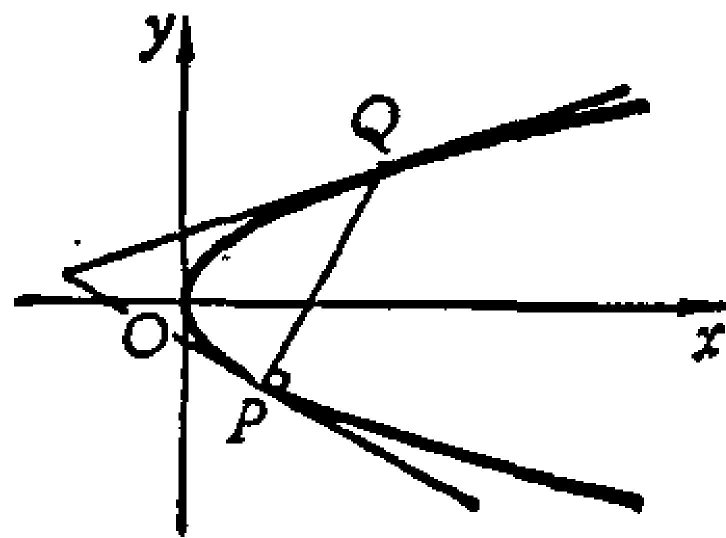
948. 半径为 1、圆心在 x 轴上的动圆与抛物线 $y^2=2x$ 相交. 问动圆到达什么位置时，它们在交点处的切线互相垂直.



［分析］ 设圆心坐标为 $(a,\ 0)$，a 是要求的未知数. 圆与抛物线的交点为 $P(2t^2,\ 2t)$，t 是辅助未知数. $\because$ 点 P 在圆上，且抛物线过点 P 的切线过圆心，故可列出两个方程，消去辅助未知数 t，即得解.

［解］ 设动圆的圆心为 $(a,\ 0)$，则其方程为 $(x-a)^2+y^2=1$. 又设此圆和抛物线的交点为 $P(2t^2,\ 2t)$，则 $(2t^2-a)^2+4t^2=1\cdots①$，抛物线在点 P 处的切线方程为 $2ty=x+2t^2\cdots\cdots②$. $\because$ 直线 ② 和圆 $(x-a)^2+y^2=1$ 在点 P 处的切线互相垂直，$\therefore$ 此直线必过圆心 $(a,\ 0)$，即得 $2t^2=-a\cdots③$. 代入 ①，得 $4a^2-2a-1=0$，$\therefore a=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$. 由 ③ 可知 $a\leqslant 0$，$\therefore a=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$. 故当动圆圆心在 $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{4},\ 0\right)$ 时，它和抛物线 $y^2=2x$ 在交点处的切线互相垂直.

949. 在曲线 $y^2=x$ 上求两点 P、Q，使曲线在点 P 的切线与直线 PQ 垂直，在点 Q 的切线与直线 PQ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$.



［分析］ 因 PQ 垂直过点 P 的切线，故 PQ 为过点 P 的法线，从而导出 P、Q 两点坐标

的关系式. 又因 PQ 与过点 Q 的切线夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 可得 P、Q 坐标满足的另一关系式. 解方程组即得点 P、Q 的坐标.

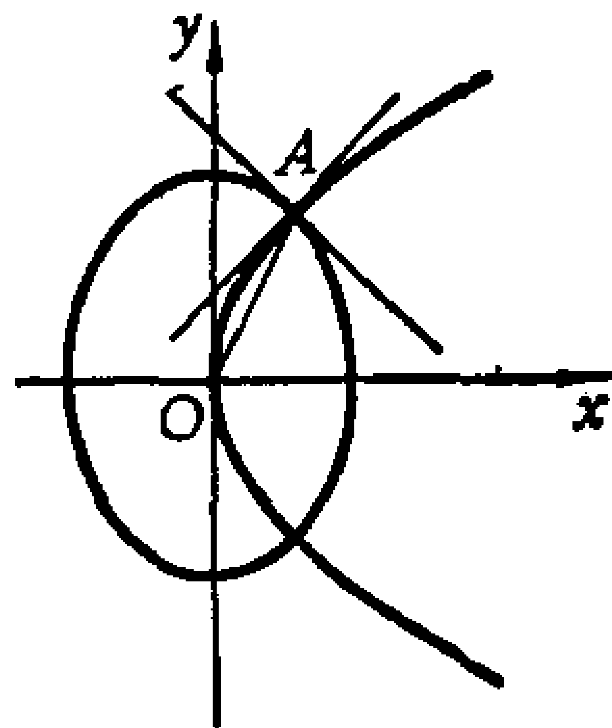
[解] 设点 P 的坐标为(a^2, a), 点 Q 的坐标为(b^2, b), 则过点 P 的切线方程为 $y=\frac{1}{2a}(x+a^2)$, 直线 PQ 的方程为 $y=-2a(x-a^2)+a$, 过点 Q 的切线方程为 $y=\frac{1}{2b}(x+b^2)$. ∵ 点 Q 在直线 PQ 上, ∴ $b=-2a\cdot(b^2-a^2)+a$. ∵ $b\neq a$, ∴ 上式化简为 $2a^2+2ab+1=0$…①. ∵ 过点 Q 的切线与直线 PQ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$, ∴ $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\left|\frac{-2a-\frac{1}{2b}}{1-\frac{2a}{2b}}\right|$…②. 由②得 $4ab-2a+2b+1=0$…③ 和 $4ab+2a-2b+1=0$…④. 将①与③、④分别联立, 得

$$\begin{cases}4ab-2a+2b+1=0\\2a^2+2ab+1=0\end{cases}\cdots⑤,\quad \begin{cases}4ab+2a-2b+1=0\\2a^2+2ab+1=0\end{cases}\cdots⑥.$$

由方程组⑤解得 $a=-1$, $b=\frac{3}{2}$. 由方程组⑥解得 $a=1$, $b=-\frac{3}{2}$. 故点 P、Q 的坐标分别为$(1, -1)$、$\left(\frac{9}{4}, \frac{3}{2}\right)$或 $(1, 1)$、$\left(\frac{9}{4}, -\frac{3}{2}\right)$.

[说明] 本题也可利用 PQ 与两切线组成的三角形是等腰直角三角形得解.

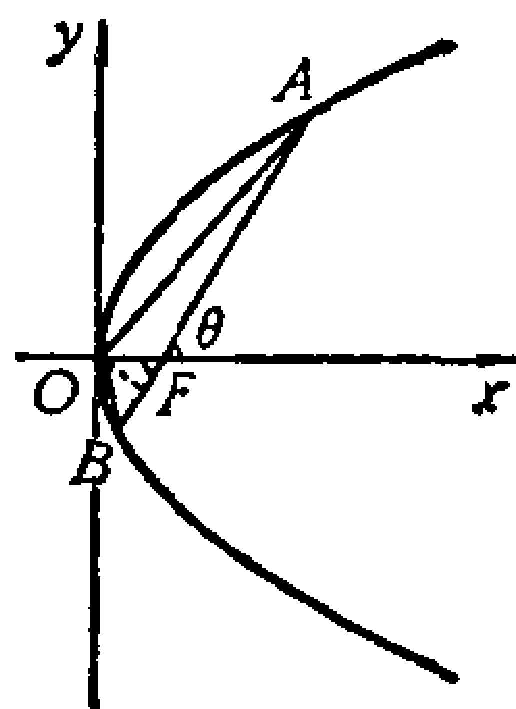
950. 抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 和椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1(a>0)$ 的交点中纵坐标大于零的交点为 A. 两曲线在点 A 处的切线互相垂直, 且原点和点 A 的连线的斜率为 $\sqrt{2p}$. 求 a 和 p 的值.



[解] 设点 A 的坐标为(x_0, y_0), 其中 $y_0>0$, 则 $x_0=\frac{y_0^2}{2p}$. 抛物线在点 A 处的切线方程为 $y_0y=p\left(x+\frac{y_0^2}{2p}\right)$, 即 $px-y_0y+\frac{y_0^2}{2}=0$…①. 椭圆在点 A 处的切线方程为 $4\cdot\frac{y_0^2}{2p}x+a^2y_0y=4a^2$, 即 $\frac{2y_0^2}{p}x+a^2y_0y-4a^2=0$…②.

$\because$ 两曲线在点 A 处的切线互相垂直，$\therefore p\cdot\dfrac{2y_0^2}{p}-y_0\cdot a^2y_0=0$，即 $2y_0^2-a^2y_0^2=0$。$\because y_0>0,\ a>0,\ \therefore a^2=2,\ a=\sqrt{2}$。由于原点和点 A 的连线方程为 $y=\dfrac{y_0}{x_0}x$，即 $y=\dfrac{2p}{y_0}x$。$\therefore \dfrac{2p}{y_0}=\sqrt{2p}$，$y_0=\sqrt{2p}$，故 $x_0=1$。$\because$ 点 A 在椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上，$\therefore \dfrac{1}{2}+\dfrac{2p}{4}=1$，即 $p=1$。

951. 抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点弦 AB 的长为 m，顶点为 O，求 $\triangle OAB$ 的面积.



［解一］ 设弦 AB 的斜率为 k，点 A、B 的坐标分别为 $(x_1,\ y_1)$、$(x_2,\ y_2)$，则 AB 的方程为 $y=k\left(x-\dfrac{p}{2}\right)$。代入 $y^2=2px$，得

$$k^2\left(x^2-px+\frac{p^2}{4}\right)=2px.$$

$$\therefore\quad k^2x^2-(k^2+2)px+\frac{k^2p^2}{4}=0.\quad x_1+x_2=\frac{k^2+2}{k^2}\cdot p,\quad x_1x_2=\frac{p^2}{4}.$$

$$y_1+y_2=k(x_1+x_2-p)=\frac{2p}{k},$$

$$y_1y_2=k^2\left[x_1x_2-(x_1+x_2)\frac{p}{2}+\frac{p^2}{4}\right]=-p^2.$$

$$\because\quad (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=m^2,$$

$$\therefore\quad (x_1+x_2)^2-4x_1x_2+(y_1+y_2)^2-4y_1y_2=m^2,\ 4p^2(k^2+1)^2=m^2k^4,$$

$$\therefore\quad \frac{|k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{\sqrt{2pm}}{m}.$$

故

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left|k\cdot 0-0-\dfrac{kp}{2}\right|}{\sqrt{k^2+1}}\cdot m=\frac{p}{4}\cdot\frac{|k|}{\sqrt{k^2+1}}\cdot m$$

$$=\frac{p}{4}\cdot\frac{\sqrt{2pm}}{m}\cdot m=\frac{1}{4}p\sqrt{2pm}.$$

当弦 AB 的斜率不存在时，$m=2p$，$S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}p^2$，即为上式的特例.

［解二］ 设 AB 的倾角为 θ，则其方程为 $\begin{cases}x=\dfrac{p}{2}+t\cos\theta\\ y=t\sin\theta,\end{cases}$ 代入抛物线

方程得 $t^2\sin^2\theta-2pt\cos\theta-p^2=0\cdots$①，其两根为 $t_1=FA$，$t_2=FB$（F 为焦点），

$$\therefore\quad |AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}$$

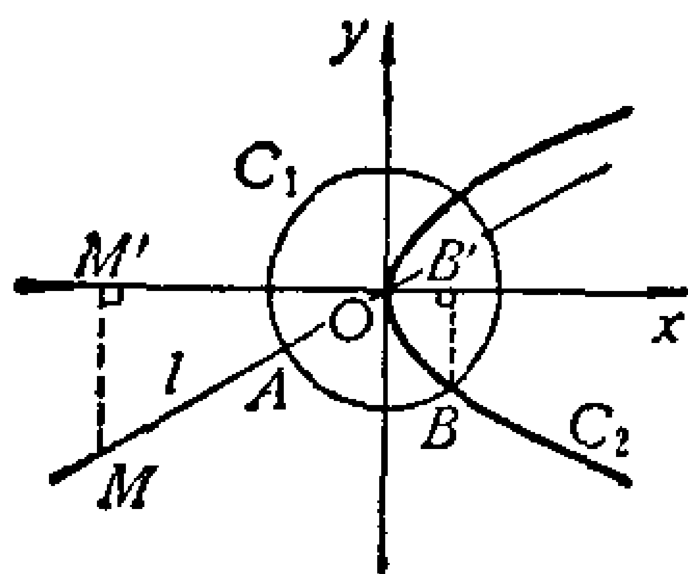
$$=\sqrt{\left(\frac{2p\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)^2-4\left(\frac{-p^2}{\sin^2\theta}\right)}=\frac{2p}{\sin^2\theta}=m.$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\sqrt{\frac{2p}{m}}.$$

故

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|OF|\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}m\cdot\frac{p}{2}\sqrt{\frac{2p}{m}}=\frac{p}{4}\sqrt{2pm}.$$

952. l 为过点 $M\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$且倾角为 $30°$ 的直线，圆 C_1 为中心在坐标原点而半径为 1 的圆，C_2 为顶点在原点而焦点在$\left(\frac{\sqrt{2}}{8},\ 0\right)$的抛物线．设 A 为 l 和 C_1 在第三象限的交点，B 为 C_1 和 C_2 在第四象限的交点．(1)写出直线 l、圆 C_1 和抛物线 C_2 的方程；(2) 求出线段 MA，圆弧 AB 和抛物线上一段 OB 的表达式；(3)设 M'、B' 依次为从 M、B 到 x 轴的垂足，求出圆弧 AB 和线段 BB'、$B'M'$、$M'M$、MA 所围成的面积．



［解］ (1) 直线 l 的方程为

$$y+\frac{3}{2}=\operatorname{tg}30°\left(x+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right),$$

即 $x-\sqrt{3}y=0$．圆 C_1 的方程为 $x^2+y^2=1$．抛物线 C_2 的方程为 $y^2=\frac{\sqrt{2}}{2}x$．

(2) 解 $\begin{cases}x-\sqrt{3}y=0\\x^2+y^2=1,\end{cases}$ 得 l 和 C_1 的交点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$和$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$，

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$．解 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\y^2=\frac{\sqrt{2}}{2}x,\end{cases}$ 得 C_1 和 C_2 的交点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$和$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\therefore$ 点 B 的坐标为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$．

已知点 M 的坐标为$\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$，则

线段 MA 的表达式为　$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x,\ x\in\left[-\frac{3\sqrt{3}}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

圆弧 AB 的表达式为　$y=-\sqrt{1-x^2},\ x\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

抛物线弧 OB 的表达式为　$y=-\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}x},\ x\in\left[0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

(3)
$$S_{\triangle OMM'}=\frac{1}{2}|OM'|\cdot|MM'|=\frac{9}{8}\sqrt{3}.$$

$$\because\ \widehat{AB}\text{ 的长}=\alpha R=\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot 1=\frac{7}{12}\pi,$$

$$\therefore\ S_{\text{扇形}OAB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{7\pi}{12}\cdot 1=\frac{7\pi}{24}.$$

又
$$S_{\triangle OBB'}=\frac{1}{2}\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|\cdot\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=\frac{1}{4}.$$

故圆弧 AB 和线段 BB'、$B'M'$、$M'M$、MA 所围成的面积

$$S=\frac{27\sqrt{3}+6+7\pi}{24}.$$

953. 已知抛物线 C：$y=x^2-ax+a$ 的顶点在抛物线 $y=1-x^2$ 和 x 轴围成的图形的内部及边上，求 a 的取值范围.

［分析］ 顶点$(x_0,\ y_0)$若在给定的范围内，必须同时满足 $y_0\leqslant 1-x_0^2$ 和 $y_0\geqslant 0$. 解此不等式组，即可得 a 的范围.

［解］ 将抛物线方程配方，得 $y=x^2-ax+a=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+a-\frac{a^2}{4}$，故抛物线的顶点为

$$\left(\frac{a}{2},a-\frac{a^2}{4}\right).\quad \therefore a-\frac{a^2}{4}\leqslant 1-\left(\frac{a}{2}\right)^2,\ \text{且}\ a-\frac{a^2}{4}\geqslant 0.$$

解得 $a\leqslant 1$，且 $0\leqslant a\leqslant 4$. 故所求 a 的范围为 $0\leqslant a\leqslant 1$.

954. k 取何值时，直线 l：$y-1=k(x-1)$ 垂直平分抛物线 $y^2=x$ 的弦.

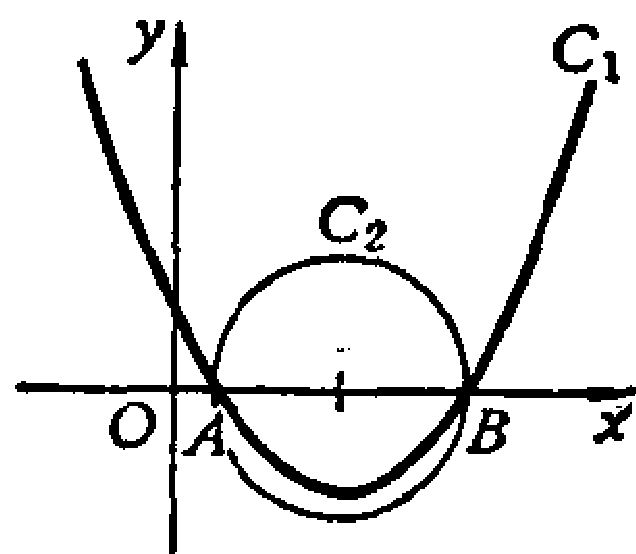
［分析］ 抛物线 $y^2=x$ 的弦若被直线 l：$y-1=k(x-1)$ 垂直平分，则弦所在直线的方程可表示为 $x+ky+b=0$，它被抛物线截得的弦的中点即为它和直线 l 的交点，由此可确定 k 的值.

[解] 设抛物线的弦 PQ 被直线 l 垂直平分，因直线 l 的方程为 $kx-y+1-k=0$…①，故可设 PQ 所在直线的方程为 $x+ky+b=0$…②. 解①、②，得 l 和 PQ 的交点 M（即 PQ 的中点）的坐标为$\left(\frac{k^2-k-b}{k^2+1}, \frac{1-k-bk}{k^2+1}\right)$. 由②得 $x=-ky-b$，代入 $y^2=x$，得 $y^2+ky+b=0$. 于是 $y_1+y_2=-k$，$\therefore -\frac{k}{2}=\frac{1-k-bk}{k^2+1}$，即 $2bk=k^3-k+2$. 显然 $k\neq 0$，$\therefore 2b=\frac{k^3-k+2}{k}$…③. 又因 PQ 为抛物线 $y^2=x$ 的弦，故方程 $y^2+ky+b=0$ 的判别式必大于零，即 $k^2-4b>0$，$\therefore 2b<\frac{k^2}{2}$…④. 由③、④得

$$\frac{k^3-k+2}{k}-\frac{k^2}{2}<0.$$

解得 $-2<k<0$. 故当 $k\in(-2, 0)$时，直线 l 垂直平分抛物线 $y^2=x$ 的弦.

955. 抛物线 C_1: $y=x^2+2ax+b$ 与 x 轴的交点为 A、B，以 AB 为直径的圆为 C_2. (1)求 C_2 的方程；(2) 为使 C_1 的顶点在圆 C_2 的内部，a、b 应满足什么条件？



[分析] 因为点 A、B 的横坐标是方程 $x^2+2ax+b=0$ 的两个根. 要使 C_1 的顶点在 C_2 的内部，只要使 C_1 的顶点与圆 C_2 的圆心距离小于圆 C_2 的半径即可.

[解] (1) 设点 A、B 的坐标分别为 $(\alpha, 0)$、$(\beta, 0)$. 以 $y=0$ 代入 C_1 方程，得 $x^2+2ax+b=0$. $\therefore \alpha+\beta=-2a$，$\alpha\beta=b$. 线段 AB 的中点，即 C_2 的圆心，其坐标为$(-a, 0)$；半径

$$r=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$$

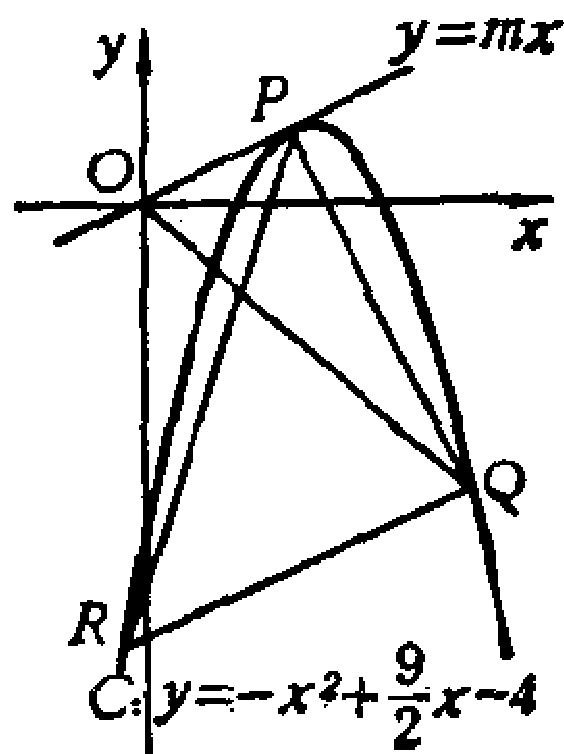
$$=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-4b}=\sqrt{a^2-b}.$$

故 C_2 的方程为$(x+a)^2+y^2=a^2-b$，即 $x^2+y^2+2ax+b=0$，其中 $a^2>b$.

(2) 化 C_1 的方程为 $y=(x+a)^2-(a^2-b)$. $\therefore$ 抛物线 C_1 的顶点坐标为$(-a, -(a^2-b))$. 欲使此点在圆 C_2 的内部，则$(-a+a)^2+(a^2-b)^2<a^2-b$，即 $(a^2-b)(a^2-b-1)<0$. $\because a^2-b>0$，$\therefore b>a^2-1$. 故此时

a、b 的关系为 $a^2-1<b<a^2$.

956. 设有抛物线 C: $y=-x^2+\frac{9}{2}x-4$, 通过原点 O 作 C 的切线 $y=mx$, 使切点 P 在第一象限. (1) 求斜率 m 的值, 以及点 P 的坐标; (2)过点 P 作切线的垂线, 求它与抛物线的另一交点 Q 的坐标; (3) 设 C 上有一点 $R\left(t,\ -t^2+\frac{9}{2}t-4\right)$, 为使 $\triangle OPQ$ 的面积小于 $\triangle PQR$ 的面积, 试求 t 的变化范围.



[分析] 根据直线与抛物线相切的条件可求出 m 的值, 从而求出切点 P 的坐标和过点 P 的法线方程; 再解方程组求得点 Q 的坐标. 由于 $\triangle OPQ$ 的面积是定值, 要使 $\triangle OPQ$ 的面积小于 $\triangle PQR$ 的面积, 只要使点 R 到 PQ 的距离大于点 O 到 PQ 的距离, 从而可求得 t 的变化范围.

[解] (1) 设点 P 的坐标为 $(x_1,\ y_1)$, 则 $y_1=mx_1$ …①, $y_1=-x_1^2+\frac{9}{2}x_1-4$…②. ①代入②, 得 $x_1^2+\left(m-\frac{9}{2}\right)x_1+4=0$. ∵ 点 P 为切点, ∴ $\left(m-\frac{9}{2}\right)^2-16=0$, 得 $m=\frac{17}{2}$, 或 $m=\frac{1}{2}$. 当 $m=\frac{17}{2}$ 时, $x_1=-2$, $y_1=-17$; 当 $m=\frac{1}{2}$ 时, $x_1=2$, $y_1=1$. ∵ 点 P 在第一象限, ∴ 所求的斜率 $m=\frac{1}{2}$, 点 P 的坐标为(2, 1).

(2) 过点 P 作切线的垂线, 其方程为 $y=-2x+5$…③. 代入抛物线方程, 得 $x^2-\frac{13}{2}x+9=0$. 设点 Q 的坐标为 $(x_2,\ y_2)$, 则 $2x_2=9$, ∴ $x_2=\frac{9}{2}$. 代入③, 得 $y_2=-4$, ∴ 点 Q 的坐标为 $\left(\frac{9}{2},-4\right)$.

(3) 点 R 到直线 PQ 的距离

$$d=\frac{\left|2t+\left(-t^2+\frac{9}{2}t-4\right)-5\right|}{\sqrt{5}}=\frac{\left|t^2-\frac{13}{2}t+9\right|}{\sqrt{5}},$$

点 O 到直线 PQ 的距离 $d'=\sqrt{5}$. ∵ $S_{\triangle OPQ}<S_{\triangle PQR}$, ∴ $d'<d$. 故

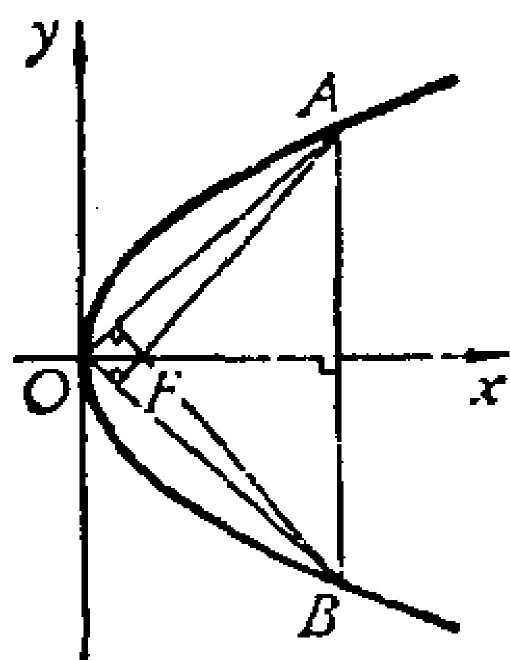
$$\left|t^2-\frac{13}{2}t+9\right|>5,$$

即 $t^2-\frac{13}{2}t+4>0\cdots④$ 或 $t^2-\frac{13}{2}t+14<0\cdots⑤$.

由不等式④可得 $t<\frac{13-\sqrt{105}}{4}$, 或 $t>\frac{13+\sqrt{105}}{4}$, 而不等式⑤无解. 故所求的 t 的变化范围为 $\left(-\infty, \frac{13-\sqrt{105}}{4}\right)\cup\left(\frac{13+\sqrt{105}}{4}, +\infty\right)$.

957. 抛物线 $y^2=2px$ 内接三角形的一顶点在原点, 三边上的高都通过焦点, 求此三角形的外接圆方程.

［解］ 因所求圆过原点, 故设其方程为 $x^2+y^2-2ax-2by=0\cdots①$. 又因三角形的另两顶点在抛物线 $y^2=2px$ 上, 故令其坐标分别为 $(2pt_1^2, 2pt_1)$ 和 $(2pt_2^2, 2pt_2)$. 显然, $t_1\neq0$, $t_2\neq0$. 又三角形三边上的高都过焦点 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 可得 $OF\perp AB$, 故 $t_2=-t_1\cdots②$. 又 $AF\perp OB$,



$$\therefore \quad \frac{2pt_1}{2pt_1^2-\frac{p}{2}}\cdot\frac{2pt_2}{2pt_2^2}=-1,$$

即 $2t_1+2t_1^2t_2-\frac{1}{2}t_2=0$. 以②代入, 得 $2t_1-2t_1^3+\frac{1}{2}t_1=0$. $\therefore t_1=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. 即 A、B 两点的坐标为 $\left(\frac{5}{2}p, \sqrt{5}p\right)$、$\left(\frac{5}{2}p, -\sqrt{5}p\right)$. 分别代入①, 得

$$\frac{25}{4}p^2+5p^2-5pa-2\sqrt{5}pb=0$$

和
$$\frac{25}{4}p^2+5p^2-5pa+2\sqrt{5}pb=0.$$

$\because p\neq0$, $\therefore 5a+2\sqrt{5}b=\frac{45}{4}p\cdots③$, $5a-2\sqrt{5}b=\frac{45}{4}p\cdots④$. 由③、④解得 $a=\frac{9}{4}p$, $b=0$. 故所求的圆方程为 $x^2+y^2-\frac{9}{2}px=0$.

958. 不论 m 为何实数, 直线 $y=mx+m^2$ 恒与以 y 轴为对称轴的一条抛物线相切. (1)求此抛物线的方程; (2)若 $m\neq0$, 试

证直线 $y=-\frac{x}{m}+\frac{1}{m^2}$ 与直线 $y=mx+m^2$ 的交点恒在一定直线上.

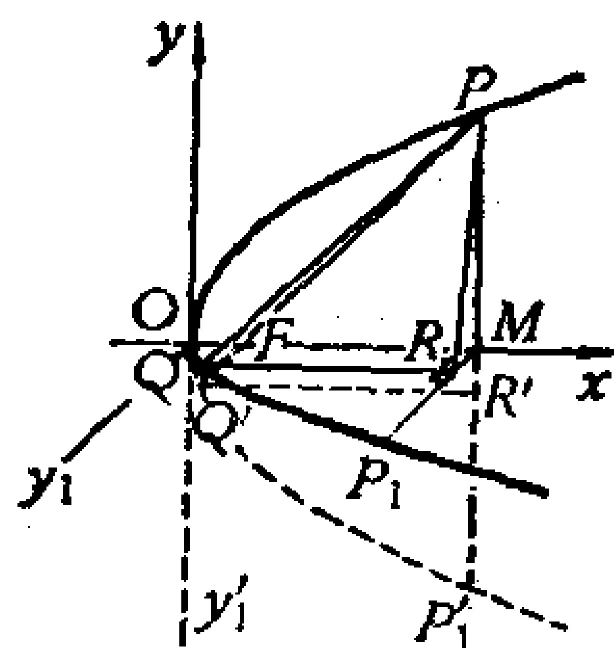
［解］ (1) 设所求的抛物线方程为 $y=ax^2+c\cdots$①, ∵不论 m 为何实数,它与直线 $y=mx+m^2$ 相切,∴方程 $ax^2+c=mx+m^2$, 即 $ax^2-mx+c-m^2=0$ 的判别式 $\Delta=m^2-4a(c-m^2)=0$ 对一切 m 均成立, 即 $(1+4a)m^2=4ac$ 对一切 m 均成立. 因而 $\begin{cases}1+4a=0\\4ac=0,\end{cases}$ 由此解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{4}\\c=0.\end{cases}$

故所求抛物线方程为 $y=-\frac{1}{4}x^2$.

(2) 由方程组 $\begin{cases}y=-\frac{x}{m}+\frac{1}{m^2}\\y=mx+m^2\end{cases}$ 解得 $\left(m+\frac{1}{m}\right)y=m+\frac{1}{m}$. ∵ $m+\frac{1}{m}\neq0$,

∴ $y=1$. 故两直线的交点恒在一定直线 $y=1$ 上.

959. 抛物线 $y^2=4ax$ 上一点 P, 其横坐标为 $(3+2\sqrt{2})a$, 过点 P 与焦点 F 的连线与抛物线的另一交点为 Q. 若以抛物线的对称轴为棱,将抛物线上、下两部分折成直二面角时,试求 P、Q 两点间的距离.



［解］ 设点 P 的坐标为 $(at^2,\ 2at)$, 点 Q 的坐标为 $(at'^2,\ 2at')$, 则直线 PQ 的方程为

$$y-2at=\frac{2a(t-t')}{a(t^2-t'^2)}(x-at^2),$$

即 $$2x-(t+t')y+2att'=0.$$

∵ PQ 过焦点 $F(a,\ 0)$, ∴ $2a+2att'=0$, 即 $tt'=-1$. ∵ $at^2=(3+2\sqrt{2})a$, ∴ $t^2=3+2\sqrt{2}\cdots$①, 即 $t=\pm(\sqrt{2}+1)\cdots$②. 设过点 P 与 y 轴平行的直线 PP_1 和过点 Q 与 x 轴平行的直线交于点 R, 则点 R 的坐标为 $(at^2,\ 2at')$, 即 $\left(at^2,\ -\frac{2a}{t}\right)$. 设 PP_1 交 x 轴于 M, 当把抛物线以其对称轴为棱, 上、下两部分折成直两面角后, 则 $PM\perp Ox$, $P_1M\perp Ox$, ∵ P-OM-P_1 是直二面角, ∴ $PM\perp MR$. ∵ $QR\perp P_1M$, ∴ $PR\perp QR$,

$$\therefore\ |PQ|^2=|PR|^2+|QR|^2\cdots③.$$

而 $$|QR|^2=|x_R-x_Q|^2=(at^2-at'^2)^2=\left(at^2-\frac{a}{t^2}\right)^2,$$

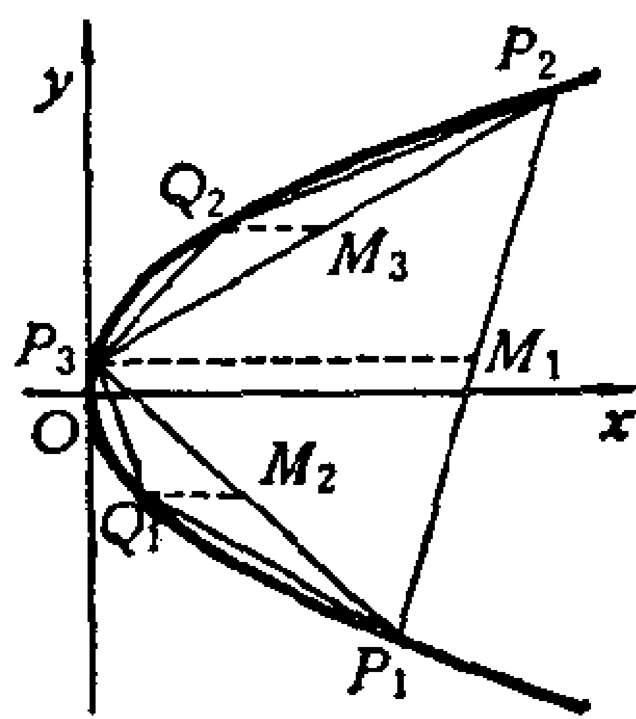
又 $$|PR|^2=|PM|^2+|MR|^2=y_P^2+y_R^2$$
$$=(2at)^2+\left(-\frac{2a}{t}\right)^2=4a^2\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right).$$

代入③，得

$$|PQ|^2=4a^2\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)+a^2\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)^2$$
$$=a^2\left[4\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-8+\left(t+\frac{1}{t}\right)^2\left(t-\frac{1}{t}\right)^2\right]$$
$$=a^2\left\{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2\left[4+\left(t-\frac{1}{t}\right)^2\right]-8\right\}$$
$$=a^2\left[\left(t+\frac{1}{t}\right)^4-8\right]\cdots④.$$

$\because$ $t=\pm(\sqrt{2}+1)$，$\therefore$ $\frac{1}{t}=\pm(\sqrt{2}-1)$. 代入④，得 $|PQ|^2=56a^2$.
$\therefore$ $|PQ|=2a\sqrt{14}$. 故 P、Q 两点间的距离为 $2a\sqrt{14}$.

960. 已知抛物线 $y^2=2x$. (1) 在抛物线上任取两点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$，经过线段 P_1P_2 的中点 M_1 作直线平行于抛物线的轴与抛物线交于点 P_3，求证 $\triangle P_1P_2P_3$ 的面积等于 $\frac{1}{16}|y_1-y_2|^3$；(2) 经过线段 P_1P_3 和 P_2P_3 的中点分别作直线平行于抛物线的轴，和抛物线依次交于点 Q_1、Q_2，试将 $\triangle P_1P_3Q_1$ 与 $\triangle P_2P_3Q_2$ 的面积的和用 y_1、y_2 表示；(3) 仿照 (2) 又可作出四个更小的三角形，照此继续下去，可作出一系列三角形，由此设法求出线段 P_1P_2 与抛物线所围成图形的面积.



［分析］ 令 $S_1=\triangle P_1P_2P_3$ 的面积，$S_2=\triangle P_1P_3Q_1+\triangle P_2P_3Q_2$ 的面积，可推得 $S_n=\frac{1}{2^2}S_{n-1}$，不难求出线段 P_1P_2 与抛物线所围成的面积.

［解］ (1) $\because$ 点 P_1、P_2 的坐标分别为 $\left(\frac{y_1^2}{2}, y_1\right)$、$\left(\frac{y_2^2}{2}, y_2\right)$，$P_1P_2$ 中

点 M_1 的坐标为$\left(\frac{y_1^2+y_2^2}{4},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. ∴ P_3 坐标为

$$\left(\frac{\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \text{ 即 } \left(\frac{(y_1+y_2)^2}{8},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

$$\therefore\quad S_1=S_{\triangle P_1P_2P_3}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{y_1^2}{2} & y_1 & 1 \\ \frac{y_2^2}{2} & y_2 & 1 \\ \frac{(y_1+y_2)^2}{8} & \frac{y_1+y_2}{2} & 1 \end{vmatrix} \text{的绝对值}$$

$$=\frac{1}{16}|y_1-y_2|^3.$$

(2) P_1P_3 的中点 $M_2\left(\frac{\frac{y_1^2}{2}+\frac{(y_1+y_2)^2}{8}}{2}, \frac{y_1+\frac{y_1+y_2}{2}}{2}\right)$即$\left(\frac{4y_1^2+(y_1+y_2)^2}{16},\right.$ $\left.\frac{3y_1+y_2}{4}\right)$, Q_1 的坐标为 $\left(\frac{\left(\frac{3y_1+y_2}{4}\right)^2}{2},\ \frac{3y_1+y_2}{4}\right)$. 同理, Q_2 的坐标为 $\left(\frac{\left(\frac{y_1+3y_2}{4}\right)^2}{2},\ \frac{y_1+3y_2}{4}\right)$. 按(1)所得结果, 可得

$$S_{\triangle P_1P_3Q_1}=\frac{1}{16}\left|y_1-\frac{y_1+y_2}{2}\right|^3=\frac{1}{2^7}|y_1-y_2|^3,$$

$$S_{\triangle P_2P_3Q_2}=\frac{1}{16}\left|\frac{y_1+y_2}{2}-y_2\right|^3=\frac{1}{2^7}|y_1-y_2|^3.$$

$$\therefore\quad S_2=S_{\triangle P_1P_3Q_1}+S_{\triangle P_2P_3Q_2}=\frac{1}{2^6}|y_1-y_2|^3=\frac{1}{2^2}S_1.$$

(3) 按(2)的结果, 可得四个更小的三角形面积之和为

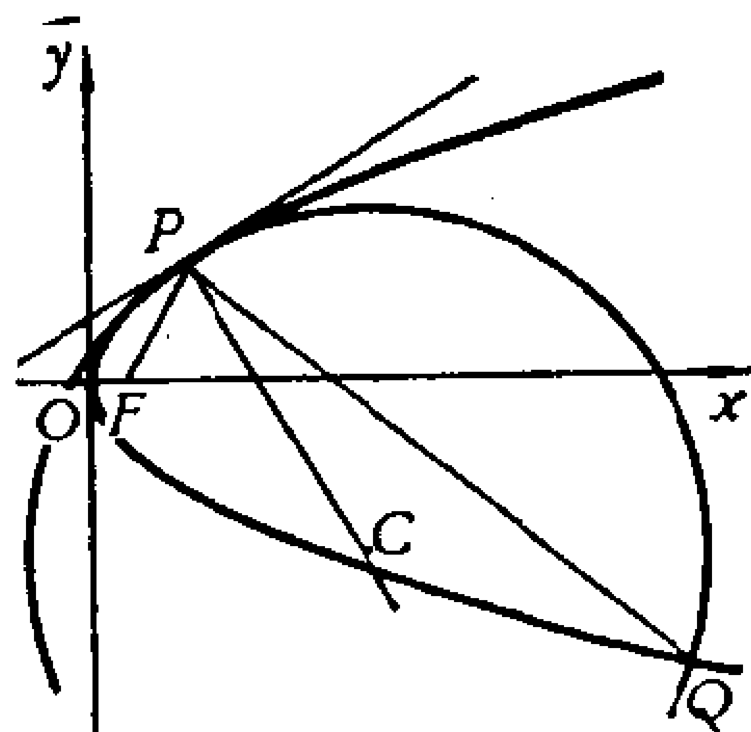
$$S_3=\frac{1}{2^2}S_{\triangle P_2P_3Q_2}+\frac{1}{2^2}S_{\triangle P_1P_3Q_1}=\frac{1}{2^2}S_2.$$

仿此可以推得 $S_n=\frac{1}{2^2}S_{n-1}$.

$$\therefore\quad S=S_1+S_2+S_3+\cdots\cdots=\frac{|y_1-y_2|^3}{2^4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2^4}|y_1-y_2|^3\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{12}|y_1-y_2|^3.$$

961. 设圆 C 与抛物线 $y^2=4ax$ 的四个交点中至少有三个重合于点 $P(at^2, 2at)$，求圆 C 的方程.



［分析］ 设圆 C 与抛物线的第四个交点为 Q，利用抛物线过点 P 的切线和直线 PQ 的方程，可以写出过圆与抛物线全部交点的二次曲线系方程，由一般二次方程为圆的充要条件，即可得圆 C 的方程.

［解］ 抛物线过点 $P(at^2, 2at)$ 的切线方程为 $x-ty+at^2=0$. 设直线 PQ 的倾角为 θ, 直线 PQ 的方程为 $(x-at^2)\cdot\sin\theta-(y-2at)\cos\theta=0$. 过圆 C 与抛物线全部交点的二次曲线系方程为 $(x-ty+at^2)[(x-at^2)\sin\theta-(y-2at)\cos\theta]=\lambda(y^2-4ax)$…① (参见提要 8.72). 方程 ① 表示圆的充要条件是 x^2、y^2 项的系数相等，xy 项的系数等于零. $\therefore \sin\theta=t\cos\theta-\lambda$…②, $\cos\theta+t\sin\theta=0$…③, 即 $\dfrac{\cos\theta}{t}=\dfrac{-\sin\theta}{1}=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+t^2}}$…④. 代入②，得 $\lambda^2=1+t^2$…⑤. 以④、⑤代入①，得

$$(x-ty+at^2)(-x-ty+3at^2)=(1+t^2)(y^2-4ax).$$

化简即得圆 C 的方程

$$x^2+y^2-2a(3t^2+2)x+4at^3y-3a^2t^4=0.$$

［说明］ (1) 当点 P 位于抛物线顶点时，直线 PQ 与过点 P 的切线重合，因而点 Q 也与 P 重合. 圆 C 的方程为 $x^2+y^2-4ax=0$. (2) 圆 C 称为抛物线 $y^2=4ax$ 在点 $P(at^2, 2at)$ 的密切圆. (3) 本题的另一解法参见第 1038 题.

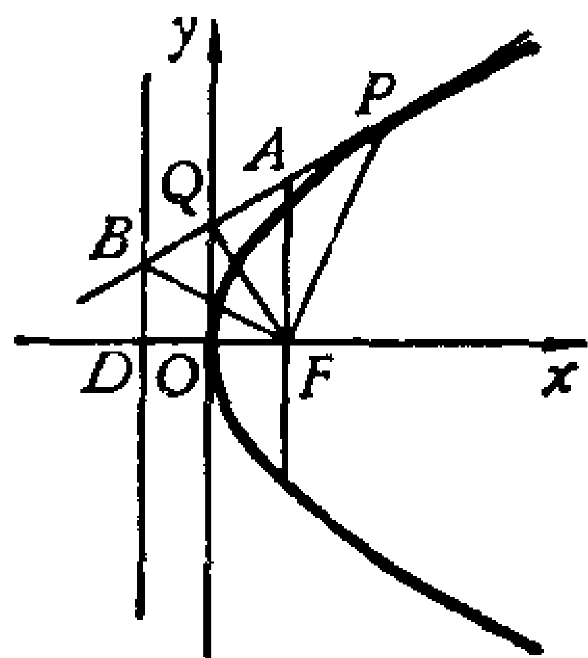
§8. 证　明　题

962. 抛物线上任意一点 P 的切线与通径的延长线及准线各相交于点 A、B. 求证这两点到焦点 F 的距离相等.

［分析］ 分别计算出这两点到焦点的距离即得证法一. 又，抛物线焦点在切线上的射影 Q 在过抛物线顶点的切线 Oy 上，而 $|QA|$、$|QB|$ 在对称

轴上的射影相等,则焦点在切线上的射影 Q 平分 AB, 推得 $|FA|=|FB|$. 即证法二.

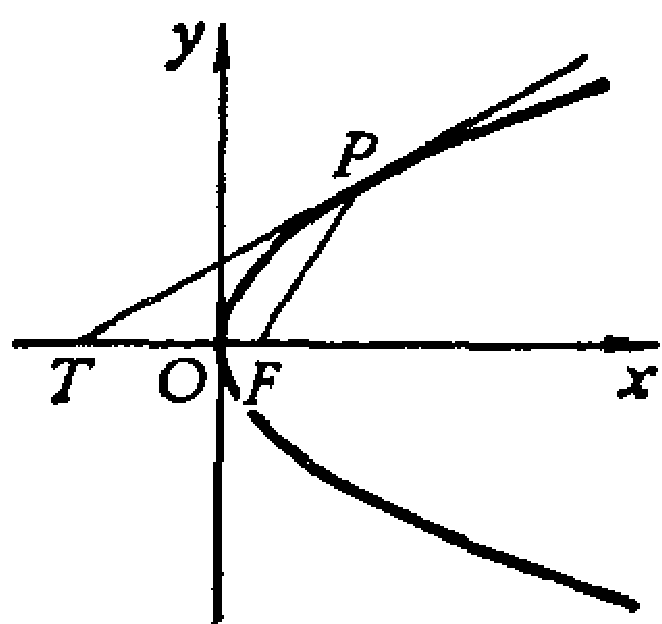
[证一] 设抛物线方程为 $y^2=2px$. 抛物线上一点 P 的坐标为 $(2pt^2, 2pt)$. 过点 P 的切线方程为 $2pty=p(x+2pt^2)$, 即 $2ty=x+2pt^2$. 切线与通径延长线交点 A 的坐标为$\left(\frac{p}{2}, \frac{4pt^2+p}{4t}\right)$, 切线与准线交点 B 的坐标为$\left(-\frac{p}{2}, \frac{4pt^2-p}{4t}\right)$. $\therefore |AF|=\left|\frac{4pt^2+p}{4t}\right|$, $|BF|=\sqrt{p^2+\frac{p^2(4t^2-1)^2}{16t^2}}$ $=\left|\frac{4pt^2+p}{4t}\right|$. $\therefore |AF|=|BF|$.



[证二] 设抛物线 $y^2=2px$ 的切线 PA 与过顶点的切线交于点 Q, 过切点 $P(2pt^2, 2pt)$的切线方程为 $x-2ty+2pt^2=0$, 所以点 Q 的坐标为$(0, pt)$. 直线 FQ 的斜率 $k_{FQ}=-2t$, 而过点 P 的切线斜率为 $\frac{1}{2t}$, $\therefore$ $FQ\perp AB$.

$$\because\ OQ\perp Ox,\ |OF|=|OD|,$$
$$\therefore\ |AQ|=|BQ|,\quad |AF|=|BF|.$$

963. 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$上一点 P 作抛物线的切线交 x 轴于点 T, 点 F 为抛物线焦点. 求证: $|PF|=|TF|$.



[证] 设点 P 的坐标为(x_0, y_0), 则过点 P 的切线方程为

$$y_0y=p(x+x_0),$$

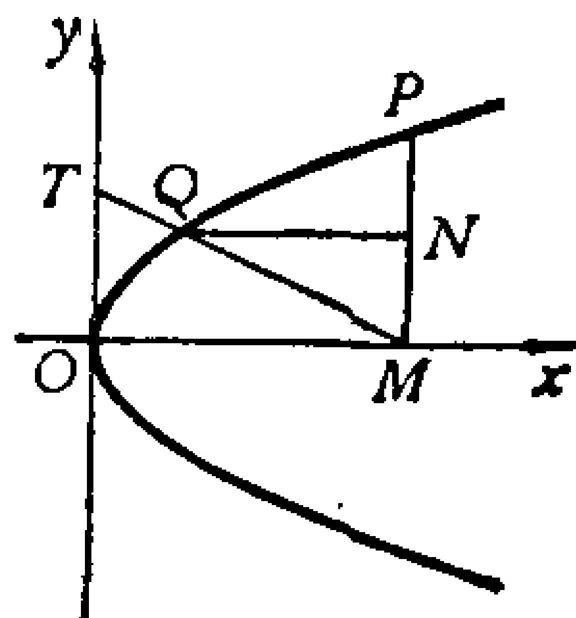
切线和 x 轴交点 T 的坐标为$(-x_0, 0)$.

$$\therefore |TF|=\frac{p}{2}+x_0. \text{ 又 } |PF|=x_0+\frac{p}{2}, \therefore |PF|=|TF|.$$

964. 抛物线 $y^2=2px$ 上一点 P, PM 垂直于 x 轴, M 为垂足; 过线段 PM 的中点 N 作直线 NQ 与 x 轴平行, 交抛物线于点 Q, 直线 MQ 与 y 轴交于点 T. 求证:

$$3|OT|=2|PM|.$$

[证] 设抛物线上点 P 的坐标为 $(2pt^2, 2pt)$, 则点 M 的坐标为 $(2pt^2, 0)$, 点 N 的坐标为 $(2pt^2, pt)$, 点 Q 坐标为



$$\left(\frac{1}{2}pt^2,\ pt\right).$$

∴ 直线 MQ 的方程为

$$2x+3ty-4pt^2=0,$$

点 T 坐标为

$$T\left(0,\ \frac{4}{3}pt\right).\quad \therefore\quad |OT|=\left|\frac{4}{3}pt\right|,$$

$$|PM|=|2pt|.\quad \therefore\quad 3|OT|=2|PM|.$$

965. 抛物线的对称轴和抛物线的焦点弦的夹角为 θ, 通径长为 l. 求证焦点弦的长等于 $\frac{l}{\sin^2\theta}$.

[证] 设抛物线方程为 $y^2=2px$, 则焦点为 $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$, 焦点弦的倾角为 θ. 故焦点弦的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{p}{2}+t\cos\theta\\ y=t\sin\theta,\end{cases}$ 代入 $y^2=2px$, 整理得

$$t^2\sin^2\theta-2pt\cos\theta-p^2=0.$$

$$\therefore\quad 焦点弦长=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}$$

$$=\sqrt{\frac{4p^2\cos^2\theta}{\sin^4\theta}+\frac{4p^2}{\sin^2\theta}}=\sqrt{\frac{4p^2}{\sin^4\theta}}$$

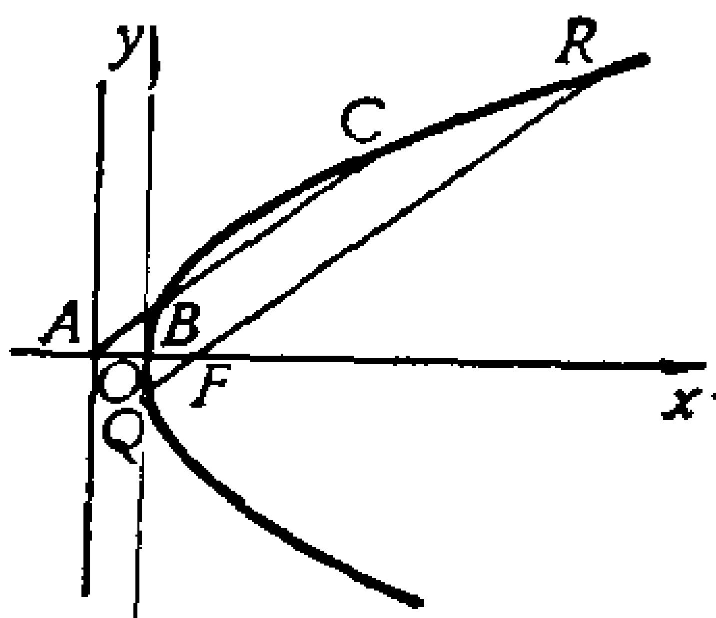
$$=\frac{2p}{\sin^2\theta}=\frac{l}{\sin^2\theta}\quad (\because 通径长\ l=2p).$$

[说明] (1) 研究直线与二次曲线关系时, 用参数式直线方程常较简便. 本题如果用点斜式证明, 应注意讨论 $\theta=90°$ 这种情况. (2) 有关圆锥曲线的焦点弦问题, 用极坐标解也较方便.

966. 抛物线 $y^2=4ax(a>0)$ 的轴与准线相交于点 A, 过点 A 作抛物线割线 $\overline{ABC}$, 又过焦点 F 作割线 $\overline{ABC}$ 的平行线交抛物线于点 Q、R. 求证: $|AB|\cdot|AC|=|QF|\cdot|FR|$.

[分析] 写出割线 $\overline{ABC}$ 和焦点弦 $\overline{QFR}$ 的参数方程, 利用参数 t 的几何意义即可证明.

［证］ 因点 A 的坐标为$(-a, 0)$，设割线 $\overline{ABC}$ 的倾角为 θ，则直线 $\overline{ABC}$ 的方程为



$$\begin{cases} x=-a+t\cos\theta \\ y=t\sin\theta \end{cases} \cdots ①.$$

点 F 的坐标为$(a, 0)$，焦点弦 $\overline{QFR}$ 的方程为

$$\begin{cases} x=a+t'\cos\theta \\ y=t'\sin\theta \end{cases} \cdots ②.$$

把①代入 $y^2=4ax$，得 t 的二次方程 $t^2\sin^2\theta-4at\cos\theta+4a^2=0$.

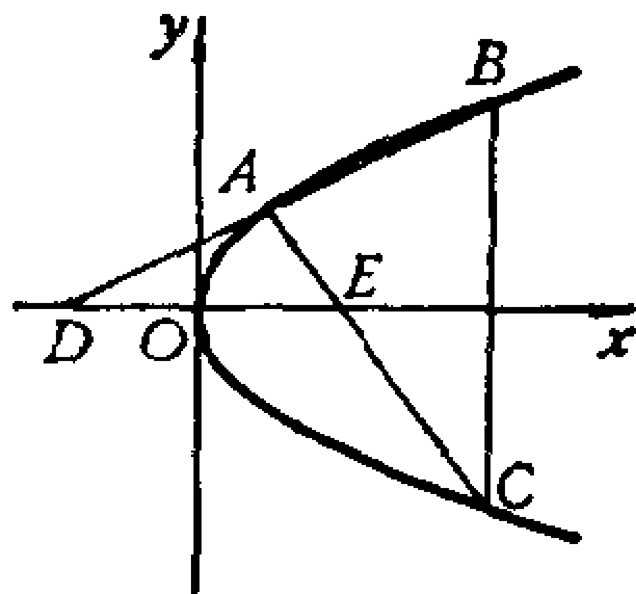
$\therefore\quad |AB|\cdot|AC|=\dfrac{4a^2}{\sin^2\theta}$. 把②代入 $y^2=4ax$，得 t' 的二次方程

$$t'^2\sin^2\theta-4at'\cos\theta-4a^2=0.$$

$$\therefore\quad |FQ|\cdot|FR|=\left|\frac{-4a^2}{\sin^2\theta}\right|=\frac{4a^2}{\sin^2\theta}.$$

即
$$|QF|\cdot|FR|=|AB|\cdot|AC|.$$

967. **A 是抛物线 $y^2=2px$ 上的一点，BC 是垂直于 x 轴的一条弦. 直线 AC 交抛物线的轴于 E，直线 AB 交抛物线的轴于 D. 求证抛物线顶点平分线段 DE.**



［分析］ 证明 D、E 两点的横坐标是相反数.

［证］ 设点 B 的坐标为$(2pt_1^2, 2pt_1)$，则点 C 的坐标为$(2pt_1^2, -2pt_1)$. 又设点 A 的坐标为$(2pt_2^2, 2pt_2)$，则直线 BA 的方程为

$$y-2pt_1=\frac{1}{t_1+t_2}(x-2pt_1^2).$$

直线 BA 和 x 轴交点 D 的坐标为$(-2pt_1t_2, 0)$. 直线 CA 方程为

$$y-2pt_2=\frac{1}{t_2-t_1}(x-2pt_2^2),$$

直线 CA 和 x 轴交点 E 的坐标为$(2pt_1t_2, 0)$. ∵ D、E 两点的横坐标是相反数，所以点 O 平分线段 DE.

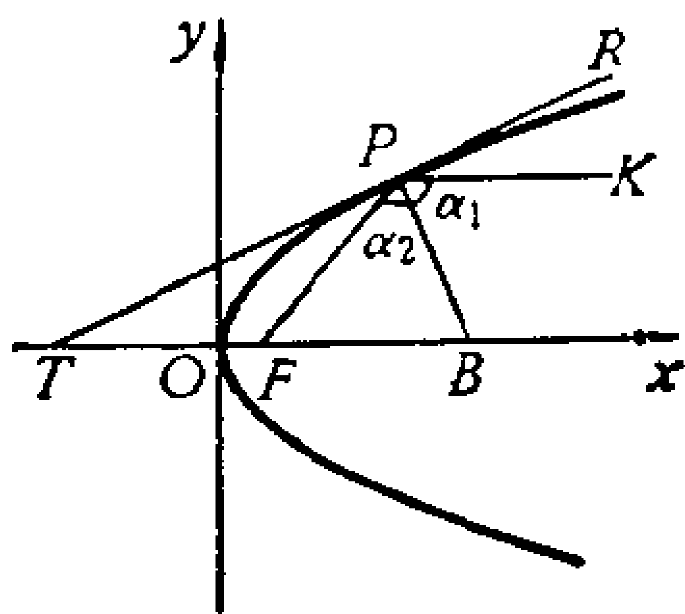
968. **求证抛物线上任意一点的法线平分过此点的焦半径和过此点的直径所夹的角.**

［分析］ 如图，PF 是焦半径，PK 是直径，$\overline{RPT}$ 是切线，PB 是法线.

$\because PK \parallel x$ 轴，$\therefore \angle KPR=\angle FTP$. 因此，要证明 $\alpha_1=\alpha_2$，只要证明

$$\angle FPT=\angle FTP,$$

即证明　　$|PF|=|FT|$.



［证一］　设抛物线方程为 $y^2=2px$, F 为焦点，$P(x_1, y_1)$为抛物线上任意一点，过点 P 的切线 $\overline{RPT}$ 的方程为 $y_1y=p(x+x_1)$，切线与 x 轴的交点 T 坐标为$(-x_1, 0)$，于是

$$|FT|=x_1+\frac{p}{2},\quad |PF|=x_1+\frac{p}{2},$$

$\therefore |PF|=|FT|$, $\angle FPT=\angle FTP$. 又 $PK\parallel x$ 轴，$\therefore \angle KPR=\angle FTP=\angle FPT$. 而 $\angle KPR+\alpha_1=\angle FPT+\alpha_2=90^\circ$, $\therefore \alpha_1=\alpha_2$. 命题得证.

［证二］　直径 PK 的斜率 $k_1=0$, 法线 PB 的斜率 $k_2=-\frac{y_1}{p}$, 焦半径的斜率 $k_3=\frac{2y_1}{2x_1-p}$. 于是

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}=\frac{y_1}{p},$$

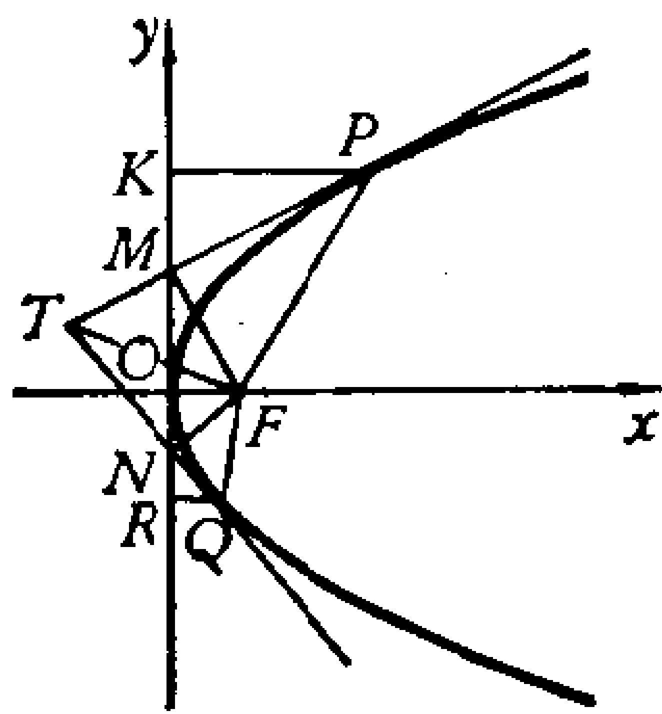
$$\operatorname{tg}\alpha_2=\frac{k_2-k_3}{1+k_2k_3}=\frac{-\frac{y_1}{p}-\frac{2y_1}{2x_1-p}}{1-\frac{y_1}{p}\cdot\frac{2y_1}{2x_1-p}}=\frac{-y_1(2x_1+p)}{-p(2x_1+p)}=\frac{y_1}{p}.$$

$\therefore\quad \operatorname{tg}\alpha_1=\operatorname{tg}\alpha_2$，且 $0<\alpha_1<90^\circ$, $0<\alpha_2<90^\circ$. $\therefore\quad \alpha_1=\alpha_2$.

969. **过以 F 为焦点的抛物线上任意两点 P、Q 的切线相交于 T，求证：**

$$\angle TPF=\angle QTF,$$

$$\angle PTF=\angle TQF.$$

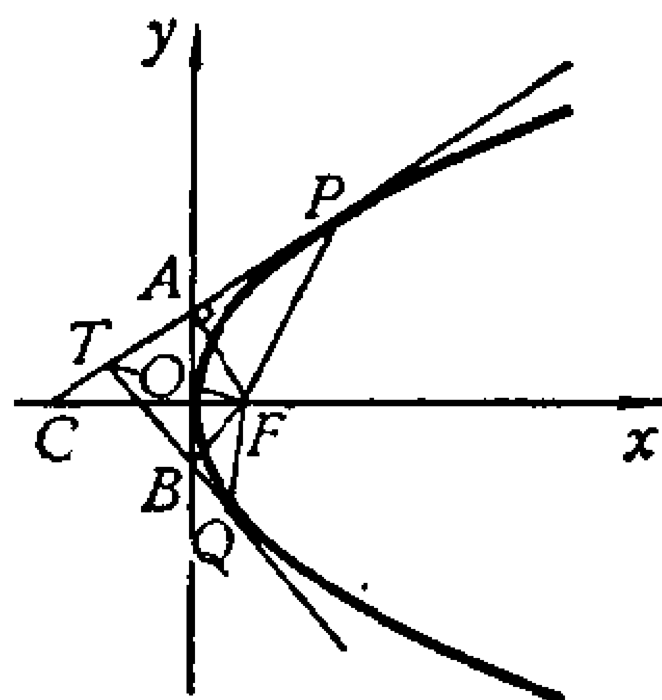


［分析］　因为抛物线焦点在它的切线上的射影的轨迹是抛物线过顶点的切线（参见第 981 题）. 所以从证 T、M、F、N 四点共圆入手.

［证］　设抛物线方程为 $y^2=2px$, 过抛物线顶点 O 的切线(即 y 轴)交 TP、TQ 于点 M、N，连结 FM、FN，则 $FM\perp PT$, $FN\perp TQ$. 故 T、M、F、N 四点共圆，$\angle NTF=\angle NMF$. 又过点 P 作 $PK\perp MN$，垂足为 K，则 $KP\parallel OF$. 根据抛物线光学性质(即上题)，有 $\angle MPK=\angle TPF$. $\angle NMF$

和 $\angle MPK$ 均与 $\angle PMK$ 互余. $\therefore \angle NMF=\angle MPK$. 推得 $\angle NTF=\angle TPF$, 即 $\angle QTF=\angle TPF$. 同理可证 $\angle PTF=\angle TQF$.

970. 过抛物线上两点 P、Q 的两切线交于点 T. 求证: (1) TP、TQ 在焦点 F 所张的角相等; (2) $|FT|^2=|FP|\cdot|FQ|$; (3) $\triangle FPT \backsim \triangle FTQ$.



[证一] (1) 设抛物线方程为 $y^2=2px$, 点 P 的坐标为 $(2pt_1^2, 2pt_1)$, 点 Q 的坐标为 $(2pt_2^2, 2pt_2)$. 两切线交点 T 的坐标则为 $(2pt_1t_2, p(t_1+t_2))$. 直线 PF 的斜率 $k_{PF}=\dfrac{4t_1}{4t_1^2-1}$, 直线 QF 的斜率 $k_{QF}=\dfrac{4t_2}{4t_2^2-1}$. 直线 TF 的斜率 $k_{TF}=\dfrac{2(t_1+t_2)}{4t_1t_2-1}$, 根据直线交角公式得

$$\operatorname{tg}\angle PFT=\frac{2(t_1-t_2)}{4t_1t_2+1},\qquad \operatorname{tg}\angle TFQ=\frac{2(t_1-t_2)}{4t_1t_2+1}.$$

$$\because\ 0<\angle PFT<\pi,\ 0<\angle TFQ<\pi,\ \therefore\ \angle PFT=\angle TFQ.$$

(2) $|FP|=2pt_1^2+\dfrac{p}{2}$, $|FQ|=2pt_2^2+\dfrac{p}{2}$,

$$|FT|^2=\left(2pt_1t_2-\frac{p}{2}\right)^2+p^2(t_1+t_2)^2$$

$$=4p^2t_1^2t_2^2+p^2(t_1^2+t_2^2)+\frac{p^2}{4}$$

$$=\left(2pt_2^2+\frac{p}{2}\right)\left(2pt_1^2+\frac{p}{2}\right)=|FP|\cdot|FQ|.$$

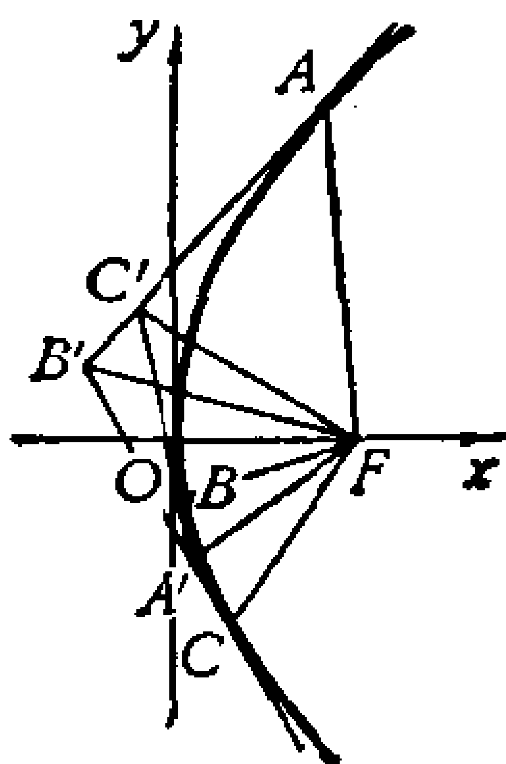
(3) $\because \angle PFT=\angle QFT$, $|FT|^2=|FP|\cdot|FQ|$, 即 $\dfrac{|FT|}{|FP|}=\dfrac{|FQ|}{|FT|}$.

$$\therefore\ \triangle FPT\backsim\triangle FTQ.$$

[证二] 设 TP、TQ 分别交抛物线过顶点的切线于 A、B. 由上题可知 F、A、T、B 四点共圆, 且 $\angle QTF=\angle TPF$, $\angle PTF=\angle TQF$, 即得 $\angle TFP=\angle TFQ$. $\therefore \triangle FPT\sim\triangle FTQ$. $|FT|:|FP|=|FQ|:|FT|$, 即 $|FT|^2=|FP|\cdot|FQ|$.

971. 过以 F 为焦点的抛物线上三点 A、B、C 的切线两两相交于 A'、B'、C'. 求证:

$$|FA|\cdot|FB|\cdot|FC|$$
$$=|FA'|\cdot|FB'|\cdot|FC'|.$$



［证］ 根据上题(2)的结论有

$$|FB'|^2=|FA|\cdot|FC|.$$

同理可得

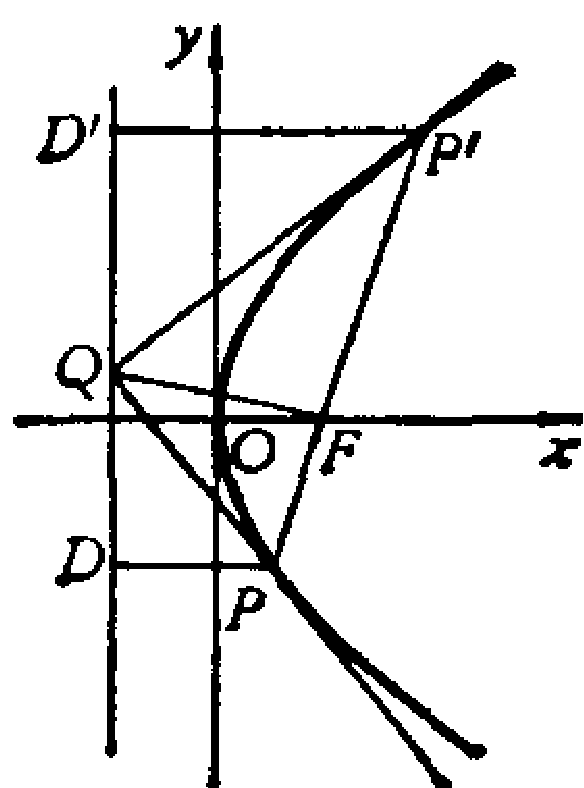
$$|FC'|^2=|FA|\cdot|FB|,\ |FA'|^2=|FB|\cdot|FC|.$$

三式相乘得

$$|FA'|^2\cdot|FB'|^2\cdot|FC'|^2=|FA|^2\cdot|FB|^2\cdot|FC|^2,$$

$$\therefore\quad |FA'|\cdot|FB'|\cdot|FC'|=|FA|\cdot|FB|\cdot|FC|.$$

972. 经过抛物线准线上的一点引两条切线. 求证准线上这点和焦点连线与准线的夹角被切线平分.



［证一］ 设抛物线方程为 $y^2=2px$, 抛物线上一点 $P(2pt^2,\ 2pt)$, 过点 P 的切线方程为 $2ty=x+2pt^2$, 它与准线 $x=-\frac{p}{2}$ 交于点 $Q\left(-\frac{p}{2},\ -\frac{p}{4t}+pt\right)$. FQ 的直线方程为

$$y=-\left(-\frac{1}{4t}+t\right)x+\frac{p}{2}\left(-\frac{1}{4t}+t\right).$$

点 P 到 QF 的距离为

$$\left|\frac{\left(\frac{1}{4t}-t\right)2pt^2-2pt-\frac{p}{8t}+\frac{pt}{2}}{\sqrt{1+\left(t-\frac{1}{4t}\right)^2}}\right|=\left|\frac{-pt-2pt^3-\frac{p}{8t}}{t+\frac{1}{4t}}\right|$$
$$=\frac{p(16t^4+8t^2+1)}{2(4t^2+1)}=\frac{p(4t^2+1)}{2}=2pt^2+\frac{p}{2},$$

而点 P 到准线距离为 $2pt^2+\frac{p}{2}$. $\therefore$ 点 P 到 QF 和准线的距离相等, PQ 是准线和 QF 夹角的平分线.

［证二］ 设抛物线方程为 $y^2=2px$, 过准线 $x=-\frac{p}{2}$ 上任意一点 $Q\left(-\frac{p}{2},\ y_0\right)$作两切线的切点弦 PP' 为 $y_0y=p\left(x-\frac{p}{2}\right)$, 它必过焦点$\left(\frac{p}{2},0\right)$.

直线 QF 的斜率 $k_{QF}=\dfrac{y_0}{-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}}=-\dfrac{y_0}{p}$，$\therefore QF\perp PP'$. 设点 P、P' 在准线上的射影分别为 D、D'. $\because |PF|=|PD|$，$|P'F|=|P'D'|$，$\therefore PQ$、$P'Q$ 分别平分 $\angle FQD$ 及 $\angle FQD'$.

973．如果对称轴互相垂直的两条抛物线交于 A、B、C、D 四点．求证四边形 $ABCD$ 的对角互补．

［分析］ 要证明四边形 $ABCD$ 的对角互补，即证明这两条抛物线的交点共圆，利用曲线方程的概念即可得证．

［证］ 设一抛物线方程为 $y^2=2p_1x$，则另一条为 $(x-m)^2=2p_2(y-n)$．它们的交点 A、B、C、D 的坐标为 (x_i, y_i) $(i=1, 2, 3, 4)$，则 $y_i^2=2p_1x_i$，$(x_i-m)^2=2p_2(y_i-n)$．相加得

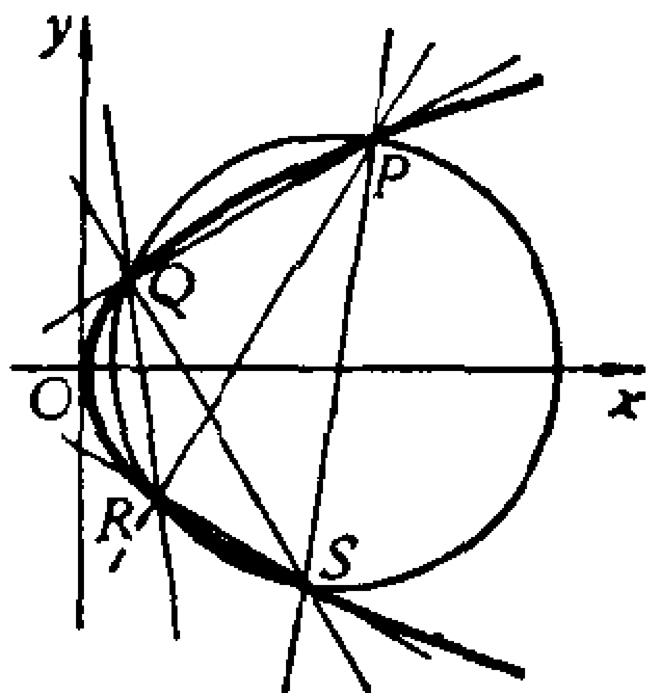
$$x_i^2+y_i^2-(2p_1+2m)x_i-2p_2y_i+m^2+2p_2n=0.$$

即 $(x_i, y_i)(i=1, 2, 3, 4)$适合圆方程

$$x^2+y^2-(2p_1+2m)x-2p_2y+m^2+2p_2n=0.$$

因此四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形，其对角互补．

974．设抛物线 $y^2=4ax$ 与圆有四个交点 P、Q、R、S，求证：PQ、RS，PR、QS，PS、QR 三组直线与对称轴的倾角分别互补．



［分析］ 欲证 PQ、RS 与轴的倾角互补，只要证明它们的斜率互为相反数．抛物线上任意两点 $P(at_1^2, 2at_1)$、$Q(at_2^2, 2at_2)$ 的连线斜率为 $\dfrac{2}{t_1+t_2}$，$R(at_3^2, 2at_3)$、$S(at_4^2, 2at_4)$连线的斜率为 $\dfrac{2}{t_3+t_4}$．因而只要证明 $\dfrac{2}{t_1+t_2}=-\dfrac{2}{t_3+t_4}$，即 $t_1+t_2+t_3+t_4=0$．利用 P、Q、R、S 四点共圆的条件以及韦达定理，即可得证．

［证］ 设 P、Q、R、S 四点的坐标为$(at_i^2, 2at_i)(i=1, 2, 3, 4)$．如果此四点为圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 和抛物线的交点，则

$$(at_i^2)^2+(2at_i)^2+D(at_i^2)+E(2at_i)+F=0,$$

即 $$a^2t_i^4+(4a^2+aD)t_i^2+2aEt_i+F=0.$$

$\therefore t_1、t_2、t_3、t_4$ 是方程 $a^2t^4+(4a^2+aD)t^2+2aEt+F=0$ 的根.

由韦达定理得 $t_1+t_2+t_3+t_4=0$, 即 $t_3+t_4=-(t_1+t_2)$.

PQ、RS 的斜率分别为

$$k_{PQ}=\frac{2a(t_1-t_2)}{a(t_1^2-t_2^2)}=\frac{2}{t_1+t_2},\quad k_{RS}=\frac{2}{t_3+t_4}=-\frac{2}{t_1+t_2}.$$

$\therefore k_{PQ}=-k_{RS}$. 故 PQ、RS 与对称轴的倾角互补. 同理可证: PR、QS, PS、QR 与轴的倾角互补.

975. 已知抛物线系: $y=x^2+(2m+1)x+m^2-1$. 求证: (1)不论 m 是何值, 抛物线的顶点在同一直线 l 上; (2)任一平行于 l 且与抛物线相交的直线被各抛物线截得的线段相等.

[分析] 只要求得抛物线的顶点坐标对于 m 的依赖关系,然后消去 m 即得直线 l 的方程. 要证平行于 l 的直线被各抛物线截得的线段相等,只要证明各线段在 x 轴上射影相等.

[证] (1) 将抛物线系方程化为 $\left(y+\frac{5}{4}+m\right)=\left(x+m+\frac{1}{2}\right)^2$. $\therefore$ 顶点坐标满足 $\begin{cases}x+m+\frac{1}{2}=0\\ y+\frac{5}{4}+m=0,\end{cases}$ 消去 m, 得 $x-y-\frac{3}{4}=0$. 因此不论 m 取何值,抛物线顶点总在同一直线 l: $4x-4y-3=0$ 上.

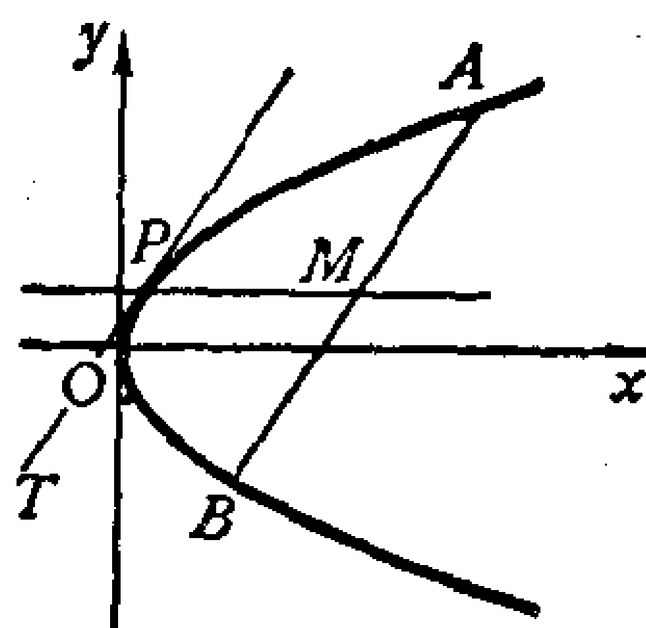
(2) 任一平行于 l 的直线 l' 的方程为 $x-y+b=0$, 抛物线与 l' 的交点坐标满足 $\begin{cases}x-y+b=0\\ y=x^2+(2m+1)x+m^2-1,\end{cases}$ 消去 y, 得 $x^2+2mx+m^2-1-b=0$,

则 $$\begin{cases}x_1+x_2=-2m\\ x_1\cdot x_2=m^2-1-b.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad |x_1-x_2|&=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\\ &=\sqrt{4m^2-4(m^2-1-b)}=2\sqrt{1+b}.\end{aligned}$$

$|x_1-x_2|$ 是直线 l' 被各抛物线所截得的线段在 x 轴上的射影, 它与 m 无关, 即不论 m 取何值, 所得抛物线在 l' 上截得的线段在 x 轴上的射影都相等,故各截得线段也都相等.

976. 过抛物线一弦 AB 的中点平行于对称轴的直线与抛物线交于点 P，过点 P 的切线为 PT，求证：$PT\parallel AB$.



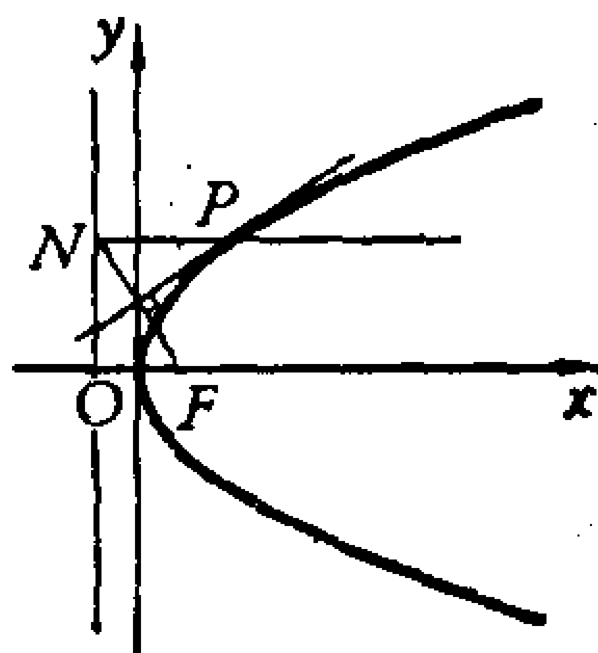
［证一］ 设抛物线方程为 $y^2=2px$，弦 AB 的方程为 $y=kx+b(k\neq 0)$，以 $x=\dfrac{y-b}{k}$ 代入抛物线方程得 $y^2=2p\dfrac{y-b}{k}$，即 $ky^2-2py+2pb=0$. 此方程的两根 y_1、y_2 是点 A、B 的纵坐标，故 AB 中点 M 的纵坐标为 $y_M=\dfrac{1}{2}(y_1+y_2)=\dfrac{p}{k}$. 即点 P 的纵坐标 y_0 也为 $\dfrac{p}{k}$，而过点 P 的切线斜率为 $\dfrac{p}{y_0}=\dfrac{p}{\frac{p}{k}}=k$.

$\therefore\ PT\parallel AB$.

［证二］ 设抛物线方程为 $y^2=2px$，弦 AB 两端的坐标为 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$，其中点 M 的纵坐标为 $y_M=\dfrac{1}{2}(y_1+y_2)$，故点 P 的纵坐标为 $y_P=\dfrac{1}{2}(y_1+y_2)$. 过点 P 的切线的斜率为 $k=\dfrac{p}{y_P}=\dfrac{2p}{y_1+y_2}$；而弦 AB 的斜率为 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{\frac{1}{2p}(y_2^2-y_1^2)}=\dfrac{2p}{y_1+y_2}$，$\therefore\ PT\parallel AB$.

［说明］ 抛物线 $y^2=2px$ 中斜率为 k 的平行弦的中点轨迹是抛物线的直径，它是平行于对称轴的射线. 本题中，点 P 的切线 PT 可看作是这些平行弦所在直线的一个极限位置.

977. 过抛物线 $y^2=2px$ 的焦点 F，作直线与抛物线的任一切线垂直，则此直线与准线的交点 N 和切点 P 的连线必平行于此抛物线的对称轴.



［证］ 设抛物线 $y^2=2px$ 任意一切线的切点为 $P(x_1, y_1)$，则切线方程为 $y_1y=p(x+x_1)$，过焦点 F 与此切线垂直的直线方程为 $y_1x+py=\dfrac{p}{2}y_1\cdots$①，准线方程为 $x=-\dfrac{p}{2}\cdots$②. 解方程①与②，得

它们的交点为$N\left(-\frac{p}{2}, y_1\right)$. $\because y_P=y_N$, $\therefore PN$平行于抛物线的对称轴.

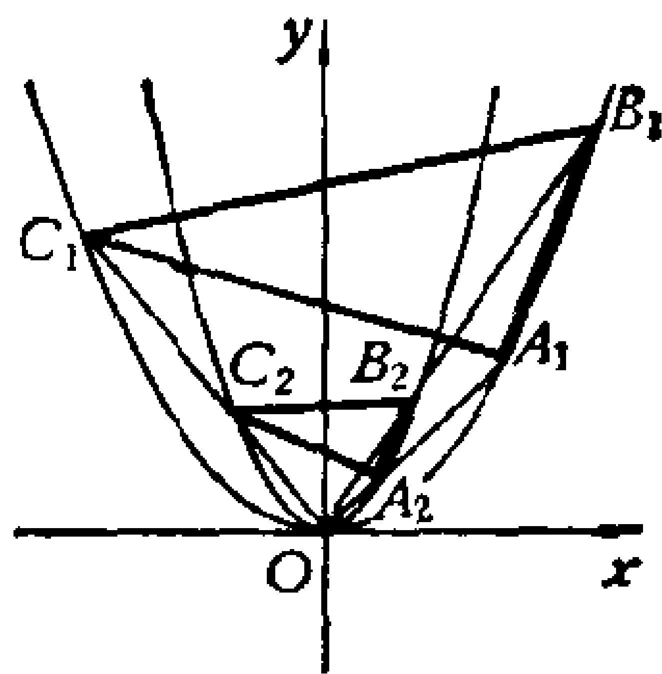
978. **抛物线的四条切线作成四边形,则此四边形对角线中点的连线与抛物线的轴平行.**

[分析] 求出四边形的四个顶点坐标,即可得证.

[证] 设抛物线方程为$y^2=2px$. 四条切线的切点坐标为$(2pt_i^2, 2pt_i)$ $(i=1, 2, 3, 4)$, 四条切线方程为$x-2t_iy+2pt_i^2=0$, 四切线组成的四边形的四个顶点坐标分别为: $A(2pt_1t_2, p(t_1+t_2))$、$B(2pt_2t_3, p(t_2+t_3))$、$C(2pt_3t_4, p(t_3+t_4))$、$D(2pt_4t_1, p(t_4+t_1))$. 对角线AC、BD的中点M、N的纵坐标分别为: $y_M=\frac{p}{2}(t_1+t_2+t_3+t_4)$, $y_N=\frac{p}{2}(t_2+t_3+t_4+t_1)$, $\because y_M=y_N$, $\therefore MN\parallel$抛物线的轴.

[说明] 凡涉及抛物线的内接三角形, 或切线构成的三角形、四边形性质的问题用抛物线的参数方程,可使证明过程简化.

979. **已知两条抛物线$y=a_1x^2$, $y=a_2x^2$, 过原点O引与这两条抛物线都相交的直线OA_2A_1、OB_2B_1、OC_2C_1, 与这两条抛物线的交点分别为A_1、A_2, B_1、B_2, C_1、C_2. (1)求证: $A_1B_1\parallel A_2B_2$; (2)求$S_{\triangle A_1B_1C_1}:S_{\triangle A_2B_2C_2}$的值.**



[解] (1) 设过原点的直线OA_1、OB_1、OC_1的方程为$y=k_1x$, $y=k_2x$, $y=k_3x$. 则它们与两抛物线交点为$A_1\left(\frac{k_1}{a_1}, \frac{k_1^2}{a_1}\right)$、$A_2\left(\frac{k_1}{a_2}, \frac{k_1^2}{a_2}\right)$, $B_1\left(\frac{k_2}{a_1}, \frac{k_2^2}{a_1}\right)$、$B_2\left(\frac{k_2}{a_2}, \frac{k_2^2}{a_2}\right)$, $C_1\left(\frac{k_3}{a_1}, \frac{k_3^2}{a_1}\right)$、$C_2\left(\frac{k_3}{a_2}, \frac{k_3^2}{a_2}\right)$. $\because k_{A_1B_1}=\frac{y_{B_1}-y_{A_1}}{x_{B_1}-x_{A_1}}=k_1+k_2$, $k_{A_2B_2}=\frac{y_{B_2}-y_{A_2}}{x_{B_2}-x_{A_2}}=k_1+k_2$, $\therefore$ $A_1B_1\parallel A_2B_2$.

(2) 同理可得, $B_1C_1\parallel B_2C_2$, $C_1A_1\parallel C_2A_2$. $\therefore \triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle A_2B_2C_2$. $|A_1B_1|=\sqrt{\frac{(k_2-k_1)^2}{a_1^2}+\frac{(k_2^2-k_1^2)^2}{a_1^2}}=\frac{1}{|a_1|}\sqrt{(k_2-k_1)^2+(k_2^2-k_1^2)^2}$. 类

似地，$|A_2B_2|=\frac{1}{|a_2|}\sqrt{(k_2-k_1)^2+(k_2^2-k_1^2)^2}$． ∴ $S_{\triangle A_1B_1C_1}:S_{\triangle A_2B_2C_2}=|A_1B_1|^2:|A_2B_2|^2=\frac{a_2^2}{a_1^2}$.

980．设A_1、A_2、…A_6为抛物线$y=ax^2$上的六个点，且$A_1A_2 /\!/ A_4A_5$，$A_2A_3 /\!/ A_5A_6$．求证：$A_3A_4 /\!/ A_6A_1$.

［证］ 设点A_i的坐标为$(x_i, y_i)(i=1, 2, \cdots, 6)$，则

$$k_{A_iA_j}=\frac{y_j-y_i}{x_j-x_i}=\frac{a(x_j^2-x_i^2)}{x_j-x_i}=a(x_j+x_i).$$

由$A_1A_2 /\!/ A_4A_5$，得$k_{A_1A_2}=k_{A_4A_5}$，即$x_1+x_2=x_4+x_5$;

由$A_2A_3 /\!/ A_5A_6$，得$k_{A_2A_3}=k_{A_5A_6}$，即$x_3+x_2=x_6+x_5$.

于是$k_{A_3A_4}=a(x_4+x_3)=a[(x_2+x_1-x_5)+(x_6+x_5-x_2)]=a(x_6+x_1)=k_{A_6A_1}$. ∴ $A_3A_4 /\!/ A_6A_1$.

981．从抛物线的焦点向它的任意切线作垂线，求证其垂足一定在过抛物线顶点的切线上．

［证］ 设抛物线方程为$y^2=2px$，过抛物线上任意一点$P(x_0, y_0)$的切线方程为$y_0y=p(x+x_0)$．过焦点$\left(\frac{p}{2}, 0\right)$向切线引垂线的方程为$y=-\frac{y_0}{p}x+\frac{y_0}{2}$，它们的交点满足$\begin{cases}y_0y=p(x+x_0)\\ y=-\frac{y_0}{p}x+\frac{y_0}{2}.\end{cases}$ 消去y，得$px+px_0+\frac{y_0^2}{p}x-\frac{y_0^2}{2}=0$．将$y_0^2=2px_0$代入，得$px+px_0+2x_0x-px_0=0$，即$(p+2x_0)x=0$．而$p+2x_0\neq0$，故$x=0$.

［说明］ 本题和下列轨迹题相同：过抛物线的焦点向抛物线的动切线引垂线，则垂足的轨迹为过抛物线顶点的切线．也可改为：抛物线的任意切线与抛物线过顶点的切线的交点和焦点的连线与切线垂直．

982．证明：(1)过抛物线$y^2=2px$的准线上任一点所作的两条切线互相垂直；(2)过抛物线焦点弦两端所作的两条切线其交点必在它的准线上．

［证］ (1) 设准线上一点为$\left(\frac{-p}{2}, y_0\right)$，过此点的直线为$y=k\left(x+\frac{p}{2}\right)+y_0$，即$x=\frac{y-y_0}{k}-\frac{p}{2}$，代入$y^2=2px$，得$ky^2-2py+2py_0+kp^2=0$. 其判别式$\Delta=4p^2-4k(2py_0+kp^2)=0$，整理得$k^2p^2+2py_0k-p^2=0$，则$k_1\cdot k_2=-1$. $\because$ k_1、k_2是过点$\left(-\frac{p}{2}, y_0\right)$与抛物线相切的两切线的斜率，故两切线互相垂直.

(2) 点(x_0, y_0)关于抛物线的切点弦方程为$y_0y=p(x+x_0)$，如果切点弦过焦点$\left(\frac{p}{2}, 0\right)$，则$p\left(\frac{p}{2}+x_0\right)=0$，故$x_0=-\frac{p}{2}$. 即两切线交点$(x_0, y_0)$在准线上.

［说明］ 抛物线两互相垂直切线交点的轨迹为抛物线的准线，且两切点连线过焦点.

983. 过抛物线$y^2=2px$焦点F的直线与抛物线交于点A、B，求证：$\frac{1}{|FA|}+\frac{1}{|FB|}=\frac{2}{p}$.

［分析］ 用参数表示抛物线上两点A、B的坐标，根据直线AB过焦点F，可确定A、B对应的参数之间关系，再计算焦半径即得证.

［证一］ 设A、B两点坐标为$(2pt_1^2, 2pt_1)$、$(2pt_2^2, 2pt_2)$，则

$$|FA|=2pt_1^2+\frac{p}{2},\quad |FB|=2pt_2^2+\frac{p}{2}.$$

$\because$ AB过焦点$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$，$\therefore$ $x=\frac{p}{2}$，$y=0$满足过A、B两点连线方程

$$x-(t_1+t_2)y+2pt_1t_2=0,$$

即得

$$t_1\cdot t_2=-\frac{1}{4}.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{|FA|}+\frac{1}{|FB|}=\frac{1}{2pt_1^2+\frac{p}{2}}+\frac{1}{2pt_2^2+\frac{p}{2}}$$

$$=\frac{4[2(t_1^2+t_2^2)+1]}{p[16t_1^2t_2^2+4(t_1^2+t_2^2)+1]}$$

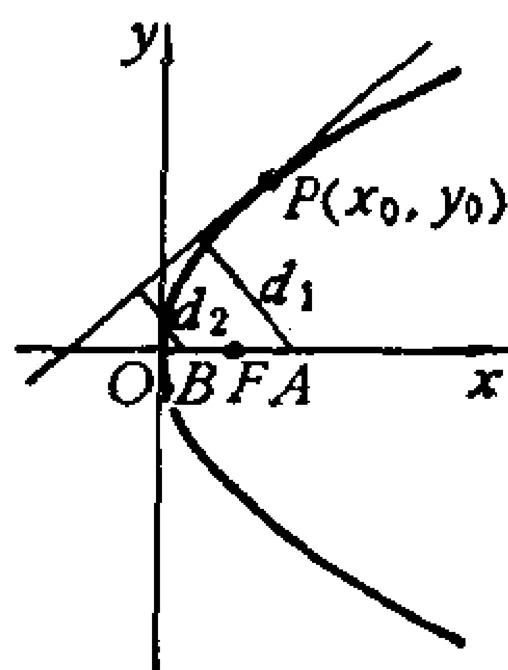
$$=\frac{4}{p}\,\frac{[2(t_1^2+t_2^2)+1]}{[4(t_1^2+t_2^2)+2]}=\frac{2}{p}.$$

［证二］ 建立极坐标系，使抛物线方程为 $\rho=\frac{p}{1-\cos\theta}$. 点 A 的极坐标为 $(\rho_1,\ \theta_1)$，点 B 的极坐标为 $(\rho_2,\ \pi+\theta_1)$.

$$\therefore\quad \frac{1}{|FA|}+\frac{1}{|FB|}=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{1-\cos\theta}{p}+\frac{1+\cos\theta}{p}=\frac{2}{p}.$$

［说明］ 凡涉及二次曲线焦点弦的问题，用极坐标一般较为方便.

984. 从抛物线对称轴上与焦点等距离的两点 A、B 作抛物线的任一切线的垂线. 证明垂线长的平方差与 $|AB|$ 之比是一个常数.



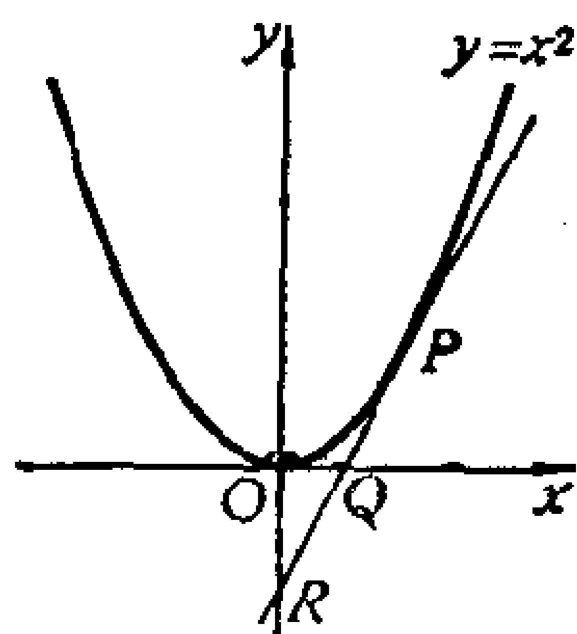
［证］ 设抛物线的方程为 $y^2=2px$，过抛物线上任一点 $P(x_0,\ y_0)$ 的切线方程为 $y_0y=p(x+x_0)$. 距焦点等距离 $a(a\neq 0)$ 的对称轴上两点为 $A\left(\frac{p}{2}+a,\ 0\right)$ 和 $B\left(\frac{p}{2}-a,\ 0\right)$，这两点到切线距离平方差为

$$d_1^2-d_2^2=\left[\frac{p\left(\frac{p}{2}+a+x_0\right)}{\sqrt{p^2+y_0^2}}\right]^2-\left[\frac{p\left(\frac{p}{2}-a+x_0\right)}{\sqrt{p^2+y_0^2}}\right]^2$$

$$=\frac{p^2(p+2x_0)\cdot 2a}{p^2+y_0^2}=\frac{2ap^2(p+2x_0)}{p^2+2px_0}=2ap.$$

故 $$(d_1^2-d_2^2):|AB|=2ap:2a=p.$$

985. 在抛物线 $y=x^2$ 上的任一点 P（原点除外）引切线 l 和 x 轴、y 轴分别交于点 Q、R，求证：$|PR|:|PQ|$ 为定值.



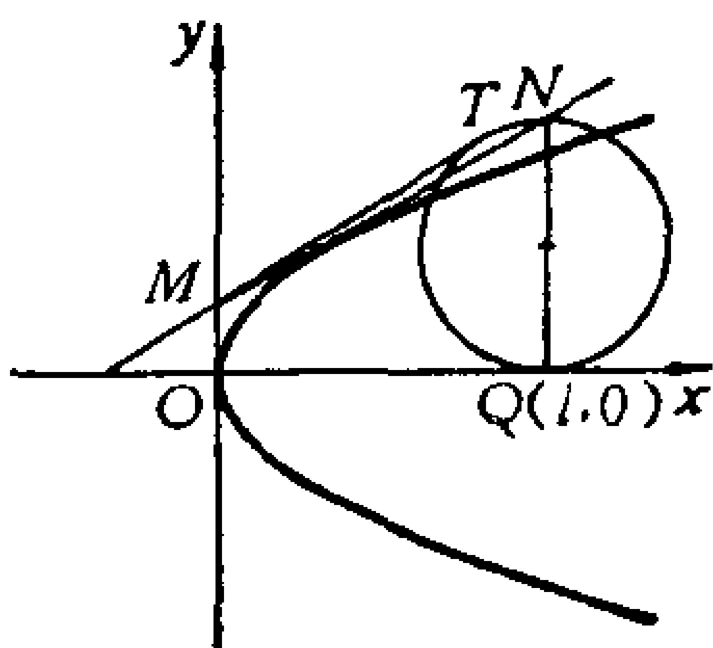
［分析］ 因一直线上两线段之比都可化为它们在 x 轴上或 y 轴上的射影之比，故写出过点 P 的切线方程，由点 Q、R 的横坐标之比即可证得.

［证］ 设抛物线 $y=x^2$ 上任一点 P 的坐标为 (t_0,t_0^2)；$t_0\neq 0$，过点 P 的切线 l 的方程为 $xt_0=\frac{y+t_0^2}{2}$，直线 l 与 x 轴、y 轴的交点 Q、R 的横坐标分别为 $\frac{t_0}{2}$、0. 因 PR 与 PQ 之比等于其在 x 轴上投影之比，故 $|PR|:|PQ|=|t_0-0|:\left|t_0-\frac{t_0}{2}\right|=2$.

986. 抛物线 $y^2=2px$ 的任一切线交过顶点的切线于点 M，交过定点 $Q(l,\ 0)$ 且与 x 轴垂直的直线于点 N，求证：自点 M 到以 QN 为直径之圆的切线长 $|MT|$ 为定值.

［分析］ 过顶点的切线(y 轴)与直线 QN 是确定的，而抛物线的切线随切点位置不同而变动，故可取切点坐标为参数推证.

［证］ 设过抛物线上任一点$(2pt^2,\ 2pt)$的切线方程为 $x-2ty+2pt^2=0$，它与过抛物线顶点的切线的交点坐标为 $M(0,\ pt)$；交过定点 $Q(l,\ 0)$ 且与轴垂直的直线于点 $N\left(l,\ \frac{1}{2t}(l+2pt^2)\right)$. 则以 NQ 为直径的圆方程为



$$\left(\frac{y}{x-l}\right)\cdot\left(\frac{y-\frac{l+2pt^2}{2t}}{x-l}\right)=-1,$$

即 $y^2-\frac{l+2pt^2}{2t}y+(x-l)^2=0$. 故点 $M(0,\ pt)$到圆的切线长的平方

$$|MT|^2=(pt)^2-\frac{l+2pt^2}{2t}\cdot pt+l^2=l^2-\frac{pl}{2}\ (\text{定值}),$$

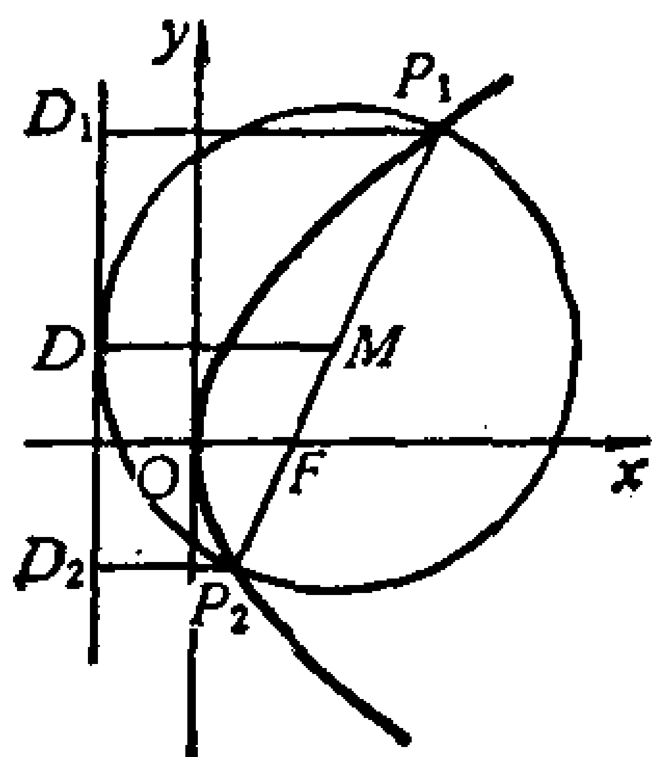
即切线长为定值. 本题只有当 $l\geqslant\frac{p}{2}$ 时才有意义.

987. 过抛物线 $y^2=2px$ 内任意一点 $M(x_0,\ y_0)$ 作抛物线的法线最多能作几条？并证明这几条法线与抛物线的交点纵坐标之和为零.

［分析］ 利用抛物线的法线过点 M 的条件以及代数基本定理和韦达定理即可得证.

［证］ 过抛物线 $y^2=2px$ 上一点$(2pt^2,\ 2pt)$的法线方程为 $2tx+y=4pt^3+2pt$. ∵ 法线过点 $M(x_0,\ y_0)$，∴ $4pt^3+2(p-x_0)t-y_0=0\cdots$①. 方程①是 t 的三次方程，最多存在三个实根：t_1、t_2、t_3，故过点 M 最多能作三条法线. 这三条法线与抛物线的交点坐标为$(2pt_i^2,\ 2pt_i)\ (i=1,\ 2,\ 3)$，根据韦达定理，有 $2pt_1+2pt_2+2pt_3=2p(t_1+t_2+t_3)=0$. 即交点纵坐标之和为零.

988. 求证以抛物线的焦点弦为直径的圆和抛物线的准线相切.



[分析] 证明焦点弦 P_1P_2 的中点到准线的距离等于 $\frac{1}{2}|P_1P_2|$ 即可.

[证] 设抛物线方程为 $y^2=2px$, 焦点弦 $\overline{P_1FP_2}$ 两端坐标为 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$, 则 P_1P_2 的中点 M 的横坐标为 $x_M=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$. 点 M 到准线 $x+\frac{p}{2}=0$ 的距离为 $d=\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{p}{2}$. 而 $|P_1P_2|=|P_1F|+|P_2F|=x_1+x_2+p$, $\therefore d=\frac{1}{2}|P_1P_2|$. 即以 P_1P_2 为直径之圆的中心 M 到准线的距离等于半径,故此圆与准线相切.

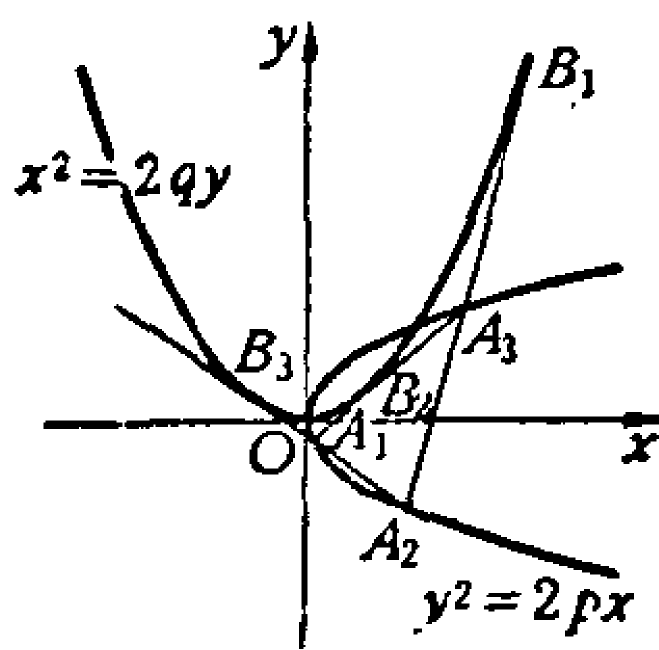
[说明] 本题也可用综合法证明. MD 为梯形 $P_1D_1D_2P_2$ 的中位线, 又 $|P_1F|=|P_1D_1|$, $|P_2F|=|P_2D_2|$, 即可推得 $|DM|=\frac{1}{2}|P_1P_2|$.

989. 抛物线 $y^2=2px$ 的内接三角形有两边与抛物线 $x^2=2qy$ 相切,证明这个三角形的第三边也与 $x^2=2qy$ 相切.

[分析一] 为证本题, 需写出三角形的三边方程. 为此, 可先假设三个顶点的坐标, 从而写出三边方程, 再利用直线与抛物线相切的充要条件证之.

[证一] 设抛物线 $y^2=2px$ 的内接 $\triangle A_1A_2A_3$ 三顶点 A_i 的坐标为 $(2pt_i^2, 2pt_i)$ $(i=1, 2, 3)$, 且 A_1A_2、A_2A_3 与抛物线 $x^2=2qy$ 相切, 故 A_i 均不能位于原点, 并 A_1A_2、A_2A_3 都不可能与抛物线 $x^2=2qy$ 的对称轴(即 y 轴)平行, 即 $t_i\neq 0$, $t_1+t_2\neq 0$, $t_2+t_3\neq 0$, 且 t_1、t_2、t_3 两两互不相等. 于是直线 A_1A_2 的方程为 $y-2pt_1=\frac{2p(t_1-t_2)}{2p(t_1^2-t_2^2)}(x-2pt_1^2)$, 即 $y=\frac{1}{t_1+t_2}(x+2pt_1t_2)\cdots$①. 以①代入方程 $x^2=2qy$, 并化简得 $(t_1+t_2)x^2-2qx-4pqt_1t_2=0$. $\because$ 直线 A_1A_2 与抛物线 $x^2=2qy$ 相切, $\therefore \Delta=0$, 即 $q^2+4pqt_1t_2(t_1+t_2)=0\cdots$②. 又因直线 A_2A_3 与抛物线 $x^2=2qy$ 相切, 故 $q^2+4pqt_2t_3(t_2+t_3)=0\cdots$③. 显然, $p\neq 0$, $q\neq 0$, 则由②、③消去 p、q 得 $t_1t_2(t_1+t_2)=t_2t_3(t_2+t_3)$,

即 $t_2(t_1-t_3)(t_1+t_2+t_3)=0$. 但 $t_2\neq0, t_1\neq t_3$, $\therefore t_1+t_2+t_3=0$, 即 $t_1+t_2=-t_3$. 代入 ②, 得 $q^2-4pqt_1t_2t_3=0$, 且 $t_1+t_3=-t_2\neq0$. 故直线 A_3A_1 的方程为 $y=\frac{1}{t_3+t_1}(x+2pt_3t_1)$, 即 $y=-\frac{1}{t_2}(x+2pt_3t_1)$. 代入方程 $x^2=2qy$, 化简得 $t_2x^2+2qx+4pqt_3t_1=0$. $\because \Delta=q^2-4pqt_1t_2t_3=0$, $\therefore$ 直线 A_3A_1 也与抛物线 $x^2=2qy$ 相切.



［分析二］ 因抛物线 $y^2=2px$ 的已知斜率 k 的切线方程为 $y=kx+\frac{p}{2k}$, 故抛物线 $x^2=2qy$ 的斜率为 $\frac{1}{k}$ 的切线方程可写成 $x=ky+\frac{q}{2k}$. 利用它过 $A_i(2pt_i^2, 2pt_i)$ 的条件, 可直接得出 A_1A_2 与 $x^2=2qy$ 相切的充要条件.

［证二］ 因 A_1A_2 与抛物线 $x^2=2qy$ 相切, 故其方程可设为 $x=ky+\frac{q}{2k}\cdots$①. 由 ① 通过 $A_i(2pt_i^2, 2pt_i)$ $(i=1, 2)$, 可知 t_1、t_2 是方程 $2pt^2=k\cdot2pt+\frac{q}{2k}$, 即 $4pkt^2-4pk^2t-q=0$ 的两根. $\therefore t_1+t_2=k$, $t_1t_2=\frac{-q}{4pk}$. 消去 k, 即得 A_1A_2 与 $x^2=2qy$ 相切的充要条件: $q=-4pt_1t_2(t_1+t_2)\cdots$②. 同理, A_2A_3 与 $x^2=2qy$ 相切的充要条件为 $q=-4pt_2t_3(t_2+t_3)\cdots$③. 余同［证一］.

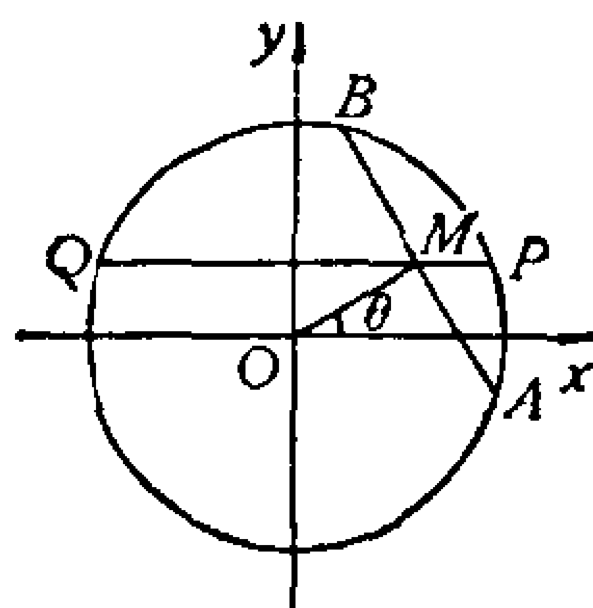
［说明］ 本题还可这样考虑: 点 $A_i(2pt_i^2, 2pt_i)$ $(i=1, 2, 3)$ 关于抛物线 $x^2=2qy$ 的三条极线为 $2pt_i^2x=q(y+2pt_i)$. 从此可得 A_1、A_2 的极线交点 $B_3\left(\frac{q}{t_1+t_2}, -\frac{2pt_1t_2}{t_1+t_2}\right)$, 和 A_2、A_3 的极线交点 $B_1\left(\frac{q}{t_2+t_3}, -\frac{2pt_2t_3}{t_2+t_3}\right)$. 由于 A_1A_2、A_2A_3 切 $x^2=2qy$ 于 B_3、B_1, 故 B_3、B_1 在 $x^2=2qy$ 上, 从而推出三极线组成的 $\triangle B_1B_2B_3$ 的另一顶点 B_2 也在 $x^2=2qy$ 上. 因过 $x^2=2qy$ 上一点 B_2 的切线是唯一的, 故 A_3、B_2、A_1 三点共线, 即 A_3A_1 与 $x^2=2qy$ 相切. 反之, 同样可证: "若 $x^2=2qy$ 的外切 $\triangle A_1A_2A_3$ 的两个顶点在 $y^2=2px$ 上, 则第三个顶点也在 $y^2=2px$ 上."

990. 设抛物线 $y^2=4p(x-a)$ 与 $x^2=4qy$ 相切. 求证: $4a^3=27pq^2$ (p、q、a 均不为零).

［解］ 设两抛物线的切点为 (x_0, y_0), 则 $y_0^2=4p(x_0-a)\cdots$①, $x_0^2=4qy_0\cdots$②. 过点 (x_0, y_0) 抛物线 $y^2=4p(x-a)$ 的切线方程为 $2px-y_0y+$

$2px_0-4ap=0\cdots$③, $x^2=4qy$ 的切线方程为 $x_0x-2qy-2qy_0=0\cdots$④. $\because$ 切线③、④重合, $\therefore x_0y_0=4pq\cdots$⑤. ①×②, 得 $x_0^2y_0^2=16pq(x_0y_0-ay_0)\cdots$⑥. ⑤代入⑥, 得 $16p^2q^2=16pq(4pq-ay_0)$. 显然 $pq\neq0$, $\therefore y_0=\frac{3pq}{a}\cdots$⑦. ⑦代入⑤, 得 $x_0=\frac{4a}{3}\cdots$⑧. ⑦、⑧代入②, 得 $\frac{16a^2}{9}=4q\cdot\frac{3pq}{a}$, 即 $4a^3=27pq^2$.

991. 设 PQ 为圆 $x^2+y^2=r^2$ 的平行于 x 轴的弦, 圆心到 PQ 的距离为 a, 求证: 凡被 PQ 平分的此圆的弦, 都与同一抛物线 $x^2+4a(y-a)=0$ 相切.



[证] 如图, 设被 PQ 平分于点 M 的弦为 AB, 并取 $\angle xOM=\theta$ 为参数, 则 AB 所在直线的方程为 $y-a=(x-a\operatorname{ctg}\theta)\cdot\operatorname{tg}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$, 即 $y-a=-x\operatorname{ctg}\theta+a\operatorname{ctg}^2\theta\cdots$①. 从抛物线方程 $x^2+4a(y-a)=0\cdots$② 得 $y-a=-\frac{x^2}{4a}$, 代入①, 得 $x^2-4ax\operatorname{ctg}\theta+4a^2\operatorname{ctg}^2\theta=0$, 即 $(x-2a\operatorname{ctg}\theta)^2=0$. 故直线①与抛物线②的两交点重合, 即直线①必与抛物线②相切.

992. 试确定 m、n 的取值范围, 使椭圆 $\frac{x^2}{n}+\frac{y^2}{9}=1$ 与抛物线 $y=x^2-m$ 有四个交点, 并证明四个交点共圆.

[解] 显然, $n>0$. 将 $y=x^2-m$ 代入椭圆方程, 得

$$nx^4+(9-2mn)x^2+n(m^2-9)=0.$$

则椭圆与抛物线有四个交点的充要条件是同时满足:

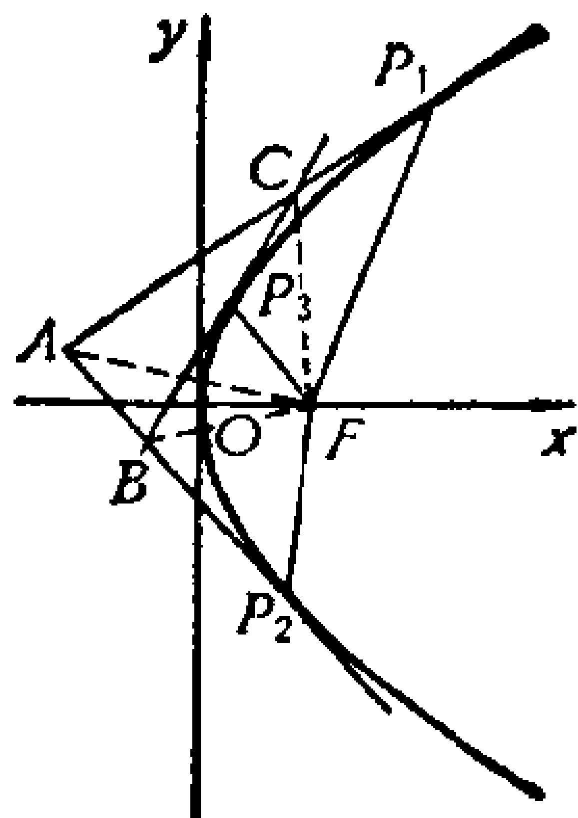
$$\Delta>0,\ 即\ m<\frac{4n^2+9}{4n}\cdots①;\ m^2-9>0\cdots②;\ 9-2mn<0\cdots③.$$

由③得 $m>\frac{9}{2n}>0$, 故又由②得 $m>3\cdots$④. 当 $\frac{9}{2n}\geqslant3$, 即 $n\leqslant\frac{3}{2}$ 时, 上述不等式组无解; 当 $\frac{9}{2n}<3$, 即 $n>\frac{3}{2}$ 时, 由①、④得 $3<m<\frac{4n^2+9}{4n}$. 故当 $3<m<\frac{4n^2+9}{4n}$ 且 $n>\frac{3}{2}$ 时, 椭圆和抛物线有四个交点.

若抛物线与椭圆有四个交点,则过四个交点的圆锥曲线为 $9x^2+ny^2-9n+\lambda(y-x^2+m)=0$,即 $(9-\lambda)x^2+ny^2+\lambda y+\lambda m-9n=0\cdots⑤$. 令 $9-\lambda=n$, 则 $\lambda=9-n$, 代入⑤, 得圆方程 $nx^2+ny^2-(n-9)y-9n-(n-9)m=0$. 此圆过四个交点,即四个交点共圆.

993. 抛物线的外切三角形的外接圆必过其焦点.

[分析] 欲证抛物线 $y^2=4ax$ 的外切三角形 ABC 的外接圆过焦点 F, 可从证 $\angle BAC$、$\angle BFC$ 互补入手. 利用已知切点 $(at_i^2, 2at_i)$ 的切线方程与 $t_i=\operatorname{tg}\alpha_i(i=1, 2, 3)$ 证明 $\operatorname{tg}\angle BAC+\operatorname{tg}\angle BFC=0$ 即可. 也可利用第 969 题, 直接证明 $\angle BAC+\angle BFC=180°$.



[证一] 设抛物线 $y^2=4ax$ 的外切三角形 ABC 三边 AC、AB、BC 的切点为 $P_i(at_i^2, 2at_i)$ $(i=1, 2, 3)$. 令 $t_i=\operatorname{tg}\alpha_i$, 三边的方程分别为 $x-t_iy+at_i^2=0$.

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\angle BAC=\frac{\dfrac{1}{t_1}-\dfrac{1}{t_2}}{1+\dfrac{1}{t_1t_2}}=\frac{t_2-t_1}{1+t_1t_2}=\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1).$$

点 B、C 的坐标为 $(at_2t_3,\ a(t_2+t_3))$、$(at_3t_1,\ a(t_3+t_1))$, BF 的斜率

$$k_{BF}=\frac{a(t_3+t_2)}{at_3t_2-a}=-\frac{t_3+t_2}{1-t_3t_2}=-\operatorname{tg}(\alpha_3+\alpha_2)=\operatorname{tg}(-\alpha_3-\alpha_2),$$

同理, $k_{CF}=\operatorname{tg}(-\alpha_1-\alpha_3)$.

$$\operatorname{tg}\angle BFC=\frac{k_{BF}-k_{CF}}{1+k_{BF}k_{CF}}=\frac{\operatorname{tg}(-\alpha_2-\alpha_3)-\operatorname{tg}(-\alpha_3-\alpha_1)}{1+\operatorname{tg}(-\alpha_2-\alpha_3)\operatorname{tg}(-\alpha_3-\alpha_1)}$$
$$=\operatorname{tg}(-\alpha_2-\alpha_3+\alpha_3+\alpha_1)=\operatorname{tg}(-\alpha_2+\alpha_1).$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\angle BAC+\operatorname{tg}\angle BFC=\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)+\operatorname{tg}(-\alpha_2+\alpha_1)=0,$$

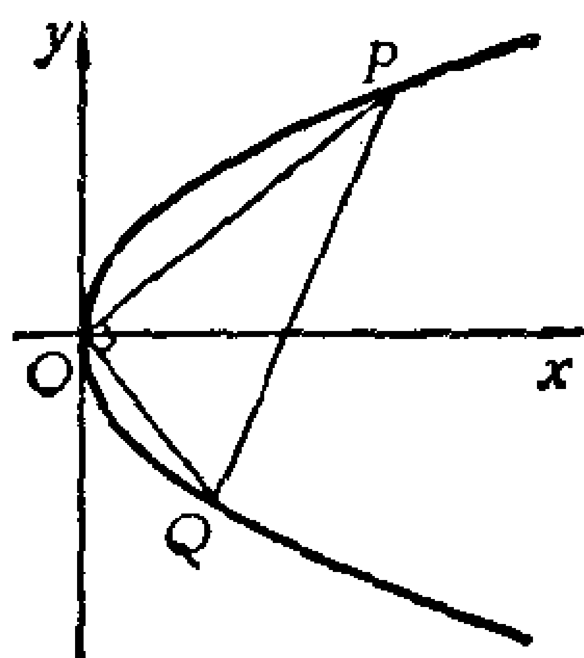
故 $\angle BAC$ 与 $\angle BFC$ 互补,即 A、B、F、C 四点共圆, 亦即 $\triangle ABC$ 的外接圆过抛物线的焦点 F. 若上述 t_i 中有一为零,其证明见第 969 题.

[证二] 根据第 969、970 题的结论可得: $\angle BAF=\angle AP_1F$, $\angle CAF=\angle AP_2F$, 且 $\angle AFP_1=\angle AFP_2$, $\angle CFP_1=\angle CFP_3=\alpha$, $\angle BFP_2=\angle BFP_3=\beta$. 令 $\angle AFP_3=\gamma$, $\angle AFB=\delta$, 则 $\gamma+\delta=\beta\cdots①$, $2\alpha+\gamma=\beta+\delta\cdots②$. 以①代入②, 得 $2\alpha=2\delta$, $\because \angle BAF+\delta+\beta+\angle AP_2F=180°$,

$\therefore \angle BAF+\angle CAF+\angle BFP_3+\angle CFP_3=180°$，即 $\angle BAC+\angle BFC=180°$. $\therefore$ A、B、F、C 四点共圆.

994. 求证抛物线在顶点张直角的弦必过一定点.

［分析一］ 设抛物线在顶点张直角的弦为 PQ，则直线 PQ 的方程决定于直线 OP 的斜率，把直线 OP 的斜率设定，则直线 PQ 方程可求出，再证明 PQ 过定点.



［证一］ 设抛物线方程为 $y^2=2px$，抛物线在顶点张直角的弦为 PQ. 若直线 OP 的斜率为 k，则直线 OP 的方程为 $y=kx$. 解方程组 $\begin{cases}y=kx\\ y^2=2px,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=\dfrac{2p}{k^2}\\ y=\dfrac{2p}{k},\end{cases}$ 故点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{2p}{k^2},\ \dfrac{2p}{k}\right)$. $\because OQ\perp OP$，$\therefore$ 直线 OQ 的方程为 $y=-\dfrac{1}{k}x$. 解方程组 $\begin{cases}y=-\dfrac{1}{k}x\\ y^2=2px,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=2pk^2\\ y=-2pk,\end{cases}$ 故点 Q 的坐标为 $(2pk^2,\ -2pk)$. 直线 PQ 的方程为 $y(1-k^2)-kx+2pk=0$，即 $y(1-k^2)-k(x-2p)=0\cdots$①. 当 $x=2p$，$y=0$ 时，①式对于任意 k 都成立. $\therefore$ 直线过定点 $(2p,\ 0)$.

［分析二］ 弦 PQ 的方程可由 P、Q 两点的坐标确定. 若点 P、Q 坐标用参数 t_1、t_2 表示，求出直线 PQ 的方程. 再根据弦 PQ 在抛物线顶点张直角的条件可得只含一个参数的 PQ 方程，进而证 PQ 过一定点.

［证二］ 设弦 PQ 的端点为 $P(2pt_1^2,\ 2pt_1)$、$Q(2pt_2^2,\ 2pt_2)$，则弦 PQ 所在的直线方程为 $x-(t_1+t_2)y+2pt_1t_2=0$. $\because OP\perp OQ$，$\therefore \dfrac{1}{t_1}\cdot\dfrac{1}{t_2}=-1$，即 $t_1\cdot t_2=-1$. $\therefore$ 直线 PQ 方程简化为 $x-(t_1+t_2)y-2p=0$. 若令 $-(t_1+t_2)=\lambda$，则直线 PQ 方程可化为 $(x-2p)+\lambda y=0$. 它是过两直线 $x-2p=0$，$y=0$ 的交点 $(2p,\ 0)$ 的直线系方程. 故直线 PQ 过定点 $(2p,\ 0)$.

995. 若过两抛物线 $y=x^2-2x+2$ 和 $y=-x^2+ax+b$ 的一个交点 P 的切线互相垂直，求证抛物线 $y=-x^2+ax+b$ 过定点 Q，并求点 Q 坐标.

［分析］ 欲证抛物线 $y=-x^2+ax+b$ 过定点 Q，须找出 a、b 之间的关系．由两抛物线在交点处的切线互相垂直求出 a、b 间的关系，然后证之．

［证］ 设抛物线 $y=x^2-2x+2\cdots$① 和抛物线 $y=-x^2+ax+b\cdots$② 的交点 P 的坐标为 (x_1, y_1)，过点 P 的抛物线 ① 的切线方程是 $\frac{y_1+y}{2}=x_1x-(x+x_1)+2$，即 $y+x(2-2x_1)+y_1+2x_1-4=0$；过点 P 的抛物线 ② 的切线方程是 $\frac{y_1+y}{2}=-x_1x+\frac{a(x+x_1)}{2}+b$，即 $y+x(2x_1-a)+y_1-ax_1-2b=0$．因为这两条切线互相垂直，$\therefore (2x_1-2)(a-2x_1)=-1$，即 $4x_1^2-x_1(4+2a)+2a-1=0\cdots$③． $\because$ 点 P 是两抛物线交点，故 $y_1=x_1^2-2x_1+2$ 和 $y_1=-x_1^2+ax_1+b$．从两式中消去 y_1，得 $2x_1^2-(2+a)x_1+2-b=0\cdots$④． 由 ③、④ 消去 x_1，得 $2a+2b-5=0$，即 $b=\frac{5-2a}{2}$．故抛物线 ② 的方程为 $y=-x^2+ax+\frac{5-2a}{2}$，即 $-x^2-y+\frac{5}{2}+a(x-1)=0$．所以抛物线 ② 总过曲线 $-x^2-y+\frac{5}{2}=0$ 和 $x-1=0$ 的交点 $\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$，即不论 a 取何值，抛物线总过定点 $Q\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$．

996．一直线与抛物线 $y=x^2$ 相交于 A、B 两点，它们的横坐标分别为 x_1、x_2，此直线在 x 轴上的截距为 R，求证：

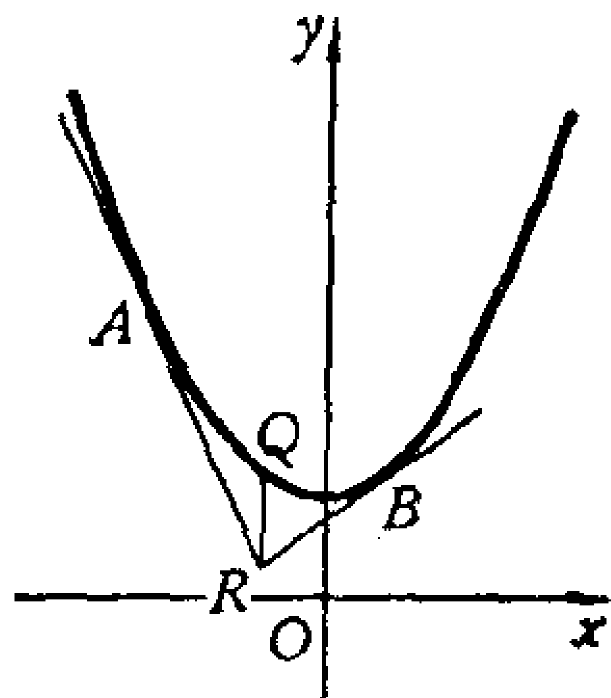
$$\frac{1}{R}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}.$$

［证］ 设动直线方程为 $y=k(x-R)$，因动直线与抛物线有两交点，且与 x 轴相交，故 $k\neq 0$．由 $\begin{cases} y=kx-kR \\ y=x^2 \end{cases}$ 消去 y，得 $x^2-kx+kR=0$．点 A、B 的横坐标 x_1、x_2 是这方程的两个解． $\therefore x_1+x_2=k$，$x_1\cdot x_2=kR$．

$$\therefore\quad \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{k}{kR}=\frac{1}{R}.$$

997．抛物线 $y=px^2+q\,(p>0,\ q>0)$ 把坐标平面分成两个区域．求证：从包括原点的区域中的任一点 $R(a,\ b)$，可引抛物线的两条切线．

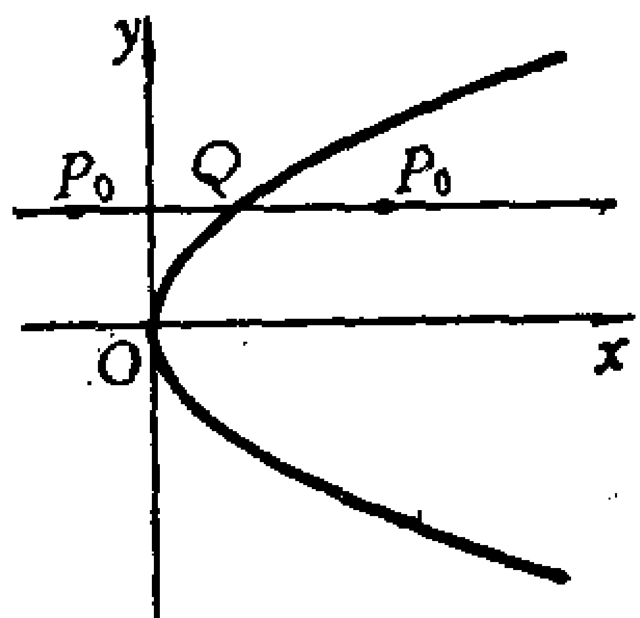
[分析] 设过点 R 的切线方程为 $y-b=k(x-a)$. 若能证明 k 有两不等的实数解,即说明从点 R 可引两条切线.



[证] 设过点 $R(a, b)$ 的抛物线的切线方程为 $y-b=k(x-a)$. 解方程组 $\begin{cases} y-b=k(x-a) \\ y=px^2+q, \end{cases}$ 得 x 的二次方程 $px^2-kx+q-b+ak=0\cdots①$. 直线和抛物线相切, ∴ 方程①的判别式 $\Delta=k^2-4p\cdot(q-b+ak)=0$, 即 $k^2-4pak-4pq+4bp=0\cdots②$. 方程②的判别式 $\Delta'=16p^2a^2-16pb+16pq=16p(a^2p+q-b)$.

设过点 R 与 y 轴平行的直线与抛物线交于点 $Q(a, y_0)$, 则 $y_0>b$. ∵ $pa^2+q-y_0=0$, ∴ $pa^2+q-b>pa^2+q-y_0=0$ (∵ $p>0$, $q>0$, $-b>-y_0$). 故当点 $R(a, b)$ 在抛物线分平面成两部分中包括原点的那一部分时, $\Delta'=16p(a^2p+q-b)>0$ 成立, 方程②中 k 有两不等的实数解. 因此过点 R 可作两条直线和抛物线相切.

998. 已知点 $P_0(x_0, y_0)$ 与抛物线 $y^2=4ax(a>0)$, 求证: (1) 当点 P_0 在抛物线内部时, $y_0^2-4ax_0<0$; (2) 当点 P_0 在抛物线外部时, $y_0^2-4ax_0>0$.



[证] (1) 当点 $P_0(x_0, y_0)$ 在抛物线内部时, 作直线 $y=y_0$ 交抛物线于点 Q, 坐标为 $\left(\frac{y_0^2}{4a}, y_0\right)$. ∵ 点 P_0 在抛物线内部, ∴ $x_0>x_Q$, 即 $x_0>\frac{y_0^2}{4a}$. ∵ $a>0$, ∴ $y_0^2-4ax_0<0$. (2) 当点 $P_0(x_0, y_0)$ 在抛物线外部时, 作直线 $y=y_0$ 交抛物线于点 Q, $x_0<x_Q$, 而 $x_Q=\frac{y_0^2}{4a}$, ∴ $x_0<\frac{y_0^2}{4a}$, 即 $y_0^2-4ax_0>0$.

999. 试证: 抛物线无渐近线.

[证] 设抛物线方程为 $y^2=2px$, 其渐近线的参数方程为

$$\begin{cases} x=x_0+t\cos\theta \\ y=y_0+t\sin\theta \end{cases}$$

(θ 为倾角, t 为参数). 代入抛物线方程, 得 $(y_0+t\sin\theta)^2=2p(x_0+t\cos\theta)$,

即 $t^2\sin^2\theta+2(y_0\sin\theta-p\cos\theta)t+y_0^2-2px_0=0$. 若此直线为抛物线的渐近线，则 $\begin{cases}\sin^2\theta=0\cdots①\\ y_0\sin\theta-p\cos\theta=0\cdots②.\end{cases}$ 从①得 $\theta=n\pi\,(n\in J)$，代入②，得 $p=0$, 这与抛物线的条件 $p\neq0$ 矛盾，故抛物线无渐近线.

1000．试证：抛物线上任意四点组成的四边形不可能是平行四边形.

［证］ 设抛物线方程为 $y^2=2px$, 抛物线上四点 A、B、C、D 的坐标为 $(2pt_i^2,\ 2pt_i)(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$. 假设 $ABCD$ 为平行四边形，则 $k_{AB}=k_{CD}$, $k_{BC}=k_{AD}$, 即 $\frac{1}{t_1+t_2}=\frac{1}{t_3+t_4}$ 和 $\frac{1}{t_2+t_3}=\frac{1}{t_1+t_4}$. 由此解得 $t_1=t_3$, $t_2=t_4$, 则点 A、C 重合，点 B、D 重合，与已知条件任意四点能组成四边形矛盾，故 $ABCD$ 不可能是平行四边形.

1001．试证：抛物线的三切线围成的三角形的垂心必在准线上.

［分析］ 抛物线 $y=2px$ 的切线方程为 $x-2t_iy+2pt_i^2=0(i=1,\ 2,\ 3)$, 据此可求出三角形高的方程，再求出和准线的交点坐标，即可得证.

［证］ 设抛物线方程为 $y^2=2px$, 其三条切线的切点为 $A(2pt_1^2,\ 2pt_1)$、$B(2pt_2^2,\ 2pt_2)$、$C(2pt_3^2,\ 2pt_3)$, 则在点 B、C 处切线的交点 P 的坐标为 $(2pt_2t_3,\ p(t_2+t_3))$. 从点 P 向过点 A 的切线 $2t_1y=x+2pt_1^2$ 引垂线，其方程为 $2t_1x+y=p(t_2+t_3)+4pt_1t_2t_3$; 它和准线 $x=-\frac{p}{2}$ 的交点纵坐标为 $y=p(t_1+t_2+t_3)+4pt_1t_2t_3$. 因为这个坐标关于 t_1、t_2、t_3 是对称的，所以过 A、B、C 三点的切线所组成的三角形，它们各边上的高与准线交点均为 $\left(-\frac{p}{2},\ p(t_1+t_2+t_3)+4pt_1t_2t_3\right)$. 此点即为垂心，亦即此三角形的垂心必在准线上.

1002．设圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 和抛物线 $y^2=2px$ 交于四点．求证这四个交点的纵坐标的代数和等于零.

［分析］ 列出四个交点的纵坐标所满足的方程，然后用韦达定理证明.

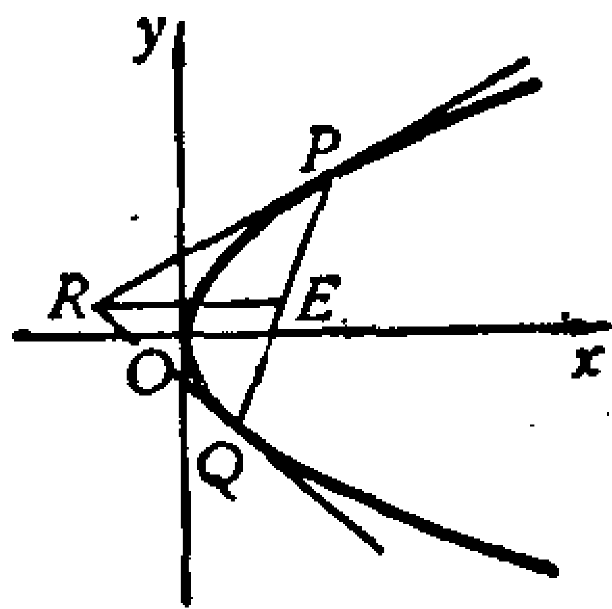
［证］ 由$\begin{cases}x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\\y^2=2px\end{cases}$消去$x$，得 $y^4+2p(2p+D)y^2+4p^2Ey+4p^2F=0$，其根即四个交点的纵坐标$y_1$、$y_2$、$y_3$、$y_4$. 由韦达定理得$y_1+y_2+y_3+y_4=0$，故圆和抛物线四个交点的纵坐标的代数和等于零.

1003. **若抛物线 $y^2=2px$ 的三条切线与轴的夹角分别为60°、45°、30°. 求证三切点的纵、横坐标分别成等比数列.**

［证一］ 按题意抛物线的三切线斜率分别为$\sqrt{3}$、1、$\frac{1}{\sqrt{3}}$. 三切线的方程分别为 $y=\sqrt{3}x+\frac{p}{2\sqrt{3}}$，$y=x+\frac{p}{2}$，$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{\sqrt{3}}{2}p$. 三切点的坐标分别为$\left(\frac{p}{6},\ \frac{p}{\sqrt{3}}\right)$、$\left(\frac{p}{2},\ p\right)$、$\left(\frac{3p}{2},\ \sqrt{3}p\right)$. $\because\ \frac{p}{6}\cdot\frac{3p}{2}=\frac{p^2}{4}=\left(\frac{p}{2}\right)^2$，$\frac{p}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}p=p^2$. 故三切点的纵、横坐标分别成等比数列.

［证二］ 设三切点的坐标分别为$(x_1,\ y_1)$、$(x_2,\ y_2)$、$(x_3,\ y_3)$，则三切线的斜率分别为$\frac{p}{y_1}$、$\frac{p}{y_2}$、$\frac{p}{y_3}$. $\because$ 三切线与轴的夹角分别为60°、45°、30°，$\therefore\ \frac{p}{y_1}=\sqrt{3}$，$\frac{p}{y_2}=1$，$\frac{p}{y_3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，即$y_1=\frac{p}{\sqrt{3}}$，$y_2=p$，$y_3=\sqrt{3}p$. $\because\ y_1\cdot y_3=p^2=y_2^2$ 及 $x_1\cdot x_3=\frac{y_1^2}{2p}\cdot\frac{y_3^2}{2p}=\frac{p^4}{4p^2}=\frac{p^2}{4}=x_2^2$，故三切点的纵、横坐标分别成等比数列.

1004. **过抛物线 $y^2=2px$ 上两点 $P(x_1,\ y_1)$、$Q(x_2,\ y_2)$ 的两条切线交于点 R. 求证：**



(1) 点 R 的坐标为 $\left(\frac{y_1y_2}{2p},\ \frac{1}{2}(y_1+y_2)\right)$；

(2) 三点 P、R、Q 的横坐标成等比数列，纵坐标成等差数列；

(3) 若 PQ 的中点是 E，则线段 RE 被抛物线平分.

［证］ (1) 过点 P、Q 的切线方程分别是$y_1y=p(x+x_1)\cdots$①，$y_2y=p(x+x_2)\cdots$②. ①−②，得 $y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$；代入①，得

$$x=\frac{1}{p}\left[\frac{1}{2}y_1^2+\frac{1}{2}y_1y_2\right]-\frac{y_1^2}{2p}=\frac{y_1y_2}{2p}.$$

∴ 点 R 的坐标为$\left(\frac{y_1y_2}{2p},\ \frac{1}{2}(y_1+y_2)\right)$.

(2) ∵ $x_1\cdot x_2=\frac{y_1^2}{2p}\cdot\frac{y_2^2}{2p}=\left(\frac{y_1y_2}{2p}\right)^2=x_R^2$, ∴ 点 P、R、Q 的横坐标成等比数列. 又 ∵ $y_1+y_2=2\cdot\frac{y_1+y_2}{2}=2y_R$, ∴ P、R、Q 的纵坐标成等差数列.

(3) PQ 中点 E 的坐标为$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$, 若 RE 中点坐标为 (x_0, y_0), 则

$$2x_0=\frac{y_1y_2}{2p}+\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{y_1y_2}{2p}+\frac{\frac{1}{2p}\ (y_1^2+y_2^2)}{2}=\frac{(y_1+y_2)^2}{4p},$$

$$2y_0=\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}=y_1+y_2.$$

而
$$\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2=2p\cdot\frac{(y_1+y_2)^2}{8p},$$

即 $y_0^2=2px_0$. ∴ 点 (x_0, y_0) 在抛物线 $y^2=2px$ 上, 即线段 RE 被抛物线平分.

1005. 求证: 抛物线 $y^2=2px$ 的内接 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{4p}|(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)|$, 其中 y_1、y_2、y_3 是点 A、B、C 的纵坐标.

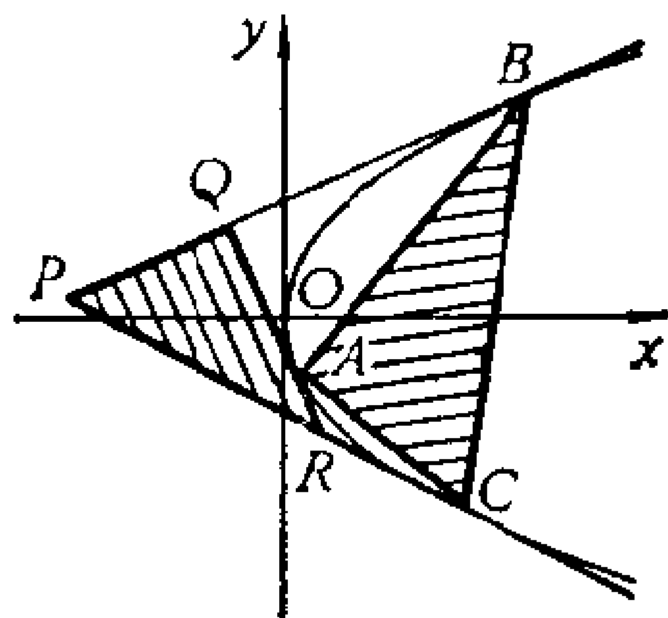
[证] 设 $\triangle ABC$ 三顶点坐标为 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$。∵ 点 A、B、C 在抛物线上, ∴ $x_1=\frac{y_1^2}{2p}$, $x_2=\frac{y_2^2}{2p}$, $x_3=\frac{y_3^2}{2p}$.

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\frac{y_1^2}{2p} & y_1 & 1\\ \frac{y_2^2}{2p} & y_2 & 1\\ \frac{y_3^2}{2p} & y_3 & 1\end{vmatrix}\text{的绝对值.}$$

提取第一列的公因子 $\frac{1}{2p}$，然后第二行减第一行，第三行减第一行，化简即得

$$S=\frac{1}{4p}|(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)|.$$

1006. 设过抛物线 $y^2=2px$ 上任意三点 A、B、C 的切线围成 $\triangle PQR$，求证：$\triangle ABC$ 的面积是 $\triangle PQR$ 面积的两倍.



[证] 设抛物线上任意三点 A、B、C 的坐标为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x_3,y_3)，根据上题的结论，$\triangle ABC$ 的面积 $S_1=\frac{1}{4p}|(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)|$. 因过点 A 的切线方程为 $y_1y=p(x_1+x)$，过点 B 的切线方程为 $y_2y=p(x_2+x)$，故两切线交点 Q 的坐标为 $\left(\frac{y_1y_2}{2p},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$. 同理可得点 R 和 P 的坐标分别为 $\left(\frac{y_1y_3}{2p},\frac{y_1+y_3}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{y_2y_3}{2p},\frac{y_2+y_3}{2}\right)$. $\therefore$ $\triangle PQR$ 的面积

$$S_2=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\frac{y_1y_2}{2p} & \frac{y_1+y_2}{2} & 1\\ \frac{y_1y_3}{2p} & \frac{y_1+y_3}{2} & 1\\ \frac{y_2y_3}{2p} & \frac{y_2+y_3}{2} & 1\end{vmatrix}\text{的绝对值}$$

$$=\frac{1}{8p}|(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)|.$$

$$\therefore\ S_1=2S_2.$$

1007. 设抛物线 $y=x^2-2a^2x-2a^2-1$，与 x 轴正半轴的交点为 A，与 y 轴的交点为 B，求证直线 AB 有定向.

[分析] 直线 AB 的斜率决定 AB 的方向，而 AB 的斜率由点 A、B 的坐标确定，故可从求点 A、B 的坐标入手.

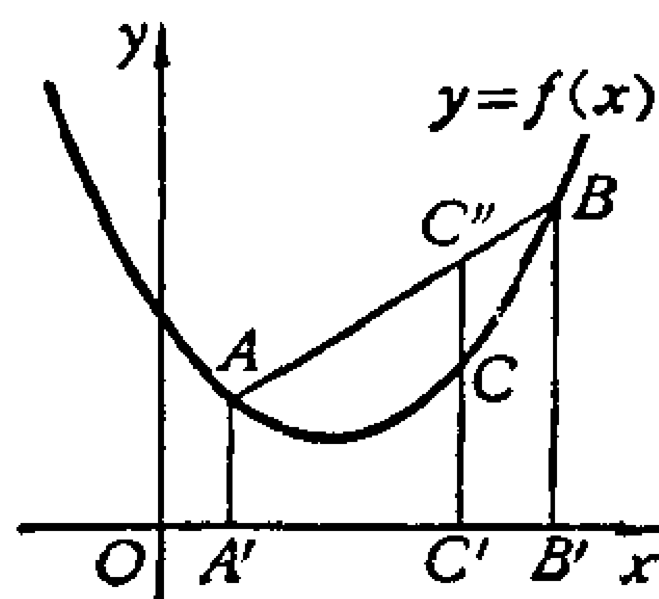
[证] 抛物线 $y=x^2-2a^2x-2a^2-1$ 与 x 轴交点的横坐标 x_1、x_2 是方程 $x^2-2a^2x-2a^2-1=0$，即 $(x+1)(x-2a^2-1)=0$ 的根. $\therefore$ $x_1=2a^2+1>0$，$x_2=-1$，即点 A 的坐标为 $(2a^2+1,\ 0)$. 抛物线与 y 轴交点 B 的坐标

为$(0, -2a^2-1)$. ∴ 直线 AB 的斜率为 $k_{AB}=\dfrac{0-(-2a^2-1)}{2a^2+1-0}=1$. 故直线 AB 有定向.

1008. 设抛物线 $y=f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$ 上有相异两点 $A(x_1, f(x_1))$、$B(x_2, f(x_2))$, m、n 为正数. 求证:

$$\frac{nf(x_1)+mf(x_2)}{m+n}>f\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n}\right).$$

[分析] 从抛物线的图象, 研究 $\dfrac{nf(x_1)+mf(x_2)}{m+n}$ 与 $f\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}\right)$的几何意义,利用抛物线图象下凸的特性,即可证明.



[证] 不失一般性,设 $x_1<x_2$. 点 A、B 在 x 轴上的射影为 A'、B', 其坐标分别为$(x_1, 0)$、$(x_2, 0)$. C' 为 $A'B'$ 的定比 $(m:n)$ 分点, 故点 C' 的坐标为$\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}, 0\right)$. ∵ m、n 是正数, ∴ C' 是 $A'B'$ 的内分点. 过点 C' 与 y 轴平行的直线交抛物线于点 C, 交直线 AB 于点 C'', 则 $C'C=f\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}\right)$, $C'C''=\dfrac{nA'A+mB'B}{m+n}=\dfrac{nf(x_1)+mf(x_2)}{m+n}$.
∵ $a>0$, 抛物线 $y=f(x)$的开口向上(即下凸), ∴ $C'C''>C'C$, 即

$$\frac{nf(x_1)+mf(x_2)}{m+n}>f\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n}\right).$$

[说明] 本题条件若改为 $a<0$, 则 $\dfrac{nf(x_1)+mf(x_2)}{m+n}<f\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}\right)$.

1009. 求证: 从抛物线 $y^2=2px$ 上任一点 $P(x_0, y_0)$ 必可作它的内接正三角形.

[分析] 考虑到形成正三角形的条件, 只要证明在抛物线上存在两点 Q 和 R, 使 $|PQ|=|PR|$, 并且 $\angle QPR=\dfrac{\pi}{3}$. 为了易于判明点 Q 和 R 的存在, 可利用坐标变换, 将点 P 作为新原点, 使 QR 与新的 y 轴平行. 利用 Q、R 在抛物线上的条件, 列出含正三角形的高 a 和 x 轴旋转的角 θ 的方程组,证明 a、θ 必存在实数解即可.

[证一] $\because$ 点 $P(x_0, y_0)$ 在抛物线 $y^2=2px$ 上，$\therefore x_0=\frac{y_0^2}{2p}$. 作平移变换 $\begin{cases} x=x'+x_0=x'+\frac{y_0^2}{2p} \\ y=y'+y_0, \end{cases}$ 则在坐标系 $x'Py'$ 中，抛物线方程为 $(y'+y_0)^2=2p\left(x'+\frac{y_0^2}{2p}\right)$，即 $y'^2-2px'+2y_0y'=0$. 作转轴变换

$$\begin{cases} x'=x''\cos\theta-y''\sin\theta \\ y'=x''\sin\theta+y''\cos\theta, \end{cases}$$

则在坐标系 $x''Py''$ 中，抛物线方程为

$$(x''\sin\theta+y''\cos\theta)^2-2p(x''\cos\theta-y''\sin\theta)$$
$$+2y_0(x''\sin\theta+y''\cos\theta)=0,$$

即

$$(x''\sin\theta+y''\cos\theta)^2-2(p\cos\theta-y_0\sin\theta)x''$$
$$+2(p\sin\theta+y_0\cos\theta)y''=0\cdots①.$$

若从点 P 可作抛物线 ① 的内接正三角形，则可选取 θ 使其三边方程为 $y''=\frac{1}{\sqrt{3}}x''$, $y''=-\frac{1}{\sqrt{3}}x''$, $x''=a$. 即内接正三角形三个顶点为 $P(0, 0)$、$Q\left(a, \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$、$R\left(a, -\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$. 反之，若有 θ 使两点 $Q\left(a, \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$ 与 $R\left(a, -\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$ 的坐标满足方程 ①，则 $\triangle PQR$ 为抛物线 ① 的内接正三角形. 把 $Q\left(a, \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$ 与 $R\left(a, -\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$ 的坐标分别代入方程 ①，得

$$\begin{cases} \left(a\sin\theta+\frac{a}{\sqrt{3}}\cos\theta\right)^2-2a(p\cos\theta-y_0\sin\theta) \\ \quad +\frac{2a}{\sqrt{3}}(p\sin\theta+y_0\cos\theta)=0, \\ \left(a\sin\theta-\frac{a}{\sqrt{3}}\cos\theta\right)^2-2a(p\cos\theta-y_0\sin\theta) \\ \quad -\frac{2a}{\sqrt{3}}(p\sin\theta+y_0\cos\theta)=0. \end{cases}$$

两式相加，得

$$2a^2\sin^2\theta+\frac{2a^2}{3}\cos^2\theta-4a(p\cos\theta-y_0\sin\theta)=0,$$

两式相减，得

$$\frac{4a^2}{\sqrt{3}}\sin\theta\cos\theta+\frac{4a}{\sqrt{3}}(p\sin\theta+y_0\cos\theta)=0.$$

即
$$\begin{cases}\frac{a}{3}\left(\frac{1}{2}+\sin^2\theta\right)=p\cos\theta-y_0\sin\theta\cdots②,\\ a\sin\theta\cos\theta+(p\sin\theta+y_0\cos\theta)=0\cdots③.\end{cases}$$

由②得 $a=\dfrac{3(p\cos\theta-y_0\sin\theta)}{\frac{1}{2}+\sin^2\theta}$；代入③，得

$$\frac{3(p\cos\theta-y_0\sin\theta)}{\frac{1}{2}+\sin^2\theta}\cdot\sin\theta\cos\theta+(p\sin\theta+y_0\cos\theta)=0,$$

化简得 $4p\sin^3\theta-7p\sin\theta+3y_0\cos\theta-4y_0\cos^3\theta=0$. 以 $\dfrac{1}{\cos^3\theta}$ 乘方程两端($\cos\theta\neq0$)，得 $3p\operatorname{tg}^3\theta-3y_0\operatorname{tg}^2\theta+7p\operatorname{tg}\theta+y_0=0$. 此为 $\operatorname{tg}\theta$ 的实系数三次方程，至少有一个实数解. 于是存在满足要求的 θ 与 a，故可作内接正三角形.

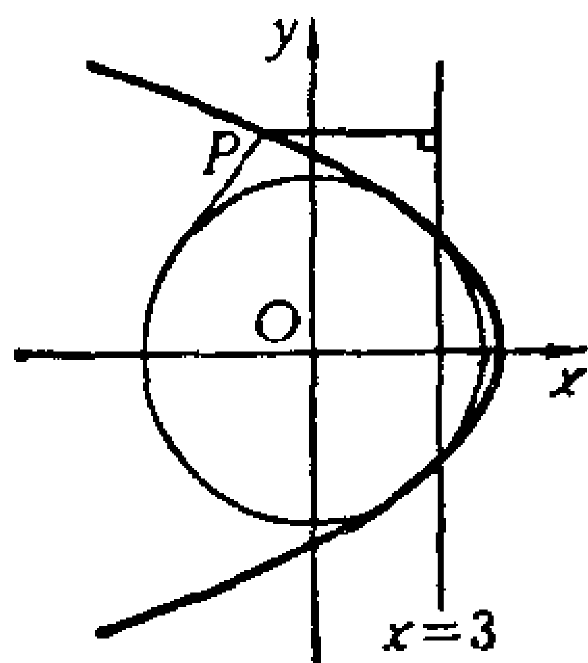
［证二］ 过抛物线 $y^2=2px$ 上任一点 $P(x_0, y_0)$ 的内接 $\triangle PQR$(P、Q、R 按逆时针序)为正三角形的充要条件是 $|PQ|=|PR|(=\rho)$，$\angle QPR=\dfrac{\pi}{3}$. 令 $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{PQ})=\theta$，则点 Q、R 的坐标为 $(x_0+\rho\cos\theta,\ y_0+\rho\sin\theta)$、$\left(x_0+\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right),\ y_0+\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right)$. $\because$ P、Q、R 在抛物线上，$\therefore$ $y_0^2=2px_0\cdots①$，$(y_0+\rho\sin\theta)^2=2p(x_0+\rho\cos\theta)\cdots②$，$\left[y_0+\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right]^2=2p\left[x_0+\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right]\cdots③$. 从①、②、③消去 ρ，得 $(p\cos\theta-y_0\sin\theta)\cdot(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^2=2\sin^2\theta[(p-\sqrt{3}y_0)\cos\theta-(y_0+\sqrt{3}p)\sin\theta]$. 此为 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 的三次齐次方程，至少有一实数解 θ_1，且 $\sin\theta_1\neq0$. 代入②，得 $\rho=2(p\cos\theta_1-y_0\sin\theta_1)/\sin^2\theta_1$. 由于 θ、ρ 的实数解存在，可知以 $P(x_0, y_0)$ 为一顶点必可作抛物线的内接正三角形.

八

乙

§9. 轨 迹 题

1010. 一动点到直线 $x=3$ 的距离等于它到圆 $x^2+y^2=16$ 的切线长，求动点的轨迹.



［解］ 设$P(x, y)$为轨迹上任意一点，则

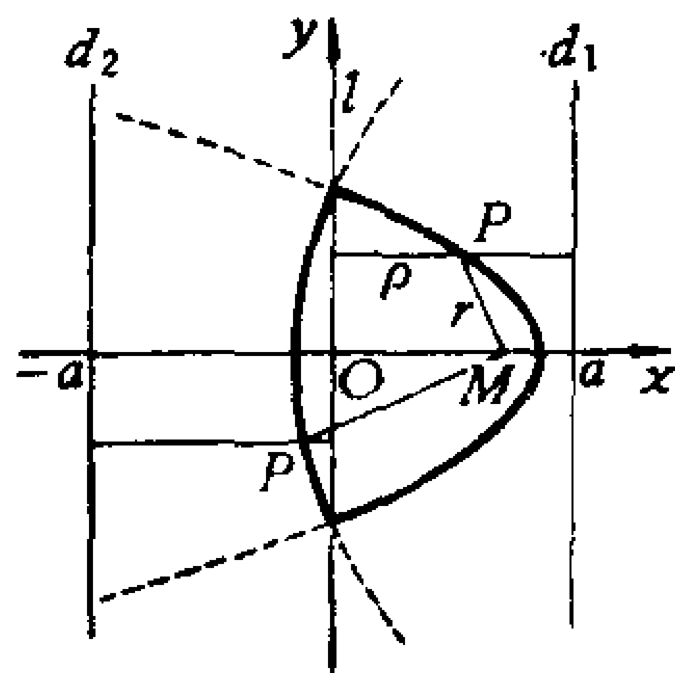
$$|x-3|=\sqrt{x^2+y^2-16},$$

即

$$y^2=-6\left(x-\frac{25}{6}\right).$$

∴ 点P的轨迹是顶点为$\left(\frac{25}{6}, 0\right)$，对称轴为$x$轴，开口向左的抛物线.

1011. 在平面上给定一点M和一条直线l，试求到定点M的距离r和到定直线l的距离ρ之和等于已知数a的点P的轨迹($r>0$, $\rho>0$).



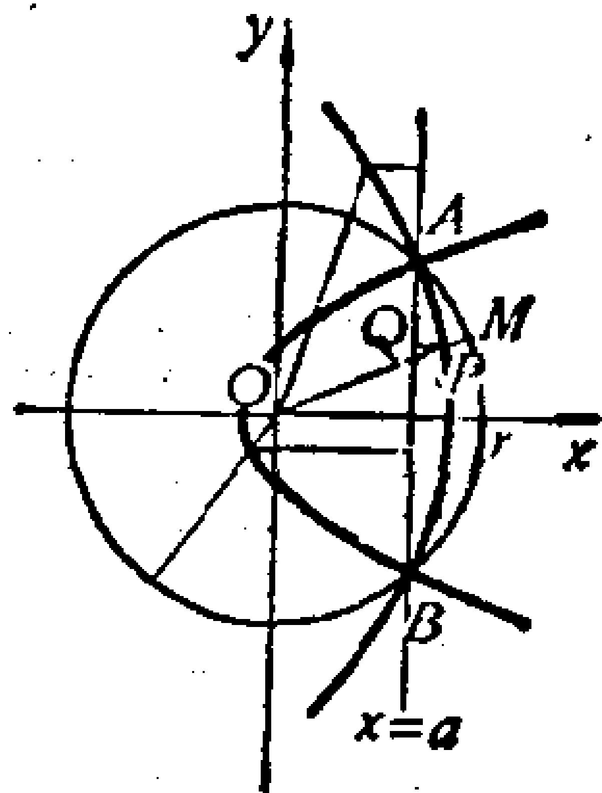
［分析］ 为了使条件$r+\rho=a$成立，必须要求定点M到定直线l的距离$p\leqslant a$. 当$p<a$时，可得$r=a-\rho$，因而点P到定点M的距离r等于它到与直线l相距为a且和l平行的两直线d_1、d_2的距离，根据抛物线定义即可得解. 当$p=a$时，是轨迹的特例.

［解］ 取定点M在定直线l上的射影O为原点，OM为x轴的正半轴，建立直角坐标系. 设点M的坐标为$(p, 0)$，$P(x, y)$为轨迹上任意一点，和l平行的两直线d_1: $x=a$, d_2: $x=-a$.

当$p<a$时，$\because r+\rho=a$, $\therefore r=a-\rho$. 当P在l与d_1之间的带形区域内时，点P到点M的距离等于点P到直线d_1的距离. 故点P的轨迹为以M为焦点，d_1为准线的一段抛物线弧，其方程为$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=a-x$，即$y^2=-2(a-p)\left(x-\frac{a+p}{2}\right)$, $x\in[0, a)$. 当P在l与d_2之间的带形区域内时，点P到点M的距离等于P到直线d_2的距离. 故点P的轨迹为以M为焦点，d_2为准线的一段抛物线弧，其方程为$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=a+x$，即$y^2=2(a+p)\left(x+\frac{a-p}{2}\right)$, $x\in(-a, 0]$. 当$p=a$时，点P的轨迹为线段OM，其方程为$y=0$, $x\in[0, a]$.

［说明］ 如果不作d_1、d_2两直线，直接根据所给条件$r+\rho=a$列出方程$\sqrt{(x-p)^2+y^2}+|x|=a$，也可得出同样的结论.

1012. 一动点到已知圆的最短距离，等于到这个圆的某一固定弦所在直线的距离，求此动点的轨迹.



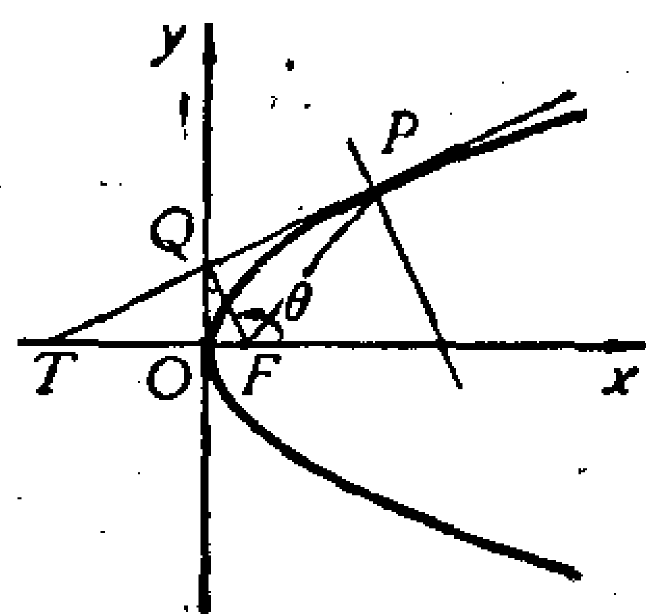
[解] 取已知圆心 O 为原点，以 O 至固定弦的垂线为 x 轴，建立直角坐标系如图. 设圆 O 半径为 r，固定弦 AB 所在直线方程为 $x=a\ (a<r)$. 设 $P(x,\ y)$为圆内轨迹上任意一点. 连 OP 延长相交圆 O 于 M，自点 P 作 $PQ\perp AB$，垂足为 Q，则 $|PM|$ 为点 P 到圆 O 的最短距离. ∵ $|PM|=|PQ|$，∴ $\sqrt{x^2+y^2}=r-|x-a|$. 两边平方，得 $x^2+y^2=(x-a)^2-2r|x-a|+r^2$，即 $y^2=-2ax-2r|x-a|+a^2+r^2$. 当 $x\geqslant a$ 时，可得 $y^2=-(r+a)[2x-(r+a)]$. 此即表明轨迹在 $x=a$ 的右边圆内，是顶点为$\left(\frac{r+a}{2},0\right)$、开口向左的抛物线在圆内的部分；当 $x<a$ 时，则方程为 $y^2=(r-a)[2x+(r-a)]$. 这表明轨迹在 $x=a$ 的左边圆内是顶点为$\left(-\frac{r-a}{2},0\right)$、开口向右的抛物线在圆内的部分.

类似地，当 $P(x,y)$ 在圆外时，可列出 $\sqrt{x^2+y^2}=r+|x-a|$，即 $y^2=-2ax+2r|x-a|+a^2+r^2$. 当 $x\geqslant a$ 时，方程为 $y^2=(r-a)[2x+(r-a)]$. 这表明轨迹在 $x=a$ 的右边圆外，是顶点为$\left(-\frac{r-a}{2},0\right)$、开口向右的抛物线在圆外部分；当 $x<a$ 时，方程为 $y^2=-(r+a)[2x-(r+a)]$. 这表明轨迹在 $x=a$ 的左边圆外，是顶点为$\left(\frac{r+a}{2},0\right)$、开口向左的抛物线在圆外的部分. 综上所述，适合本题条件的点的轨迹是由两抛物线：$y^2=(r-a)\cdot[2x+(r-a)]$与 $y^2=-(r+a)[2x-(r+a)]$所组成的. 固定弦的两端点 A、B 即两抛物线的交点.

1013. 过定点 $F(a,\ 0)$的任意直线$(a>0)$，交 y 轴于点 Q，过 Q 作 $QT\perp FQ$，交 x 轴于 T，延长 TQ 至 P，使 $|TQ|=|QP|$. 试求点 P 的轨迹.

[分析] 因点 P 是随 FQ 的方向而变动，故可取 $\angle xFQ=\theta$ 为参数. 根据点 Q 是 TP 的中点，$QT\perp FQ$，即可得解.

［解］ 设 $\angle xFQ=\theta$，显然 $\theta\neq\frac{\pi}{2}$，则点 Q 的坐标为 $(0,\ -a\operatorname{tg}\theta)$.



$\because QT\perp FQ$，$\therefore$ 直线 TQ 的方程为 $x+y\operatorname{tg}\theta=-a\operatorname{tg}^2\theta$，故点 T 的坐标为 $(-a\operatorname{tg}^2\theta,\ 0)$. 设点 P 的坐标为 $(x,\ y)$，$\because Q$ 是 TP 的中点，$\therefore TP:PQ=-2$. 由此得

$$x=\frac{-a\operatorname{tg}^2\theta}{1-2}=a\operatorname{tg}^2\theta,\ y=\frac{0+2a\operatorname{tg}\theta}{1-2}=-2a\operatorname{tg}\theta.$$

$\therefore$ 点 P 轨迹的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\operatorname{tg}^2\theta\\ y=-2a\operatorname{tg}\theta.\end{cases}$$

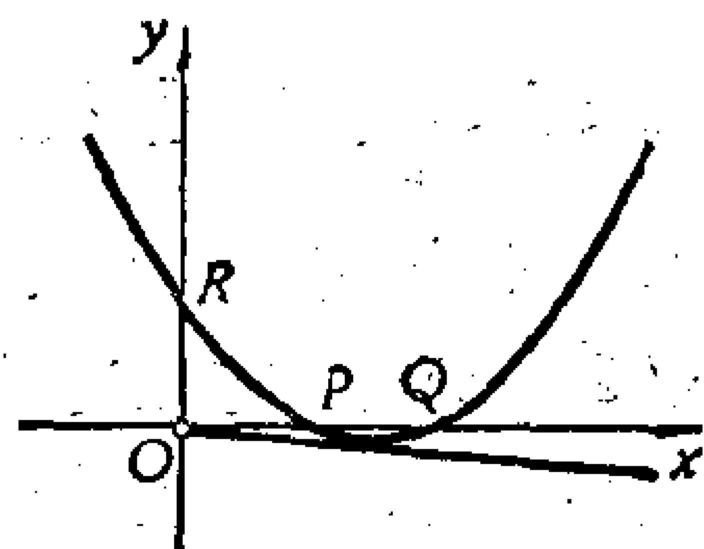
令 $t=-\operatorname{tg}\theta$，即得 $\begin{cases}x=at^2\\ y=2at,\end{cases}$ 消去 t，得 $y^2=4ax$. 故轨迹为抛物线.

［说明］ 本题实质上给出了抛物线的另一定义. 从此得到抛物线的参数方程，参数 t 的几何意义是过抛物线 $y^2=4ax$ 上任意一点 $(at^2,\ 2at)$ 的法线的斜率的相反数. 根据 TP 即抛物线过点 P 的切线，FQ 与过点 P 的法线平行即可得证. 据此可推出抛物线的一系列性质.

1014. 当 θ 在 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 上变动时，求抛物线 $y=x^2-4x\sin\theta-\cos2\theta$ 顶点 P 的轨迹.

［解］ 将原式配方得 $y=(x-2\sin\theta)^2-(1+2\sin^2\theta)$. 设点 P 的坐标为 $(x,\ y)$，则 $\begin{cases}x=2\sin\theta\geqslant0\\ y=-1-2\sin^2\theta.\end{cases}$ 消去参数 θ，得 $x^2=-2(y+1)$. 故顶点 P 的轨迹是抛物线 $x^2=-2(y+1)$ 在 $0\leqslant x\leqslant2$ 的一部分.

1015. 抛物线 $y=ax^2+bx+c\,(a>0)$ 与 x 轴正方向交于两点 P、Q，与 y 轴正方向交于点 R，且 $OP=PQ=OR$，求抛物线顶点的轨迹.

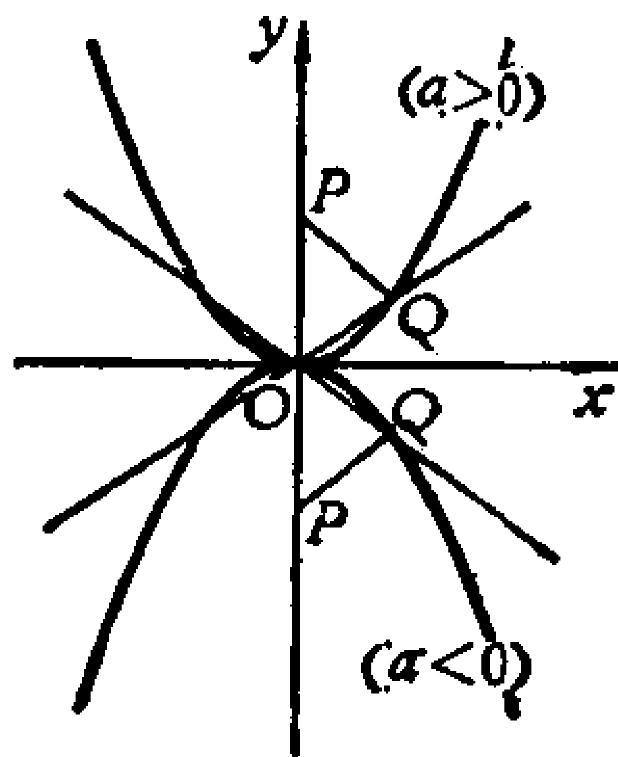


［解］ 取 $OP=t\,(t>0)$ 为参数，则 $OQ=2t$，$OR=t$. $\therefore y=a(x-t)(x-2t)=ax^2-3atx+2at^2$. 当 $x=0$ 时，$y=t$，$\therefore 2at^2=t$，$a=\frac{1}{2t}$.

$\therefore\ y=\frac{1}{2t}\left(x^2-3tx+\frac{9t^2}{4}\right)-\frac{t}{8}=\frac{1}{2t}\left(x-\frac{3t}{2}\right)^2-\frac{t}{8}$. 设$(x, y)$为轨迹上任一点，$\therefore \begin{cases} x=\frac{3t}{2} \\ y=-\frac{t}{8}. \end{cases}$ 消去t，得$x+12y=0$. 故所求轨迹是射线

$$x+12y=0 \quad (x>0).$$

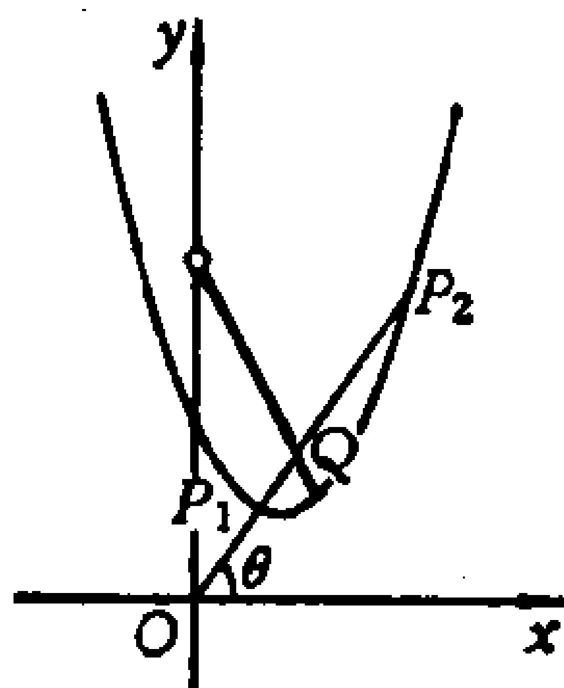
1016. y轴上一点$P(0, a)$到曲线$x^2=ay$上的点Q的距离$|PQ|$最短，当a取不同数值时，求点Q的轨迹方程.



［分析］ 因$|PQ|^2=x^2+(y-a)^2$取最小值，利用点Q满足的限制条件$x^2=ay$消去x，求得$|PQ|$取最小时y与a的关系，从而求得点Q的轨迹方程.

［解］ 设$Q(x,y)$为轨迹上任意一点. $\because |PQ|^2=x^2+(y-a)^2=x^2+y^2-2ay+a^2\cdots$①，又$\because$点$Q$在曲线$x^2=ay$上，代入①，得$|PQ|^2=ay+y^2-2ay+a^2=\left(y-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3a^2}{4}$. $\because |PQ|$最短，$\therefore y=\frac{a}{2}\cdots$②. 从②与$x^2=ay$消去参数$a$，即得点$Q$的轨迹方程$x=\pm\sqrt{2}y$.

1017. 抛物线$y=x^2-2x+2$交直线$y=mx(m>0)$于P_1、P_2两点，点Q在P_1P_2上，且满足$\frac{1}{|OP_1|}+\frac{1}{|OP_2|}=\frac{2}{|OQ|}$. 求点$Q$的轨迹方程.

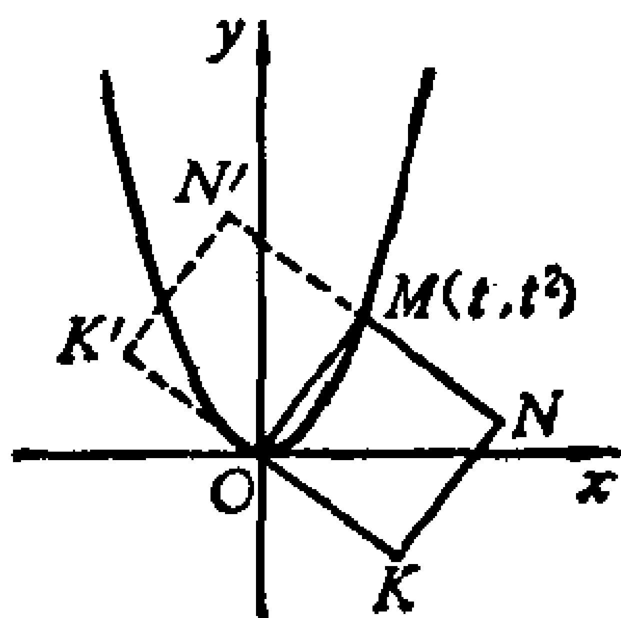


［解］ 设直线$y=mx$的倾角为θ，则它的参数方程为$\begin{cases} x=t\cos\theta \\ y=t\sin\theta \end{cases}\cdots$①，其中$t$为参数. $\because m>0$，$\therefore 0<\theta<\frac{\pi}{2}$. 以①代入抛物线方程，得$t^2\cos^2\theta-(2\cos\theta+\sin\theta)t+2=0$. 当$\Delta=(2\cos\theta+\sin\theta)^2-8\cos^2\theta\geqslant 0$，即$\operatorname{tg}\theta\geqslant 2(\sqrt{2}-1)$时，方程有两实根$t_1$、$t_2$，$\because \theta$为锐角，故$t_1+t_2>0$，$t_1\cdot t_2>0$，$\therefore t_1>0$，$t_2>0$. 故设$|OP_1|=t_1$，$|OP_2|=t_2$；点$Q$的坐标为$x_0=t_0\cos\theta$，

$y_0=t_0\sin\theta$. $\because\ \frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{2}{t_0}$, 而 $\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{t_1+t_2}{t_1t_2}$, $\therefore \frac{2}{t_0}=\frac{2\cos\theta+\sin\theta}{2}$,
故 $t_0=\frac{4}{2\cos\theta+\sin\theta}$. $\therefore\ x_0=\frac{4\cos\theta}{2\cos\theta+\sin\theta}$, $y_0=\frac{4\sin\theta}{2\cos\theta+\sin\theta}$. 即 $\frac{4}{x_0}-2=\operatorname{tg}\theta\cdots$②, $\frac{4}{y_0}-1=2\operatorname{ctg}\theta\cdots$③. 两式相乘, 得 $2x_0+y_0-4=0$.
$\because\ \operatorname{tg}\theta\geqslant 2(\sqrt{2}-1)$, $\therefore\ 0<x_0\leqslant\sqrt{2}$. 故点 Q 的轨迹方程为

$$2x+y-4=0\ \ (0<x\leqslant\sqrt{2}).$$

1018. M 为抛物线 $y=x^2$ 上的一动点, 连结原点 O 与动点 M, 以 OM 为边作正方形 $MNKO$, 求动点 K 的轨迹.

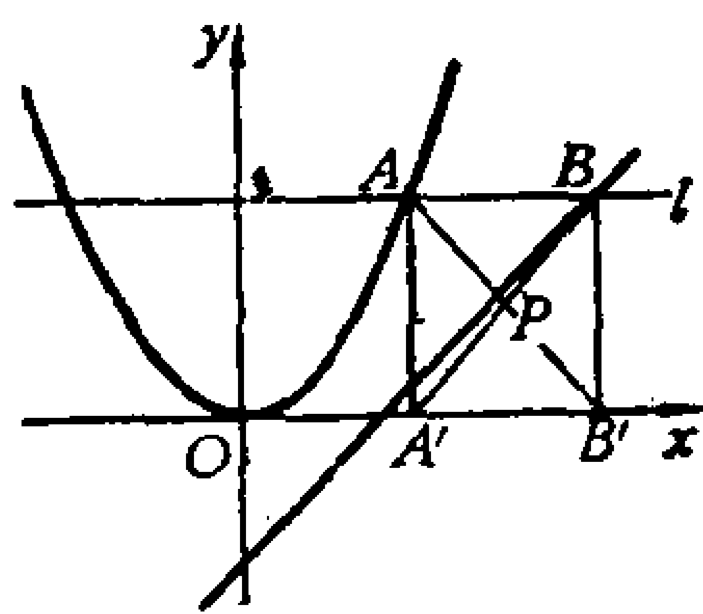


[解] 设动点 M 的坐标为 (t, t^2), 动点 K 的坐标为 (x, y). $\because$ 坐标轴绕 O 旋转 $\pm 90°$ 后, 点 M 的坐标成为点 K 的坐标,

$$\therefore\ \begin{cases} t=x\cos(\pm 90°)-y\sin(\pm 90°) \\ t^2=x\sin(\pm 90°)+y\cos(\pm 90°), \end{cases}$$

即 $\begin{cases} t=\mp y \\ t^2=\pm x. \end{cases}$ 消去参数 t, 得 $y^2=\pm x$. $\therefore$ 动点 K 的轨迹是以点 O 为顶点, 开口分别为向右或向左的两抛物线.

1019. 设平行于 x 轴的动直线 l 与抛物线 $y=\frac{x^2}{2}$ 的一个交点为 A, 与直线 $y=x-2$ 的交点为 B, A、B 在 x 轴上的射影分别为 A'、B'. 求所有这样的矩形 $AA'B'B$ 的中心的轨迹.



[解] 设动直线 l 的方程为 $y=a(a\geqslant 0)$, 它与抛物线 $y=\frac{x^2}{2}$ 的交点为 $A(\pm\sqrt{2a}, a)$, 它与直线 $y=x-2$ 的交点为 $B(a+2, a)$. $\therefore$ 点 B' 的坐标为 $(a+2, 0)$. 设 $P(x, y)$ 为轨迹上任意一点, 则 $\begin{cases} x=\frac{\pm\sqrt{2a}+a+2}{2} \\ y=\frac{a}{2}. \end{cases}$ 消去参数 a, 得 $(x-y-1)^2=y$, 即 $x^2-2xy+y^2-2x+y+1=0$. 其轨迹是抛物线.

1020. 过抛物线 $y^2=2px$ 的焦点 F 任意作弦 PQ, 求 PQ 中点的轨迹方程.

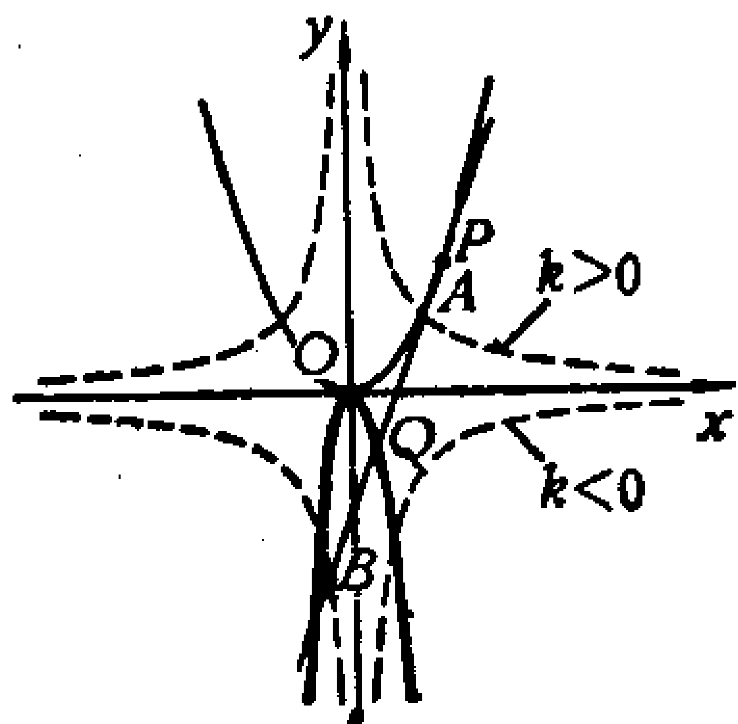
[解] 设过点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$的弦所在的直线方程为 $y=k\left(x-\frac{p}{2}\right)\cdots$①,代入抛物线方程得 $y^2-\frac{2p}{k}y-p^2=0$. 因其判别式恒大于零, 故方程有两实根 y_1、y_2, 且 $y_1+y_2=\frac{2p}{k}$. 设弦 PQ 的中点坐标为(x, y), 则 $y=\frac{p}{k}$. 与①消去 k, 得 $y^2=p\left(x-\frac{p}{2}\right)\cdots$②. 当过点 F 的弦垂直于 x 轴时, 其中点即为焦点 F, 其坐标仍适合方程②, 故所求的轨迹方程为 $y^2=p\left(x-\frac{p}{2}\right)$.

1021. 求动直线 l: $y=\frac{2}{t}(x-t-1)$ (t 为参数) 和抛物线 $y^2=4x$ 的两交点连线的中点轨迹, 并证明该轨迹和直线 $x+y+1=0$ 相切.

[解] 由直线 l 得 $x=\frac{ty}{2}+t+1\cdots$①, 代入抛物线方程得 $y^2-2ty-4(t+1)=0$. $\because \Delta=4(t+2)^2\geqslant 0$, $\therefore$ 方程恒有两实根 y_1、y_2, 且 $y_1+y_2=2t$. 设直线 l 和抛物线两交点连线的中点坐标为(x, y), 则 $y=t$. 与①消去 t, 得 $y^2=2(x-y-1)$, 即$(y+1)^2=2\left(x-\frac{1}{2}\right)$. 故中点轨迹是顶点为$\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, 焦点为$(1, -1)$, 对称轴为 $y+1=0$ 的抛物线.

由直线方程 $x+y+1=0$ 得 $y+1=-x$, 代入上述轨迹方程, 得 $x^2-2x+1=0$. 因其判别式 $\Delta=0$, 故直线 $x+y+1=0$ 和轨迹相切.

1022. 如果抛物线 $x^2=2py$ 的切线交等轴双曲线 $xy=k$ 于 A、B 两点, 求线段 AB 的中点轨迹方程.



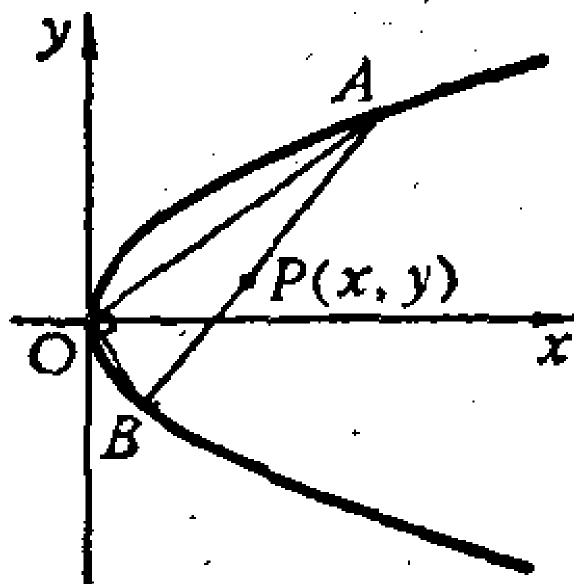
[解一] 设 $P(x_0, y_0)$为抛物线 $x^2=2py$ 上的任意一点, 则 $x_0^2=2py_0\cdots$①, 过点 P 的切线方程为 $x_0x=p(y_0+y)\cdots$②. 当 $x_0=0, y_0=0$ 时, 切线即为 $y=0$, 和双曲线 $xy=k$ 无交点. 当 $y_0\neq 0$ 时, 由 $xy=k$, 得 $x_0xy-x_0k=0\cdots$③. ②代入③,

得 $py^2+py_0y-x_0k=0$. 当 $\Delta\geqslant 0$ 时方程有两实根 y_1、y_2, 且 $y_1+y_2=-y_0$. 设线段 AB 的中点 Q 的坐标为 (x, y), 则 $y=-\frac{y_0}{2}\cdots$④, ④ 代入②, 得 $x_0=-\frac{py}{x}\cdots$⑤. ⑤、④ 代入 ①, 得 $p^2y^2=-4pyx^2$. $\because$ $y_0\neq 0$, $\therefore$ $y\neq 0$, 故所求的轨迹方程为 $x^2=-\frac{p}{4}y$.

[解二] 设抛物线 $x^2=2py$ 的动切线方程为 $2tx-y-2pt^2=0\cdots$①. 以 (x_0, y_0)为中点, 双曲线 $xy=k$ 的弦 AB 的方程为 $y_0x+x_0y=2x_0y_0\cdots$②. $\because$ ①、② 两方程表示同一直线, $\therefore$ $y_0=2t\lambda$, $x_0=-\lambda$, $2x_0y_0=2pt^2\lambda$, 而 $\lambda\neq 0$. 消去参数 λ、t, 并以 x、y 分别代换 x_0、y_0, 即得轨迹的方程

$$x^2=-\frac{p}{4}y.$$

1023. 求抛物线 $y^2=2px$ 在顶点 O 张直角之弦的中点轨迹方程.



[解] 设 $A(2pt_1^2, 2pt_1)$、$B(2pt_2^2, 2pt_2)$为抛物线 $y^2=2px$ 上的两点, 弦 AB 的中点坐标为(x, y), 则 $x=p(t_1^2+t_2^2)\cdots$①, $y=p(t_1+t_2)\cdots$②. $\because$ $AO\perp BO$, $k_{AO}=\frac{1}{t_1}$, $k_{BO}=\frac{1}{t_2}$, $\therefore$ $t_1t_2=-1\cdots$③. ② 式平方, 得 $y^2=p^2(t_1^2+t_2^2+2t_1t_2)\cdots$④. ①、③ 代入 ④, 即得所求的轨迹方程

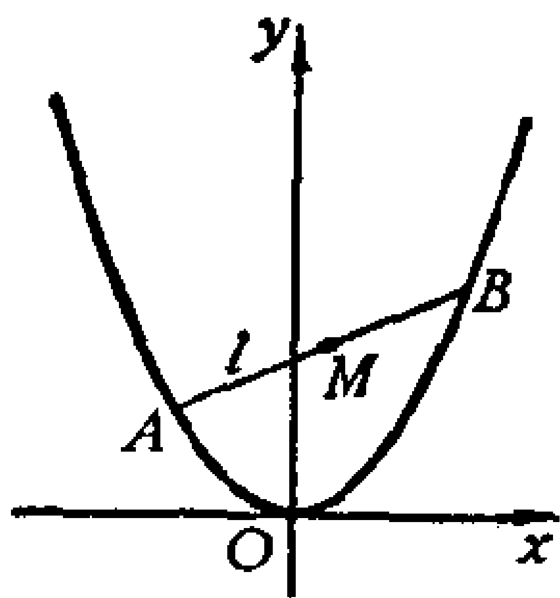
$$y^2=p(x-2p).$$

1024. 已知点 $A(5, 0)$和抛物线 $y^2=4x$ 上的动点 P, 求分线段 PA 成定比 $PM:MA=\lambda$ 的点 M 的轨迹方程.

[解] 设点 P 的坐标为(x_0, y_0), 点 M 的坐标为(x, y). $\because$ $PM:MA=\lambda$, $\therefore$ $x=\frac{x_0+5\lambda}{1+\lambda}$, $y=\frac{y_0}{1+\lambda}$. 由此得 $x_0=(1+\lambda)x-5\lambda$, $y_0=(1+\lambda)y$. $\because$ $y_0^2=4x_0$, $\therefore$ $(1+\lambda)^2y^2=4[(1+\lambda)x-5\lambda]$, 即 $y^2=\frac{4}{1+\lambda}\left(x-\frac{5\lambda}{1+\lambda}\right)$. 此即所求的轨迹方程.

1025. 定长为 $l(l\geqslant 1)$的线段 AB, 其两端在抛物线 $y=x^2$ 上移动, 求: (1)动线段 AB 中点 M 的轨迹方程; (2)离 x 轴最近的中点 M_0 的坐标.

[分析一] (1) 设动弦 AB 所在直线的方程为 $y=kx+\lambda$，由韦达定理可用 k、λ 表示 AB 的长 l，再由中点条件消去参数 k、λ，即得所求轨迹方程.



(2) 点 M 离 x 轴最近时，其纵坐标必取最小值. 如果设点 M 的坐标为 (x, y)，由求得的轨迹方程所确定的函数关系即可求出 y 的最小值，从而定出点 M_0 的坐标.

[解一] (1) 设直线 AB 的方程为 $y=kx+\lambda\cdots$①，($\because$ AB 不平行 y 轴，$\therefore$ k 必存在). 代入抛物线方程 $y=x^2$，得 $x^2-kx-\lambda=0$，其两根 x_1、x_2 即点 A、B 的横坐标；令点 A、B 的纵坐标为 y_1、y_2，则 $y_1=kx_1+\lambda$，$y_2=kx_2+\lambda$，$\therefore$ $y_1-y_2=k(x_1-x_2)$. $\because$ $x_1+x_2=k$，$x_1\cdot x_2=-\lambda$，$\therefore$ $|AB|^2=l^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(1+k^2)(x_1-x_2)^2$，即 $l^2=(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]=(1+k^2)(k^2+4\lambda)\cdots$②. $\because$ 点 M 的横坐标 $x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=\frac{k}{2}$，$\therefore$ $k=2x$；代入①，得 $\lambda=y-2x^2$. 此两式代入②，得

$$l^2=(1+4x^2)(4x^2+4y-8x^2),$$

即 $4(y-x^2)(1+4x^2)=l^2$ 为点 M 的轨迹方程.

(2) $\because$ 点 M 在抛物线 $y=x^2$ 内部，$\therefore$ $y-x^2>0$，$1+4x^2>0$.

$$\therefore\quad l^2=4(y-x^2)(1+4x^2)\leqslant\left(\frac{4y-4x^2+1+4x^2}{2}\right)^2=\left(\frac{4y+1}{2}\right)^2.$$

故 $4y+1\geqslant 2l$，$y\geqslant\frac{2l-1}{4}$. $\therefore$ 当 $4y-4x^2=1+4x^2$，即 $x=\pm\frac{\sqrt{l-1}}{2}$ 时，$y_{\min}=\frac{2l-1}{4}$.

$\therefore$ 点 M_0 的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{l-1}}{2}, \frac{2l-1}{4}\right)$ 或 $\left(-\frac{\sqrt{l-1}}{2}, \frac{2l-1}{4}\right)$.

[分析二] 写出过动点 $M(x_0, y_0)$ 的直线参数方程，从点 A、B 所对应的参数 t_1 和 t_2 的几何意义，可得 $t_1+t_2=0$ 和 $l=|t_1-t_2|$. 由韦达定理又可得两个关系式. 从这四个关系式消去 t_1、t_2 和 θ，即得所求的轨迹方程.

[解二] 设 $M(x_0, y_0)$ 为轨迹上任意一点，弦 AB 的参数方程为

$$\begin{cases}x=x_0+t\cos\theta\\ y=y_0+t\sin\theta,\end{cases}$$

代入 $y=x^2$，得 $t^2\cos^2\theta+(2x_0\cos\theta-\sin\theta)t+x_0^2-y_0=0\cdots$①，其两根为

$t_1=MA$, $t_2=MB$, $\therefore\ |AB|^2=|t_1-t_2|^2=(t_1+t_2)^2-4t_1t_2$. $\because$ 点 M 是弦 AB 的中点， $\therefore\ t_1+t_2=\dfrac{2x_0\cos\theta-\sin\theta}{\cos^2\theta}=0$，即 $2x_0\cos\theta-\sin\theta=0$.

$\therefore\ \operatorname{tg}\theta=2x_0$，$\sec^2\theta=1+4x_0^2$，$t_1\cdot t_2=\dfrac{x_0^2-y_0}{\cos^2\theta}=(x_0^2-y_0)(1+4x_0^2)$.

$\therefore\ |AB|^2=l^2=-4t_1t_2=4(y_0-x_0^2)(1+4x_0^2)$. 以 x、y 代换 x_0、y_0 即得点 M 的轨迹方程 $4(y-x^2)(1+4x^2)=l^2$.

[分析三] 先求出以动点 $M(x_0, y_0)$ 为中点的抛物线的弦方程，再由韦达定理，直接得出点 M 的坐标满足 $|AB|=l$ 条件的方程.

[解三] 以 $M(x_0, y_0)$ 为中点的抛物线 $y=x^2$ 的弦方程为 $2x_0x-y=2x_0^2-y_0\cdots$①，即 $y=2x_0x-2x_0^2+y_0$. 代入 $y=x^2$，得 $x^2-2x_0x+2x_0^2-y_0=0$. 其两根 x_1、x_2 即 A、B 两点的横坐标. $x_1+x_2=2x_0$，$x_1\cdot x_2=2x_0^2-y_0$，$\therefore\ (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4x_0^2-4(2x_0^2-y_0)=4(y_0-x_0^2)$. $\because\ y_1=2x_0x_1-2x_0^2+y_0$，$y_2=2x_0x_2-2x_0^2+y_0$，$\therefore\ y_1-y_2=2x_0(x_1-x_2)$. $\therefore\ l^2=|AB|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(1+4x_0^2)(x_1-x_2)^2=4(y_0-x_0^2)(1+4x_0^2)$. 以 x、y 代换 x_0、y_0，即得轨迹方程 $4(y-x^2)(1+4x^2)=l^2$.

[说明] 前两种解法都运用了参数法则，凡能确定动点位置的量，一般都可选作参数，由于所选参数不同，就有不同的解法，参数选得好，可使解法简便. 第三种解法是求轨迹方程的基本法则，即将动点满足的条件，直接转化成动点的坐标满足的方程.

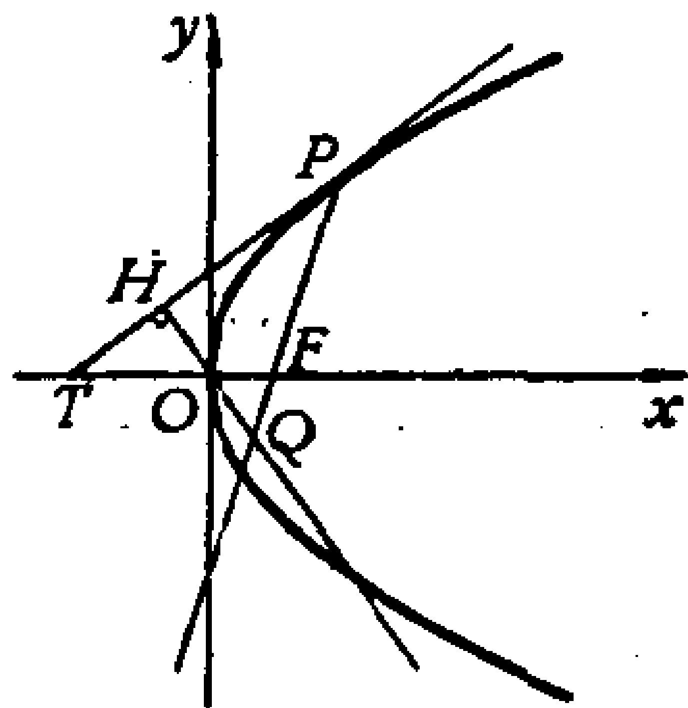
本题中的条件为 $l\geqslant1$，如果改为 $l<1$，则 $|AB|$ 小于这个抛物线的通径的长；当 AB 与 x 轴平行时，点 M 的位置离 x 轴最近，这时点 M_0 的坐标为 $\left(0, \dfrac{l^2}{4}\right)$.

1026. 设抛物线 $y^2=4ax$ 上一动点 Q 的法线交 x、y 轴于 R、S. 再过点 R、S 分别作 x、y 轴的垂线，求此两垂线交点 P 的轨迹方程.

[解] 设动点 Q 的坐标为 $(at^2, 2at)$，则抛物线 $y^2=4ax$ 在点 Q 处的法线方程为 $tx+y=at^3+2at$. 当 $y=0$ 时，$x=at^2+2a$，此即点 P 的横坐标；当 $x=0$ 时，$y=at^3+2at$，此即点 P 的纵坐标. 故点 P 轨迹的参数方程为 $\begin{cases}x=at^2+2a\\ y=at^3+2at.\end{cases}$ 消去参数 t，即得所求的轨迹方程 $ay^2=x^3-2ax^2$.

1027. P 是抛物线 $y^2=2px$ 上任一点，F 为焦点，PT 是抛物线的切线. 过顶点 O 作 PT 的垂线，垂足为 H. 直线 OH 和 PF 相交于 Q. 求点 Q 的轨迹.

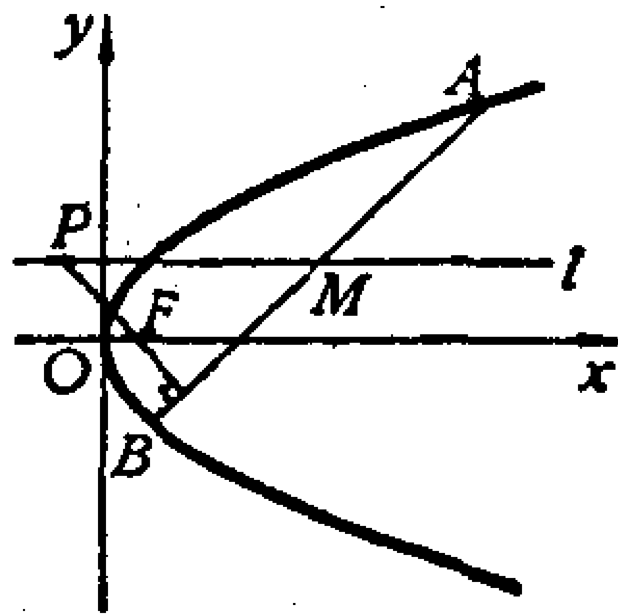
[分析] 取点 P 的坐标为参数. 分别求出 OH、PF 两直线的方程，消去参数即得轨迹的方程.



[解] 设点 P 的坐标为 (x_0, y_0)，则切线 PT 的方程为 $y_0y=p(x+x_0)$，$\therefore$ OH 的方程为 $y_0x+py=0$…①. 直线 PF 的方程为 $\left(x_0-\frac{p}{2}\right)y=y_0\left(x-\frac{p}{2}\right)$…②. 由①、②解得：$x_0=\frac{p(p-x)}{2x}$，$y_0=-\frac{py}{x}$. $\because$ 点 P 在抛物线上，$\therefore$ $y_0^2=2px_0$，即 $\frac{p^2y^2}{x^2}=2p\cdot\frac{p(p-x)}{2x}$，化简得 $x^2+y^2-px=0$. 故点 Q 的轨迹为以 $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ 为圆心，$\frac{p}{2}$ 为半径的圆.

[说明] 本题亦可设点 P 的坐标为 $(2pt^2, 2pt)$，通过消去参数 t 得解.

1028. **过抛物线 C 的弦 AB 的中点 M，引 C 的对称轴的平行线 l，又过 C 的焦点 F 作 AB 的垂线. 求此垂线与 l 交点 P 的轨迹.**

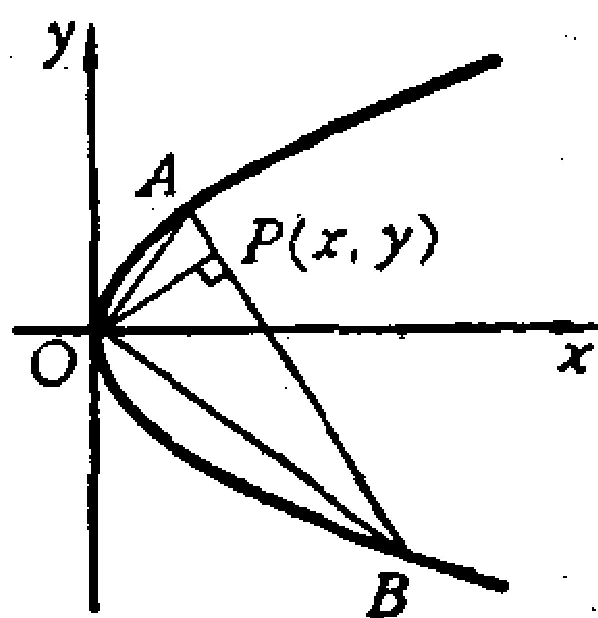


[解] 设抛物线的方程为 $y^2=2px$，点 A、B 的坐标分别是 $(2pt_1^2, 2pt_1)$ 和 $(2pt_2^2, 2pt_2)$，则 AB 中点 M 的纵坐标为 $y_M=p(t_1+t_2)$，$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y=p(t_1+t_2)$…①. 又过点 F 且垂直于 AB 的直线方程是 $y=-(t_1+t_2)\cdot\left(x-\frac{p}{2}\right)$…②，由①、②得 $x=-\frac{p}{2}$，或 $y=0$. 故所求的轨迹是已知抛物线的准线或对称轴.

1029. **A、B 是抛物线 $y^2=4ax$ 上的两动点，O 为原点，且 $OA\perp OB$. 试求点 O 在 AB 上射影的轨迹.**

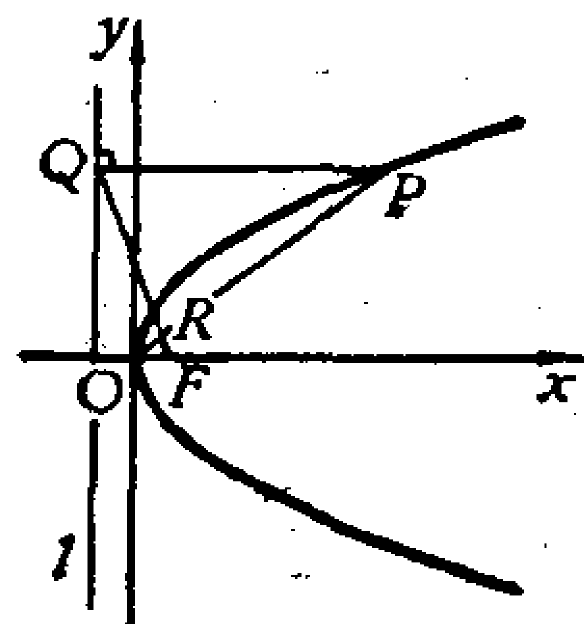
[分析] 因直线 AB 是随 A、B 两点而确定的，故可取点 A、B 的坐标

为$(at_i^2,\ 2at_i)(i=1,\ 2)$，以$t_1,\ t_2$为参数. 再从直线$AB$和自点$O$作$AB$的垂线$OP$的方程及$OA\perp OB$的条件消去$t_1$、$t_2$，即得轨迹的方程.



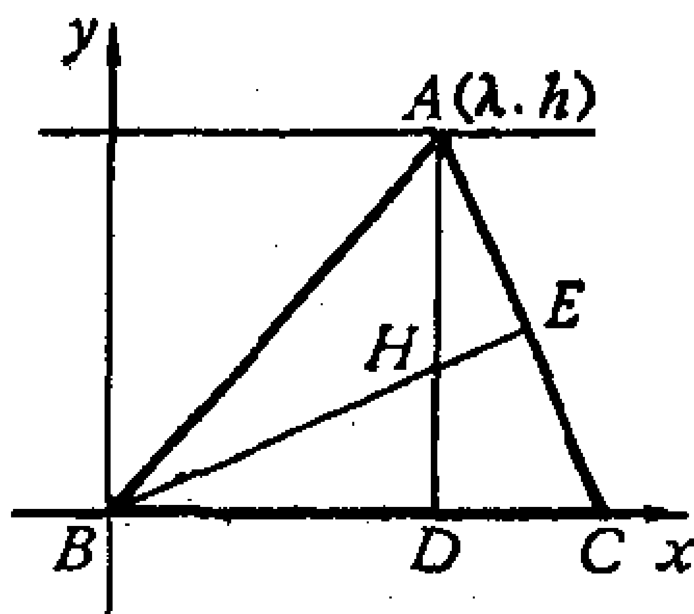
［解］ 设抛物线上动点A、B的坐标为$(at_1^2, 2at_1)$和$(at_2^2,\ 2at_2)(t_1、t_2\neq0)$，则$AB$的方程为$2x-(t_1+t_2)y+2at_1t_2=0$. $\because OA\perp OB$，$\therefore \frac{2at_1}{at_1^2}\cdot\frac{2at_2}{at_2^2}=-1$，即$t_1t_2=-4$. $\therefore AB$的方程为$2x-(t_1+t_2)y-8a=0\cdots$①. 过点O与AB垂直的直线OP的方程为$(t_1+t_2)x+2y=0\cdots$②. 由①、②消去t_1、t_2，得$x^2+y^2-4ax=0$. 故所求轨迹为圆心在$(2a,\ 0)$，半径为$2|a|$的圆. 原点是轨迹的极限点.

1030. **自抛物线上任意一点P向其准线l引垂线，垂足为Q. 连接抛物线的顶点O与点P的直线和连接抛物线的焦点F与Q的直线交于R. 求点R的轨迹.**



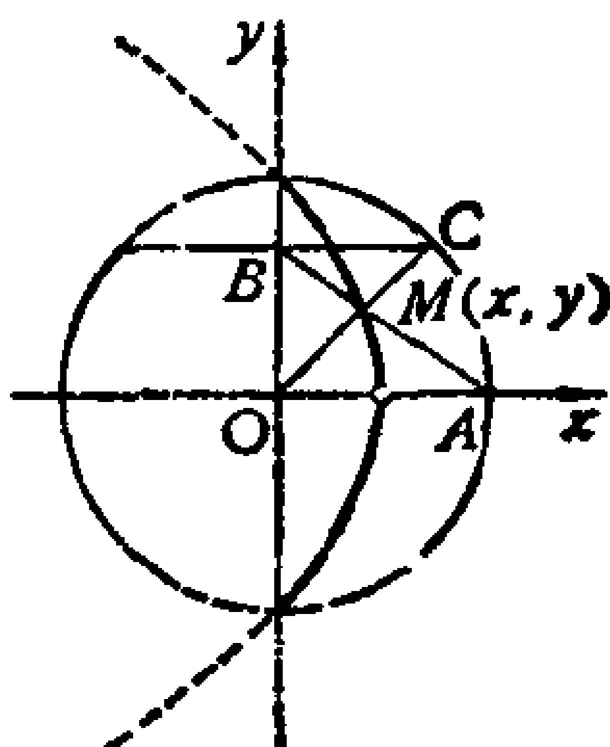
［解］ 设抛物线$y^2=2px$上任一点P的坐标为$(x_0,\ y_0)$，则点Q的坐标为$\left(-\frac{p}{2},\ y_0\right)$，$\therefore$直线$OP$的方程为$y=\frac{y_0}{x_0}x\cdots$①，直线$FQ$的方程为$y=-\frac{y_0}{p}\cdot\left(x-\frac{p}{2}\right)\cdots$②. ①×②，得$y^2=-\frac{y_0^2}{px_0}x\left(x-\frac{p}{2}\right)\cdots$③. $\because$点P在抛物线上，$\therefore y_0^2=2px_0$，即$\frac{y_0^2}{px_0}=2$. 代入③，得$2x^2+y^2-px=0$. 故所求的轨迹为一椭圆.

1031. **设三角形的底边与其高为定长，求此三角形垂心的轨迹.**



［解］ 取$\triangle ABC$的顶点B为原点，底边BC所在直线为x轴，建立直角坐标系. 设点C坐标为$(a,\ 0)$，点A的坐标为$(\lambda,\ h)$，其中λ为参数，a、h为定值. $\therefore$高AD的方程为$x=\lambda\cdots$①；高BE的方程为$(\lambda-a)x+hy=0\cdots$②. 从①与②消去参数λ，即得$x^2-ax+hy=0$. 故所求轨迹为一抛物线.

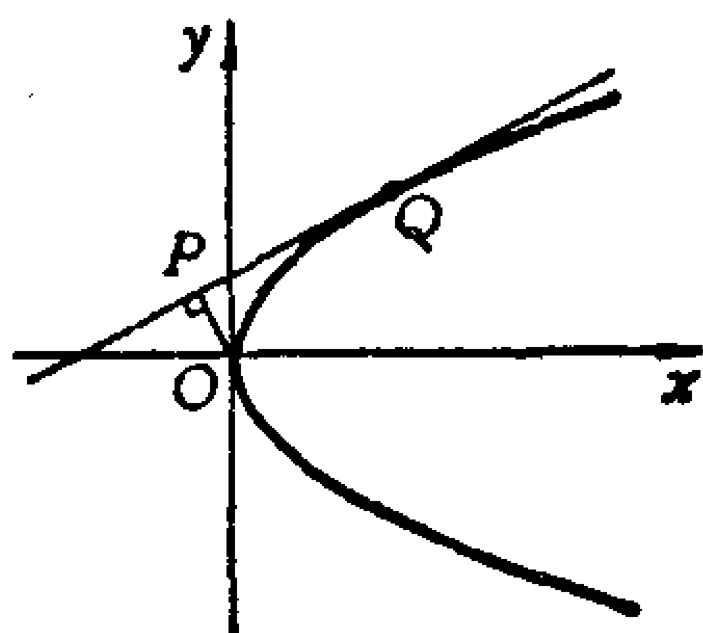
1032. 已知圆 $x^2+y^2=a^2$ 与 x 轴正半轴交于点 A, 一条与 x 轴平行的动直线交 y 轴于点 B, 交右半圆于点 C. 求线段 AB、OC 交点 M 的轨迹.



[解] 设点 M 的坐标为 (x, y), 点 C 的坐标为 (x_0, y_0), 则点 B 的坐标为 $(0, y_0)$. 线段 AB、OC 所在的直线方程分别为: $y_0x+ay=ay_0\cdots①$, $x_0y=y_0x\cdots②$. 又 $x_0^2+y_0^2=a^2\cdots③$. 由①、②、③消去 x_0、y_0, 得 $y^2=-2a\left(x-\frac{a}{2}\right)$. 故所求轨迹为此抛物线在圆 C 内的一部分(顶点除外).

1033. 从抛物线的顶点作动切线的垂线, 求垂足的轨迹方程.

[解一] 设 $Q(2pt^2, 2pt)$ 为抛物线 $y^2=2px$ 上任一点, 过点 Q 的切线方程为 $x-2ty+2pt^2=0\cdots①$, 过 O 与切线垂直的直线 OP 的方程为 $y=-2tx\cdots②$. 设 $x\neq0$, 由①、②消去 t, 得 $2x^3+2xy^2+py^2=0$. 当 $x=0$ 时, 则点 P 与 O 重合, 显然原点也满足方程. 故所求垂足的轨迹方程为 $2x^3+2xy^2+py^2=0$.



[解二] 设 $y^2=2px$ 的切线方程为 $y=mx+\frac{p}{2m}(m\neq0)$, 则过顶点同它垂直的直线方程为 $y=-\frac{1}{m}x$, 消去 m, 即得轨迹方程为 $2x^3+2xy^2+py^2=0$. 当切线垂直于 x 轴时, 顶点 O 也是轨迹上的点.

1034. 过抛物线的焦点作法线的垂线, 求垂足的轨迹.

[解] 设抛物线 $y^2=4ax$ 上任一点 Q 的坐标为 $(at^2, 2at)$, 则过点 Q 的法线方程为 $tx+y=at^3+2at\cdots①$. 过焦点 $F(a, 0)$ 与法线垂直的直线 FP 的方程为 $x-ty=a\cdots②$. 从①、②消去 t, 得 $[x(x-a)+y^2]y^2=a(x-a)\cdot[(x-a)^2+2y^2]$, 即 $[(x-a)^2+y^2][y^2-a(x-a)]=0$. $\because$ $(x-a)^2+y^2=0$ 表示一点 $(a, 0)$, 而点 $(a, 0)$ 在 $y^2-a(x-a)=0$ 上. 故轨迹方程为 $y^2=$

$a(x-a)$. 其轨迹为顶点在 $F(a, 0)$、对称轴与原抛物线的对称轴重合、通径长为原抛物线的四分之一的一条抛物线.

1035. 已知抛物线的两动切线的交角为 α, 或 $\pi-\alpha$ $\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)$, 求此两动切线交点的轨迹方程.

[分析] 两切线的交角可由这两条切线的斜率来决定. 不管两切线的交角是 α 或是 $\pi-\alpha$, 当 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ 时, 总有 $\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{(k_1-k_2)^2}{(1+k_1k_2)^2}$(此处 k_1、k_2 为两动切线的斜率). 利用这一关系, 即可求得满足条件的轨迹方程.

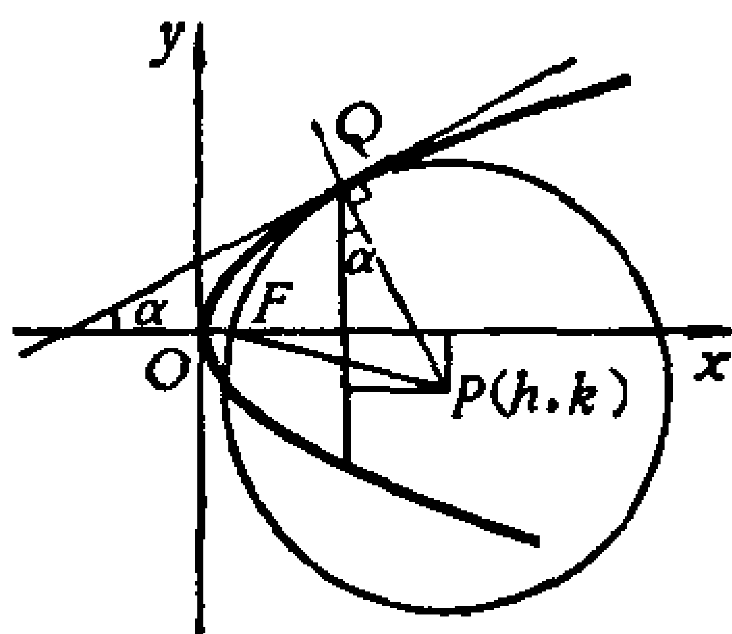
[解] 设抛物线方程为 $y^2=2px\cdots$①, 两动切线 l_1、l_2 的斜率分别为 k_1、k_2, 交点为 (x_0, y_0). ∵ 已知斜率 k 的抛物线的切线方程为 $y=kx+\frac{p}{2k}\cdots$②, 且两切线均过点 (x_0, y_0), 故有 $2k_1y_0=2k_1^2x_0+p\cdots$③ 和 $2k_2y_0=2k_2^2x_0+p\cdots$④. 由③、④可知 k_1、k_2 是方程 $2x_0k^2-2y_0k+p=0$ 的两根, 且 $k_1+k_2=\frac{y_0}{x_0}$, $k_1\cdot k_2=\frac{p}{2x_0}$. 又切线 l_1、l_2 的交角为 α 或 $\pi-\alpha$, $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$, ∴ $\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{(k_1-k_2)^2}{(1+k_1k_2)^2}=\frac{(k_1+k_2)^2-4k_1k_2}{(1+k_1k_2)^2}=\frac{4(y_0^2-2px_0)}{(2x_0+p)^2}$. 即 $(2x_0+p)^2\operatorname{tg}^2\alpha=4(y_0^2-2px_0)\cdots$⑤. 以 x、y 分别代换 x_0、y_0, 即得所求的轨迹方程

$$(2x+p)^2\operatorname{tg}^2\alpha=4(y^2-2px).$$

当两动切线中有一条的斜率不存在时, 结论仍成立.

1036. 试求过抛物线 $y^2=4ax$ 的焦点, 且与抛物线相切于点 $Q(at^2, 2at)$ 的圆方程; 当 Q 点在抛物线上运动时, 求圆心的轨迹方程.

[分析] 因动圆的圆心由动圆和抛物线相切的切点 Q 的位置确定, 故可设圆与抛物线相切的切点 Q 的坐标为参数, 求出圆心坐标 (x, y) 与切点坐标的关系, 即可求得圆心轨迹的参数方程.



[解] 设过抛物线 $y^2=4ax$ 的焦点, 且与抛物线相切于点 $Q(at^2, 2at)$ 的圆的圆心为 $P(h, k)$, 抛物线与圆过点 Q 的公切线为 $ty=x+at^2$. 设

切线的倾角为 α，则 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{t}$. ∵ 直线 PQ 为法线，令 $|PQ|=r$，则 $h=at^2+r\sin\alpha=at^2+\frac{r}{\sqrt{1+t^2}}\cdots$①，$k=2at-r\cos\alpha=2at-\frac{rt}{\sqrt{1+t^2}}\cdots$②，又 $r^2=(h-a)^2+k^2\cdots$③. 把①、②代入③，得 $r=\frac{1}{2}a(t^2+1)^{\frac{3}{2}}$，∴ $2h=a(3t^2+1)\cdots$④，$2k=a(3t-t^3)\cdots$⑤. 设圆 P 的方程为 $x^2+y^2-ax(3t^2+1)-ay(3t-t^3)+C=0$，$C$ 为待定常数. ∵ 圆 P 过 $F(a,0)$，∴ $C=3a^2t^2$. 故所求圆的方程为 $x^2+y^2-ax(3t^2+1)-ay(3t-t^3)+3a^2t^2=0$.

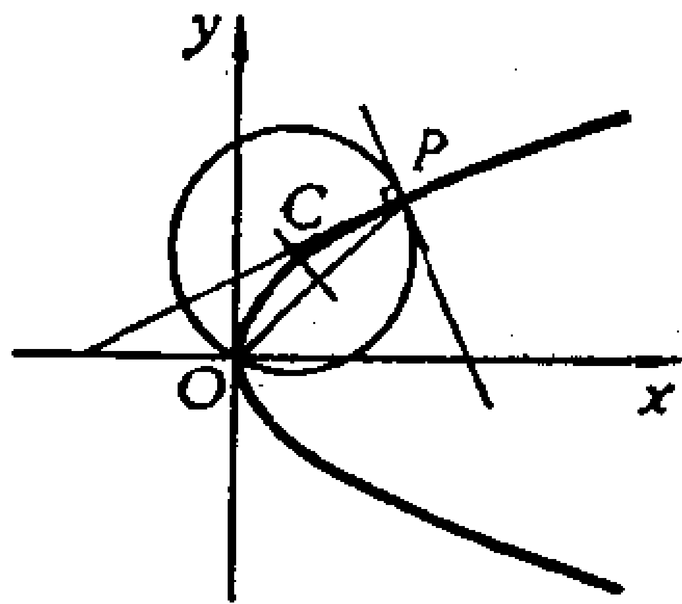
在④、⑤中把 (h,k) 改写成 (x,y)，得

$$\begin{cases}2x=a(3t^2+1)\cdots⑥\\2y=a(3t-t^3)\cdots⑦.\end{cases}$$

⑥$\times t+$⑦$\times 3$，得 $2tx+6y=10at$，∴ $t=\frac{3y}{5a-x}$. 代入⑥，即得圆心的轨迹方程 $(2x-a)(x-5a)^2=27ay^2$.

1037. 一动圆过抛物线 $y^2=4ax$ 的顶点 O，且与抛物线交于另一点 P，圆与抛物线在点 P 处的切线互相垂直，求证动圆中心的轨迹方程为 $2y^2(2y^2+x^2-12ax)=ax(3x-4a)^2$.

［分析］ 所求圆心 C 为抛物线在点 P 的切线和线段 OP 的中垂线的交点.

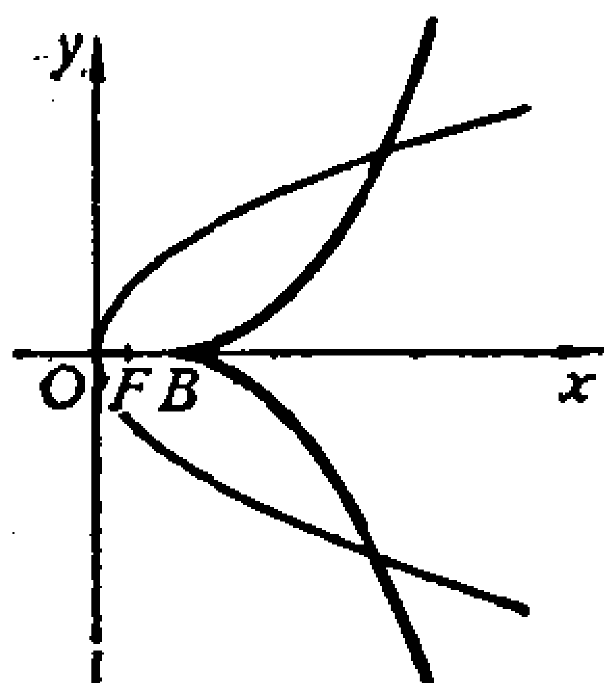


［证］ 设圆与抛物线 $y^2=4ax$ 另一交点 P 的坐标为 $(at^2、2at)$，则 OP 的中垂线方程为 $y-at=-\frac{t}{2}\left(x-\frac{at^2}{2}\right)$，即 $tx+2y=\frac{at^3}{2}+2at\cdots$①. 抛物线在点 P 的切线方程为 $x-ty+at^2=0\cdots$②，即 $at^2=ty-x$. 代入①，得 $2tx+4y=t(ty-x)+4at$，即 $t^2y+(4a-3x)t-4y=0\cdots$③. 从②与③解得 $t^2=\frac{x(3x-4a)+4y^2}{y^2-a(3x-4a)}$，$t=\frac{y(x+4a)}{y^2-a(3x-4a)}$. 消去 t，得 $[4y^2+x(3x-4a)][y^2-a(3x-4a)]=y^2(x+4a)^2$，即动圆中心 C 的轨迹方程为 $2y^2(2y^2+x^2-12ax)=ax(3x-4a)^2$.

1038. 设圆与抛物线 $y^2=4ax$ 的四个交点中至少有三个重合

于点 $P(at^2, 2at)$，其中 t 为参数．求这些圆的中心的轨迹方程．

［分析］ 要求圆心的轨迹，可先求有关圆系方程．如圆与抛物线 $y^2=4ax$ 的四个交点为 P、Q、R、S，则 PS、QR 与抛物线的轴的夹角互补(参见第974题)，即 PS、QR 的斜率互为相反数．若 Q、R 与 P 重合，则 QR 与过点 P 的抛物线的切线重合．因而从过点 P 的切线方程，可求 PS 的方程．利用圆锥曲线系方程，可求出这些圆的中心的轨迹方程．



［解］ 抛物线 $y^2=4ax$ 过点 $P(at^2, 2at)$ 的切线方程为 $x-ty+at^2=0$．设圆与该抛物线的第四个交点为 S．∵ PS 的斜率与此切线的斜率互为相反数，∴ PS 的方程为

$$(x-at^2)+t(y-2at)=0,$$

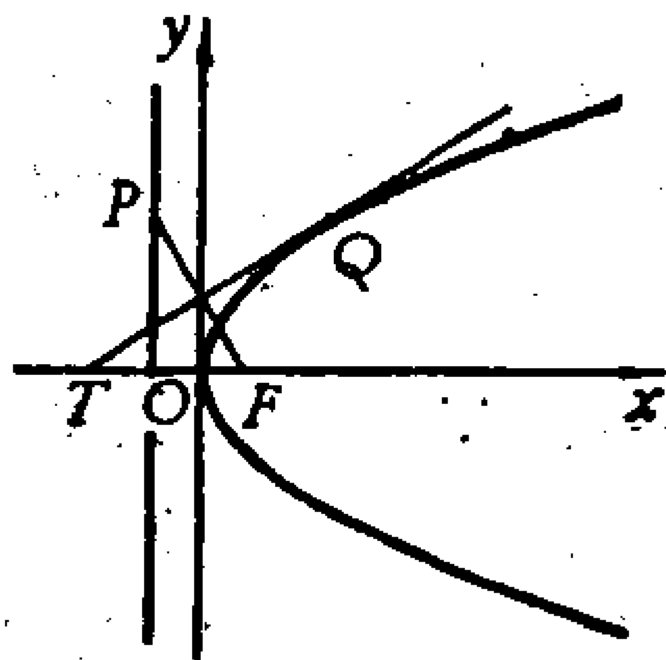
即

$$x+ty-3at^2=0.$$

所以圆系方程为 $(x-ty+at^2)(x+ty-3at^2)=\lambda(y^2-4ax)$，其中 λ 满足条件：$\lambda+t^2=-1$，即 $\lambda=-(1+t^2)$．∴ 这些圆方程为 $x^2+y^2-2a(3t^2+2)x+4at^3y-3a^2t^4=0$，圆心坐标为 $\begin{cases} x=a(3t^2+2) \\ y=-2at^3. \end{cases}$ 消去参数 t，得 $27ay^2=4(x-2a)^3$．此轨迹为半立方抛物线，与 x 轴交于点 $B(2a, 0)$，与抛物线交于点 $(8a, \pm 4\sqrt{2}a)$．

［说明］ 本题中所求的圆 $x^2+y^2-2a(3t^2+2)x+4at^3y-3a^2t^2=0$，称为抛物线在点 $P(at^2, 2at)$ 的密切圆，密切圆的中心轨迹称为渐屈线．PS 也称为密切弦．这种解法是求二次曲线的密切圆中心轨迹的通用方法．

1039．试求抛物线 $y^2=4ax$ 的焦点关于动切线的对称点的轨迹．



［分析］ 设切点坐标为参数，轨迹上的点是焦点关于动切线的对称点，则它们的中点满足切线方程，它们的连线与切线垂直，且切点坐标满足抛物线方程．由此得三个关系式，消去两个参数即得．

［解］ 设抛物线 $y^2=4ax$ 在点 $Q(x_1, y_1)$ 处的切线 QT 为 $y_1y=2a(x+x_1)$，焦点 $F(a, 0)$ 关于该切线的对称点为 $P(x, y)$．

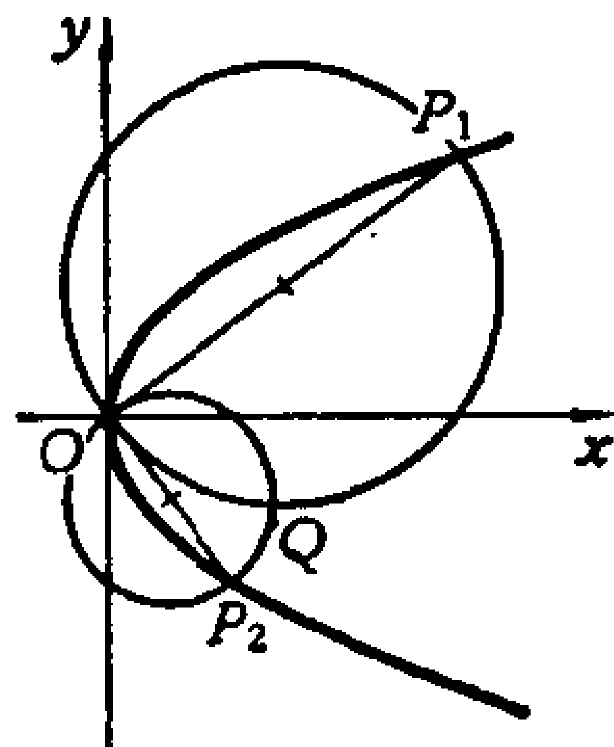
$\because$ FP 的中点$\left(\frac{x+a}{2}, \frac{y}{2}\right)$在切线上，$\therefore$ $\frac{y_1y}{2}=2a\left(\frac{x+a}{2}+x_1\right)$，即 $y_1y=2a(x+a)+4ax_1\cdots$①；又 $\frac{2a}{y_1}\cdot\frac{y}{x-a}=-1$，即 $y_1=-\frac{2ay}{x-a}\cdots$②；$y_1^2=4ax_1\cdots$③. 由②、③得 $x_1=\frac{ay^2}{(x-a)^2}\cdots$④，把②、④代入①，消去参数 x_1、y_1，得 $(x+a)[y^2+(x-a)^2]=0$. $\because$ $x\neq a$，故所求轨迹是抛物线的准线 $x+a=0$.

1040．试求抛物线 $y^2=4ax$ 的焦点关于动法线的对称点的轨迹.

［解］ 设抛物线 $y^2=4ax$ 在点$(at^2, 2at)$处的法线为 $tx+y=2at+at^3$，焦点 $F(a, 0)$关于该法线的对称点为 $P(x, y)$. $\because$ FP 的中点$\left(\frac{x+a}{2}, \frac{y}{2}\right)$在法线上，$\therefore$ $\frac{t}{2}(x+a)+\frac{y}{2}=2at+at^3$，即 $t(x+a)+y=4at+2at^3\cdots$①. 又 $\because$ FP 与法线垂直，$\therefore$ $(-t)\cdot\frac{y}{x-a}=-1$，即 $t=\frac{x-a}{y}\cdots$②. 从①、②解出 x、y，得 $\begin{cases}x=a(2t^2+1)\\ y=2at.\end{cases}$ 消去 t，得 $y^2=2a(x-a)$. 故所求轨迹为顶点在 $F(a, 0)$的抛物线 $y^2=2a(x-a)$.

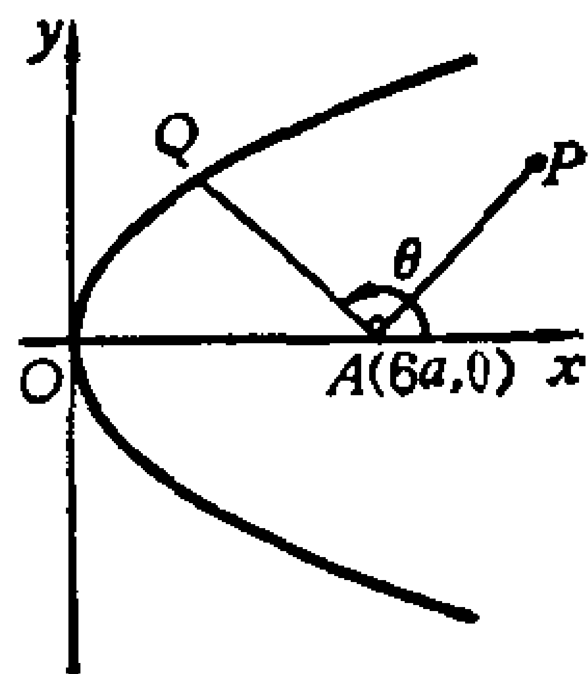
1041．设抛物线 $y^2=2px$ 过顶点的两弦 OP_1、OP_2 互相垂直，求以 OP_1、OP_2 为直径的两圆另一交点 Q 的轨迹.

［解］ 设点 P_i 的坐标为$(2pt_i^2, 2pt_i)$ $(i=1, 2)$，则弦 OP_i 的斜率 $k_{OP_i}=\frac{2pt_i}{2pt_i^2}=\frac{1}{t_i}$. $\because$ $OP_1\perp OP_2$，$\therefore$ $t_1t_2=-1\cdots$①. 以弦 OP_i 为直径的圆方程为 $x(x-2pt_i^2)+y(y-2pt_i)=0$，即 $x^2+y^2=2pt_1(t_1x+y)\cdots$② 和 $x^2+y^2=2pt_2\cdot(t_2x+y)\cdots$③. ②－③，得 $2p(t_1-t_2)[(t_1+t_2)x+y]=0$. $\because$ $t_1\neq t_2$，又 $p\neq 0$，$\therefore$ $(t_1+t_2)x+y=0\cdots$④. ②＋③，得 $x^2+y^2=p[(t_1^2+t_2^2)x+(t_1+t_2)y]=p\{(t_1+t_2)[(t_1+t_2)x+y]-2t_1t_2x\}$. 以①、④代入，得 $x^2+y^2=2px$. 故所求的轨迹为以$(p, 0)$为圆心、p 为半径的圆.



1042. 设 Q 为抛物线 $y^2=4ax$ 上一动点，$A(6a, 0)$ 为定点，以点 A 为中心将 AQ 按顺时针方向旋转 $90°$ 到 AP. 试证：(1)点 P 的轨迹为抛物线；(2)该两抛物线的四个交点共圆.

［分析］ 设 $|AP|=|AQ|=t$, AQ 和 AP 的倾角分别为 θ 和 $\theta-90°$，则点 P 和 Q 坐标之间的关系可用 t、θ 表出，再利用点 Q 在已知抛物线上的条件即得证.



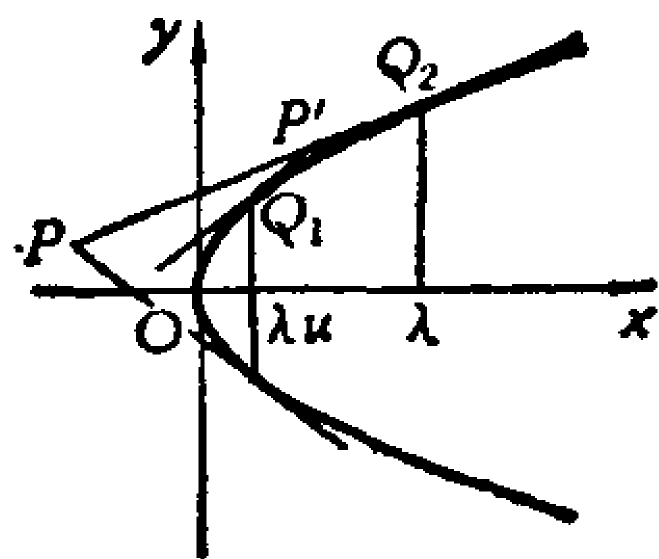
［证］ (1) 设点 Q 和 P 的坐标分别为 (x_0, y_0) 和 (x, y)，则 $y_0^2=4ax_0\cdots$①. 令 $|AQ|=t$, $\angle xAQ=\theta$，则 $|AP|=t$, $\angle xAP=\theta-90°$. $\therefore x_0=t\cos\theta+6a$, $y_0=t\sin\theta$. 而 $x=t\cos(\theta-90°)+6a=t\sin\theta+6a$, $\therefore y_0=x-6a\cdots$②. $y=t\sin(\theta-90°)=-t\cos\theta$, $\therefore x_0=6a-y\cdots$③. ②、③代入①，即得点 P 的轨迹方程 $(x-6a)^2=-4a(y-6a)$. 其轨迹为顶点在 $(6a, 6a)$，对称轴与 y 轴平行的抛物线.

(2) 将求得的轨迹方程展开，得 $x^2+4ay-12ax+12a^2=0$，与原抛物线方程 $y^2-4ax=0$ 相加，得 $x^2+y^2-16ax+4ay+12a^2=0$，即 $(x-8a)^2+(y+2a)^2=56a^2$. 故该两抛物线的四个交点都在此圆上.

［说明］ 如果动点 $P(x, y)$ 的位置由已知曲线 $f(x, y)=0$ 上的点 $Q(x_0, y_0)$ 确定，则求出 $P(x, y)$ 与 $Q(x_0, y_0)$ 坐标间的关系式后，解出 x_0、y_0，再代入 $f(x, y)=0$，即得所求的轨迹方程. 这是一种常用的求轨迹的方法.

1043. 已知抛物线 $y^2=4ax$ 上两动点的横坐标之比为 $u:1$，求过此两点的切线交点的轨迹方程.

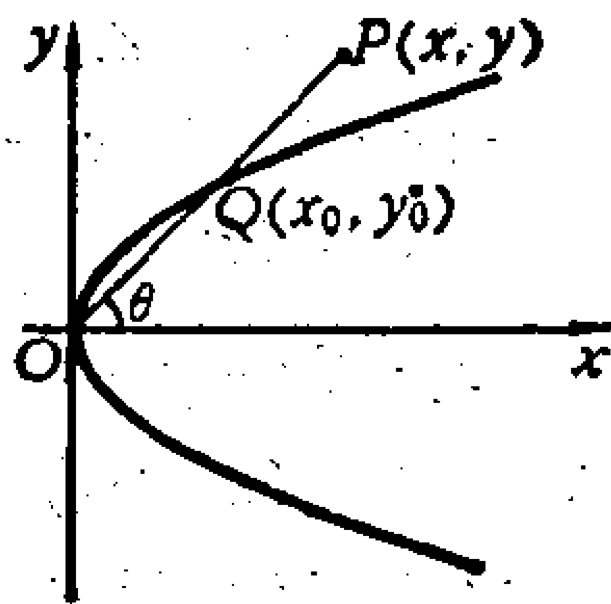
［分析］ 此两切线的交点由两动点(切点)的坐标确定，故可选两动点坐标所对应的 t_1、t_2 为参数，再利用两动点横坐标之比为 $u:1$，消去参数即得解.



［解］ 设抛物线 $y^2=4ax$ 上两动点 Q_1、Q_2 的坐标为 $(at_1^2, 2at_1)$ 和 $(at_2^2, 2at_2)$，则过这两点的切线方程分别为 $x-t_1y+at_1^2=0$ 和 $x-t_2y+at_2^2=0$，故 t_1 和 t_2 是方程 $at^2-yt+x=0$ 的两根. $\therefore t_1+t_2=$

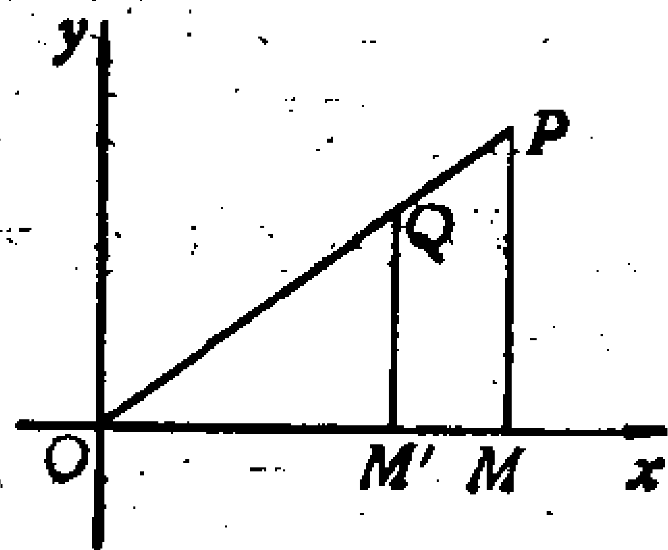
$\frac{y}{a}\cdots$①, $t_1t_2=\frac{x}{a}\cdots$②. 又 $at_1^2:at_2^2=u:1$, $\therefore\ \frac{t_1^2}{t_2^2}=u\cdots$③. $\because\ \frac{t_1^2+t_2^2}{t_1t_2}=\frac{t_1}{t_2}+\frac{t_2}{t_1}$, $\therefore (t_1+t_2)^2-2t_1t_2=\left(\frac{t_1}{t_2}+\frac{t_2}{t_1}\right)t_1t_2$. 以 ①、②、③ 代入，得 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{2x}{a}=\pm\left(\sqrt{u}+\frac{1}{\sqrt{u}}\right)\frac{x}{a}$. 化简即得所求的轨迹方程 $y^2=\pm(u^{\frac{1}{4}}\pm u^{-\frac{1}{4}})^2ax$. 其轨迹为两条抛物线.

1044. 设点 Q 是抛物线 $y^2=4ax$ 上的动点，连接抛物线的顶点 O 和点 Q，在直线 OQ 上取一点 P，使 $OP\cdot OQ=k^2$ (k 是常数). 试求点 P 的轨迹方程.



［解］ 设 $OQ=\rho_0$, $OP=\rho$. $\angle xOP=\theta$, 点 Q 的坐标为 (x_0, y_0)，则 $x_0=\rho_0\cos\theta$, $y_0=\rho_0\sin\theta$; 且 $\rho_0^2\sin^2\theta=4a\rho_0\cos\theta$. 显然 $\sin\theta\neq 0$, 故 $\rho_0=\frac{4a\cos\theta}{\sin^2\theta}\cdots$①. $\because\ OP\cdot OQ=k^2$, $\therefore\ \rho\rho_0=k^2$. 以 ① 代入，得 $4a\rho\cos\theta=k^2\sin^2\theta\cdots$②. 设点 P 的坐标为 (x, y), 则 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$. 故 ② 可化为 $4ax(x^2+y^2)=k^2y^2$. 此即所求的轨迹方程.

［说明］ (1) 本题解答采用直角坐标和极坐标相结合的方法，② 式即点 P 的极坐标方程. 由于给出的是直角坐标系，故最后应以 $4ax(x^2+y^2)=k^2y^2$ 作为所求的轨迹方程. 这是一种有效的解题手段.



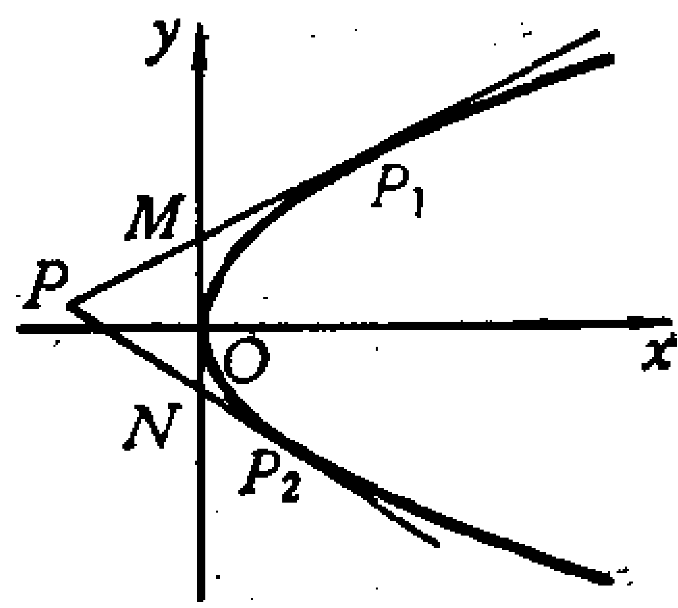
(2) 满足条件 $OP\cdot OQ=k^2$ 的点 $Q(x', y')$ 变换到点 $P(x, y)$ 的几何变换称为反演变换，O 称为反演中心，k 为反演半径.

$$\because\ \frac{OM}{OM'}=\frac{MP}{M'Q}=\frac{OP}{OQ}=\frac{OP\cdot OQ}{OQ^2}=\frac{k^2}{x'^2+y'^2},$$

$$\therefore\ \begin{cases} x=\dfrac{k^2x'}{x'^2+y'^2} \\ y=\dfrac{k^2y'}{x'^2+y'^2} \end{cases} \text{或} \begin{cases} x'=\dfrac{k^2x}{x^2+y^2} \\ y'=\dfrac{k^2y}{x^2+y^2}. \end{cases}$$

这是直角坐标反演变换方程. 极坐标变换方程为 $\begin{cases} \rho=\dfrac{k^2}{\rho_0} \\ \theta=\theta_0. \end{cases}$

1045. 抛物线 $y^2=4ax$ 上两动点 P_1、P_2 的切线交于 P 点. 过顶点的切线与此两切线围成的三角形 PMN 的面积为常数 C^2. 求点 P 的轨迹方程.

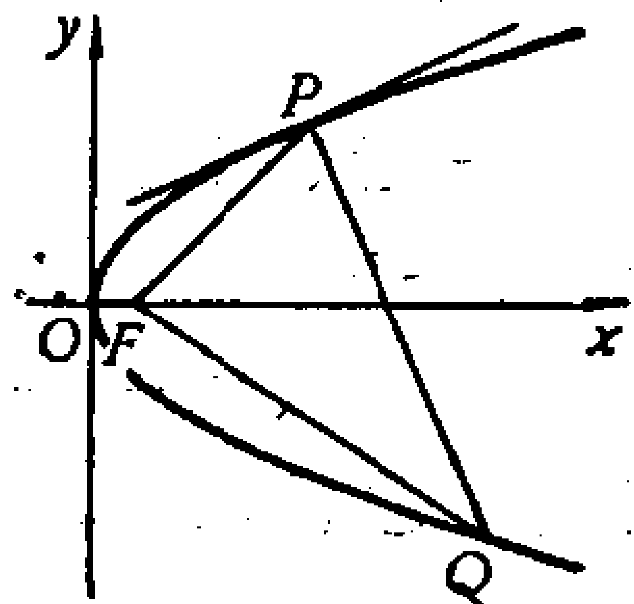


[解] 设点 P 的坐标为 (x, y), 点 P_1、P_2 的坐标分别为 $(at_1^2, 2at_1)$ 和 $(at_2^2, 2at_2)$. 则切线 P_1P 的方程为 $x-t_1y+at_1^2=0$…①, P_2P 的方程为 $x-t_2y+at_2^2=0$…②. 而过顶点的切线方程为 $x=0$, 代入①, 得点 M 的坐标为 $(0, at_1)$. 同理得 N 的坐标为 $(0, at_2)$. $\therefore |MN|=|a(t_1-t_2)|$. $\because S_{\triangle PMN}=C^2$, $\therefore \frac{1}{2}|x|\cdot|MN|=C^2$. 即 $x^2a^2(t_1-t_2)^2=4C^4$…③. 由①、②可知 t_1、t_2 是方程 $at^2-yt+x=0$ 的两根, $\therefore (t_1-t_2)^2=(t_1+t_2)^2-4t_1t_2=\frac{y^2-4ax}{a^2}$. 代入③, 即得所求的轨迹方程

$$x^2(y^2-4ax)=4C^4.$$

1046. 设过抛物线 $y^2=4ax$ 上一点 P 的法线交抛物线于另一点 Q, F 为抛物线的焦点, 试求 $\triangle FPQ$ 重心的轨迹方程.

[分析] $\triangle FPQ$ 重心的位置和 PQ 的端点位置有关, 而 PQ 是过点 P 的法线, 故点 P、Q 的坐标必满足一定关系, 再根据重心坐标公式列出轨迹上任一点的坐标和参数之间的两个关系式, 从以上三个关系式中消去两个参数即得轨迹方程.



[解] 设法线弦两端的坐标分别为 $P(at_1^2, 2at_1)$、$Q(at_2^2, 2at_2)$, 且 $t_1\neq t_2$, $t_1\neq 0$(否则法线为抛物线的对称轴, 点 Q 不存在). 由 $\frac{y-2at_1}{2a(t_1-t_2)}=\frac{x-at_1^2}{a(t_1^2-t_2^2)}$, 得弦 PQ 的方程为 $y(t_1+t_2)=2x+2at_1t_2$…①. 过点 P 的法线方程为 $y+t_1x=2at_1+at_1^3$…②. $\because$ 弦 PQ 与点 P 的法线重合, $\therefore \frac{t_1+t_2}{1}=-\frac{2}{t_1}=\frac{2at_1t_2}{2at_1+at_1^3}$, 得 $t_1+t_2=-\frac{2}{t_1}$…③. 设 (x, y) 为 $\triangle FPQ$ 的重心, $\therefore x=\frac{a(1+t_1^2+t_2^2)}{3}$…④,

$y=\frac{2a(t_1+t_2)}{3}\cdots$⑤. 由③、⑤得 $t_1=-\frac{4a}{3y}$, $\therefore t_2=\frac{4a}{3y}+\frac{3y}{2a}$. 代入④,得 $3x=a\left(5+\frac{32a^2}{9y^2}+\frac{9y^2}{4a^2}\right)$. 故所求重心的轨迹方程为

$$36ay^2(3x-5a)-81y^4=128a^4.$$

1047. 求内接于抛物线 $y^2=2px$ 的正三角形的中心的轨迹.

[分析] 从第1009题已证实以抛物线上任意一点为顶点的内接正三角形一定存在, 故可取内接正三角形的顶点 P_i 的坐标 $(2pt_i^2, 2pt_i)$ $(i=1, 2, 3)$为参数. 根据 $\triangle P_1P_2P_3$ 为正三角形的充要条件: $|P_1P_2|=|P_1P_3|$, $\angle P_2P_1P_3=\frac{\pi}{3}$, 建立 t_1、t_2、t_3 所满足的两个方程. 因轨迹上任意一点 $P(x, y)$为 $\triangle P_1P_2P_3$ 的中心, 又得两个方程. 从以上四个方程消去参数,即得轨迹方程.

[解] 设抛物线 $y^2=2px$ 内接正三角形三顶点坐标为 $P_i(2pt_i^2, 2pt_i)$ $(i=1, 2, 3)$, 此三角形的中心 P 的坐标为(x, y),

$$\therefore\quad x=\frac{2p}{3}(t_1^2+t_2^2+t_3^2)\cdots①,\quad y=\frac{2p}{3}(t_1+t_2+t_3)\cdots②.$$

$\because$ $\triangle P_1P_2P_3$ 是正三角形, $\therefore$ $\overrightarrow{P_1P_3}=\overrightarrow{P_1P_2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ (设 P_1、P_2、P_3 按逆时针序). 从此得

$$2p(t_2-t_1)[(t_1+t_2)+i]\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2p(t_3-t_1)[(t_3+t_1)+i],$$

即 $(t_2-t_1)(t_2+t_1-\sqrt{3})=2(t_3-t_1)(t_3+t_1)\cdots$③, $(t_2-t_1)[1+\sqrt{3}(t_2+t_1)]=2(t_3-t_1)\cdots$④. $\therefore$ $(2t_3^2-t_1^2-t_2^2)(t_2+t_1)=-(2t_3-t_1-t_2)$, 即

$$(3t_3^2-t_1^2-t_2^2-t_3^2)(t_1+t_2)=-(3t_3-t_1-t_2-t_3)\cdots⑤.$$

以①、②代入⑤, 得

$$\left(3t_3^2-\frac{3x}{2p}\right)\left(\frac{3y}{2p}-t_3\right)=\frac{3y}{2p}-3t_3,$$

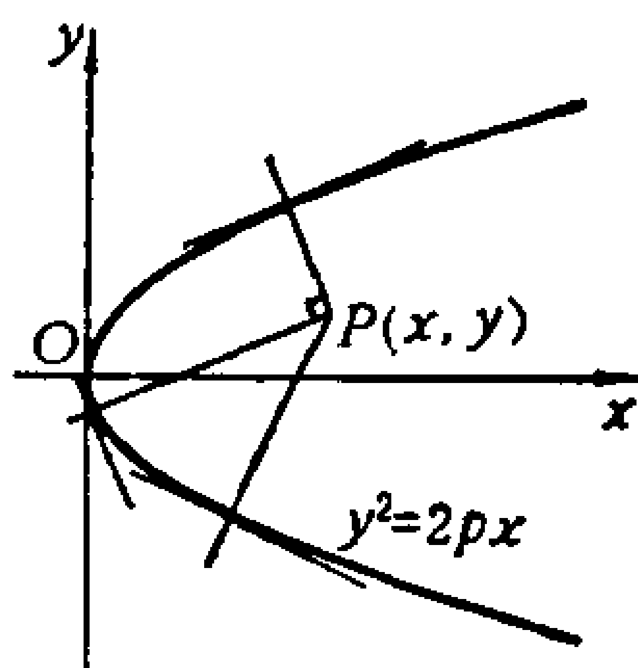
$\therefore$ t_1、t_2、t_3 是方程 $t^3-\frac{3y}{2p}t^2-\left(1+\frac{x}{2p}\right)t+\frac{y}{2p}+\frac{3xy}{4p^2}=0$ 的根. 由韦达定理得 $t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=-\left(1+\frac{x}{2p}\right)$, $\because$ $t_1^2+t_2^2+t_3^2+2(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1)=(t_1+t_2+t_3)^2$, $\therefore$ $\frac{3x}{2p}-2\left(\frac{x}{2p}+1\right)=\left(\frac{3y}{2p}\right)^2$, 即 $9y^2=2p(x-4p)$. 故所

求轨迹是以$(4p,\ 0)$为顶点，$\frac{2p}{9}$为通径长，开口向右的抛物线.

［说明］ 利用$\triangle P_1P_2P_3$是正三角形的另一充要条件：重心与垂心重合，也可得两个方程，从方程①、②与此两方程消去参数也可得解.

1048. 自一动点引抛物线的三法线，如果其中两条法线互相垂直，求此动点的轨迹方程.

［分析］ 每一轨迹点必对应抛物线上三个点，即对应三个参数t_1、t_2、t_3，因为三法线共点，所以t_1、t_2、t_3应是法线方程$2tx+y=4pt^3+2pt$的三个实根，又因有两条法线互相垂直，可得t_1、t_2间的一个关系式. 再由韦达定理消去t_3后即得.



［解］ 设抛物线方程为$y^2=2px$，则过抛物线上任意一点$(2pt^2,\ 2pt)$的法线方程为$2tx+y=4pt^3+2pt$…①，其斜率$k=-2t$…②. 设自动点$(x,\ y)$所引三法线l_i和抛物线的交点为$(2pt_i^2,\ 2pt_i)$ $(i=1,\ 2,\ 3)$，则t_i即为方程$4pt^3+2(p-x)t-y=0$…③ 的根. 故$t_1\cdot t_2\cdot t_3=\frac{y}{4p}$…④. $\because l_1\perp l_2$，$\therefore k_1\cdot k_2=-1$. 由②得$4t_1t_2=-1$…⑤. 代入④，得$t_3=-\frac{y}{p}$. 以此代入③，得$y^3=\frac{py}{2}\left(x-\frac{3}{2}p\right)$. 当$y\neq0$时，有$y^2=\frac{p}{2}\left(x-\frac{3}{2}p\right)$…⑥. 当$y=0$时，由③、⑤可知$x=\frac{3}{2}p$. 点$\left(\frac{3}{2}p,\ 0\right)$仍适合方程⑥，故方程⑥即为所求的轨迹方程.

［说明］ 涉及抛物线三法线的问题，一般都利用法线足为$(2pt^2,\ 2pt)$的法线方程$2tx+y=4pt^3+2pt$，再由韦达定理与方程根的概念求解.

第八章　一般二次曲线

1. 一般二次曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 的分类

平移、旋转不变式：$H=A+C$，$\Delta=B^2-4AC$，$\Theta=\begin{vmatrix}2A & B & D\\ B & 2C & E\\ D & E & 2F\end{vmatrix}$. 半不变式：$K=D^2+E^2-4AF-4CF$.

<table>
<tr><th>型　别</th><th colspan="2">判　定　条　件</th><th>类　　别</th><th>化简后的方程</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$\Delta<0$
椭圆型</td><td rowspan="2">$\Theta\neq0$</td><td>$H\Theta<0$</td><td>椭圆</td><td rowspan="5">$A'x''^2+C'y''^2=\frac{\Theta}{2\Delta}$.
$B>0$ 时，$A'>C'$；
$B<0$ 时，$A'<C'$；
A'、C' 是方程
$\lambda^2-H\lambda-\frac{\Delta}{4}=0$
的根。</td></tr>
<tr><td>$H\Theta>0$</td><td>无轨迹(虚椭圆)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Theta=0$</td><td>点椭圆</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\Delta>0$
双曲线型</td><td colspan="2">$\Theta\neq0$</td><td>双曲线</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Theta=0$</td><td>两相交直线</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\Delta=0$
抛物线型</td><td colspan="2">$\Theta\neq0$</td><td>抛物线</td><td>$Hy''^2\pm\sqrt{-\frac{\Theta}{2\Delta}}x''=0$
$(B<0)$.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\Theta=0$</td><td>$K>0$</td><td>两条平行线</td><td rowspan="3">$Hy''^2-\frac{K}{4H}=0$
$(B<0)$.</td></tr>
<tr><td>$K=0$</td><td>两重合直线</td></tr>
<tr><td>$K<0$</td><td>无轨迹
(两虚平行直线)</td></tr>
</table>

2．一般二次曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 的化简

(1) $\Delta=B^2-4AC\neq0$，中心型二次曲线.

先平移：$\begin{cases}x=x'+x_0\\ y=y'+y_0,\end{cases}$ x_0、y_0 是方程组 $\begin{cases}2Ax+By+D=0\\ Bx+2Cy+E=0\end{cases}$ 的解. 平移后方程化为 $Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+\frac{1}{2}(Dx_0+Ey_0+2F)=0$. 其中 $\frac{1}{2}(Dx_0+Ey_0+2F)=-\frac{\Theta}{2\Delta}$. 再旋转，若 $B\neq0$，取 $\operatorname{ctg}2\theta=\frac{A-C}{B}$. 旋转后方程化为 $A'x''^2+C'y''^2=\frac{\Theta}{2\Delta}$.

(2) $\Delta=B^2-4AC=0$，非中心型二次曲线.

当 $A>0$，$B<0$ 时，原方程为 $(\sqrt{A}x-\sqrt{C}y)^2+Dx+Ey+F=0$，取 $\operatorname{ctg}\theta=\sqrt{\frac{C}{A}}$，旋转后方程化为 $C'y'^2+D'x'+E'y'+F=0$. 其中

$$C'=H,\quad D'=\frac{D\sqrt{C}+E\sqrt{A}}{\sqrt{A+C}},$$

$$E'=\frac{-D\sqrt{A}+E\sqrt{C}}{\sqrt{A+C}},\quad D'^2+E'^2=D^2+E^2.$$

当 $\Theta\neq0$ 时，再平移，方程化为 $Hy''^2\pm\sqrt{-\frac{\Theta}{2H}}x''=0$；当 $\Theta=0$ 时，方程化为 $C'y'^2+E'y+F=0$.

当 $A>0$，$B>0$ 时，原方程为 $(\sqrt{A}x+\sqrt{C}y)^2+Dx+Ey+F=0$，先旋转，方法同上，方程化为 $A'x'^2+D'x'+E'y'+F=0$；再平移，若 $\Theta\neq0$，方程化为 $Hx''^2\pm\sqrt{-\frac{\Theta}{2H}}y''=0$；若 $\Theta=0$，方程化为 $A'x''^2+D'x'+F=0$.

3．过二次曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 上一点 $(x_1,\ y_1)$ 的切线方程(见第 1065 题)：

$$Ax_1x+B\frac{y_1x+x_1y}{2}+Cy_1y+D\frac{x+x_1}{2}+E\frac{y+y_1}{2}+F=0,$$

或

$$(2Ax_1+By_1+D)x+(Bx_1+2Cy_1+E)y+Dx_1+Ey_1+2F=0. \qquad (8.31)$$

4. 点 (x_0, y_0) 关于二次曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 的切点弦方程(见第 1072 题):

$$Ax_0x+B\frac{y_0x+x_0y}{2}+Cy_0y+D\frac{x+x_0}{2}+E\frac{y+y_0}{2}+F=0. \qquad (8.41)$$

点 (x_0, y_0) 关于此二次曲线的极线方程与(8.41)相同.

5. 二次曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 的平分斜率为 k 的平行弦的直径方程(见第 1077 题):

$$(2Ax+By+D)+k(Bx+2Cy+E)=0,$$

或

$$(2A+Bk)x+(B+2Ck)y+D+Ek=0. \qquad (8.51)$$

此直径的斜率为 k', 其共轭直径的斜率为 k. 它们满足条件(见第 1087 题):

$$2A+(k+k')B+2Ckk'=0. \qquad (8.52)$$

二次曲线焦点所在的直径称为它的主轴.

二次曲线一对互相垂直的共轭直径称为它的主直径, 简称主径. 有心锥线的主径方程: $B(y-y_0)^2-2(C-A)(x-x_0)(y-y_0)-B(x-x_0)^2=0$, 其中 (x_0, y_0) 为中心的坐标. (8.53)

无心锥线的主径(对称轴)方程:

$$2(A+C)(2Ax+By)+2AD+BE=0. \qquad (8.54)$$

6. 焦点在极点上, 以焦点到准线的垂线的反向延长线为极轴的圆锥曲线方程:

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta} \quad 或 \quad \rho=-\frac{ep}{1+e\cos\theta}. \qquad (8.61)$$

(1) 过 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$ 上两点 $Q_1(\rho_1,\ \theta_1)$、$Q_2(\rho_2,\ \theta_2)$ 的连线方程(见第1064题):

$$\frac{ep}{\rho}=\sec\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\cos\left(\theta-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)-e\cos\theta. \quad (8.62)$$

(2) 过 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$ 上一点 $(\rho,\ \alpha)$ 的切线方程(见第1067题):

$$\frac{ep}{\rho}=\cos(\theta-\alpha)-e\cos\theta. \quad (8.63)$$

7. 二次曲线系(参见第1084、1085、1091题)

定理 过两已知二次曲线 $S_i(x,\ y)=A_ix^2+B_ixy+C_iy^2+D_ix+E_iy+F_i=0(i=1,\ 2)$ 的四个交点的二次曲线系方程:

$$S_1(x,\ y)=\lambda S_2(x,\ y). \quad (8.71)$$

其中 λ 为任意常数,曲线系中不包括二次曲线 $S_2(x,\ y)=0$.

推论1 若 $S_2(x,\ y)=(l_1x+m_1y+n_1)(l_2x+m_2y+n_2)$, 则(8.71)为过两直线 $l_1x+m_1y+n_1=0$, $l_2x+m_2y+n_2=0$ 和 $S_1(x,\ y)=0$ 的四个交点的二次曲线系. (8.72)

推论2 若 $S_2(x,\ y)=(lx+my+n)^2$, 则

$$S_1(x,\ y)=\lambda(lx+my+n)^2$$

为与 $S_1(x,\ y)=0$ 相切的二次曲线系, 其切点为直线 $lx+my+n=0$ 和 $S_1(x,\ y)=0$ 的两交点. (8.73)

推论3 若 $S_1(x,\ y)=0$, $S_2(x,\ y)=0$ 都退化为两直线, 此两对直线四个交点依次为 A、B、C、D; 以 $l_{AB}=0$、$l_{BC}=0$、$l_{CD}=0$、$l_{DA}=0$ 分别表示直线 AB、BC、CD、DA 的方程, 则 $l_{AB}\cdot l_{CD}=\lambda l_{BC}\cdot l_{DA}$ 为过 A、B、C、D 四点的二次曲线系. (8.74)

定理 若 $\triangle ABC$ 三边 BC、CA、AB 所在的直线方程分别为 $l_{BC}=0$、$l_{CA}=0$、$l_{AB}=0$, 则过 A、B、C 三点的二次曲线系方程

为 $l_{BC}\cdot l_{CA}+\lambda l_{CA}\cdot l_{AB}+\mu l_{AB}\cdot l_{BC}=0$, 其中 λ、μ 为任意常数. (8.75)

§1. 一般二次曲线方程及其化简

1049. 作曲线 C: $41x^2+24xy+9y^2+24x+18y-36=0$ 的图象,并求其焦点坐标和准线方程.

[解一] $\because \Delta=B^2-4AC=-900<0$, $\therefore$ 曲线为椭圆型. 其中心为方程组 $\begin{cases}82x+24y+24=0\\24x+18y+18=0\end{cases}$ 的解: $\begin{cases}x_0=0\\y_0=-1.\end{cases}$ 先平移: $\begin{cases}x=x'+x_0\\y=y'+y_0,\end{cases}$ 原方程化为 $41x'^2+24x'y'+9y'^2=45\cdots$①. 再旋转: $\begin{cases}x'=x''\cos\theta-y''\sin\theta\\y'=x''\sin\theta+y''\cos\theta,\end{cases}$ 取 $\operatorname{ctg}2\theta=\dfrac{A-C}{B}=\dfrac{4}{3}$, $\therefore \cos 2\theta=\dfrac{4}{5}$, $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. 方程①化为 $45x''^2+5y''^2=45$, 即 $\dfrac{x''^2}{1}+\dfrac{y''^2}{9}=1$. 在 $x''O'y''$ 坐标系中焦点坐标为$(0,\ 2\sqrt{2})$、$(0,\ -2\sqrt{2})$; 准线方程为 $y''=\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$, $y''=-\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$.

$\because \begin{cases}x=x''\cos\theta-y''\sin\theta+x_0\\y=x''\sin\theta+y''\cos\theta+y_0,\end{cases}$ $\therefore$ 在原坐标系 xOy 中焦点坐标为

$$\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\ \frac{6\sqrt{5}}{5}-1\right)、\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\ -\frac{6\sqrt{5}}{5}-1\right).$$

$$\because \begin{cases}x''=(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta\\y''=-(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta,\end{cases}$$

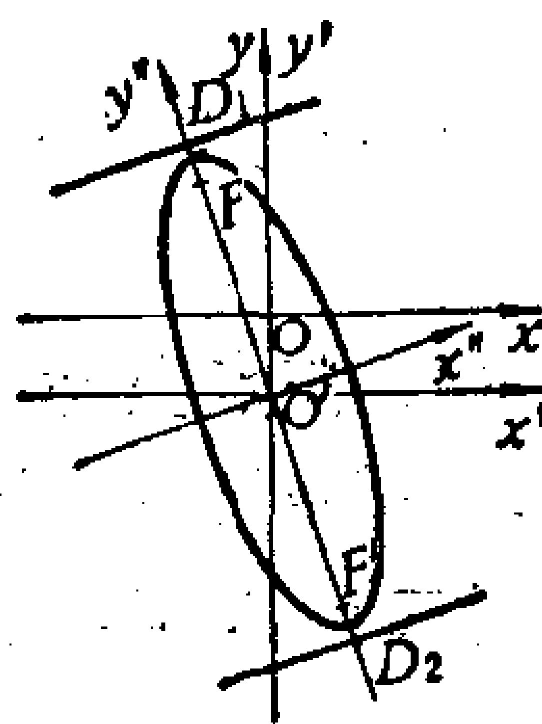
$\therefore$ 在原坐标系 xOy 中准线方程为

$$-\frac{x}{\sqrt{10}}+(y+1)\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{9\sqrt{2}}{4} \quad 和 \quad -\frac{x}{\sqrt{10}}+(y+1)\frac{3}{\sqrt{10}}=-\frac{9\sqrt{2}}{4},$$

即 $x-3y=3-\dfrac{9\sqrt{5}}{2}$ 和 $x-3y=3+\dfrac{9\sqrt{5}}{2}$.

[解二] $\because \Delta<0$, 曲线为椭圆型,故原方程可化为 $A'x''^2+C'y''^2=\dfrac{\Theta}{2\Delta}$. 其中 A'、C' 是方程 $\lambda^2-H\lambda-\dfrac{\Delta}{4}=0$, 即 $\lambda^2-50\lambda+225=0$ 的根: 5 或 45.

而 $B=24>0$, $\therefore A'>C'$, $\therefore A'=45,\ C'=5$. $\frac{\Theta}{2\Delta}=-\frac{Dx_0+Ey_0+2F}{2}=45$. 于是原方程化简为 $\frac{x''^2}{1}+\frac{y''^2}{9}=1$. $\because \operatorname{ctg}2\theta=\frac{4}{3}$, $\therefore 3\operatorname{tg}^2\theta+8\operatorname{tg}\theta-3=0$, 解得 $\operatorname{tg}\theta_1=\frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\theta_2=-3$. 即椭圆长轴($y''$ 轴)的斜率为 -3. 又,中心坐标为$(0,\ -1)$,故长轴的参数方程为



$$\begin{cases}x=t\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}t\\ y=-1+t\sin\theta=-1+\frac{3}{\sqrt{10}}t.\end{cases}$$

半焦距 $c=2\sqrt{2}$, 中心到准线的距离

$$d=\frac{a^2}{c}=\frac{9}{2\sqrt{2}}.$$

当 $t=\pm c$ 时,即得焦点坐标: $F\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\ \frac{6\sqrt{5}}{5}-1\right)$、$F'\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\ -\frac{6\sqrt{5}}{5}-1\right)$. 当 $t=\pm d$ 时,即得长轴与准线交点 D_1、D_2 的坐标: $\left(-\frac{9}{20}\sqrt{5},\ \frac{27}{20}\sqrt{5}-1\right)$、$\left(\frac{9}{20}\sqrt{5},\ -\frac{27}{20}\sqrt{5}-1\right)$, 而准线的斜率即 x'' 轴的斜率为 $\frac{1}{3}$, 故准线方程为

$$x-3y=3-\frac{9\sqrt{5}}{2}\quad 和\quad x-3y=3+\frac{9\sqrt{5}}{2}.$$

1050. 作曲线 C: $4xy+3y^2+16x+12y-36=0$ 的图象, 并求其焦点坐标、准线方程和渐近线方程.

[解一] $\because \Delta=B^2-4AC=16>0$, $\therefore$ 曲线为双曲线型. 其中心为方程组

$$\begin{cases}4y+16=0\\ 4x+6y+12=0\end{cases}$$

的解: $\begin{cases}x_0=3\\ y_0=-4.\end{cases}$ 先平移: $\begin{cases}x=x'+x_0\\ y=y'+y_0,\end{cases}$ 原方程化为 $4x'y'+3y'^2=36\cdots$①.

再旋转: $\begin{cases}x'=x''\cos\theta-y''\sin\theta\\ y'=x''\sin\theta+y''\cos\theta,\end{cases}$ 取 $\operatorname{ctg}2\theta=\frac{A-C}{B}=-\frac{3}{4}$,

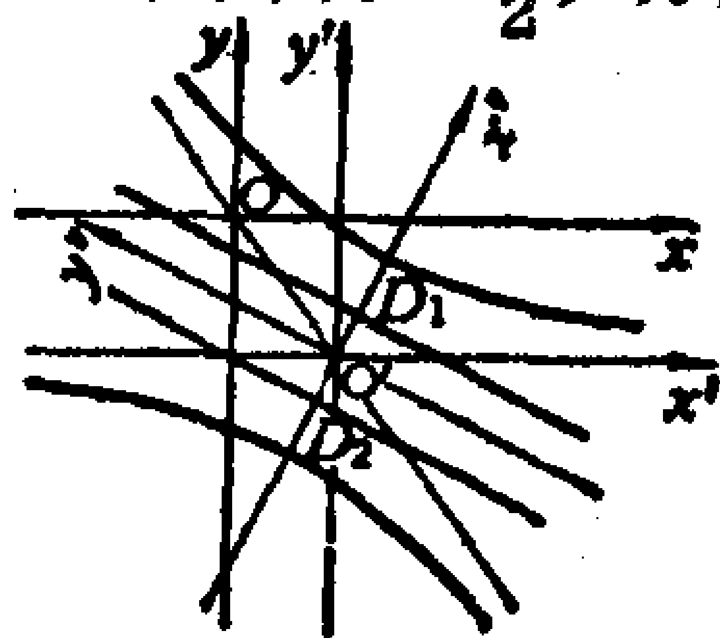
$\therefore\ \cos 2\theta=-\dfrac{3}{5},\ \sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. 故 $\begin{cases} x'=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(x''-2y'') \\ y'=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x''+y''), \end{cases}$

方程①化为$\dfrac{x''^2}{9}-\dfrac{y''^2}{36}=1$. 在坐标系$x''O'y''$中，焦点坐标为$(3\sqrt{5},0)$，$(-3\sqrt{5},0)$；准线方程为$x''=\dfrac{3}{5}\sqrt{5}$，$x''=-\dfrac{3}{5}\sqrt{5}$；渐近线方程为 $2x''-y''=0,\ 2x''+y''=0$. $\because \begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(x''-2y'')+3 \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x''+y'')-4, \end{cases}$ $\therefore$ 在原坐标系 xOy 中，焦点坐标为$(6,\ 2)$、$(0,\ -10)$；准线方程为$x+2y+2=0$，$x+2y+8=0$；渐近线方程为$4x+3y=0,\ y+4=0$.

［解二］ $\because \Delta>0$，曲线为双曲线型，故原方程可化为 $A'x''^2+C'y''^2=\dfrac{\Theta}{2\Delta}$. 其中 A'、C' 是方程 $\lambda^2-H\lambda-\dfrac{\Delta}{4}=0$，即 $\lambda^2-3\lambda-4=0$ 的根：4 或 -1. 而 $B=4>0$，$\therefore A'>C'$，$\therefore A'=4,\ C'=-1$. $\dfrac{\Theta}{2\Delta}=36$. 于是原方程化简为 $\dfrac{x''^2}{9}-\dfrac{y''^2}{36}=1$. $\because \operatorname{ctg}2\theta=-\dfrac{3}{4}$，$\therefore 2\operatorname{tg}^2\theta-3\operatorname{tg}\theta-2=0$，解得 $\operatorname{tg}\theta_1=2,\ \operatorname{tg}\theta_2=-\dfrac{1}{2}$. 即双曲线实轴（$x''$ 轴）的斜率为 2. 又，中心坐标为$(3,\ -4)$，故实轴的参数方程为

$$\begin{cases} x=3+t\cos\theta=3+\dfrac{1}{\sqrt{5}}t \\ y=-4+t\sin\theta=-4+\dfrac{2}{\sqrt{5}}t. \end{cases}$$

半焦距 $c=3\sqrt{5}$，中心到准线的距离 $d=\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{3}{5}\sqrt{5}$. 当 $t=\pm c$ 时，即得焦点坐标：$F(6,\ 2)$、$F'(0,\ -10)$. 当 $t=\pm d$ 时，即得实轴与准线交点 D_1、D_2 的坐标：$\left(\dfrac{18}{5},\ \dfrac{14}{5}\right)$、$\left(\dfrac{12}{5},\ -\dfrac{26}{5}\right)$，而准线斜率为 $-\dfrac{1}{2}$，故准线方程为 $x+2y=-2,\ x+2y=-8$. $\because \operatorname{tg}\beta=\dfrac{b}{a}=2$（$\beta$ 为两渐近线夹角的一半），$\therefore$ 渐近线的斜率：



$$k_1=\operatorname{tg}(\theta_1+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\theta_1+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\theta_1\operatorname{tg}\beta}=-\frac{4}{3},$$

$k_2=\mathrm{tg}(\pi+\theta_1-\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\,\theta_1-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\theta_1\,\mathrm{tg}\,\beta}=0$. 故渐近线的方程为 $4x+3y=0$ 和 $y+4=0$.

1051. 作曲线 C: $9x^2-24xy+16y^2-20x-140y+200=0$ 的图象,并求其焦点坐标和准线方程.

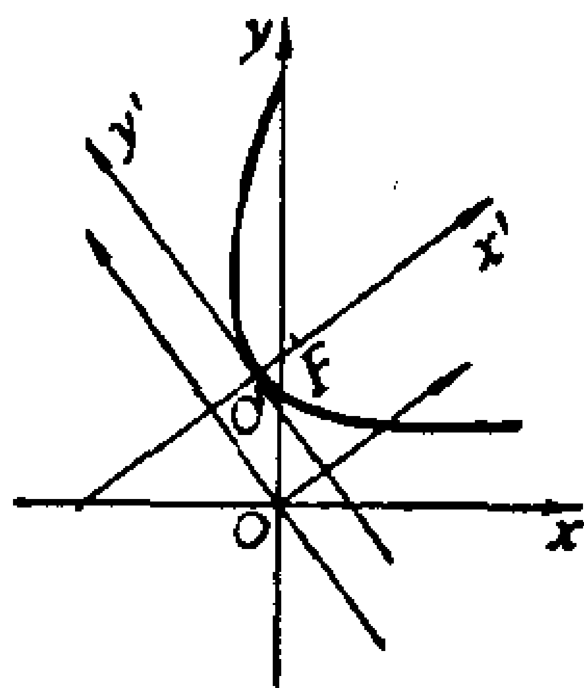
[解一] $\because \Delta=B^2-4AC=0$, $\therefore$ 曲线为抛物线型. 先旋转:

$$\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta\\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta,\end{cases}$$

取 $\mathrm{ctg}\,\theta=\dfrac{4}{3}$, $\therefore \cos\theta=\dfrac{4}{5}$, $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$. 原方程化为 $25y'^2-100x'-100y'+200=0$, 即 $(y'-2)^2=4(x'-1)\cdots$①. 再平移 $\begin{cases}x'=x''+1\\ y'=y''+2,\end{cases}$ 方程①化为 $y''^2=4x''$. 在坐标系 $x''O'y''$ 中焦点坐标为(1, 0), 准线方程为 $x''=-1$. 代入 $\begin{cases}x=\dfrac{4}{5}(x''+1)-\dfrac{3}{5}(y''+2)\\ y=\dfrac{3}{5}(x''+1)+\dfrac{4}{5}(y''+2),\end{cases}$ 得在原坐标系 xOy 中焦点坐标为 $F\left(\dfrac{2}{5},\ \dfrac{14}{5}\right)$, 准线方程为 $4x+3y=0$.

[解二] $\because \Delta=B^2-4AC=0$, $\therefore$ 原方程为 $(3x-4y)^2=20x+140y-200$. 取 λ 为待定常数, 将上式配方, 得 $(3x-4y+\lambda)^2=(20+6\lambda)x+(140-8\lambda)y+\lambda^2-200$. 使直线 $3x-4y+\lambda=0$ 和 $(20+6\lambda)x+(140-8\lambda)y+\lambda^2-200=0$ 互相垂直, 故 $3(20+6\lambda)-4(140-8\lambda)=0$, 得 $\lambda=10$. 原方程化为

$$(3x-4y+10)^2=20(4x+3y-5)\cdots①.$$



先作直线 $3x-4y+10=0$ 和 $4x+3y-5=0$ 的图象, 根据它们的法线方向,确定以此两直线为坐标轴的正向, 因 x' 轴转到 y' 轴为逆时针向, 故确定以 $3x-4y+10=0$ 为 x' 轴, $4x+3y-5=0$ 为 y' 轴. 在坐标系 $x'O'y'$ 中,点 $P(x',y')$ 的坐标,即点 P 关于 y' 轴和 x' 轴的离差: $\begin{cases}x'=\dfrac{4x+3y-5}{5}\\ y'=\dfrac{3x-4y+10}{-5}\end{cases}\cdots$②. 代入

①，原方程化为 $y'^2=4x'$. 在坐标系 $x'O'y'$ 中，焦点坐标为(1, 0)，准线方程为 $x'=-1$. 代入②，即得在坐标系 xOy 中焦点坐标为 $F\left(\frac{2}{5}, \frac{14}{5}\right)$，准线方程为 $4x+3y=0$.

［说明］ 第二种解法对于非中心型二次曲线是普遍适用的. 只要 $\Delta=0$，原方程可通过配方法化为 $(lx+my+n)^2=4p(mx-ly+k)$. $lx+my+n=0$ 为抛物线的对称轴，$mx-ly+k=0$ 为抛物线过顶点的切线. 抛物线的通径长为 $\frac{4|p|}{\sqrt{l^2+m^2}}$.

1052. 把坐标轴旋转 $\frac{\pi}{4}$，同时把原坐标系的原点平移到坐标系 $x'O'y'$ 中的点 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 以后，得到一圆锥曲线的新方程为 $x''^2=\frac{\sqrt{2}}{2}y''$. 求圆锥曲线在原坐标系中的方程.

［解］ 转轴公式为 $\begin{cases} x=x'\cos\frac{\pi}{4}-y'\sin\frac{\pi}{4} \\ y=x'\sin\frac{\pi}{4}+y'\cos\frac{\pi}{4}, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x'=\frac{x+y}{\sqrt{2}} \\ y'=\frac{-x+y}{\sqrt{2}}; \end{cases}$ 平移公式为 $\begin{cases} x'=x''-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y'=y''-\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x''=x'+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y''=y'+\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$ 先后代入 $x''^2=\frac{\sqrt{2}}{2}y''$，即得曲线在原坐标系中的方程 $x^2+2xy+y^2+3x+y=0$.

1053. (1) 应用坐标变换，把方程 $x^2-2xy\cos 2\alpha+y^2=2a^2$ 化为最简形式 $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}, a\neq 0\right)$；(2) 如果 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$，试讨论它表示什么曲线？

［解］ (1) ∵ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}, a\neq 0, B^2-4AC=4\cos^2 2\alpha-4=-4\sin^2 2\alpha<0$，∴ 原方程是椭圆型方程. $\operatorname{ctg}2\theta=\frac{A-C}{B}=0$，∴ $\theta=45°$，转轴公式为
$\begin{cases} x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}} \\ y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}. \end{cases}$ 代入原方程，得 $x'^2(1-\cos 2\alpha)+y'^2(1+\cos 2\alpha)=2a^2$，即

$$\frac{x'^2}{\frac{a^2}{\sin^2\alpha}}+\frac{y'^2}{\frac{a^2}{\cos^2\alpha}}=1.$$

(2) 当 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时，表示椭圆；当 $\alpha=0$ 时，原方程变为 $x^2-2xy+y^2=2a^2$，即 $x-y+\sqrt{2}a=0$ 及 $x-y-\sqrt{2}a=0$，表示两平行线；当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，原方程变为 $x^2+2xy+y^2=2a^2$，即 $x+y+\sqrt{2}a=0$ 及 $x+y-\sqrt{2}a=0$，也表示两条平行线.

1054. 抛物线的顶点坐标是 $A(\sqrt{3},\ 1)$，焦点坐标是 $F(2\sqrt{3},\ 2)$. 它沿对称轴平行移动，求它与 x 轴相切时的切点坐标.

［分析一］ 给定顶点和焦点就确定了抛物线，它的对称轴也随着确定，这里对称轴倾角为 30°，因此可利用坐标变换把它化成标准方程来求.

［解一］ 作转轴变换 $\begin{cases}x'=\frac{1}{2}(\sqrt{3}x+y)\\ y'=\frac{1}{2}(-x+\sqrt{3}y),\end{cases}$ 则点 A、F 的新坐标分别是(2, 0)、(4, 0). 在新坐标系中，抛物线方程为 $y'^2=8(x'-2)$，原 x 轴方程为 $y'=-\frac{1}{\sqrt{3}}x'$. 设抛物线沿对称轴平行移动 m 个单位和原 x 轴相切，则抛物线的方程为 $y'^2=8(x'-2-m)$，故消去 y' 后所得关于 x' 的二次方程 $x'^2-24x'+24(2+m)=0$ 的判别式 $\Delta=24^2-4\cdot24(2+m)=0$. $\therefore m=4$，从而解得切点坐标 $x'=12$，$y'=-4\sqrt{3}$. 再利用变换公式 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}(\sqrt{3}x'-y')\\ y=\frac{1}{2}(x'+\sqrt{3}y'),\end{cases}$ 即得切点在原坐标系中的坐标 $(8\sqrt{3},\ 0)$.

［分析二］ 写出沿对称轴平行移动的抛物线系的方程，即可利用与 x 轴相切的条件，求出切点坐标. 由焦点、顶点坐标可得对称轴方程与通径之长，从而写出符合题意的抛物线系方程.

［解二］ 由顶点 $A(\sqrt{3},\ 1)$ 与焦点 $F(2\sqrt{3},\ 2)$ 可得对称轴方程为 $x-\sqrt{3}y=0$，通径长为 $4\sqrt{(2\sqrt{3}-\sqrt{3})^2+(2-1)^2}=8$.

故此抛物线沿对称轴平行移动所得的抛物线系方程为

$$\left(\frac{x-\sqrt{3}y}{2}\right)^2=8\left(\frac{\sqrt{3}x+y+\lambda}{2}\right),$$

即$(x-\sqrt{3}y)^2=16(\sqrt{3}x+y+\lambda)$，其中 λ 为参数．当此抛物线与 x 轴相切，则$x^2-16\sqrt{3}x-16\lambda=0$ 有等根，其根即所求切点的横坐标．故切点坐标为$(8\sqrt{3},\ 0)$．

1055．证明方程 $5x^2-2xy+2y^2-8x-2y+5=0$ 表示一个点．

［证］ $\because 5x^2-2xy+2y^2-8x-2y+5=4x^2-4xy+y^2-4x+2y+1+x^2+2xy+y^2-4x-4y+4=(2x-y-1)^2+(x+y-2)^2=0$．

$$\therefore\ \begin{cases}2x-y-1=0\\ x+y-2=0,\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=1\\ y=1.\end{cases}$ 故此方程表示一个点(1, 1)．

1056．证明方程 $2x^2+5xy-3y^2+3x+16y-5=0$ 表示两条相交直线．

［证］ $\because 2x^2+5xy-3y^2+3x+16y-5=(2x-y+5)(x+3y-1)$，$\therefore$ 原方程表示两条相交直线：$2x-y+5=0$ 和 $x+3y-1=0$．

1057．证明方程 $x^2+4xy+4y^2+2x+4y-3=0$ 表示两条平行直线．

［证］
$$\because x^2+4xy+4y^2+2x+4y-3=(x+2y)^2+2(x+2y)-3=(x+2y+3)(x+2y-1),$$

$\therefore$ 原方程表示两条平行直线：$x+2y+3=0$ 和 $x+2y-1=0$．

1058．如果方程 $6x^2+11xy-10y^2+x+31y+k=0$ 的图形是退化圆锥曲线，求 k 的值．

［解］ 化原方程为$(2x+5y)(3x-2y)+x+31y+k=0$，因原方程的图形是退化圆锥曲线，故可设其方程为$(2x+5y+a)(3x-2y+b)=0$，即$(2x+5y)(3x-2y)+(3a+2b)x-(2a-5b)y+ab=0$．和原方程比较，得$3a+2b=1$，$-2a+5b=31$，$ab=k$．由前两式解得 $a=-3$，$b=5$；代入后一式即得 $k=-15$．

1059. a 为何值时，方程 $x^2+2xy+ay^2+3x+9y=0$ 表示两条直线，并求出它们的方程.

[解] 设原方程可化为$(x+my+n)(x+py)=0$，即 $x^2+(m+p)xy+mpy^2+nx+npy=0$. 和原方程比较，得 $m+p=2$, $mp=a$, $n=3$, $np=9$. 由此可得 $m=-1$, $a=-3$, $n=3$, $p=3$. ∴当 $a=-3$ 时，原方程可表示两条直线，其方程为 $x-y+3=0$ 和 $x+3y=0$.

1060. 设方程 $2x^2+\lambda xy+2y^2-7x+\mu y+3=0$ 表示一对平行直线，求 λ 和 μ.

[解一] ∵ 方程 $2x^2+\lambda xy+2y^2-7x+\mu y+3=0$ 表示一对平行直线，故可设此方程为 $(ax+by+m)(ax+by+n)=0$，即 $a^2x^2+2abxy+b^2y^2+a(m+n)x+b(m+n)y+mn=0$. 和原方程比较得 $a^2=2$, $b^2=2$, $2ab=\lambda, a(m+n)=-7$, $b(m+n)=\mu$. 由此可解得

$$\lambda=4,\ \mu=-7;\ 或\ \lambda=-4,\ \mu=7.$$

[解二] ∵方程 $2x^2+\lambda xy+2y^2-7x+\mu y+3=0$ 表示一对平行直线，故可视其为抛物线型方程. ∴ $\Delta=\lambda^2-4\cdot 2\cdot 2=0$，得 $\lambda=\pm 4$. 当 $\lambda=4$ 时，设原方程为$(\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+m)(\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+n)=0$，即 $2x^2+4xy+2y^2+\sqrt{2}(m+n)x+\sqrt{2}(m+n)y+mn=0$. 和原方程比较，得

$$\begin{cases}\sqrt{2}(m+n)=-7\\ \sqrt{2}(m+n)=\mu.\end{cases}$$

∴ $\mu=-7$. 当 $\lambda=-4$ 时，同理可得 $\mu=7$. ∴ $\begin{cases}\lambda=4\\ \mu=-7\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\lambda=-4\\ \mu=7.\end{cases}$

§2. 直线与一般二次曲线的关系

1061. 二次曲线 $F(x, y)=0$ 交直线 $\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\ y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数) 于 A、B. a、b、c 是直线参数方程中消去 x、y 后得到 t 的二次方程 $at^2+bt+c=0$ 的系数.

(1) 若 Q 是弦 AB 的中点，求证点 Q 到点 $P(x_0, y_0)$的距离

$|PQ|=\left|\frac{b}{2a}\right|$;

(2) 若弦 AB 长为 l, 求证 $l=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$.

[证] (1) 根据已知条件, 点 Q 的相应参数值

$$t_Q=\frac{1}{2}(t_A+t_B)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right),\quad \therefore\ |PQ|=|t_Q|=\left|\frac{b}{2a}\right|.$$

(2) 根据已知条件, $l=|t_A-t_B|=\sqrt{(t_A+t_B)^2-4t_A\cdot t_B}$, 又 $t_A+t_B=-\frac{b}{a}$, $t_A\cdot t_B=\frac{c}{a}$, $\therefore l=\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-4\cdot\frac{c}{a}}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$.

1062. 求抛物线 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(bx+ay-ab)^2$ 的通径长,其中 a、b 为正数.

[解] 整理原方程, 得 $a^2x^2-2abxy+b^2y^2=-2ab^2x-2a^2by+a^2b^2$, 即 $(ax-by)^2=-2ab\left(bx+ay-\frac{ab}{2}\right)$, 亦即

$$\left(\frac{ax-by}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=\frac{-2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{bx+ay-\frac{ab}{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

作转轴变换 $\begin{cases}x'=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(bx+ay)\\ y'=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-ax+by),\end{cases}$ 则原方程化简为

$$y'^2=-\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(x'-\frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$ 故通径长 $2p=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

1063. 抛物线 $\rho=\frac{2.5}{1-\cos\theta}$ 的焦点弦长为 20, 求该弦与极轴的夹角.

[解] 设焦点弦长为 20 的弦的极角为 θ, 则 $\frac{2.5}{1-\cos\theta}+\frac{2.5}{1-\cos(\pi+\theta)}=20$, 即 $\frac{1}{1-\cos\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}=8$. 解得 $\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, 故该弦与极轴的夹角为 $\frac{\pi}{6}$、$\frac{5}{6}\pi$.

1064. 求过圆锥曲线 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$ 上任意两点 $Q_1(\rho_1,\ \theta_1)$、$Q_2(\rho_2,\ \theta_2)$的直线方程($\theta_1-\theta_2\neq n\pi,\ n\in J$)。

[解一] 据提要(3.93)，直线 Q_1Q_2 的极坐标方程为 $\dfrac{\sin(\theta_2-\theta_1)}{\rho}=\dfrac{\sin(\theta-\theta_1)}{\rho_2}+\dfrac{\sin(\theta_2-\theta)}{\rho_1}\cdots$①，$\because$ Q_1、Q_2 在圆锥曲线上，$\therefore$ $\dfrac{ep}{\rho_1}=1-e\cos\theta_1\cdots$②，$\dfrac{ep}{\rho_2}=1-e\cos\theta_2\cdots$③. 以②、③代入①，得 $\dfrac{ep}{\rho}\sin(\theta_2-\theta_1)=(1-e\cos\theta_2)\sin(\theta-\theta_1)+(1-e\cos\theta_1)\sin(\theta_2-\theta)\cdots$④. 方程④的右边 $=\sin(\theta-\theta_1)+\sin(\theta_2-\theta)-e[\sin(\theta-\theta_1)\cos\theta_2+\sin(\theta_2-\theta)\cos\theta_1]$ $=2\sin\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}\cos\left(\theta-\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)-e\cos\theta(\sin\theta_2\cos\theta_1-\sin\theta_1\cos\theta_2)$ $=2\sin\dfrac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)\cos\left(\theta-\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)-e\cos\theta\sin(\theta_2-\theta_1)$. 故方程④两边除以 $\sin(\theta_2-\theta_1)$ 即得所求直线方程

$$\frac{ep}{\rho}=\sec\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\cos\left(\theta-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)-e\cos\theta.$$

[解二] 设过 $Q_1(\rho_1,\ \theta_1)$、$Q_2(\rho_2,\ \theta_2)$ 的直线方程为 $\dfrac{ep}{\rho}=L\cos(\theta-\omega)-e\cos\theta\cdots$①，这里 L、ω 是待定常数. $\because$ Q_1、Q_2 在圆锥曲线上，$\therefore$ $\dfrac{ep}{\rho_1}=1-e\cos\theta_1$，$\dfrac{ep}{\rho_2}=1-e\cos\theta_2$. 又 Q_1、Q_2 在直线①上，$\therefore$ $1-e\cos\theta_1=\dfrac{ep}{\rho_1}=L\cos(\theta_1-\omega)-e\cos\theta_1$，$1-e\cos\theta_2=\dfrac{ep}{\rho_2}=L\cos(\theta_2-\omega)-e\cos\theta_2$，$L\cos(\theta_1-\omega)=L\cos(\theta_2-\omega)=1$. $\because$ $\theta_1\neq\theta_2$，$\therefore$ $\theta_1-\omega+\theta_2-\omega=0$，即 $\omega=\dfrac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)$. $\therefore$ $L=\dfrac{1}{\cos\left(\theta_1-\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}=\sec\dfrac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)$. 故所求直线 Q_1Q_2 的方程为 $\dfrac{ep}{\rho}=\sec\dfrac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)\cos\left(\theta-\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)-e\cos\theta$.

[说明] 本题即公式(8.62)的证明，是推导圆锥曲线 $\dfrac{ep}{\rho}=1-e\cos\theta$ 切线方程的工具.

1065. 试证过二次曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

上任意一点 $P(x_1, y_1)$ 的切线方程为

$$Ax_1x+\frac{B}{2}(y_1x+x_1y)+Cy_1y+\frac{D}{2}(x+x_1)+\frac{E}{2}(y+y_1)+F=0.$$

[证]　设过点 $P(x_1, y_1)$ 的直线参数方程为 $\begin{cases}x=x_1+t\cos\theta\\y=y_1+t\sin\theta\end{cases}$（$t$ 为参数）. 代入二次曲线方程，化简得 $(A\cos^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta)t^2+[(2Ax_1+By_1+D)\cos\theta+(Bx_1+2Cy_1+E)\sin\theta]t+Ax_1^2+Bx_1y_1+Cy_1^2+Dx_1+Ey_1+F=0$. $\because P(x_1, y_1)$ 在二次曲线上，故 $Ax_1^2+Bx_1y_1+Cy_1^2+Dx_1+Ey_1+F=0$. 如果直线与二次曲线相切，则 $\Delta=0$,

$$\therefore\ (2Ax_1+By_1+D)\cos\theta+(Bx_1+2Cy_1+E)\sin\theta=0,$$

即切线方程为 $(2Ax_1+By_1+D)(x-x_1)+(Bx_1+2Cy_1+E)(y-y_1)=0$,

化简得 $Ax_1x+\frac{B}{2}(y_1x+x_1y)+Cy_1y+\frac{D}{2}(x+x_1)+\frac{E}{2}(y+y_1)+F=0$.

1066. 求抛物线 $x^2-2xy+y^2-4x+y-10=0$ 过顶点的切线方程.

[分析]　利用坐标变换，化原方程为标准方程后求之. 也可利用待定系数法把原方程化为 $(ax+by+\lambda)^2=p(bx-ay+\mu)$ 的形式（参见第1051题），从而得过顶点的切线方程 $bx-ay+\mu=0$.

[解一]　由 $\operatorname{ctg}2\theta=\frac{A-C}{B}=0$, 得 $2\theta=90°$, $\therefore\theta=45°$. 故转轴公式为 $\begin{cases}x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\\y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.\end{cases}$ 把它代入原方程，得 $(\sqrt{2}y')^2-4\cdot\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}+\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}-10=0$, 即 $3x'=2\sqrt{2}y'^2+5y'-10\sqrt{2}$, 经配方得 $\left(y'+\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)^2=\frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\left(x'+\frac{185\sqrt{2}}{48}\right)$. $\therefore$ 在新坐标系中，顶点坐标为 $\left(-\frac{185\sqrt{2}}{48},\ -\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)$, 于是在原坐标系中顶点坐标为 $\left(-\frac{155}{48},\ -\frac{215}{48}\right)$. $\because$ 过抛物线上一点 (x_1, y_1) 的切线方程为 $x_1x-x_1y-y_1x+y_1y-2(x+x_1)+\frac{y+y_1}{2}-10=0$, 即 $(x_1-y_1-2)x-\left(x_1-y_1-\frac{1}{2}\right)y-2x_1+\frac{y_1}{2}-10=0$. $\therefore$ 在顶点

$\left(-\frac{155}{48}, -\frac{215}{48}\right)$处抛物线的切线方程为

$$-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}y+\frac{155}{24}-\frac{215}{96}-10=0, \quad 即 \quad x+y+\frac{185}{24}=0.$$

[解二] 原方程为 $(x-y)^2=4x-y+10$, 故可化为 $(x-y+\lambda)^2=p(x+y+\mu)$的形式,即$(x-y)^2+(2\lambda-p)x-(2\lambda+p)y+\lambda^2-p\mu=0$. 比较原方程对应项的系数, 得 $2\lambda-p=-4$…①, $2\lambda+p=-1$…②, $\lambda^2-p\mu=-10$…③. 由①、②得 $\lambda=-\frac{5}{4}$, $p=\frac{3}{2}$; 代入③, 得 $\mu=\frac{185}{24}$. ∴ 原方程可化为 $\left(x-y-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{3}{2}\left(x+y+\frac{185}{24}\right)$. 故抛物线在顶点处切线方程为 $x+y+\frac{185}{24}=0$.

1067. 求过圆锥曲线 $\frac{ep}{\rho}=1-e\cos\theta$ 上一点 $P(\rho_1, \theta_1)$ 的切线的极坐标方程.

[分析] 利用过圆锥曲线 $\frac{ep}{\rho}=1-e\cos\theta$ 上两点 $P(\rho_1, \theta_1)$、$Q(\rho_2, \theta_2)$ 的割线方程[提要(8.62)], 令 $\theta_2\to\theta_1$ 即得.

[解] 直线 PQ 的方程为 $\frac{ep}{\rho}=\sec\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)\cos\left(\theta-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)-e\cos\theta$. 当 Q 沿曲线向 P 无限逼近时, $\theta_2\to\theta_1$, 即得过点 P 的切线方程

$$\frac{ep}{\rho}=\cos(\theta-\theta_1)-e\cos\theta.$$

1068. 求从点 $P(-8, 8)$引曲线 $2xy+y^2=8$ 的两切线的夹角.

[解] 设过 $P(-8, 8)$ 的切线为 $y=k(x+8)+8$, 显然 $k\neq0$, ∴ $x=\frac{y-8-8k}{k}$. 代入 $2xy+y^2=8$, 得 $(k+2)y^2-16(1+k)y-8k=0$. ∵ 直线与曲线相切, ∴ $\Delta=256(1+k)^2+32k(k+2)=0$, 即 $9k^2+18k+8=0$.

$$\therefore \begin{cases} k_1+k_2=-\frac{18}{9}=-2 \\ k_1\cdot k_2=\frac{8}{9}. \end{cases}$$

$$|k_1-k_2|=\sqrt{(k_1+k_2)^2-4k_1\cdot k_2}=\sqrt{(-2)^2-4\cdot\frac{8}{9}}=\frac{2}{3},$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\pm(k_1-k_2)}{1+k_1k_2}=\pm\frac{2}{3}.$$

故两切线的夹角 θ 为 $\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{3}$ 或 $\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{3}$.

1069. 设二次曲线 $Ax^2+By^2=1(A\neq 0,\ B\neq 0)$ 的切线方程为 $ux+vy+1=0$. 求证：$\frac{u^2}{A}+\frac{v^2}{B}=1$.

[证一] 由方程组 $\begin{cases}Ax^2+By^2=1\\ ux+vy+1=0\end{cases}$ 消去 y，得

$$(v^2A+u^2B)x^2+2Bux+B-v^2=0.$$

因直线和二次曲线相切，故 $\Delta=4B^2u^2-4(B-v^2)(v^2A+Bu^2)=0$，化简得 $v^2A+u^2B=AB$. $\because$ $A\neq 0$，$B\neq 0$，$\therefore$ $\frac{u^2}{A}+\frac{v^2}{B}=1$.

[证二] 设 $ux+vy+1=0$ 和 $Ax^2+By^2=1$ 相切的切点为 $P(x_0,\ y_0)$，则过点 P 的切线方程为 $Ax_0x+By_0y=1$. 直线 $ux+vy+1=0$ 和直线 $Ax_0x+By_0y=1$ 重合，$\therefore u=-Ax_0, v=-By_0$；亦即 $x_0=-\frac{u}{A}$, $y_0=-\frac{v}{B}$. 而点 $(x_0,\ y_0)$在二次曲线 $Ax^2+By^2=1$ 上，故 $\frac{u^2}{A}+\frac{v^2}{B}=1$.

1070. 已知直线 $lx+my+n=0$ 与二次曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 相切，求证：$\begin{vmatrix}2A & B & D & l\\ B & 2C & E & m\\ D & E & 2F & n\\ l & m & n & 0\end{vmatrix}=0.$

[分析] 设直线与二次曲线相切的切点坐标为$(x_0,\ y_0)$. 列出切点坐标应该满足的方程组，根据方程组有解的条件即得证.

[证] 设切点为 $P(x_0,\ y_0)$，过点 P 的二次曲线的切线方程为 $Ax_0x+B\frac{x_0y+y_0x}{2}+Cy_0y+D\frac{x+x_0}{2}+E\frac{y+y_0}{2}+F=0$，化简得

$$(2Ax_0+By_0+D)x+(Bx_0+2Cy_0+E)y+(Dx_0+Ey_0+2F)=0.$$

此直线与直线 $lx+my+n=0$ 重合，故有 $2Ax_0+By_0+D=-lt$, $Bx_0+2Cy_0+E=-mt$, $Dx_0+Ey_0+2F=-nt$. $\therefore x_0$、y_0、t 应满足方程组

$$\begin{cases}2Ax_0+By_0+D+lt=0,\\Bx_0+2Cy_0+E+mt=0,\\Dx_0+Ey_0+2F+nt=0,\\lx_0+my_0+n=0.\end{cases}$$

即关于 x, y, z, λ 的线性齐次方程组

$$\begin{cases}2Ax+By+Dz+l\lambda=0,\\Bx+2Cy+Ez+m\lambda=0,\\Dx+Ey+2Fz+n\lambda=0,\\lx+my+nz=0.\end{cases}$$

有一组非零解 $(x_0, y_0, 1, t)$.

$$\therefore \begin{vmatrix}2A & B & D & l\\B & 2C & E & m\\D & E & 2F & n\\l & m & n & 0\end{vmatrix}=0.$$

1071. 求过圆锥曲线 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$ 上任意一点 $P(\rho_1, \theta_1)$ 的法线方程.

［解］ 根据提要(8.63)，过圆锥曲线 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$ 上一点 $P(\rho_1, \theta_1)$ 的切线方程为 $\dfrac{ep}{\rho}=\cos(\theta-\theta_1)-e\cos\theta$，化成直角坐标方程为

$$x(\cos\theta_1-e)+y\sin\theta_1=ep.$$

故可设法线方程为 $x\sin\theta_1-y(\cos\theta_1-e)=\lambda$ （λ 为待定常数）. $\because$ 法线过点 $P(\rho_1, \theta_1)$，$\therefore \lambda=\rho_1\cos\theta_1\sin\theta_1-\rho_1\sin\theta_1(\cos\theta_1-e)=e\rho_1\sin\theta_1$. 故所求法线方程为 $\rho\sin(\theta-\theta_1)=e(\rho\sin\theta-\rho_1\sin\theta_1)$. $\because \rho_1=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta_1}$,

$\therefore \rho\,[\sin(\theta-\theta_1)-e\sin\theta]=\dfrac{-e^2p\sin\theta_1}{1-e\cos\theta_1}$.

1072. 设自点 $P_0(x_0, y_0)$ 可作二次曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 的两切线，切点为 Q、R. 求切点弦 QR 的方程.

［解］ 设Q、R的坐标分别为(x_1, y_1)、(x_2, y_2)，则二次曲线$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$在点Q、R处的切线方程分别为

$$Ax_1x+\frac{B}{2}(y_1x+x_1y)+Cy_1y+\frac{D}{2}(x+x_1)+\frac{E}{2}(y+y_1)+F=0\cdots①,$$

$$Ax_2x+\frac{B}{2}(y_2x+x_2y)+Cy_2y+\frac{D}{2}(x+x_2)+\frac{E}{2}(y+y_2)+F=0\cdots②.$$

∵ ①与②均过点P_0，

$$\therefore\quad Ax_0x_1+\frac{B}{2}(x_0y_1+y_0x_1)+Cy_0y_1+\frac{D}{2}(x_1+x_0)+\frac{E}{2}(y_1+y_0)+F=0\cdots③,$$

$$Ax_0x_2+\frac{B}{2}(x_0y_2+y_0x_2)+Cy_0y_2+\frac{D}{2}(x_2+x_0)+\frac{E}{2}(y_2+y_0)+F=0\cdots④.$$

根据③与④可知直线

$$Ax_0x+\frac{B}{2}(x_0y+y_0x)+Cy_0y+\frac{D}{2}(x+x_0)+\frac{E}{2}(y+y_0)+F=0$$

为过点Q、R的直线.

1073. **设过点$P_0(x_0, y_0)$的动直线与二次曲线$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$的两交点为Q、R，求过点Q、R的两切线交点的轨迹.**

［解］ 设Q、R的坐标为(x_1, y_1)、(x_2, y_2)，又过点Q、R的两切线的交点为(α, β). 因直线QR即为由点(α, β)作二次曲线两切线的切点弦，故其方程(参见上题)为

$$A\alpha x+\frac{B}{2}(\beta x+\alpha y)+C\beta y+\frac{D}{2}(x+\alpha)+\frac{E}{2}(y+\beta)+F=0\cdots①.$$

∵ 直线QR过点P_0，∴ $Ax_0\alpha+\frac{B}{2}(y_0\alpha+x_0\beta)+Cy_0\beta+\frac{D}{2}(x_0+\alpha)+\frac{E}{2}(y_0+\beta)+F=0$. 以$(x, y)$代$(\alpha, \beta)$即得轨迹方程

$$Ax_0x+\frac{B}{2}(y_0x+x_0y)+Cy_0y+\frac{D}{2}(x+x_0)+\frac{E}{2}(y+y_0)+F=0\cdots②,$$

即 $(2Ax_0+By_0+D)x+(Bx_0+2Cy_0+E)y+Dx_0+Ey_0+2F=0$.

所求轨迹为此方程所表示的直线在已知二次曲线外的部分.

[说明] 习惯上称此轨迹所在的直线为点 P_0 关于二次曲线的极线，而 P_0 称为此直线关于二次曲线的极.

1074. 设 O 为不在二次曲线上且非中心的定点，过 O 的动直线与二次曲线交于 Q、R，在直线 $\overline{OQR}$ 上有一点 P，满足条件 $\frac{2}{OP}=\frac{1}{OQ}+\frac{1}{OR}$，求证点 P 的轨迹就是点 O 关于二次曲线的极线.

[分析] ∵ O、Q、P、R 四点共线，轨迹条件涉及 OP、OQ、OR. ∴ 取定点 O 为原点建立坐标系，以便使轨迹条件解析化.

[证] 取 O 为原点，过 O 的任一定直线为 x 轴建立直角坐标系. 设二次曲线方程为 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$，$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP})=\theta$，$OP=\rho$，$OQ=\rho_1$，$OR=\rho_2$，则点 P、Q、R 的坐标分别为 $(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$、$(\rho_1\cos\theta, \rho_1\sin\theta)$、$(\rho_2\cos\theta, \rho_2\sin\theta)$. ∵ 点 Q、R 在二次曲线上，∴ $(A\cos^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta)\rho_i^2+(D\cos\theta+E\sin\theta)\rho_i+F=0\ (i=1,2)$，即方程 $F\cdot\left(\frac{1}{r}\right)^2+(D\cos\theta+E\sin\theta)\frac{1}{r}+A\cos^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta=0$ 的两根为 $\frac{1}{\rho_1}$、$\frac{1}{\rho_2}$. ∴ $\frac{1}{OQ}+\frac{1}{OR}=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=-\frac{D\cos\theta+E\sin\theta}{F}$.

$$\because\ \frac{2}{OP}=\frac{1}{OQ}+\frac{1}{OR},\quad \therefore\ \frac{2}{\rho}=-\frac{D\cos\theta+E\sin\theta}{F},$$

即 $D\rho\cos\theta+E\rho\sin\theta+2F=0$. ∴ 点 P 的轨迹方程为 $Dx+Ey+2F=0$. 此即点 O 关于二次曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 的极线.

[说明] (1) 本题证明了二次曲线过定点 O 的任意割线 QR 被 O 与 O 的极线分成调和比$\left(\text{即满足条件 }\frac{2}{OP}=\frac{1}{OQ}+\frac{1}{OR}\right)$. (2) 按本题的解法，如将轨迹条件改为 (i) $2OP=OQ+OR$; (ii) $OP^2=OQ\cdot OR$，则可分别得轨迹方程为 (i) $Ax^2+Bxy+Cy^2+\frac{D}{2}x+\frac{E}{2}y=0$; (ii) $Ax^2+Bxy+Cy^2=F$.

1075. 设点 $P_1(x_1, y_1)$ 关于二次曲线的极线过点 $P_2(x_2, y_2)$，则点 P_2 关于二次曲线的极线也过点 P_1.

［证］ 点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$ 关于二次曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 的极线分别为 $(2Ax_1+By_1+D)x+(Bx_1+2Cy_1+E)y+Dx_1+Ey_1+2F=0\cdots$① 和 $(2Ax_2+By_2+D)x+(Bx_2+2Cy_2+E)y+Dx_2+Ey_2+2F=0\cdots$②. 如果①过 P_2, 则 $(2Ax_1+By_1+D)x_2+(Bx_1+2Cy_1+E)y_2+Dx_1+Ey_1+2F=0$, 即 $2Ax_1x_2+B(x_2y_1+x_1y_2)+2Cy_1y_2+D(x_1+x_2)+E(y_1+y_2)+2F=0$, 亦即 $(2Ax_2+By_2+D)x_1+(Bx_2+2Cy_2+E)y_1+Dx_2+Ey_2+2F=0$. ∴②通过 P_1.

［说明］ 符合上述条件的两点 P_1、P_2 称为相配点.

1076. 一般二次曲线的共线点的极线必共点；共点的极线的极必共线.

［分析］ 利用极与极线的基本性质，证明在一点 Q 的极线上的各点的极线皆通过点 Q; 反过来，通过点 Q 诸直线的极均在点 Q 的极线上.

［证］ 设二次曲线方程为 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$. 点 $Q(x_0, y_0)$ 的极线 l:

$$Ax_0x+\frac{B}{2}(y_0x+x_0y)+Cy_0y+\frac{D}{2}(x+x_0)+\frac{E}{2}(y+y_0)+F=0\cdots①.$$

设 $P_i(x_i, y_i)$为 l 上的诸点($i=1, 2, 3, \cdots$). 点 P_i 的极线为

$$Ax_ix+\frac{B}{2}(y_ix+x_iy)+Cy_iy+\frac{D}{2}(x+x_i)+\frac{E}{2}(y+y_i)+F=0\cdots②.$$

∵ P_i 在 l 上, ∴ $Ax_0x_i+\frac{B}{2}(y_ix_0+x_iy_0)+Cy_0y_i+\frac{D}{2}(x_i+x_0)+\frac{E}{2}(y_i+y_0)+F=0$. 因此点 P_i 的极线②皆通过点 $Q(x_0, y_0)$. 即点 P_i 的诸极线共点.

反之，若诸点 $P_i(i=1, 2, 3, \cdots)$的极线②通过点 $Q(x_0, y_0)$, 则 P_i 均在点 Q 的极线①上. 即诸点 P_i 共线.

1077. 设二次曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 的一组平行弦的斜率为 k. 求证它相应的直径方程是

$$(2A+Bk)x+(B+2Ck)y+D+Ek=0.$$

［证］ 设平行弦系的方程为 $y=kx+\lambda$(λ 为参数)，代入二次曲线方程整理成

$(A+Bk+Ck^2)x^2+(B\lambda+2Ck\lambda+D+Ek)x+C\lambda^2+E\lambda+F=0\cdots$①.
在 $\Delta=(B\lambda+2Ck\lambda+D+Ek)^2-4(A+Bk+Ck^2)(C\lambda^2+E\lambda+F)\geqslant0$ 的条件下，平行弦与二次曲线有实交点：$P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$，x_1、x_2 是方程①的两个实根，$x_1+x_2=-\dfrac{B\lambda+2Ck\lambda+Ek+D}{A+Bk+Ck^2}$. PQ 的中点(直径上的点)横坐标为 $x=\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)=-\dfrac{B\lambda+2Ck\lambda+Ek+D}{2(A+Bk+Ck^2)}$，$\because \lambda=y-kx$，故消去 λ 即得相应的直径方程 $2x(A+Bk+Ck^2)=-(B+2Ck)(y-kx)-Ek-D$，亦即 $(2A+Bk)x+(B+2Ck)y+D+Ek=0$.

1078. 求证：二次曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ $(B^2-4AC\neq0)$ 的两共轭直径的斜率 k、k' 必满足

$$2A+B(k+k')+2Ckk'=0.$$

［证］ 平分斜率为 k 的平行弦的直径方程为 $(2A+Bk)x+(B+2Ck)y+D+Ek=0$. 设此直径的斜率为 k'，则其共轭直径的斜率为 k，$\because k'=-\dfrac{2A+Bk}{B+2Ck}$，$\therefore 2A+B(k+k')+2Ckk'=0$.

1079. 求证：有心锥线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 的对称轴方程为

$$Bf_1^2(x, y)+2(A-C)f_1(x, y)f_2(x, y)-Bf_2^2(x, y)=0,$$

其中 $f_1(x, y)=2Ax+By+D$, $f_2(x, y)=Bx+2Cy+E$.

［证］ $\because Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 是有心锥线，$\therefore \Delta=B^2-4AC\neq0$，中心 (x, y) 是方程组 $\begin{cases}2Ax+By+D=0\\ Bx+2Cy+E=0\end{cases}$ 的解，对称轴的倾角 θ 是方程 $\operatorname{ctg}2\theta=\dfrac{A-C}{B}$ 的解，即有 $B\operatorname{tg}^2\theta+2(A-C)\operatorname{tg}\theta-B=0\cdots$①. 设过对称中心 (x_0, y_0)，而倾角为 θ 的直线(即对称轴)方程为 $\begin{cases}x=x_0+t\cos\theta\\ y=y_0+t\sin\theta,\end{cases}$ 代入有心锥线方程，整理得 $(A\cos^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta)t^2+[(2Ax_0+By_0+D)\cos\theta+(Bx_0+2Cy_0+E)\sin\theta]t+Ax_0^2+Bx_0y_0+Cy_0^2+Dx_0+Ey_0+F=0$，$\because (x_0, y_0)$ 是对称中心，$\therefore$ 此方程的两根 t_1、t_2 互为相反数，

$$\therefore\quad (2Ax_0+By_0+D)\cos\theta+(Bx_0+2Cy_0+E)\sin\theta=0\cdots②.$$

若以(x,y)代(x_0,y_0)，并令$f_1(x,y)=2Ax+By+D$，$f_2(x,y)=Bx+2Cy+E$，则从①、②中消去θ后，即得对称轴方程

$$Bf_1^2(x,\ y)+2(A-C)f_1(x,\ y)f_2(x,\ y)-Bf_2^2(x,\ y)=0.$$

1080．求二次曲线$5x^2-6xy+5y^2-16\sqrt{2}x+16\sqrt{2}y=0$的斜率为2的平行弦中点轨迹，并求此轨迹与坐标轴交点的坐标．

［解］ 设斜率为2的平行弦方程为$y=2x+t\cdots$①（t为参数）．代入曲线方程，得$13x^2+(14t+16\sqrt{2})x+5t^2+16\sqrt{2}t=0$．当其判别式$\Delta\geqslant0$时，方程有两实根$x_1$、$x_2$，且$x_1+x_2=-\dfrac{14t+16\sqrt{2}}{13}$．设平行弦中点$P$的坐标为$(x,\ y)$，则$x=-\dfrac{7t+8\sqrt{2}}{13}$，$\therefore\ t=-\dfrac{13x+8\sqrt{2}}{7}$．代入①，并化简得$x-7y-8\sqrt{2}=0$．故所求的轨迹为直线$x-7y-8\sqrt{2}=0$在曲线$5x^2-6xy+5y^2-16\sqrt{2}x+16\sqrt{2}y=0$内部的一条线段．

直线$x-7y-8\sqrt{2}=0$和x轴的交点坐标为$(8\sqrt{2},\ 0)$，和y轴的交点坐标为$\left(0,\ -\dfrac{8\sqrt{2}}{7}\right)$．但$x=8\sqrt{2}$，$y=0$时，$5x^2-6xy+5y^2-16\sqrt{2}x+16\sqrt{2}y>0$，故点$(8\sqrt{2},\ 0)$在曲线外部；当$x=0$，$y=-\dfrac{8\sqrt{2}}{7}$时，$5x^2-6xy+5y^2-16\sqrt{2}x+16\sqrt{2}y<0$，故点$\left(0,\ -\dfrac{8\sqrt{2}}{7}\right)$在曲线内部，所以轨迹与$x$轴无交点，与$y$轴的交点坐标为$\left(0,\ -\dfrac{8\sqrt{2}}{7}\right)$．

1081．求证：若双曲线的方程中没有y^2项，则它有一条渐近线平行于y轴，并证明其逆命题成立．

［证］ 根据题意设双曲线方程为$Ax^2+Bxy+Dx+Ey+F=0$，且$B\neq0$，又设其斜率为k的渐近线方程为$y=kx+\lambda$．代入双曲线方程得

$$(A+Bk)x^2+(B\lambda+Ek+D)x+E\lambda+F=0,$$

$\therefore\begin{cases}A+Bk=0\\B\lambda+Ek+D=0.\end{cases}$ 此关于k、λ的方程组只有一组解，即有一条渐近线斜率不存在，亦即与y轴平行；反之，若有一条渐近线与y轴平行，则两渐

近线方程为：$x-p=0$ 与 $lx+my+n=0$，双曲线方程为 $(x-p)(lx+my+n)=\lambda$，即 $lx^2+mxy+(n-pl)x-mpy-np-\lambda=0$，其 y^2 项系数为零.

1082. 证明双曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+F=0$ 的两渐近线方程为 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$.

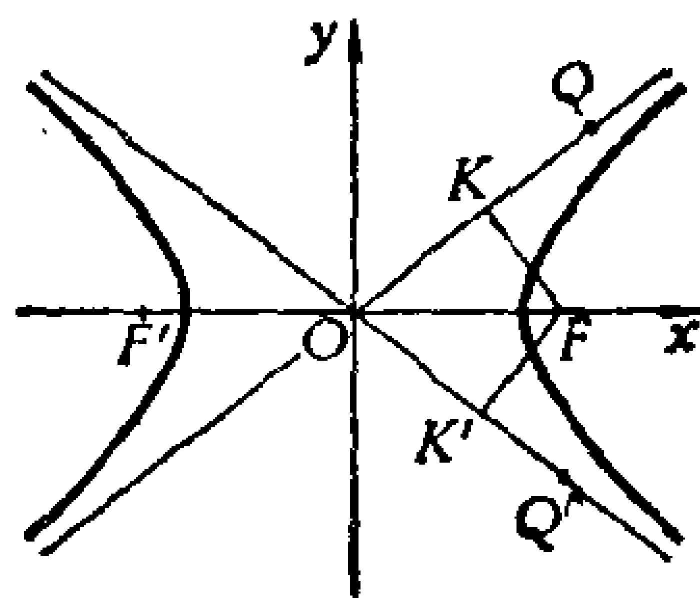
［证］ 设渐近线方程为 $y=kx+\lambda$，将其代入双曲线方程得 $(A+Bk+Ck^2)x^2+(B\lambda+2Ck\lambda)x+C\lambda^2+F=0$. $\therefore \begin{cases} A+Bk+Ck^2=0\cdots① \\ B\lambda+2Ck\lambda=0\cdots②. \end{cases}$

$\because B^2-4AC>0$，当 $C=0$ 时，则 $B\neq 0$，解得 $\begin{cases} k=-\dfrac{A}{B} \\ \lambda=0. \end{cases}$ $\therefore$ 渐近线方程为 $y=-\dfrac{A}{B}x$ 和 $x=0$，即 $Ax^2+Bxy=0$；当 $C\neq 0$ 时，由①得 $k_1+k_2=-\dfrac{B}{C}$，$k_1k_2=\dfrac{A}{C}$，由②得 $\lambda=0$（$\because B+2Ck\neq 0$），此时 $(y-k_1x)(y-k_2x)=0$，即 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$. 故渐近线方程为 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$.

1083. 求双曲线 $\dfrac{ep}{\rho}=1-e\cos\theta\,(e>1)$ 的渐近线方程.

［分析］ 因焦点 F 到渐近线的距离可求，且自 F 引渐近线的垂线 FK、FK' 与 Ox 轴的夹角也可求，故利用提要(3.92)，即可得渐近线的方程.

［解］ 设 Q、Q' 分别为两渐近线上任一点，因双曲线 $\dfrac{ep}{\rho}=1-e\cos\theta\,(e>1)$ 的焦点 F（极点）到渐近线的距离



$$d=|OF|\sin\angle xOQ=ae\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=b.$$

$\angle xFK=\dfrac{\pi}{2}+\angle xOQ=\dfrac{\pi}{2}+\arccos\dfrac{a}{c}=\dfrac{\pi}{2}+\arccos\dfrac{1}{e}$，$\angle xFK'=\dfrac{3\pi}{2}-\arccos\dfrac{1}{e}$. 根据提要(3.92)可得两渐近线 OQ、OQ' 的极坐标方程分别为 $\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}-\arccos\dfrac{1}{e}\right)=b$，$\rho\cos\left(\theta-\dfrac{3\pi}{2}+\arccos\dfrac{1}{e}\right)=b$；即 $\rho\sin\left(\theta-\arccos\dfrac{1}{e}\right)=b$，$\rho\sin\left(\theta+\arccos\dfrac{1}{e}\right)=-b$.

§3. 二次曲线系

1084. 证明：方程 $S_1(x, y)=\lambda S_2(x, y)$ 表示过两已知二次曲线 $S_i(x, y)=A_ix^2+B_ixy+C_iy^2+D_ix+E_iy+F_i=0(i=1, 2)$ 的四个交点的二次曲线系，其中 λ 为任意常数.

［证］ 设 $P_n(x_n, y_n)(n=1, 2, 3, 4)$ 为两已知二次曲线 $S_i(x, y)=0$ 的四个交点，则 $S_i(x_n, y_n)=0$. 故 $P_n(x_n, y_n)$满足方程 $S_1(x, y)=\lambda S_2(x,y)$ …①，即方程 ① 表示的曲线过两已知二次曲线的四个交点.

在过此四个交点的任意一条二次曲线 S(不包括 $S_2(x, y)=0$)上取一点 $Q(x_0, y_0)$(Q 不与 P_n 重合)，$\because S_2(x_0, y_0)\neq 0$，令 $\lambda=\dfrac{S_1(x_0, y_0)}{S_2(x_0, y_0)}$，则 S 的方程为 $S_1(x, y)=\dfrac{S_1(x_0, y_0)}{S_2(x_0, y_0)}S_2(x, y)$. 即 S 为过 P_1、P_2、P_3、P_4、Q 五点的二次曲线. 因此，方程 ① 表示过两已知二次曲线 $S_i(x, y)$ 的四个交点的二次曲线系.

［说明］ 曲线系①中不包括$S_2(x,y)=0$. 由于在实数范围内讨论，这里两二次曲线的四个交点指的是实交点，但也可推广到虚交点与无穷远点.

1085. 设 $S(x, y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 与直线 $lx+my+n=0$ 相交于两点 P_1、P_2. 求证：

$$S(x, y)=\lambda(lx+my+n)^2$$

为与 $S(x, y)=0$ 相切的二次曲线系，其切点为 P_1、P_2，λ 为非零常数.

［证］ 曲线 $S(x, y)=\lambda(lx+my+n)^2$ 在点 $P_1(x_1, y_1)$ 的切线方程为 $Ax_1x+\dfrac{B}{2}(y_1x+x_1y)+Cy_1y+\dfrac{D}{2}(x+x_1)+\dfrac{E}{2}(y+y_1)+F=\lambda[l^2x_1x+lm\cdot(y_1x+x_1y)+m^2y_1y+ln(x+x_1)+mn(y+y_1)+n^2]$. $\because P_1$ 是 $S(x, y)=0$ 与 $lx+my+n=0$ 的交点，$\therefore S(x_1, y_1)=0$，$lx_1+my_1+n=0$. 故 $l^2x_1x+lm(y_1x+x_1y)+m^2y_1y+ln(x+x_1)+mn(y+y_1)+n^2=lx(lx_1+my_1+n)+my(lx_1+my_1+n)+(lx_1+my_1+n)n=0$. 所以此切线与 $S(x, y)=0$ 在点 P_1 的切线 $Ax_1x+\dfrac{B}{2}(y_1x+x_1y)+Cy_1y+\dfrac{D}{2}(x+x_1)+\dfrac{E}{2}(y+y_1)+F=0$

重合，即 $S(x, y)=\lambda(lx+my+n)^2$ 与 $S(x, y)=0$ 相切于点 P_1. 同理可证两曲线也相切于另一交点 P_2.

1086. 求过抛物线 $y^2=x$ 和 $y^2=2x-2$ 的两个交点 P、Q 及点 $A(4, 2)$、$B(9, -3)$、$C(-2, 1)$的二次曲线方程.

[分析] 二次曲线为五参数曲线，由五个独立条件确定. 今二次曲线由两抛物线的交点 P、Q 及点 A、B、C 确定，可利用过其中四点的单参数二次曲线系来求.

[解] 直线 PQ 和 AB 的方程分别为 $x-2=0$ 和 $x+y-6=0$. ∵ 点 $A(4, 2)$ 和 $B(9, -3)$也在抛物线 $y^2-x=0$ 上，∴ 过四点 P、Q、A、B 的二次曲线方程可写为 $(x-2)(x+y-6)+\lambda(y^2-x)=0$，其中 λ 为参数. 因其又过点 $C(-2, 1)$，∴ $\lambda=-\frac{28}{3}$. 故所求的方程为 $3(x-2)(x+y-6)-28(y^2-x)=0$，即 $3x^2+3xy-28y^2+4x-6y+36=0$.

1087. 已知抛物线的对称轴方程为 $x-y=0$，原点为顶点，通径长为 4，求此抛物线方程.

[解] 因抛物线的对称轴方程为 $x-y=0$，原点为顶点，故抛物线在顶点处的切线方程为 $x+y=0$. 设此抛物线方程为 $(x-y)^2=\lambda(x+y)$，即 $\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x+y}{\sqrt{2}}$. 令 $\begin{cases} x'=\frac{x+y}{\sqrt{2}} \\ y'=\frac{-x+y}{\sqrt{2}}, \end{cases}$ 此即将原坐标轴旋转 $\frac{\pi}{4}$，方程化为 $y'^2=\frac{\lambda}{\sqrt{2}}x'$. ∵ 通径为 4，∴ $\left|\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right|=2p=4$，∴ $\lambda=\pm4\sqrt{2}$. 故所求抛物线方程为 $(x-y)^2=\pm4\sqrt{2}(x+y)$.

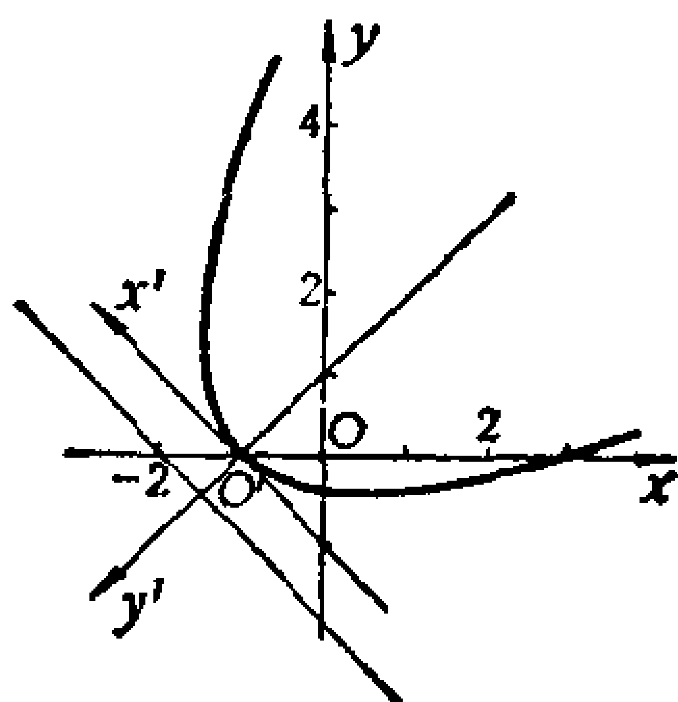
1088. 已知抛物线对称轴方程为 $x-y+1=0$，过顶点的切线方程为 $x+y+1=0$，且过点$(3, 0)$. 求抛物线的方程及顶点、焦点坐标和准线方程.

[解] 设所求抛物线方程为 $(x-y+1)^2=\lambda(x+y+1)$，∵ 过点$(3, 0)$，∴ $(3+1)^2=\lambda(3+1)$，$\lambda=4$. 故所求抛物线方程为

$$(x-y+1)^2=4(x+y+1)\cdots①.$$

从 $\begin{cases}x-y+1=0\\x+y+1=0\end{cases}$ 解得顶点 $O'(-1, 0)$.

因 x' 轴转到 y' 轴为逆时针向，故确定 $x+y+1=0$ 为 x' 轴，$x-y+1=0$ 为 y' 轴. 在 $x'O'y'$ 坐标系中，点 $P(x', y')$ 的坐标即点 P 关于 y' 轴和 x' 轴的离差:

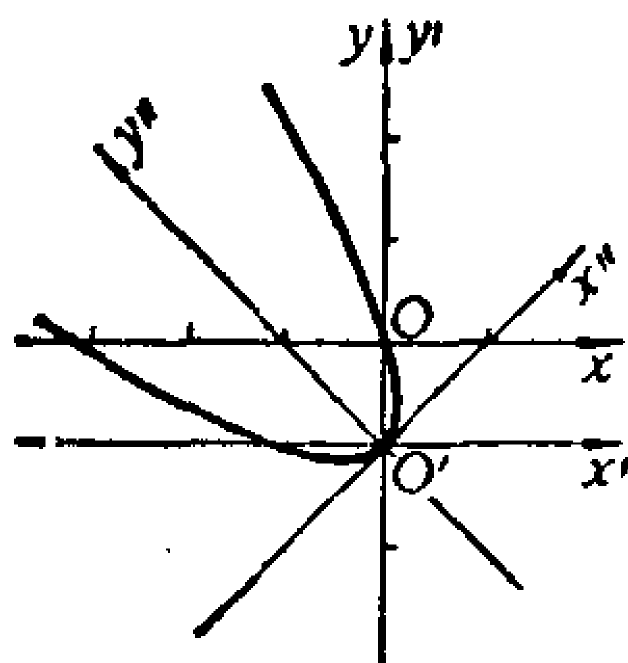


$$\begin{cases}x'=\dfrac{x-y+1}{-\sqrt{2}}\\ y'=\dfrac{x+y+1}{-\sqrt{2}}\end{cases}\cdots②.$$

代入 ①，抛物线方程化为 $x'^2=-2\sqrt{2}y'$. 在 $x'O'y'$ 系中，焦点坐标为 $\left(0, \ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，准线方程为 $y'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 代入 ②，得在 xOy 系中的焦点坐标 $\left(-\dfrac{1}{2}, \ \dfrac{1}{2}\right)$，准线方程 $x+y+2=0$.

1089. 抛物线的对称轴为 $x+y+1=0$，顶点为 $(0, \ -1)$，且过原点，求此抛物线方程.

［解一］ 以顶点 $O'(0, \ -1)$ 为新原点，直线 $x+y+1=0$ 为 y'' 轴，建立直角坐标系 $x''O'y''$ 如图. 设抛物线方程为 $x''^2=2py''$. x'' 轴对 x 轴的倾斜角是 $\dfrac{\pi}{4}$. 它们之间的关系为



$$\begin{cases}x''=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y+1)\\ y''=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x+y+1).\end{cases}$$

因此抛物线在原坐标系的方程为 $(x+y+1)^2=2\sqrt{2}p(-x+y+1)$. 因其过原点 $O(0, 0)$，$\therefore p=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. 故抛物线在原坐标系的方程为

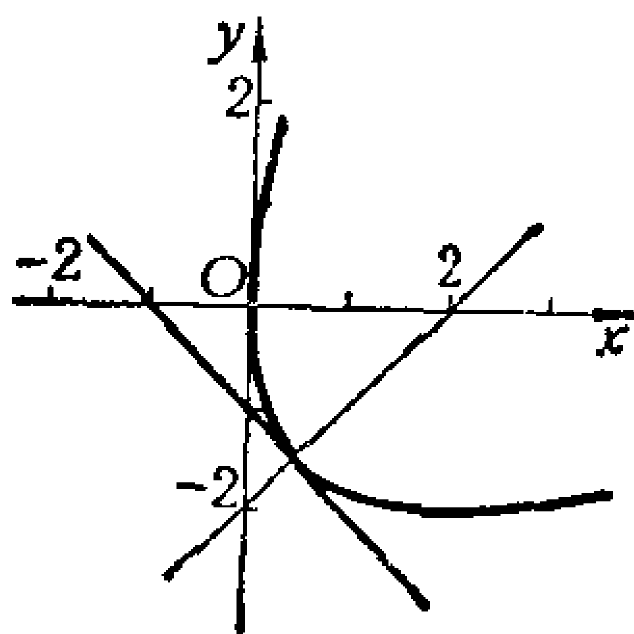
$$x^2+y^2+2xy+3x+y=0.$$

［解二］ 因抛物线的对称轴为 $x+y+1=0$，所以过顶点 $(0, \ -1)$ 的切线方程为 $x-y-1=0$. 因此可设抛物线方程为 $(x+y+1)^2=p(x-y-1)$. 又因为它过原点 $(0, 0)$，代入得 $p=-1$. 故所求抛物线方程为

$(x+y+1)^2=-(x-y-1)$，即 $x^2+y^2+2xy+3x+y=0$.

1090. 抛物线与 y 轴相切于原点，直线 $x+y+1=0$ 是抛物线在顶点的切线，求此抛物线方程.

［解］ 因抛物线在顶点处的切线方程为 $x+y+1=0$，故可设抛物线对称轴方程为 $x-y+\lambda=0$，则所求抛物线方程可设为 $(x-y+\lambda)^2=p(x+y+1)\cdots$①，$(p\neq0)$. 因抛物线过原点，$\therefore \lambda^2=p$. 又因 y 轴与抛物线相切，$\therefore$ 当 $x=0$ 时，方程 $(y-\lambda)^2=\lambda^2(y+1)$ 有重根，即 $y^2-\lambda(2+\lambda)y=0$ 的判别式 $\Delta=\lambda^2(2+\lambda)^2=0$. $\because p\neq0$，$\therefore \lambda\neq0$. 解得 $\lambda=-2$，$p=4$. 代入①，得 $(x-y-2)^2=4(x+y+1)$，即 $x^2-2xy+y^2-8x=0$.



1091. 已知：$A(1,\ -1)$、$B(2,\ 3)$、$C(2,\ -5)$、$D(5,\ 7)$ 四点，$l_{AB}=0$，$l_{BC}=0$，$l_{CD}=0$，$l_{DA}=0$ 分别表示过每两点的直线方程. 求证：(1) 过 A、B、C、D 的二次曲线系可以表成 $l_{AB}\cdot l_{CD}+\lambda l_{BC}\cdot l_{DA}=0$，其中 λ 是任意常数；(2) 如果上述二次曲线系表示抛物线型，求此抛物线方程.

［解］ (1) 利用两点式分别写出过每两点的直线方程，l_{AB}: $4x-y-5=0$；l_{BC}: $x-2=0$；l_{CD}: $4x-y-13=0$；l_{DA}: $2x-y-3=0$. 方程 $l_{AB}\cdot l_{CD}+\lambda l_{BC}\cdot l_{DA}=0$，即 $(4x-y-5)(4x-y-13)+\lambda(x-2)(2x-y-3)=0\cdots$① 是二次的，以 A、B、C、D 各点坐标代入均能满足，且又含有一个独立参数 λ，故方程①表示过 A、B、C、D 四点的二次曲线系.

(2) 将方程①整理成 $(16+2\lambda)x^2-(8+\lambda)xy+y^2-(72+7\lambda)x+(18+2\lambda)y+65+6\lambda=0$. 如果方程①是抛物线型，则有 $\Delta=(8+\lambda)^2-4(16+2\lambda)=0$，$\therefore \lambda=0$ 或 -8. 当 $\lambda=0$ 时，方程①表示两平行直线：$4x-y-5=0$，$4x-y-13=0$；当 $\lambda=-8$ 时，方程①为 $y^2-16x+2y+17=0$，即 $(y+1)^2=16(x-1)$. 是以 $(1,\ -1)$ 为顶点、通径长为 16、对称轴与 x 轴平行的抛物线.

1092. 求过 $P_1(1,\ -1)$、$P_2(2,\ 3)$、$P_3(2,\ -5)$、$P_4(5,\ 7)$、$P_5(-2,\ -9)$ 五点的圆锥曲线方程.

［分析］ 圆锥曲线方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 中虽有六个系数，但独立的只有五个，故只需五个独立条件就可确定此曲线的方程.

［解一］ 设圆锥曲线方程为 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0\cdots$①，把五点的坐标分别代入，得方程组

$$\begin{cases}A-B+C+D-E+F=0,\\4A+6B+9C+2D+3E+F=0,\\4A-10B+25C+2D-5E+F=0,\\25A+35B+49C+5D+7E+F=0,\\4A+18B+81C-2D-9E+F=0.\end{cases}$$

不妨设 $B\neq0$，解得 $A=-2B$，$C=-\frac{1}{14}B$，$D=\frac{57}{7}B$，$E=-\frac{15}{7}B$，$F=-\frac{101}{14}B$. 代入①式，消去 B，得 $28x^2-14xy+y^2-114x+30y+101=0$.

［解二］ 由两点式，直线 P_1P_2: $4x-y-5=0$; P_3P_4: $4x-y-13=0$; P_2P_3: $x-2=0$; P_4P_1: $2x-y-3=0$. 则通过 P_1、P_2、P_3、P_4 四点的圆锥曲线系方程是 $(4x-y-5)(4x-y-13)+\lambda(x-2)(2x-y-3)=0\cdots$②. $\because$ 它经过 $P_5(-2,\ -9)$，$\therefore$ $(-4)(-12)+\lambda(-4)\cdot2=0$，解得 $\lambda=6$. 代入②，得 $28x^2-14xy+y^2-114x+30y+101=0$.

［说明］ (1) 求抛物线方程只需四个独立条件，因为有另一条件 $B^2-4AC=0$; (2) 求圆方程只需三个独立条件，因为有另两条件: $A=C$，$B=0$; (3) 若已知有心圆锥曲线的中心在原点，两坐标轴是它的对称轴，那只要两个条件就够了，因为此时 $B=0$，$D=0$，$E=0$.

1093. 已知圆锥曲线 $x^2+2xy+5y^2-7x-8y+6=0$ 与两直线 $2x-y-5=0$ 和 $3x+y-11=0$ 有四个交点，求过此四交点和点(1, 1)的二次曲线方程.

［解］ 设过 $x^2+2xy+5y^2-7x-8y+6=0$ 与两直线 $2x-y-5=0$ 及 $3x+y-11=0$ 的四个交点的二次曲线系方程为

$$x^2+2xy+5y^2-7x-8y+6=\lambda(2x-y-5)(3x+y-11)\cdots①.$$

因它过点(1, 1)，解得 $\lambda=-\frac{1}{28}$，代入①，即得所求二次曲线方程为

$$34x^2+55xy+139y^2-233x-218y+223=0.$$

1094. 求切圆 $x^2+y^2=20$ 于两点 $P(2,\ 4)$ 和 $Q(-4,\ 2)$ 的抛物线方程.

[解] 两点(2, 4)、(−4, 2)的连线方程为 $x-3y+10=0$, 故与圆 $x^2+y^2-20=0$ 切于(2, 4)和(−4, 2)两点的圆锥曲线系方程为

$\lambda(x^2+y^2-20)=(x-3y+10)^2$, 即 $(\lambda-1)x^2+6xy+(\lambda-9)y^2+\cdots=0$.

当且仅当 $\Delta=36-4(\lambda-1)(\lambda-4)=0$ 时, 曲线为抛物线, $\therefore \lambda=10$. 故所求的抛物线方程为 $9x^2+6xy+y^2-20x+60y-300=0$.

1095. 求过二次曲线 $x^2+2y^2-2=0$ 和 $2x^2-y-2=0$ 的交点, 且与直线 $2x+2y+1=0$ 相切的二次曲线方程.

[分析] 先判定两二次曲线有四个实交点, 再利用过四个交点的二次曲线系方程与直线相切的条件确定常数 λ, 即可得解.

[解] 由 $\begin{cases} x^2+2y^2-2=0 \\ 2x^2-y-2=0 \end{cases}$ 消去 x^2, 得 $4y^2+y-2=0$, $\therefore y=\dfrac{-1\pm\sqrt{33}}{8}$.

$\because y+2=\dfrac{15\pm\sqrt{33}}{8}>0$, $\therefore x$ 有四实数解, 即两二次曲线有四个实交点. 设过两二次曲线四个交点的二次曲线系方程为 $x^2+2y^2-2=\lambda(2x^2-y-2)$, 即 $(1-2\lambda)x^2+2y^2+\lambda y-2+2\lambda=0\cdots$①. 因它与直线 $2x+3y+1=0$ 相切, 故把 $x=-\dfrac{3y+1}{2}$ 代入①, 得方程 $(17-18\lambda)y^2+(6-8\lambda)y-7+6\lambda=0$, 其判别式 $\Delta=4(3-4\lambda)^2-4(17-18\lambda)(6\lambda-7)=0$, 即 $31\lambda^2-63\lambda+32=0$. 解得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=\dfrac{32}{31}$. 分别代入①, 即得所求二次曲线方程为

$$x^2-2y^2-y=0 \quad 或 \quad 33x^2-62y^2-32y-2=0.$$

1096. 求与抛物线 $2y^2=5x+18$ 相切于点 $P(0,\ 3)$ 和 $Q(-2,\ -2)$, 且过点 $A(-2,\ 1)$ 的圆锥曲线方程.

[解] 抛物线 $2y^2=5x+18$ 在点 $P(0,\ 3)$ 和点 $Q(-2,\ -2)$ 处的切线方程分别为 $5x-12y+36=0$ 和 $5x+8y+26=0$. 又直线 PQ 的方程为 $5x-2y+6=0$. 设与抛物线 $2y^2=5x+18$ 切于 $P(0,\ 3)$ 和 $Q(-2,\ -2)$ 的圆锥曲线系方程为 $(5x-12y+36)(5x+8y+26)=\lambda(5x-2y+6)^2$. 因所求曲

线过点$A(-2,1)$，$\therefore(-10-12+36)(-10+8+26)=\lambda(-10-2+6)^2$，解得$\lambda=\frac{28}{3}$. 故所求方程为$25x^2-20xy+16y^2+30x-24y-72=0$.

［说明］ 本题也可直接用曲线系$2y^2-5x-18=\lambda(5x-2y+6)^2$来解.

1097. 设一抛物线与x、y轴分别相切于点$A(a,0)$、点$B(0,b)$. 试求此抛物线方程和顶点、焦点坐标，通径之长与准线方程.

［分析一］ 利用与两直线相切于两点的二次曲线系方程来求.

［解一］ 把x、y轴的方程看作二次曲线方程$xy=0$, 直线AB的方程为$bx+ay-ab=0$, 故与x、y轴分别相切于$A(a,0)$、$B(0,b)$的二次曲线系方程为$(bx+ay-ab)^2=\lambda xy\cdots$①. 若方程①的曲线为抛物线，则$\Delta=(2ab-\lambda)^2-4a^2b^2=0$, 得$\lambda=4ab$（$\lambda=0$时，方程①退化为两重合直线）. 故所求的抛物线方程为$b^2x^2-2abxy+a^2y^2-2ab^2x-2a^2by+a^2b^2=0$. 配方得$(bx-ay+\mu)^2=2b(ab+\mu)x+2a(ab-\mu)y-a^2b^2+\mu^2$. 令$b\cdot2b(ab+\mu)+(-a)2a(ab-\mu)=0$, 则$\mu=\frac{ab(a^2-b^2)}{a^2+b^2}$, 方程①可化为

$$\left[bx-ay+\frac{ab(a^2-b^2)}{a^2+b^2}\right]^2=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}\left(ax+by-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right).$$

$\therefore$ 此抛物线的通径之长为$\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^{3/2}}$，对称轴方程为

$$bx-ay+\frac{ab(a^2-b^2)}{a^2+b^2}=0\cdots②,$$

过顶点的切线方程为$ax+by-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=0\cdots$③，（参见第1051题）. 解方程②和③，得顶点坐标为$\left(\frac{ab^4}{(a^2+b^2)^2},\ \frac{a^4b}{(a^2+b^2)^2}\right)$. 把对称轴方程写成参数式$\begin{cases}x=\frac{ab^4}{(a^2+b^2)^2}+\frac{at}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ y=\frac{a^4b}{(a^2+b^2)^2}+\frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}\cdots$④，以$t=\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^{3/2}}$代入④，即得焦点坐标$\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\ \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$. 所求准线方程为$ax+by=0$.

［分析二］ 从抛物线与x、y轴分别相切于$A(a,0)$、$B(0,b)$确定抛物

线方程$(x+\beta y)^2+Dx+Ey+F=0$中系数β、D、E、F的值.

［解二］ 设抛物线方程为$(x+\beta y)^2+Dx+Ey+F=0$. 因它与x轴切于点$A(a,\ 0)$，故$x^2+Dx+F=0$有等根，得$D^2-4F=0$，$-\frac{D}{2}=a$，即$D=-2a$，$F=a^2$；因为抛物线与y轴切于点$B(0,\ b)$，故$\beta^2y^2+Ey+F=0$有等根，得$E^2-4\beta^2F=0$，$-\frac{E}{2\beta}=b$. 即$E=-\frac{2a^2}{b}$，$\beta=-\frac{a}{b}\left(若\beta=\frac{a}{b}，不合题意\right)$. 由此即可得所求抛物线方程. 余同［解一］.

1098. 求证：(1) 双曲线$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)=\lambda$的渐近线方程为：$A_1x+B_1y+C_1=0$和$A_2x+B_2y+C_2=0$; (2) 以$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)=0$为渐近线的双曲线方程为$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)=\lambda$，其中$A_1B_2\neq A_2B_1$，$\lambda$为任意常数.

［证］ 双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$的渐近线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$，且以$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$为渐近线的双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$. 由于双曲线与其渐近线方程，除常数项外其余完全相同，因此，经坐标轴平移和旋转变换后，它们的方程除常数项外完全一样，而且这样的变换是可逆的. 故双曲线$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)=\lambda$的渐近线方程为$(A_1x+B_1y+C_1)\cdot(A_2x+B_2y+C_2)=0$. 反之亦然. 故有公共渐近线$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)=0$的双曲线系方程为$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)=\lambda$.

§ 4. 图象、区域与作图

1099. 作方程$4(x^4-x^2y^2-x^2+y^2)=y^2(y^2-x^2)$的曲线.

［解］ 化原方程为:

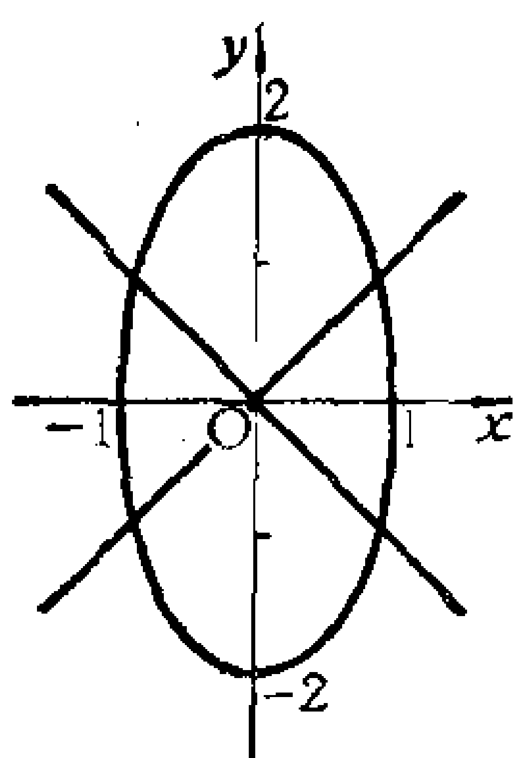
$$4(x^4-x^2y^2-x^2+y^2)-y^2(y^2-x^2)=0,$$

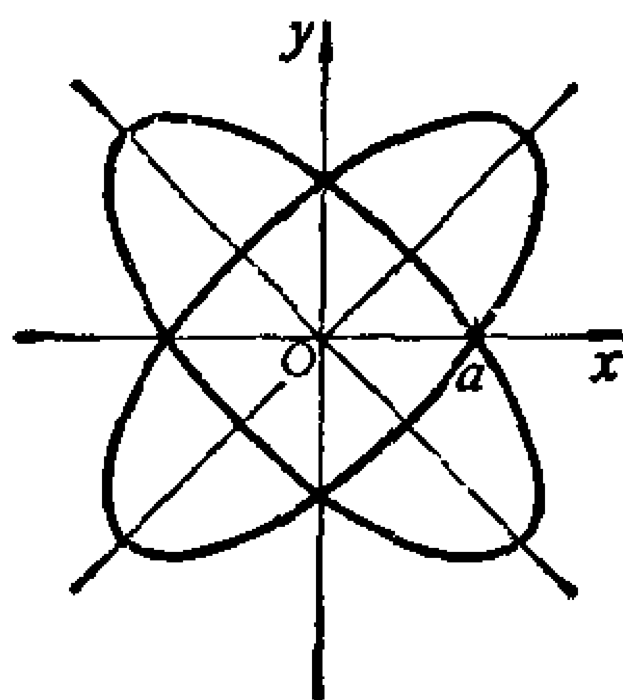
$$4(x^4-x^2y^2)-4(x^2-y^2)-y^2(y^2-x^2)=0,$$

即

$$(x^2-y^2)(4x^2+y^2-4)=0.$$

故方程的曲线为两直线$x-y=0$，$x+y=0$和一椭圆$4x^2+y^2-4=0$.





1100. 作方程$(x^2-a^2)^2+(y^2-a^2)^2=a^4$的曲线.

［解］ 化原方程为：

$$(x^2-a^2)^2+y^4-2a^2y^2+a^4-a^4=0,$$

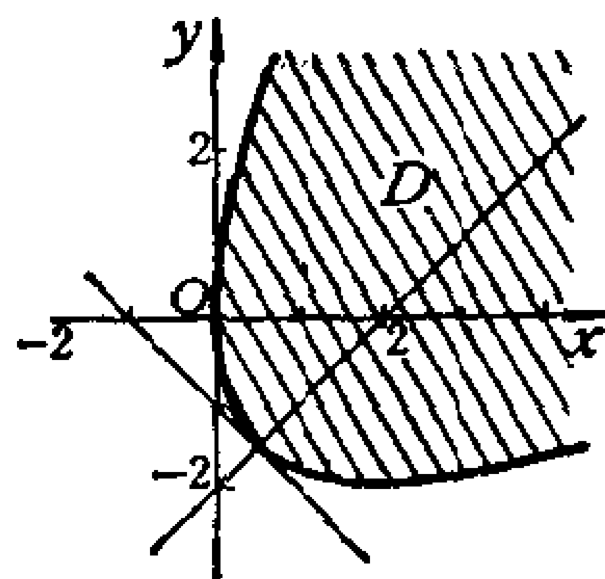
$$(x^2-a^2)^2+2y^2(x^2-a^2)+y^4-2x^2y^2=0,\quad (x^2+y^2-a^2)^2-2x^2y^2=0,$$

$$(x^2+y^2-a^2+\sqrt{2}\,xy)(x^2+y^2-a^2-\sqrt{2}\,xy)=0.$$

故方程的曲线为两椭圆：$x^2+\sqrt{2}\,xy+y^2=a^2$ 和 $x^2-\sqrt{2}\,xy+y^2=a^2$. 此两椭圆的半长轴为$a\sqrt{2+\sqrt{2}}$，半短轴为$a\sqrt{2-\sqrt{2}}$； 两椭圆长轴的倾角分别为$\frac{3\pi}{4}$和$\frac{\pi}{4}$(如右上图).

1101. 作点集$D=\{(x,\ y)\,|\,x^2-2xy+y^2-8x<0\}$.

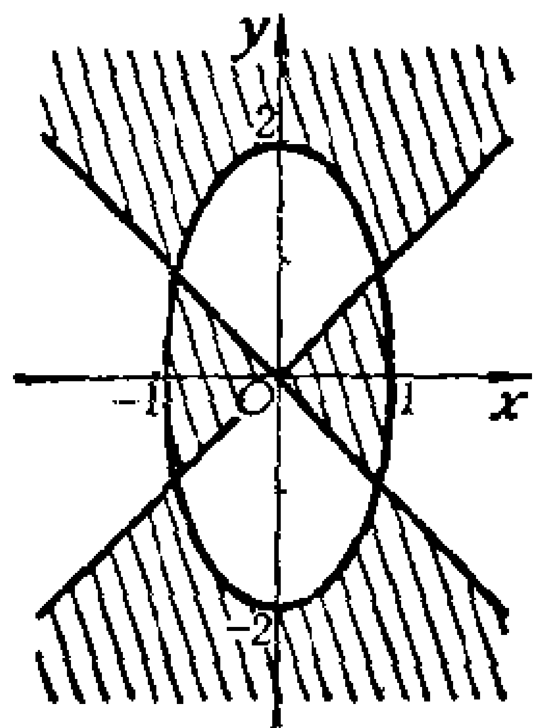
［解］ 令$f(x,\ y)=x^2-2xy+y^2-8x$，先画出$f(x,\ y)=0$的图形．因$f(x,\ y)=0$可以化为$(x-y-2)^2=4(x+y+1)$，故此曲线为抛物线，它的对称轴是$x-y-2=0$，过顶点的切线为$x+y+1=0$．$\because f(2,\ 0)=-12<0$，$\therefore$ 点集D为此抛物线的内部(不包括边界).



［说明］ 对于连续函数$z=f(x,y)$，若曲线$f(x,\ y)=0$将函数的定义域M(M为坐标平面的一个子域)划分为若干个区域，则函数$z=f(x,\ y)$在每个区域内的值的符号相同．此为解二元不等式提供了一般方法：先确定$f(x,y)$的定义域，再作$f(x,y)=0$的图象；若此图象将定义域划分为若干个区域，在每个区域内任选一个点$(x',\ y')$，则可根据$f(x',\ y')$的符号，确定$f(x,\ y)$在该区域上的符号，从而求出二元不等式的解.

1102. 作点集

$$D=\{(x,\ y)\,|\,4(x^4-x^2y^2-x^2+y^2)-y^2(y^2-x^2)\leqslant 0\}.$$

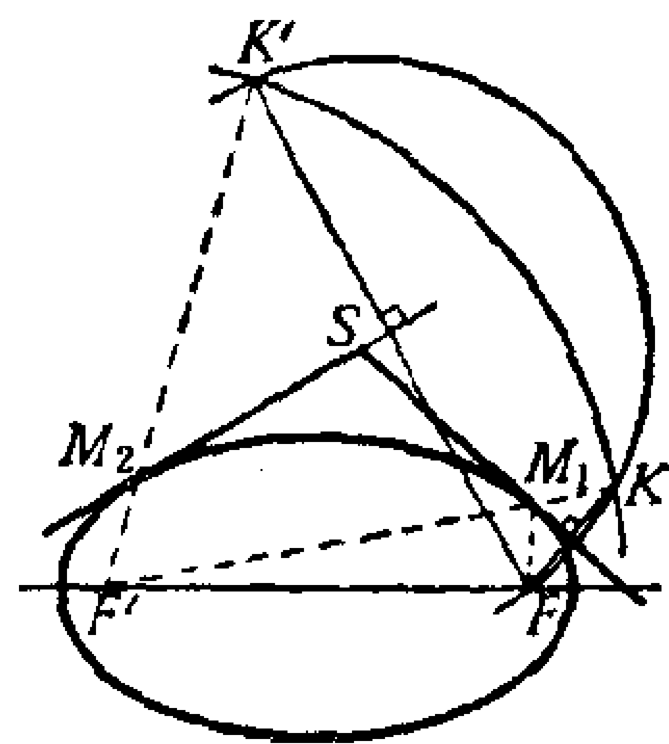


［解］ 设 $f(x,y)=4(x^4-x^2y^2-x^2+y^2)-y^2(y^2-x^2)=(x^2-y^2)(4x^2+y^2-4)$. 此函数定义域为整个坐标平面，若 $f(x, y)=0$，其图象为两直线 $x-y=0$, $x+y=0$, 以及椭圆 $4x^2+y^2-4=0$. $\because f(0, 1)=3>0$, $f(0, -1)=3>0$, …. 据上题说明，点集 D 的图形如图阴影部分（包括边界）.

1103. 已知椭圆及其两焦点 F、F'，用尺规求作：(1) 过椭圆上一点 M 的切线；(2) 过椭圆外一点 S 的切线.

［分析］ (1) 因过椭圆上一点 M 的切线是椭圆上过点 M 的两个焦半径所成的 $\angle FMF'$ 的外角分角线，于是得出作法. (2) 设 SM_1 为所作的切线，延长 $F'M_1$ 至 K，使 $|M_1K|=|M_1F|$. 按假设，SM_1 平分 $\angle FM_1K$. $\therefore K$ 与 F 是关于直线 SM_1 的两个对称点，而 $|F'M_1|+|M_1F|=2a$，即 $|F'K|=2a$. 由此可确定点 K 的位置，从而作出过点 S 的切线.

［作法］ (1) 略. (2) 作以点 F' 为中心、$2a$ 为半径的圆，与以点 S 为中心、$|SF|$ 为半径的圆相交于 K、K' 两点. 过点 S 分别作 KF 与 $K'F$ 的垂线，即为所求作的两切线.



［证］ $\because$ $|SF|=|SK|$, $SM_1\perp FK$, SM_1 与 $F'K$ 交于点 M_1，而 $|F'K|=2a$，即 $|F'M_1|+|M_1F|=2a$. $\therefore$ 点 M_1 在椭圆上，且 SM_1 平分 $\angle FM_1K$. $\therefore SM_1$ 为椭圆的切线. 同理可证 SM_2 也是椭圆的切线.

［说明］ 这类作图题的关键是分析，证明往往是分析的逆推. 为了节省篇幅，以下均从略.

1104. 已知双曲线及其两个焦点 F、F'，用尺规求作：(1) 过双曲线上任一点 M 的切线；(2) 过双曲线外一点 C 的切线；(3) 与已知直线平行的切线.

［分析］ (1) 因过双曲线上一点 M 的切线平分过点 M 的两焦半径的夹角，于是可得作法. (2) 设 CM 为所求作的切线，则直线 CM 平分 $\angle FMF'$，在 MF' 上取 $|MK|=|MF|$，则 $|F'K|=|F'M|-|FM|=2a$

(实轴长)，由此可确定点K的位置．同样可确定点K'的位置．从而作出过点C的切线．(3) 因焦点F关于与已知直线l平行的切线的对称点在以F'为中心，$2a$为半径的圆上，同时它又在过F与直线l垂直的直线上，因而点K可以确定，从而可得作法．

［作法］ (1) 连结点M与两焦点F、F'，在MF'上截取$|MK|=|MF|$，作KF的中垂线MG，即得过点M的切线(显然MG平分$\angle FMF'$)．

(2) 以F'为中心、$2a$为半径作圆，与以C为中心、CF为半径的圆交于K、K'．过C作FK、FK'的垂线，即得过点C的两切线(图1)．

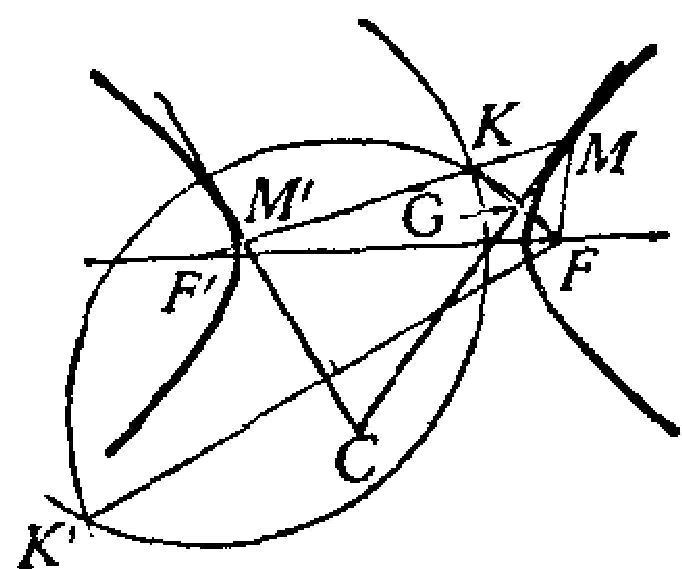


图 1

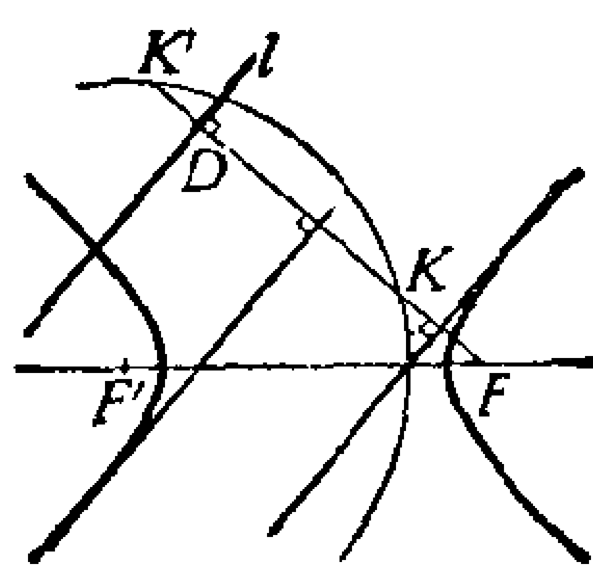
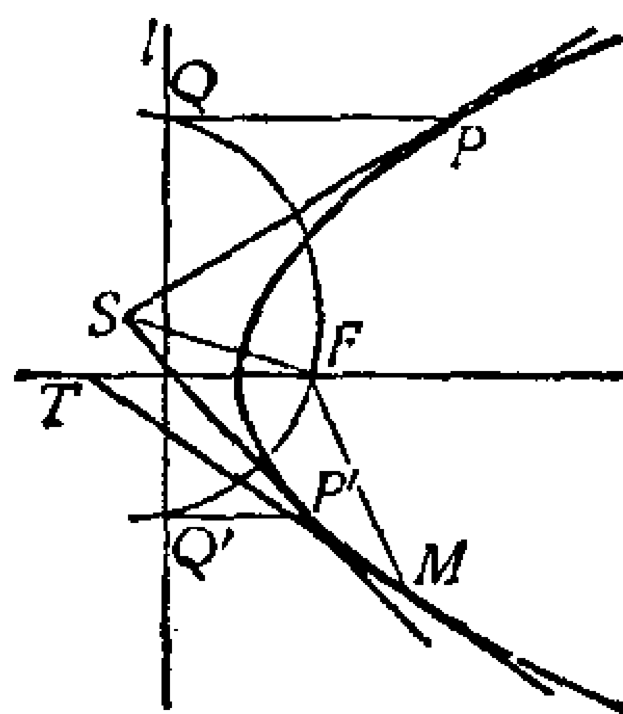


图 2

(3) 自F作已知直线l的垂线FD，与以F'为中心、$2a$为半径的圆交于K、K'，则FK、FK'的中垂线即是与已知直线l平行的两切线．当FD与以F'为中心、$2a$为半径的圆不相交时，无解；相切时，一解(即平行于l的渐近线)；相交于两点K、K'时，两解(图2)．

1105．已知抛物线及其轴与焦点，用尺规求作：(1) 过抛物线上一点M的切线；(2) 过抛物线外一点S的切线．

［分析］ (1) 若抛物线上一点M的切线与轴交于点T，则$|FM|=|FT|$．据此可得过点M的切线的作法．(2) 因焦点关于切线的对称点在抛物线的准线上，而抛物线上任一点到焦点与准线的距离均相等．故据此可得过抛物线外一点S的切线作法．



［作法］ (1) 连结点M与焦点F．在轴上截取一点T，使T在抛物线外部，且$|FM|=|FT|$，连结TM即得抛物线的切线．

(2) 连结 SF，以 S 为中心、$|SF|$ 为半径，作圆弧交准线 l 于点 Q、Q'. 过点 Q、Q' 分别作轴的平行线交抛物线于点 P、P'，则 SP、SP' 为过点 S 的两切线.

1106. 在欧氏平面上已知一弧为常态圆锥曲线的一部分，试判别此弧属于圆锥曲线的哪一种？

[分析] 圆锥曲线平行弦中点的轨迹为圆锥曲线的直径. 已知圆锥曲线弧不难作其两组平行弦，从而可得圆锥曲线的两直径. 根据两直径有无交点与交点的位置，即可判定圆锥曲线的种类.

[解] 作已知圆锥曲线弧的两组平行弦，此两组平行弦中点的连线即为圆锥曲线的两直径.

(1) 如此两直径的交点 O 在曲线的凹段内，则曲线为椭圆;

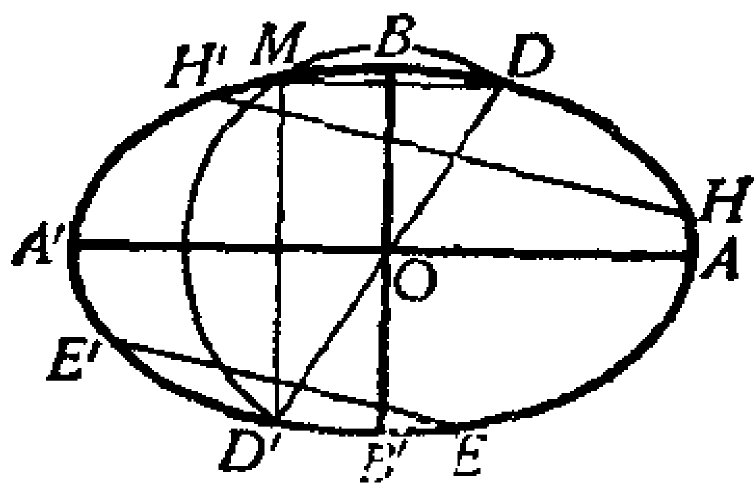
(2) 如交点 O 在曲线凹段外，则曲线为双曲线;

(3) 如两直径平行，则曲线为抛物线.

1107. 已知椭圆，用尺规求作：(1) 椭圆的中心；(2) 椭圆的两轴.

[分析] (1) 可先作一直径，即平行弦中点的轨迹，直径的中点即椭圆中心. (2) 若过椭圆上任意一点 M 作两轴的平行线与椭圆相交于两点，则此两点必关于中心成对称，即为椭圆直径的两端. 由此可得椭圆两轴的作法.

[作法] (1) 作两平行弦 EE'、HH'，连结 EE'、HH' 的中点，与椭圆交于 D、D'. DD' 是椭圆的直径. DD' 的中点 O 即椭圆的中心.

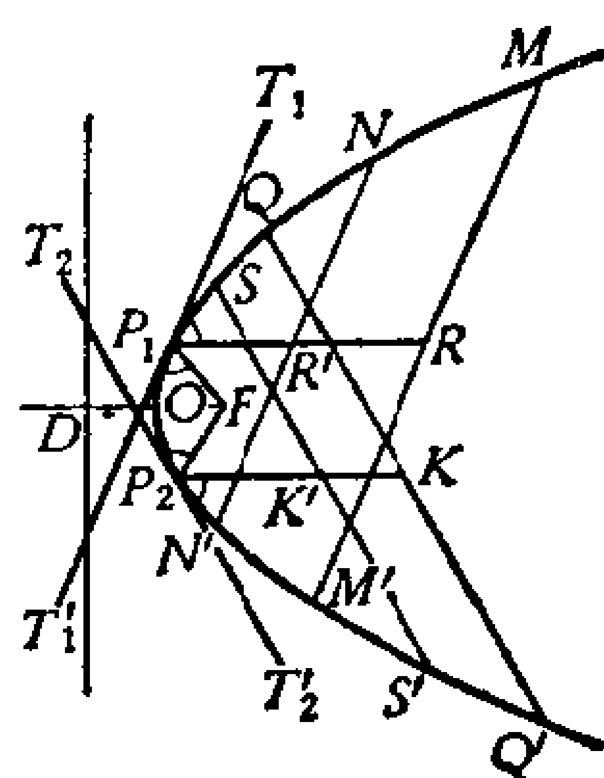


(2) 以 O 为中心，DD' 为直径作圆与椭圆交于点 M. 过 O 作 $AA' \parallel DM$、$BB' \parallel MD'$，则 AA'、BB' 即椭圆的轴.

1108. 已知抛物线弧，用尺规求作：(1) 抛物线的焦点；(2) 抛物线的准线.

[分析] (1) 抛物线平行弦中点的轨迹为抛物线的直径. 过直径端点与弦平行的直线为抛物线的切线. 利用抛物线的光学性质，过切点可作过

焦点的一直线. 作两条这样的直线, 它们的交点就是焦点. (2) 因抛物线的焦点在切线上的射影在过顶点的切线上, 于是抛物线的顶点和轴可以作出, 准线也就可以作出.



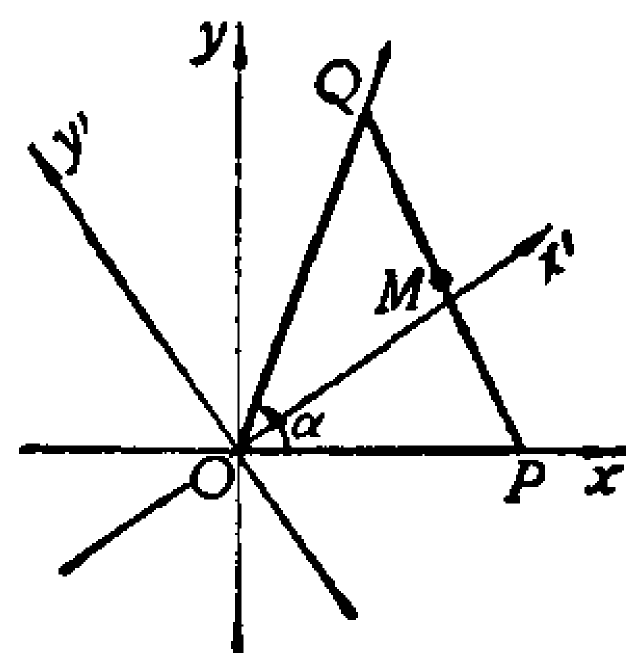
［作法］ (1) 作已知抛物线弧的两对平行弦 $MM' \parallel NN'$, $QQ' \parallel SS'$, MM'、NN' 的中点连线 RR' 与抛物线交于 P_1; QQ'、SS' 的中点连线 KK' 与抛物线交于 P_2. 过 P_1 作 $T_1T_1' \parallel MM'$; 过 P_2 作 $T_2T_2' \parallel QQ'$. 作 $\angle T_1'P_1F=\angle RP_1T_1$, $\angle T_2P_2F=\angle KP_2T_2'$, 则 P_1F、P_2F 的交点 F 即抛物线的焦点.

(2) 自 F 作 RP_1 的平行线, 交抛物线于 O, 点 O 即抛物线的顶点. 延长 FO 到 D 使 O 为 FD 的中点. 过 D 作 FD 的垂线即得抛物线的准线.

§5. 最大值、最小值

1109. 在过原点与 x 轴正方向成定角 $\alpha\left(0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 的射线上取动点 Q, 在 x 轴的正半轴上取动点 P, 使得 $\triangle POQ$ 的面积等于 8. (1) 求线段 PQ 中点 M 的轨迹方程; (2) 把坐标轴按逆时针旋转 $\frac{\alpha}{2}$, 求轨迹的新方程; (3) 当 $|OM|$ 取最小值时, 求点 M 的坐标, 并说明 $\triangle POQ$ 是什么样的三角形; (4) 当 $|OM|^2_{\min}=S_{\triangle POQ}=8$ 时, 求点 M 的轨迹.

［解］ (1) 设点 P、M 坐标分别为 $(a,\ 0)$、$(x,\ y)$, 则点 Q 的坐标为 $(2x-a,\ 2y)$.



$$\therefore\quad (2x-a)\sin\alpha-2y\cos\alpha=0\cdots①.$$

$$\because\quad S_{\triangle POQ}=\frac{1}{2}a\cdot 2y=8,\quad\therefore\quad a=\frac{8}{y}.$$

代入 ① 式, 即得点 M 的轨迹方程

$$(\sin\alpha)xy-(\cos\alpha)y^2-4\sin\alpha=0\cdots②$$

$$(x>0,\ y>0).$$

(2) 以转轴公式：$\begin{cases} x=x'\cos\dfrac{\alpha}{2}-y'\sin\dfrac{\alpha}{2} \\ y=x\ \sin\dfrac{\alpha}{2}+y'\cos\dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$ 代入②式，并化简得

$$x'^2\sin^2\frac{\alpha}{2}-y'^2\cos^2\frac{\alpha}{2}=4\sin\alpha,$$

即
$$\frac{x'^2}{8\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}-\frac{y'^2}{8\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}=1.$$

(3) 由于两点间的距离在旋转变换下保持不变，$\therefore\ |OM|^2=x'^2+y'^2=\left(1+\dfrac{y'^2}{8\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}\right)\cdot 8\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}+y'^2=8\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}+\left(\csc^2\dfrac{\alpha}{2}\right)y'^2$. 于是当 $y'=0$ 时，$|OM|_{\min}=2\sqrt{2\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}$. 此时点 M 的横坐标 $x_M=2\sqrt{2\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$，纵坐标 $y_M=2\sqrt{2\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}=2\sqrt{\sin\alpha}$，$\therefore$ 点 M 的坐标为 $\left(2\sqrt{2\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2},\ 2\sqrt{\sin\alpha}\right)$. 又因此时点 M 在 x' 轴上，即在 $\angle POQ$ 的角平分线上，而 M 又是 PQ 的中点，所以 $\triangle POQ$ 为等腰三角形.

(4) $\because\ |OM|^2_{\min}=8\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=8$, $\therefore\ \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=1$, $\therefore\ \alpha=\dfrac{\pi}{2}$. 于是方程②可化为 $xy-4=0(x>0,\ y>0)$. 故轨迹是等边双曲线 $xy=4$ 在第一象限内的一支.

1110. 求曲线 $2x^2-2xy+y^2-6x-4y+27=0$ 的最高点与最低点的坐标.

[分析] 最高点与最低点的纵坐标即 y 的最大值与最小值.

[解] $\because$ 已知曲线方程 $2x^2-2(y+3)x+y^2-4y+27=0$ 中 x 为实数，$\therefore\ \Delta=4(y+3)^2-8(y^2-4y+27)\geqslant 0$，即 $-y^2+14y-45\geqslant 0$. 得 $5\leqslant y\leqslant 9$. $\therefore\ y_{\min}=5,\ y_{\max}=9$. 此时 $\Delta=0$，其对应的 $x=\dfrac{y+3}{2}$. 故所求最高点与最低点的坐标分别为(6, 9)和(4, 5).

1111. 求椭圆 $2x^2-2xy+y^2+4x+y+6=0$ 上的点到直线 $2x-y-2=0$ 的距离的最大值与最小值.

［分析］ 因已知直线与椭圆不相交，故椭圆平行于已知直线的切线的切点到直线的距离即为所求.

［解］ 设椭圆平行于已知直线的切线方程为 $2x-y=\lambda$（λ 为待定常数）. 以 $y=2x-\lambda$ 代入椭圆方程，得 $2x^2-2x(2x-\lambda)+(2x-\lambda)^2+4x+2x-\lambda+6=0$，即 $2x^2-2(\lambda-3)x+\lambda^2-\lambda+6=0$. ∵ 直线与曲线相切，∴ $\Delta=4(\lambda-3)^2-8(\lambda^2-\lambda+6)=0$，解得 $\lambda=-1$、-3，以及 $x=\dfrac{\lambda-3}{2}=-2$、$-3$. ∴ 切点为 $(-2,\ -3)$、$(-3,\ -3)$. 于是得到距离的最大值 $d_{\max}=\sqrt{5}$，和最小值 $d_{\min}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

§6. 证 明 题

1112. 设圆与有心锥线有四个交点，依次为 A、B、C、D，则公共弦 AC、BD 与主轴的倾角互补.

［分析一］ 取主轴为 x 轴时，只要证两公共弦的斜率互为相反数即可.

［证一］ 取有心锥线的主轴为 x 轴，并设其方程为 $\alpha x^2+\beta y^2=1$，其中 $\alpha\neq\beta$. 圆与有心锥线的两公共弦 AC、BD 的方程为 $l_1x+m_1y+n_1=0$，$l_2x+m_2y+n_2=0$，则过 A、B、C、D 四点的二次曲线系方程为

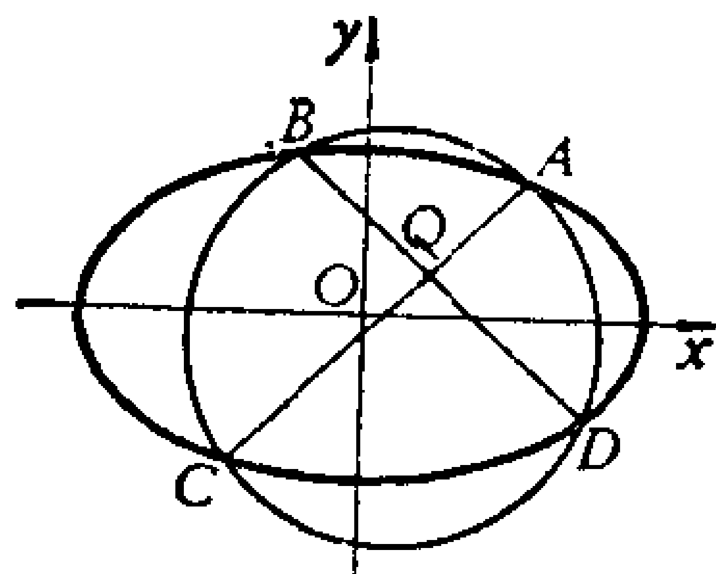


图 1

$$\alpha x^2+\beta y^2-1=\lambda(l_1x+m_1y+n_1)(l_2x+m_2y+n_2),$$

即 $$(\alpha-\lambda l_1l_2)x^2-\lambda(l_1m_2+l_2m_1)xy+(\beta-\lambda m_1m_2)y^2+\cdots=0\cdots①.$$

∵ 圆也过 A、B、C、D 四点，∴ 圆也是曲线系①中的一条曲线. 方程①为圆的充要条件是：$\alpha-\lambda l_1l_2=\beta-\lambda m_1m_2$，$\lambda(l_1m_2+l_2m_1)=0$. ∵ $\lambda\neq0$，∴ $l_1m_2+l_2m_1=0$. 若 $m_1m_2\neq0$，则 $\dfrac{l_1}{m_1}+\dfrac{l_2}{m_2}=0$，即 AC、BD 的斜率互为相反数. 若 $m_1m_2=0$，不妨设 $m_1=0$，则 $l_1\neq0$，从 $l_1m_2+l_2m_1=0$ 可知 $m_2=0$，$l_2\neq0$. 则 AC、BD 均与 y 轴平行，与题设不符. 因此 AC 与 BD 和主轴的倾角互补.

［分析二］ 因 A、B、C、D 依次为圆与有心锥线的四个交点，故弦 AC、BD 相交于一点 Q. 利用 AC、BD 的参数方程与圆幂定理，可得 AC、BD

与主轴倾角之间的关系.

［证二］ 设公共弦 AC、BD 的倾角分别为 θ、φ，且相交于点 $Q(x_0, y_0)$，其余假设同［证一］. 则 AC、BD 的方程分别为

$$\begin{cases} x=x_0+t\cos\theta \\ y=y_0+t\sin\theta \end{cases}\cdots①,$$

$$\begin{cases} x=x_0+t\cos\varphi \\ y=y_0+t\sin\varphi \end{cases}\cdots②.$$

分别代入有心锥线方程 $\alpha x^2+\beta y^2=1$，得

$$(\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta)t^2+2(\alpha x_0\cos\theta+\beta y_0\sin\theta)t+\alpha x_0^2+\beta y_0^2-1=0\cdots③,$$

$$(\alpha\cos^2\varphi+\beta\sin^2\varphi)t^2+2(\alpha x_0\cos\varphi+\beta y_0\sin\varphi)t+\alpha x_0^2+\beta y_0^2-1=0\cdots④.$$

方程③的两根为 $t_1=QA$，$t_2=QC$；方程④的两根为 $t_3=QB$，$t_4=QD$.
$\because$ A、B、C、D 四点共圆，$\therefore$ $|QA|\cdot|QC|=|QB|\cdot|QD|$，即 $|t_1t_2|=|t_3t_4|$.
无论点 Q 在圆内或圆外，都有 $t_1t_2=t_3t_4$. 根据韦达定理得

$$\frac{\alpha x_0^2+\beta y_0^2-1}{\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta}=\frac{\alpha x_0^2+\beta y_0^2-1}{\alpha\cos^2\varphi+\beta\sin^2\varphi},$$

即 $\alpha(1-\sin^2\theta)+\beta\sin^2\theta=\alpha(1-\sin^2\varphi)+\beta\sin^2\varphi$. $\therefore$ $\sin^2\theta=\sin^2\varphi$.
$\because$ $\theta\neq\varphi$，且 $0\leqslant\theta<\pi$，$0\leqslant\varphi<\pi$，$\therefore$ $\theta+\varphi=\pi$. 即 AC、BD 与主轴的倾角互补.

［说明］ (1) 本题的另一种叙述是："圆与有心锥线依次相交于四点 A、B、C、D，则公共弦 AC、BD 的夹角平分线与此锥线的对称轴平行."

(2) 如果四交点 A、B、C、D 中 A、B 两点重合，公共弦 AC、AD 与主轴的倾角互补(图 2).

(3) 如果四交点 A、B、C、D 中 A、B、C 三点重合，则过点 A 的切线和弦 AD 与主轴的倾角互补(图 3).

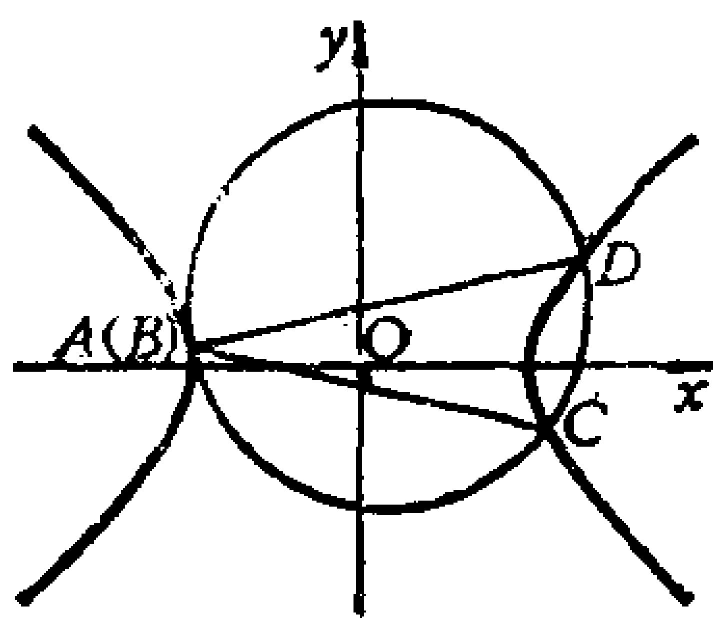


图 2

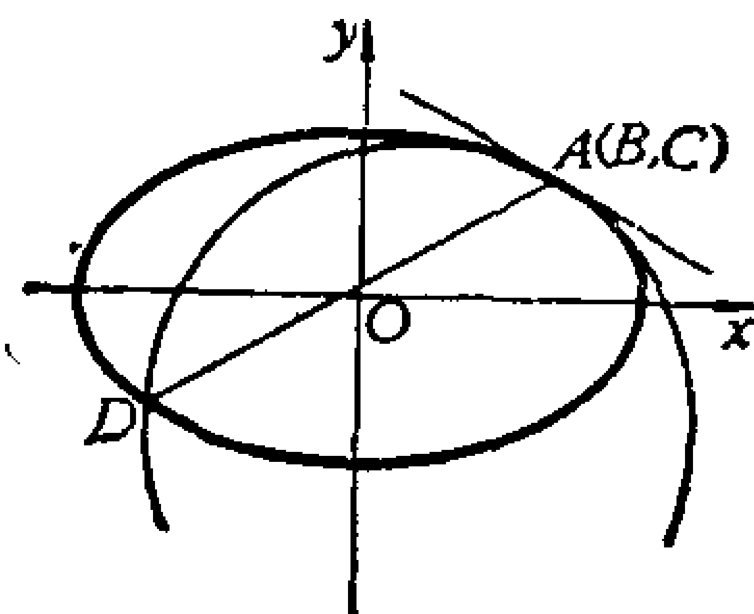


图 3

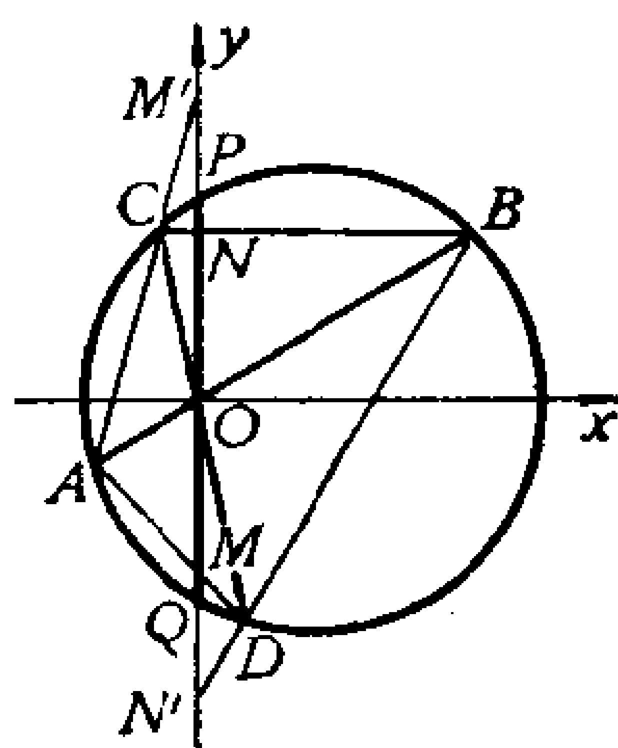
1113. 过任意二次曲线的弦 PQ 的中点 O，作两弦 AB、CD；如过 A、B、C、D 的二次曲线(包括退化二次曲线)与直线 PQ 交于 R、S 两点. 求证 $|OR|=|OS|$.

［分析］ 取 O 为原点，直线 PQ 为 y 轴，利用已知二次曲线方程和 AB、CD 方程，可以求出过 A、B、C、D 四点的二次曲线系方程. 于是 OR、OS 就是二次曲线系在 y 轴上的截距，从而得证.

［证］ 取 PQ 所在直线为 y 轴，PQ 的中点 O 为原点，建立直角坐标系. 设 $|OP|=|OQ|=a$，则 P、Q 两点的坐标为 $(0,\ a)$、$(0,\ -a)$. 过 P、Q 两点的任意二次曲线方程为 $Ax^2+Bxy+y^2+Dx-a^2=0$. 过点 O 的任意两弦 AB、CD(不与 PQ 重合)的方程分别为 $y=k_1x$，$y=k_2x$. 过 A、B、C、D 四点的二次曲线系方程为

$$F(x,\ y)=Ax^2+Bxy+y^2+Dx-a^2+\lambda(y-k_1x)(y-k_2x)=0\cdots①.$$

① 在 y 轴上的截距即 OR、OS，为方程 $F(0,\ y)=0$ 的根，$F(0,\ y)=(1+\lambda)y^2-a^2=0\cdots②$. ∵ 曲线 ① 与直线 PQ 交于两点，∴ 方程 ② 有两实根 OR、OS，且 $OR+OS=0$，即 $OR=-OS$. ∴ $|OR|=|OS|$.



［说明］ 平几命题："过圆内一弦 PQ 的中点 O 任意作两弦 AB、CD；分别过 A、B、C、D 的两双直线 AD、BC，AC、BD 各与直线 PQ 交于 M、N，M'、N'. 则 MN，$M'N'$ 均被点 O 所平分."是本题的特例.

1114. 过圆锥曲线上两点 P、Q 的切线交于点 T，F 为焦点.

(1) 若圆锥曲线为抛物线，求证：$|FT|^2=|FP|\cdot|FQ|$；

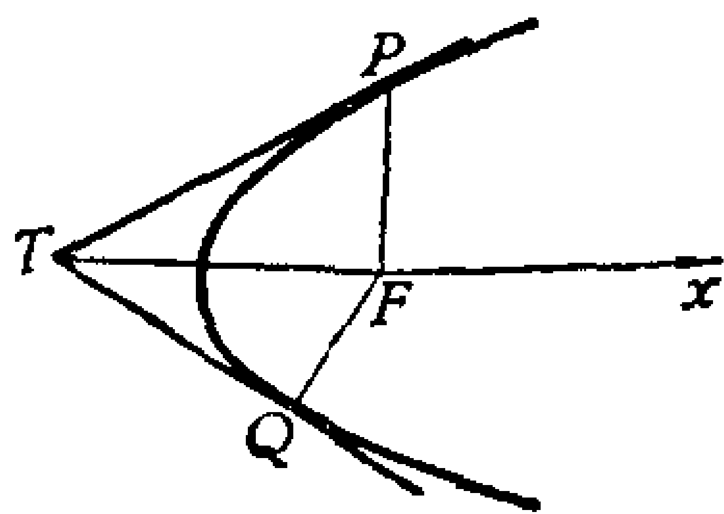
(2) 若圆锥曲线是椭圆，求证：

$$\frac{1}{|FP|\cdot|FQ|}-\frac{1}{|FT|^2}=\frac{1-e^2}{e^2p^2}\sin^2\frac{\angle PFQ}{2}$$

(p 是焦参数，e 是离心率).

［证］ 设圆锥曲线的方程是 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$. 点 P、Q 的坐标分别为 $(\rho_1,\ \alpha_1)$、$(\rho_2,\ \alpha_2)$，过点 P 的切线方程是 $\dfrac{ep}{\rho}=\cos(\theta-\alpha_1)-e\cos\theta\cdots①$；

过点 Q 的切线方程是 $\frac{ep}{\rho}=\cos(\theta-\alpha_2)-e\cos\theta\cdots$②. ②代入①，得 $\cos(\theta-\alpha_1)=\cos(\theta-\alpha_2)$，$\therefore\ \theta=\pi+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cdots$③.



③代入①，得

$$\frac{ep}{\rho}=\cos\left(\pi+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\alpha_1\right)-e\cos\left(\pi+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right),$$

即

$$\rho=\frac{ep}{e\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}}.$$

$\therefore$ 点 T 坐标为

$$\left(\frac{ep}{e\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}},\ \pi+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right),$$

$$|FT|^2=\frac{e^2p^2}{\left(e\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right)^2},$$

$$|FP|=\frac{ep}{1-e\cos\alpha_1},\quad |FQ|=\frac{ep}{1-e\cos\alpha_2}.$$

(1) 若圆锥曲线为抛物线，则 $e=1$，

$$|FT|^2=\frac{p^2}{\left(\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right)^2}=\frac{p^2}{4\sin^2\frac{\alpha_1}{2}\sin^2\frac{\alpha_2}{2}}$$

$$=\frac{p^2}{(1-\cos\alpha_1)(1-\cos\alpha_2)},$$

$$|FP|\cdot|FQ|=\frac{p^2}{(1-\cos\alpha_1)(1-\cos\alpha_2)},\qquad \therefore\quad |FT|^2=|FP|\cdot|FQ|.$$

(2) 若圆锥曲线是椭圆，令 $\alpha_1=\alpha-\beta$, $\alpha_2=\alpha+\beta$，则

$$\angle PFQ=\alpha_2-\alpha_1=2\beta.$$

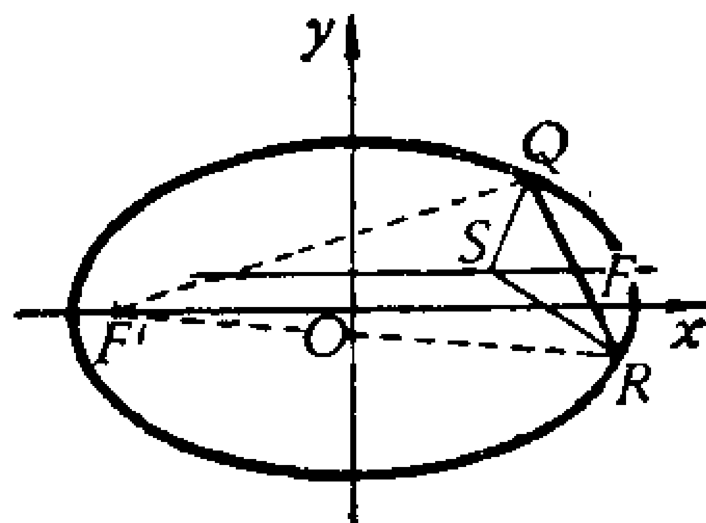
$$\frac{1}{|FP|\cdot|FQ|}-\frac{1}{|FT|^2}=\frac{\left\{\begin{array}{l}[1-e\cos(\alpha-\beta)][1-e\cos(\alpha+\beta)]\\-(e\cos\alpha-\cos\beta)^2\end{array}\right\}}{e^2p^2}$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{l}1-2e\cos\alpha\cos\beta+\frac{e^2}{2}(\cos2\alpha+\cos2\beta)\\-e^2\cos^2\alpha+2e\cos\alpha\cos\beta-\cos^2\beta\end{array}\right\}}{e^2p^2}=\frac{1-\cos^2\beta-e^2\sin^2\beta}{e^2p^2}$$

$$=\frac{1-e^2}{e^2p^2}\sin^2\beta=\frac{1-e^2}{e^2p^2}\sin^2\frac{\angle PFQ}{2}.$$

1115. 设椭圆焦点弦两端 Q、R 的法线相交于 S，求证过 S 且与长轴平行的直线平分 QR.

［分析］ 只要证明点 S 的纵坐标与 QR 中点的纵坐标相等即可．因点 Q 的法线是 $\angle FQF'$ 的平分线，点 R 的法线是 $\angle FRF'$ 的平分线，故点 S 是 $\triangle QRF'$ 的内心，按求三角形内心坐标(参见第 48 题)方法即得证.



［证］ 设椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，点 Q、R 的坐标分别为(x_1, y_1)、(x_2, y_2)，则 $|FQ|=a-ex_1$，$|FR|=a-ex_2$．因 Q、F、R 三点共线，故 $\dfrac{y_1}{a-ex_1}+\dfrac{y_2}{a-ex_2}=0$，即 $a(y_1+y_2)=e(x_1y_2+x_2y_1)$；又 $|F'Q|=a+ex_1$，$|F'R|=a+ex_2$，故 $\triangle F'QR$ 的内心纵坐标为

$$y_s=\frac{(a+ex_1)y_2+(a+ex_2)y_1+(a-ex_1+a-ex_2)\cdot 0}{a+ex_1+a+ex_2+a-ex_1+a-ex_2}$$

$$=\frac{a(y_1+y_2)+e(x_1y_2+x_2y_1)}{4a}=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

而 QR 中点的纵坐标为 $\dfrac{1}{2}(y_1+y_2)$，所以过点 S 与长轴平行的直线平分 QR.

1116. 过圆锥曲线上任意两点 P_1、P_2 的切线交于点 T，如果 P_1P_2 的连线和焦点 F 对应的准线交于点 K．求证：

$$\angle KFT=\frac{\pi}{2}.$$

［分析］ 证明点 T 和点 K 极角之差是 $\dfrac{\pi}{2}$.

［证］ 设圆锥曲线的极坐标方程是 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$．点 P_1、P_2 的极坐标是 $P_1(\rho_1, \alpha_1)$、$P_2(\rho_2, \alpha_2)$．据提要(8.63)，过点 P_1 的切线方程是

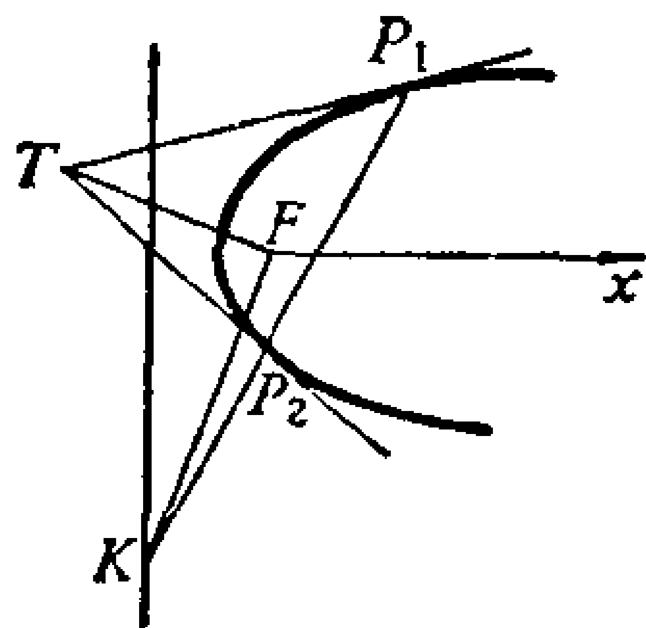
$$\frac{ep}{\rho}=\cos(\theta-\alpha_1)-e\cos\theta\cdots①,$$

过点 P_2 的切线方程是

$$\frac{ep}{\rho}=\cos(\theta-\alpha_2)-e\cos\theta\cdots②.$$

解①、②组成的方程组，得点 T 的极角为 $\theta=\pi+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$. 点 P_1、P_2 的连线方程是

$$\frac{ep}{\rho}=\sec\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\cos\left(\theta-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)-e\cos\theta\cdots③,$$



准线方程

$$\rho=\frac{-p}{\cos\theta}\cdots④.$$

将④代入③，得

$$-e\cos\theta=\sec\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\cos\left(\theta-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)-e\cos\theta,$$

即 $\cos\left(\theta-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)=0$. $\therefore$ $\theta-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=\frac{\pi}{2}$ 或 $\theta-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=\frac{3\pi}{2}$; $\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$ 或 $\theta=\frac{3\pi}{2}+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$; 亦即点 K 的极角为 $\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$. 故点 T 和点 K 的极角之差是 $\frac{\pi}{2}$, 即 $\angle KFT=\frac{\pi}{2}$.

1117. 经过圆锥曲线的准线上的一点作两条切线，则有：(1) 两切点与相应焦点共线；(2) 这点与焦点的连线同经过两切点的弦互相垂直.

[证] 取焦点为原点 O, 过焦点与准线垂直的直线为 x 轴，建立直角坐标系. 设 O 到准线的距离为 p(点 O 在准线的右侧)，离心率为 e, 则圆锥曲线的方程为 $x^2+y^2=e^2(x+p)^2$, 即 $(1-e^2)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2=0$. 设 $Q(-p, y_1)$ 为准线上任意一点，自点 Q 作圆锥曲线的两切线的切点弦方程为 $(1-e^2)(-p)x+y_1y-e^2p(x-p)-e^2p^2=0$, 即 $-px+y_1y=0$, $\therefore$ 此切点弦过焦点 $O(0, 0)$. 又 O、Q 的连线方程为 $y_1x+py=0$, $\because$ $(-p)y_1+py_1=0$, $\therefore$ OQ 与切点弦互相垂直.

1118. 求证：圆锥曲线经过焦点之弦长与此弦两个端点到该焦点同侧的准线的距离之和的比等于离心率 e.

[证] 设圆锥曲线焦点弦的端点为 P、Q, 焦点为 F, 点 P、Q 到准线的距离分别为 d_1、d_2. 根据圆锥曲线统一定义：$\frac{|PF|}{d_1}=\frac{|QF|}{d_2}=e$, 利用等

比定理即得 $\frac{|PF|+|QF|}{d_1+d_2}=\frac{|PQ|}{d_1+d_2}=e$.

1119. 求证：过有心圆锥曲线 $Ax^2+Cy^2=1$ $(AC\neq 0)$ 上任意一点 P 的法线夹在对称轴之间的线段被点 P 分成定比.

[证] 设点 P 坐标为 (x_1, y_1)，过点 P 的切线方程为 $Ax_1x+Cy_1y=1$，故法线方程为 $Cy_1x-Ax_1y=(C-A)x_1y_1$……①. 法线与对称轴的交点坐标为 $Q\left(\frac{C-A}{C}x_1,\ 0\right)$、$R\left(0,\ -\frac{C-A}{A}y_1\right)$.

$$\because\ QP:PR=\left(x_1-\frac{C-A}{C}x_1\right):(0-x_1)=-\frac{A}{C},$$

$\therefore$ 点 P 分 QR 成定比 $-\frac{A}{C}$.

[说明] 有心锥线问题，大多设其方程为 $Ax^2+Cy^2=1(AC\neq 0)$，以简化运算.

1120. 设圆锥曲线不过焦点的弦 PQ 过一定点 A，F 为焦点，且 $(\overrightarrow{FA},\ \overrightarrow{FP})=2\alpha$，$(\overrightarrow{FA},\ \overrightarrow{FQ})=2\beta$. 求证 $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$ 为定值.

[证] 设圆锥曲线的方程为 $\frac{ep}{\rho}=1-e\cos\theta$，点 A 坐标为 $(a,\ \varphi)$，点 P、Q 的坐标为 $(\rho_1,\ 2\alpha+\varphi)$、$(\rho_2,\ 2\beta+\varphi)$，直线 PQ 的方程

$$\frac{ep}{\rho}=\sec(\alpha-\beta)\cos(\theta-\alpha-\beta-\varphi)-e\cos\theta.$$

$\because$ PQ 过定点 $A(a,\ \varphi)$，$\therefore$ $\frac{ep}{a}=\sec(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)-e\cos\varphi$，化简得 $\frac{e(p+a\cos\varphi)}{a}=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$. 由合分比定理得

$$\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}=\frac{a-e(p+a\cos\varphi)}{a+e(p+a\cos\varphi)}=\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta},$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{a-e(p+a\cos\varphi)}{a+e(p+a\cos\varphi)}\quad (\text{定值}).$$

1121. 证明：通过两定点 P、P' 引互相平行的两直线和二次曲线的交点分别为 Q、R 及 Q'、R'，无论平行线的方向如何，$\left|\frac{PQ\cdot PR}{P'Q'\cdot P'R'}\right|$ 为一定值.

[证] 设点 P、P' 的坐标为 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2)，二次曲线方程为 $f(x, y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$，直线 $\overline{PQR}$ 的方程为 $\begin{cases}x=x_1+t_1\cos\theta\\ y=y_1+t\sin\theta,\end{cases}$ 则 PQ 和 PR 的值是方程 $(A\cos^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta)t^2+[(2Ax_1+By_1+D)\cos\theta+(Bx_1+2Cy_1+E)\sin\theta]t+f(x_1, y_1)=0$ 的两个根.

由于直线 $\overline{PQR}$ 与二次曲线有两实交点 Q、R，故二次项系数不等于零. 且据韦达定理知 $PQ\cdot PR=\dfrac{f(x_1, y_1)}{A\cos^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta}$. 同理可得

$$P'Q'\cdot P'R'=\frac{f(x_2, y_2)}{A\cos^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta}.$$

$$\therefore\quad \left|\frac{PQ\cdot PR}{P'Q'\cdot P'R'}\right|=\left|\frac{f(x_1, y_1)}{f(x_2, y_2)}\right|.$$

此式仅与两定点坐标和二次曲线方程有关，为一与平行线的方向无关的定值.

[说明] 凡涉及直线上两点到此直线上一定点距离的对称式的问题，可用直线的参数方程和韦达定理进行推证.

1122. 从任意一点 $P_0(x_0, y_0)$ 作两定向直线分别交二次曲线于 Q、R，S、T. 求证 $\left|\dfrac{P_0Q\cdot P_0R}{P_0S\cdot P_0T}\right|$ 为与 P_0 位置无关的定值.

[证] 设二次曲线方程为 $f(x, y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$…①，直线 $\overline{P_0QR}$ 与 $\overline{P_0ST}$ 的倾角分别为 θ_1、θ_2，则过点 $P_0(x_0, y_0)$ 的直线 $\overline{P_0QR}$ 与 $\overline{P_0ST}$ 的参数方程分别为

$$\begin{cases}x=x_0+t\cos\theta_1\\ y=y_0+t\sin\theta_1\end{cases}\cdots②,\quad \begin{cases}x=x_0+t\cos\theta_2\\ y=y_0+t\sin\theta_2\end{cases}\cdots③;$$

②代入①，得

$$(A\cos^2\theta_1+B\sin\theta_1\cos\theta_1+C\sin^2\theta_1)t^2$$
$$+[(2Ax_0+By_0+D)\cos\theta_1+(Bx_0+2Cy_0+E)\sin\theta_1]t+f(x_0, y_0)=0,$$

其两根为 $t_1=P_0Q$，$t_2=P_0R$. 因二次项系数不等于零，故 $P_0Q\cdot P_0R=\dfrac{f(x_0, y_0)}{A\cos^2\theta_1+B\sin\theta_1\cos\theta_1+C\sin^2\theta_1}$. 同理，

$$P_0S\cdot P_0T=\frac{f(x_0,\ y_0)}{A\cos^2\theta_2+B\sin\theta_2\cos\theta_2+C\sin^2\theta_2}.$$

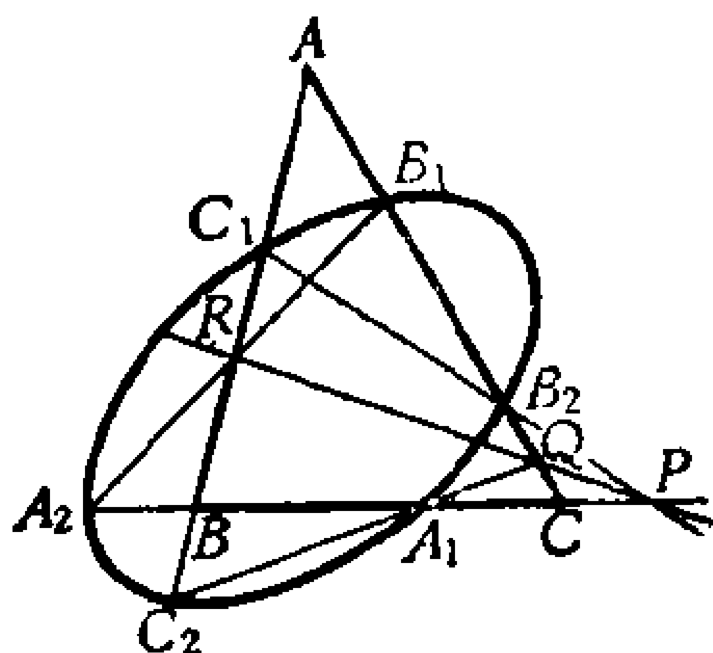
$\therefore\ \left|\frac{P_0Q\cdot P_0R}{P_0S\cdot P_0T}\right|=\left|\frac{A\cos^2\theta_2+B\sin\theta_2\cos\theta_2+C\sin^2\theta_2}{A\cos^2\theta_1+B\sin\theta_1\cos\theta_1+C\sin^2\theta_1}\right|$，此为与点 P_0 的位置无关的定值.

［说明］ (1) 本命题亦称牛顿定理. (2) 当二次曲线为有心锥线，点 P_0 位于中心 O'，如果半径 $O'A$，$O'B$ 分别与两定向直线平行时，则 $\frac{O'A^2}{O'B^2}$ 为定值. (3) 如果自 P_0 作有心锥线的两切线 P_0P_1、P_0P_2（P_1、P_2 为切点），半径 $O'A\parallel P_0P_1$，$O'B\parallel P_0P_2$，则 $\frac{P_0P_1}{P_0P_2}=\frac{O'A}{O'B}$.

1123. 设 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 或其延长线与一有心锥线分别交于 A_1、A_2、B_1、B_2、C_1、C_2，则

$$\frac{BA_1\cdot BA_2\cdot CB_1\cdot CB_2\cdot AC_1\cdot AC_2}{CA_1\cdot CA_2\cdot AB_1\cdot AB_2\cdot BC_1\cdot BC_2}=1.$$

［分析］ 设与 BC、CA、AB 平行的半径分别为 α、β、γ. 利用牛顿定理（见上题［说明］）即可得证.



［证］ 设与 BC、CA、AB 分别平行的半径长为 α、β、γ. 根据牛顿定理得 $\left|\frac{AB_1\cdot AB_2}{AC_1\cdot AC_2}\right|=\frac{\beta^2}{\gamma^2}$，$\left|\frac{BC_1\cdot BC_2}{BA_1\cdot BA_2}\right|=\frac{\gamma^2}{\alpha^2}$，$\left|\frac{CA_1\cdot CA_2}{CB_1\cdot CB_2}\right|=\frac{\alpha^2}{\beta^2}$.

$$\therefore\ \left|\frac{BA_1\cdot BA_2\cdot CB_1\cdot CB_2\cdot AC_1\cdot AC_2}{CA_1\cdot CA_2\cdot AB_1\cdot AB_2\cdot BC_1\cdot BC_2}\right|=1\cdots①.$$

由于分子、分母同号，

$$\therefore\ \frac{BA_1\cdot BA_2\cdot CB_1\cdot CB_2\cdot AC_1\cdot AC_2}{CA_1\cdot CA_2\cdot AB_1\cdot AB_2\cdot BC_1\cdot BC_2}=1\cdots②.$$

［说明］ (1) 本命题亦称为卡诺 (Carnot) 定理. (2) 若 AA_1、BB_1、CC_1 三直线共点，则 AA_2、BB_2、CC_2 三直线也共点. $\because\ \frac{AC_1\cdot BA_1\cdot CB_1}{BC_1\cdot CA_1\cdot AB_1}=-1$，从②可得 $\frac{AC_2\cdot BA_2\cdot CB_2}{BC_2\cdot CA_2\cdot AB_2}=-1$. $\therefore$ AA_2、BB_2、CC_2 也相交于一点. (3) 如果 $\triangle ABC$ 的三边与圆锥曲线相切于 A_1、B_1、C_1，则 AA_1、BB_1、CC_1 相交于一点（参见第 1135 题说明）. (4) 设 P、Q、R 分别为直线对

$(BC,\ C_1B_2)$、$(CA,\ C_2A_1)$、$(AB,\ A_2B_1)$的交点，则 P、Q、R 三点共线（参见第 1134 题）.

1124. 设过圆锥曲线 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$ 的焦点的任意圆和圆锥曲线的四个交点的极径分别为 ρ_1、ρ_2、ρ_3、ρ_4. 求证以上 ρ_i 的一组值必定满足：(1) $\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4=d^2p^2$；(2) $\dfrac{1}{\rho_1}+\dfrac{1}{\rho_2}+\dfrac{1}{\rho_3}+\dfrac{1}{\rho_4}=\dfrac{2}{ep}$. 其中 d 为圆的直径.

［分析］ 从圆锥曲线和圆方程中消去 θ，得关于 ρ 的代数方程，运用韦达定理即可推证.

［证］ 已知圆锥曲线的方程为 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$ …①. 若过焦点的圆的圆心的极角为 γ，则圆方程为 $\rho=d\cos(\theta-\gamma)$…②. 由①得 $\cos\theta=\dfrac{\rho-ep}{e\rho}$，因而 $\sin\theta=\pm\sqrt{1-\left(\dfrac{\rho-ep}{e\rho}\right)^2}$. 代入②：$\rho=d\cos\theta\cos\gamma+d\sin\theta\sin\gamma$，得 $[e\rho^2-d(\rho-ep)\cos\gamma]^2=d^2\sin^2\gamma[e^2\rho^2-(\rho-ep)^2]$，整理得 $e^2\rho^4-2ed\cos\gamma\cdot\rho^3+(d^2+2e^2pd\cos\gamma-e^2d^2\sin^2\gamma)\rho^2-2epd^2\rho+d^2e^2p^2=0$. 此方程的根即为 ρ_1、ρ_2、ρ_3、ρ_4. 根据韦达定理有 $\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4=d^2p^2$…③，$\rho_1\rho_2\rho_3+\rho_1\rho_2\rho_4+\rho_1\rho_3\rho_4+\rho_2\rho_3\rho_4=\dfrac{2pd^2}{e}$…④. ④除以③，得 $\dfrac{1}{\rho_1}+\dfrac{1}{\rho_2}+\dfrac{1}{\rho_3}+\dfrac{1}{\rho_4}=\dfrac{2}{ep}$.

［说明］ 圆锥曲线的焦半径的有关性质，一般可用圆锥曲线的极坐标方程，按题目要求研究所得 ρ 的代数方程，然后求解.

1125. P_1、P_2、…、P_n 为抛物线上 n 个点，F 为焦点，且 FP_1、FP_2、…、FP_n n 等分周角 F，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{|FP_i|}$ 为定值.

［证］ 设 $\angle xFP_1=\alpha$，则 $\angle xFP_i=\alpha+\left[\dfrac{(i-1)2\pi}{n}\right]$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$. 由抛物线的极坐标方程 $\rho=\dfrac{p}{1-\cos\theta}$，得

$$FP_i=\frac{p}{1-\cos\left[\alpha+\frac{(i-1)2\pi}{n}\right]}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|FP_i|}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1-\cos\left[\alpha+\frac{(i-1)2\pi}{n}\right]}{p}=\frac{n}{p}-\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\cos\left[\alpha+\frac{(i-1)2\pi}{n}\right]$$

$$=\frac{n}{p}-\frac{1}{p\sin\frac{\pi}{n}}\sum_{i=1}^{n}\cos\left[\alpha+\frac{(i-1)2\pi}{n}\right]\sin\frac{\pi}{n}$$

$$=\frac{n}{p}-\frac{1}{2p\sin\frac{\pi}{n}}\sum_{i=1}^{n}\left\{\sin\left[\alpha+\frac{(2i-1)\pi}{n}\right]-\sin\left[\alpha+\frac{(2i-3)\pi}{n}\right]\right\}$$

$$=\frac{n}{p}-\frac{1}{2p\sin\frac{\pi}{n}}\left\{\sin\left[\alpha+\frac{(2n-1)\pi}{n}\right]-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{n}\right)\right\}$$

$$=\frac{n}{p}-\frac{1}{2p\sin\frac{\pi}{n}}\left\{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{n}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{n}\right)\right\}=\frac{n}{p}\quad(\text{定值}).$$

［说明］ 本题推广到椭圆仍成立，但不能推广到双曲线，例如，$n=2$，$\angle xFP_1=\alpha$，当

$$\alpha\in\left(-\arccos\frac{1}{e},\ \arccos\frac{1}{e}\right)\cup\left(\pi-\arccos\frac{1}{e},\ \pi+\arccos\frac{1}{e}\right)$$

时，$FP_1<0$，$FP_2>0$；或 $FP_1>0$，$FP_2<0$. 则 $\frac{1}{|FP_1|}+\frac{1}{|FP_2|}$ 不是定值.

1126. 自圆锥曲线上任意一点到其内接四边形两双对边距离之积的比为定值.

［分析］ 为研究一点到圆锥曲线内接四边形各边的距离，可设四边形四边所在直线的方程为法线式．有了四边的方程，可根据过四边形四顶点的二次曲线系方程进行推证.

［证］ 设圆锥曲线内接四边形四边的方程依次为 $\alpha(x,\ y)=x\cos\alpha+y\sin\alpha-p_1=0$，$\beta(x,\ y)=x\cos\beta+y\sin\beta-p_2=0$，$\gamma(x,\ y)=x\cos\gamma+y\sin\gamma-p_3=0$，$\delta(x,\ y)=x\cos\delta+y\sin\delta-p_4=0$. 则此圆锥曲线方程为 $\alpha(x,\ y)\gamma(x,\ y)=\lambda\beta(x,\ y)\delta(x,\ y)$，$\lambda$ 为非零常数．令 $P_0(x_0,\ y_0)$为此圆锥

曲线上任意一点，则 $\alpha(x_0, y_0)\gamma(x_0, y_0)=\lambda\beta(x_0, y_0)\delta(x_0, y_0)$.

$$\therefore\quad \frac{\alpha(x_0, y_0)\gamma(x_0, y_0)}{\beta(x_0, y_0)\delta(x_0, y_0)}=\lambda.$$

但 $|\alpha(x_0, y_0)|$、$|\beta(x_0, y_0)|$、$|\gamma(x_0, y_0)|$、$|\delta(x_0, y_0)|$ 分别为点 P_0 到四边的距离 d_1、d_2、d_3、d_4. $\therefore\ \frac{d_1d_3}{d_2d_4}=|\lambda|$.

[说明] 本命题亦称帕普斯(Pappus)定理.

1127. 证明极坐标方程 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$ 与 $\rho=-\frac{ep}{1+e\cos\theta}$ 表示同一曲线.

[证] 设 $P(\rho, \theta)$ 是曲线 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$ 上任意一点,

$$\because\quad -\rho+\frac{ep}{1+e\cos(\theta+\pi)}=-\rho+\frac{ep}{1-e\cos\theta}=0,$$

故点 $P'(-\rho, \theta+\pi)$ 必在曲线 $\rho=-\frac{ep}{1+e\cos\theta}$ 上. 反之, 对于曲线 $\rho=-\frac{ep}{1+e\cos\theta}$ 上任意一点 (ρ, θ),

$$\because\quad -\rho-\frac{ep}{1-e\cos(\theta+\pi)}=-\left(\rho+\frac{ep}{1+e\cos\theta}\right)=0,$$

$\therefore$ 点 $(-\rho, \theta+\pi)$ 在曲线 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$ 上. 而点(ρ, θ)即$(-\rho, \theta+\pi)$, 故此两方程表示同一圆锥曲线.

1128. 证明二次曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 退化的充要条件是 $\Theta=\begin{vmatrix}2A & B & D\\ B & 2C & E\\ D & E & 2F\end{vmatrix}=0$.

[证] 当 $\Delta=B^2-4AC\neq 0$ 时, 将坐标轴平移: $\begin{cases}x=x'+x_0\\ y=y'+y_0,\end{cases}$ 使

$$\begin{cases}2Ax_0+By_0+D=0\\ Bx_0+2Cy_0+E=0,\end{cases}$$

二次曲线的方程化为 $Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2-\frac{\Theta}{2\Delta}=0$. 这一变换是可逆的.

∴ 二次曲线退化 $\Longleftrightarrow \Theta=0$.

当 $\Delta=0$ 时，如 $B<0$，则 $AC>0$；不失一般性，令 $A>0$，$C>0$. 二次曲线方程为 $(\sqrt{A}x-\sqrt{C}y)^2+Dx+Ey+F=0$. 取 $\operatorname{ctg}\theta=\sqrt{\dfrac{C}{A}}$，经转轴变换

$$\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta=\dfrac{\sqrt{C}x'-\sqrt{A}y'}{\sqrt{A+C}} \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta=\dfrac{\sqrt{A}x'+\sqrt{C}y'}{\sqrt{A+C}}, \end{cases}$$

后，曲线方程化为 $C'y'^2+D'x'+E'y'+F=0$，其中 $C'=A+C$，$D'=\dfrac{D\sqrt{C}+E\sqrt{A}}{\sqrt{A+C}}$，$E'=\dfrac{-D\sqrt{A}+E\sqrt{C}}{\sqrt{A+C}}$. ∵ 这一变换可逆，∴ 二次曲线退化 $\Longleftrightarrow D'=0$，即 $D\sqrt{C}+E\sqrt{A}=0 \Longleftrightarrow CD^2+AE^2+2DE\sqrt{AC}=CD^2+AE^2-BDE=0 \Longleftrightarrow \Theta=8ACF+2BDE-2AE^2-2CD^2-2FB^2=2F(4AC-B^2)+2(BDE-AE^2-CD^2)=0$. 同理可证 $B>0$ 的情况.

当 $B=0$ 时，则 A、C 中必有一为零，不妨设 $A=0$，二次曲线方程为 $Cy^2+Dx+Ey+F=0$. ∴ 二次曲线退化 $\Longleftrightarrow D=0 \Longleftrightarrow \Theta=\begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix}=0$. 故二次曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 退化的充要条件是 $\Theta=0$.

1129. **已知 F 是焦点，P、Q 是圆锥曲线上两动点，而 $\angle PFQ=2\delta$（δ 为锐角）. 求证：(1) 过点 P、Q 的切线的交点的轨迹是以 F 为焦点的圆锥曲线；(2) 直线 PQ 恒切于一以 F 为焦点的圆锥曲线.**

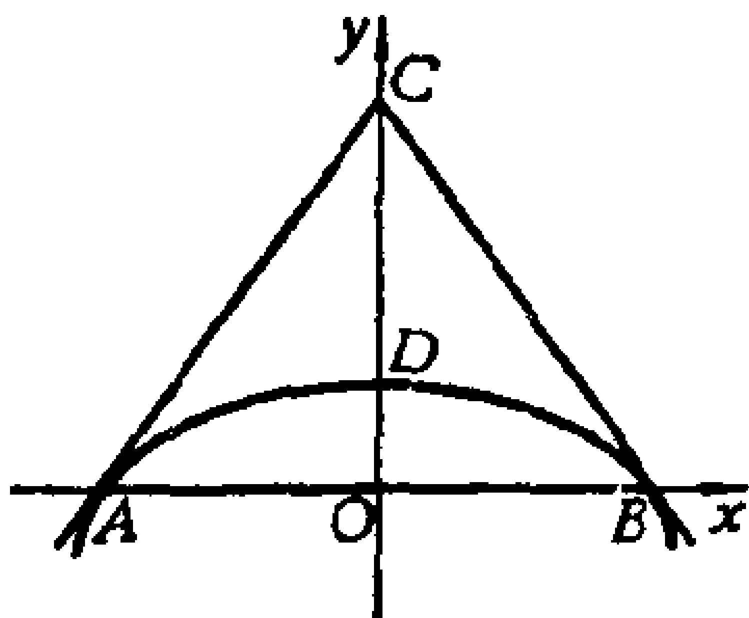
[证] (1) 在以焦点 F 为极，圆锥曲线的对称轴为极轴的极坐标系中，设点 P、Q 的极角分别为 $\gamma+\delta$、$\gamma-\delta$，其中 γ 为参数，则过 P、Q 的切线方程为 $\dfrac{ep}{\rho}=\cos(\theta-\gamma-\delta)-e\cos\theta\cdots$①，$\dfrac{ep}{\rho}=\cos(\theta-\gamma+\delta)-e\cos\theta\cdots$②. 从①、②得 $\cos(\theta-\gamma-\delta)=\cos(\theta-\gamma+\delta)$. 由于 $\delta\neq0$，∴ $\theta=\gamma$. 以 $\gamma=\theta$ 代入①，得 $\dfrac{ep}{\rho}=\cos\delta-e\cos\theta$，即 $\dfrac{ep\sec\delta}{\rho}=1-e\sec\delta\cos\theta$. ∴ 轨迹为以 F 为焦点，$e\sec\delta$ 为离心率，通径长为 $2ep\sec\delta$ 的圆锥曲线. 当

$\cos\delta>e$ 时是椭圆；当 $\cos\delta=e$ 时是抛物线；当 $\cos\delta<e$ 时是双曲线.

(2) P、Q 的连线方程为 $\frac{ep}{\rho}=\sec\delta\cos(\theta-\gamma)-e\cos\theta$，即 $\frac{ep\cos\delta}{\rho}=\cos(\theta-\gamma)-e\cos\delta\cos\theta$…③. 与 $\frac{ep}{\rho}=\cos(\theta-\alpha)-e\cos\theta$ 对比，可知③为圆锥曲线 $\frac{ep\cos\delta}{\rho}=1-e\cos\delta\cos\theta$ 的切线. ∴ ③与以 $e\cos\delta$ 为离心率，$2ep\cos\delta$ 为通径长，F 为焦点的圆锥曲线恒相切.

1130. 设 OC 为等腰 $\triangle ABC$ 底边 AB 上中线，若一条二次曲线经过 A、B 两点且与 AC、BC 相切，与 OC 相交于 D 点，记 $\lambda=\frac{CD}{DO}>0$，试证：当 $\lambda>1$、$\lambda=1$、$\lambda<1$ 时，该二次曲线分别为椭圆、抛物线、双曲线.

[证一] 取 OB 为 x 轴、OC 为 y 轴，建立直角坐标系，设 $B(1, 0)$、$A(-1, 0)$、$C(0, k)$，$(k>0)$. 由于一非退化的二次曲线与一条直线至多有两个交点，故该二次曲线不过原点，其方程可设为 $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey-1=0$…①. ∵ 曲线过 A、B 二点，∴ $ax^2+2dx-1=0$ 的两根为 1、-1，∴ $d=0$，$a=1$. 过①上点 (x_0, y_0) 的切线方程为 $x_0x+b(x_0y+xy_0)+cy_0y+e(y+y_0)-1=0$，即 $(x_0+by_0)x+(bx_0+cy_0+e)y+ey_0-1=0$. 在点 A、B 的切线的斜率分别为：$k=\frac{1}{e-b}$，$-k=-\frac{1}{b+e}$. 从 $k=\frac{1}{e-b}=\frac{1}{b+e}$ 中得 $b=0$，$e=\frac{1}{k}$. 又点 D 坐标为 $\left(0, \frac{k}{1+\lambda}\right)$，二次曲线过 D 点，∴ $c\left(\frac{k}{1+\lambda}\right)^2+2e\left(\frac{k}{1+\lambda}\right)-1=0$. 得 $c=\frac{\lambda^2-1}{k^2}$. 故二次曲线方程为 $x^2+\frac{\lambda^2-1}{k^2}y^2+\frac{2}{k}y-1=0$. 因此当 $\lambda>1$、$\lambda=1$、$0<\lambda<1$ 时，方程分别表示椭圆、抛物线、双曲线.



[证二] 设与 AC、BC 相切于 A、B 两点的二次曲线系方程为 $(kx+y-k)(kx-y+k)=\mu y^2$. ∵ 曲线过点 $D\left(0, \frac{k}{1+\lambda}\right)$，∴ $\mu=-\lambda^2$.

曲线方程可写成 $k^2x^2+(\lambda^2-1)y^2+2ky-k^2=0(k\neq0)$. ∴ 当 $\lambda>1$、$\lambda=1$、$0<\lambda<1$ 时，方程分别表示椭圆、抛物线、双曲线.

1131. A、B 为二次曲线 $ax^2+bxy+cy^2+ex+fy+g=0$ $(a\neq0)$ 上的两个定点，过点 A、B 任作一圆与二次曲线相交于另外两点 C、D. 求证直线 CD 有定向.

[分析一] 要证直线 CD 有定向，应求出直线 CD 的方程，为此先简化直线 AB 与已知二次曲线的方程. 若取点 A 为原点，AB 所在直线为 x' 轴，建立新坐标系，利用二次曲线系方程即可求得 CD 的方程.

[证一] 以 A 为原点，AB 为 x' 轴，作新坐标系. 设 B 点新坐标为 $(l, 0)$，在此坐标系中，因二次曲线与 x' 轴交于 A、B 两点，故二次曲线方程可化为 $x'^2+bx'y'+c'y'^2-lx'+f'y'=0$…①. 过点 A、B 的圆方程为 $x'^2+y'^2-lx'+\lambda y=0$ (λ 为参数)…②. ①－②，得 $y'[b'x'+(c'-1)y'+(f'-\lambda)]=0$. 这是另外两个交点 C、D 坐标满足的条件，因为 C、D 不在 x 轴上，故它们的纵坐标 $y'\neq0$，从而直线 CD 的方程是 $b'x'+(c'-1)y'+f'-\lambda=0$. 因 x'、y' 的系数 b'、$(c'-1)$ 为定值，故直线 CD 有定向.

[分析二] 因过点 A、B 的任意圆 F 与已知二次曲线的另两交点为 C、D，故过 A、B、C、D 四点的二次曲线系 S 中包含圆 F. 利用 S 为圆的充要条件，也可确定直线 CD 方程中 x、y 项系数之比.

[证二] 取 A 为原点，AB 所在直线为 x' 轴建立坐标系. 在此坐标系中，已知二次曲线的方程为 $a'x'^2+b'x'y'+c'y'^2+d'x'+e'y'=0$. 其中 a'、b'、c'、d'、e' 为定值. 直线 CD 的方程为 $lx'+my'+n=0$，过 A、B、C、D 的二次曲线系方程为 $a'x'^2+b'x'y'+c'y'^2+d'x'+e'y'=\lambda y'(lx'+my'+n)$，即 $a'x'^2+(b'-\lambda l)x'y'+(c'-\lambda m)y'^2+d'x'+(e'-\lambda n)y'=0$. 若此二次曲线为圆，则 $\begin{cases}a'=c'-\lambda m\\ b'-\lambda l=0\end{cases}$…①.

若 $m=0$，则 $l\neq0$，即直线 CD 与 y' 轴平行，故有定向；

若 $m\neq0$，则由①得直线 CD 的斜率 $-\dfrac{l}{m}=\dfrac{b'}{a'-c'}$ 为定值，故直线 CD 有定向.

1132. 若椭圆内切于菱形，试证其两轴与菱形的对角线重合.

[分析] 利用椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 的外切平行四边形四边的方程，若

两两对边的距离相等，则此平行四边形为菱形. 从此证明椭圆的外切菱形的对角线与椭圆的对称轴重合.

［证］ 设椭圆方程为 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$，其外切平行四边形四边的方程依次为：$\frac{x}{a}\cos\alpha+\frac{y}{b}\sin\alpha=1\cdots$①，$\frac{x}{a}\cos\beta+\frac{y}{b}\sin\beta=1\cdots$②，$\frac{x}{a}\cos\alpha+\frac{y}{b}\sin\alpha=-1\cdots$③，$\frac{x}{a}\cos\beta+\frac{y}{b}\sin\beta=-1\cdots$④. 若此平行四边形为菱形，则两两对边的距离相等：

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}}}=\frac{2}{\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{b^2}}}$$

即 $(a^2-b^2)(\sin^2\alpha-\sin^2\beta)=0$. $\because\ a^2-b^2\neq 0$, $\therefore\ \sin^2\alpha=\sin^2\beta$，又 $\because\ \alpha\neq\beta$, $\therefore\ \alpha=-\beta$，或 $\alpha+\beta=\pi$. 由①、②、③、④解得菱形的四顶点坐标分别为：$A(a\sec\alpha,\ 0)$、$B(0,\ b\csc\alpha)$、$C(-a\sec\alpha,\ 0)$、$D(0,\ -b\csc\alpha)$. 故菱形的两对角线与椭圆的对称轴重合.

1133. 设 O 为圆锥曲线(非等轴双曲线，且轴与过 O 的切线、法线不平行)上任意一点，PQ 为其弦，且与过 O 的切线、法线不平行. 求证：(1) 如果 PQ 在点 O 张直角，则 PQ 过点 O 的法线上的一定点；(2) 如果 OP、OQ 的夹角被点 O 的法线所平分，则 PQ 过点 O 的切线上的一定点.

［分析］ 由于涉及 OP、OQ 两直线的关系，故应取点 O 为原点. 又因题断涉及点 O 的切线与法线，故可取点 O 的切线与法线为 x、y 轴.

［证］ 取过点 O 的切线与法线为 x、y 轴. 设圆锥曲线的方程为 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$. $\because$ 过原点 O, $\therefore\ F=0$. $\because$ 与 x 轴：$y=0$ 相切，$\therefore\ D=0$. 因而圆锥曲线方程为 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Ey=0\cdots$①. 设 PQ 的方程为 $y=mx+\lambda\cdots$②. 根据提要(3.120)，OP、OQ 两直线的方程为

$$\lambda(Ax^2+Bxy+Cy^2)+Ey(y-mx)=0\cdots③.$$

(1) 如 $OP\perp OQ$，则 $\lambda(A+C)+E=0$. $\because$ 圆锥曲线非等轴双曲线，$\therefore\ A+C\neq 0$, $\therefore\ \lambda=-\frac{E}{A+C}$. 对于 PQ 的一切位置，均过点 O 法线上一定点$\left(0,\ -\frac{E}{A+C}\right)$.

(2) $\because OP$、OQ 的夹角被点 O 的法线(即 y 轴)所平分，$\therefore$ 方程 ③ 中 xy 项的系数等于零：$\lambda B-Em=0$．$\because$ 圆锥曲线的轴与点 O 的切线、法线(即 x、y 轴)不平行，$\therefore B\neq 0$，即得 $\frac{\lambda}{m}=\frac{E}{B}$．但 $-\frac{\lambda}{m}$ 是直线 PQ 在 x 轴上的截距，$\therefore PQ$ 过点 O 切线上一定点 $\left(-\frac{E}{B},\ 0\right)$．

[说明]　(1) 中直线 PQ 经过的定点 $\left(0,\ -\frac{E}{A+C}\right)$ 称为弗雷奇(Fregier)点．

1134．**圆锥曲线内接六边形三双对边(所在的直线)的交点共线．**

[证]　设圆锥曲线的方程为 $f(x,\ y)=0$(二元二次方程)，其内接六边形为 $ABCDEF$，六边的方程依次为 $\alpha_i=0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$，其中 α_i 是 x、y 的一次式．对角线 AD 的方程为 $\beta=0$，β 也是 x、y 的一次式．三双对边的交点分别为：$\begin{cases}AB: & \alpha_1=0\\ DE: & \alpha_4=0\end{cases}$ 的交点 L；$\begin{cases}BC: & \alpha_2=0\\ EF: & \alpha_5=0\end{cases}$ 的交点 M；$\begin{cases}CD: & \alpha_3=0\\ FA: & \alpha_6=0\end{cases}$ 的交点 N．适当选取 λ_1，可使过 A、B、C、D 的二次曲线：$\alpha_2\beta-\lambda_1\alpha_1\alpha_3=0$ 与 $f(x,y)=0$ 表示同一二次曲线，故有

$$\alpha_2\beta-\lambda_1\alpha_1\alpha_3\equiv\mu_1 f(x,\ y)=0\cdots①.$$

同理可得

$$\alpha_5\beta-\lambda_2\alpha_4\alpha_6\equiv\mu_2 f(x,\ y)=0\cdots②.$$

从 ①、② 消去 β，得 $\lambda_1\alpha_1\alpha_3\alpha_5-\lambda_2\alpha_2\alpha_4\alpha_6\equiv(\mu_2\alpha_2-\mu_1\alpha_5)f(x,\ y)=0\cdots③$．

$\because$ 点 A 的坐标是方程组 $\begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_6=0\end{cases}$ 的解，也满足方程 ③．$\therefore$ 点 A 在曲线 ③ 上．同理，B、C、D、E、F、L、M、N 诸点也在曲线 ③ 上．因 A、B、

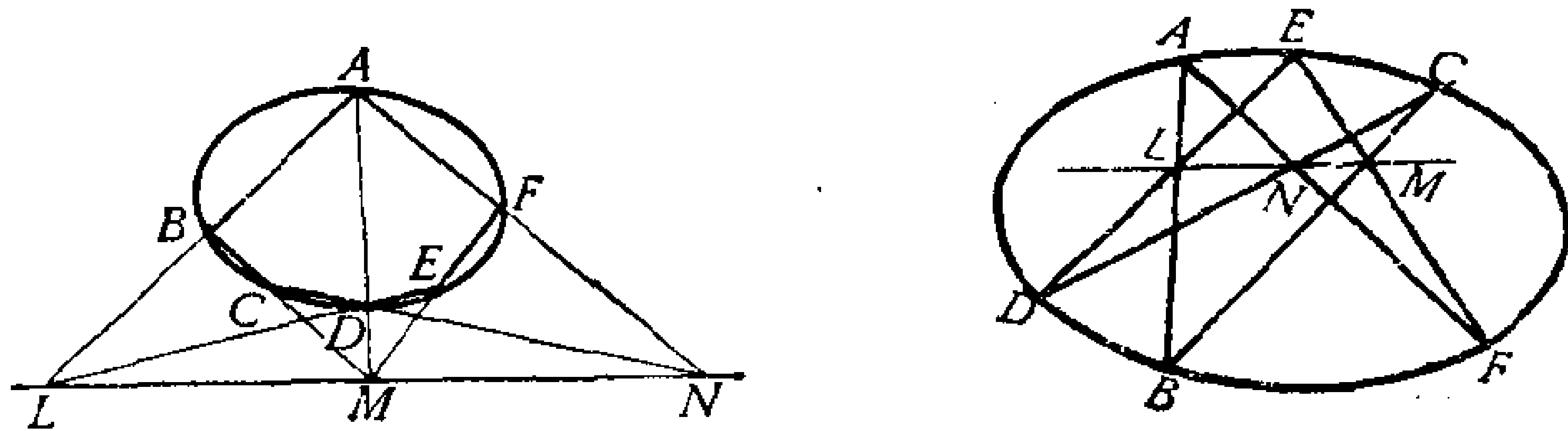


图 1

C、D、E、F 在二次曲线 $f(x, y)=0$ 上，且 L、M、N 三点不在 $f(x, y)=0$ 上，故 L、M、N 必在直线 $\mu_2\alpha_2-\mu_1\alpha_5=0$ 上，即 L、M、N 三点共线.

[说明] 本定理亦称帕斯卡(Pascal)定理. 其证明与六边形的边长无关，只要 AB、BE; BC、EF; CD、FA 分别相交，则与六点排列顺序也无关. 由此可推出以下三个定理: (1) 圆锥曲线的内接五边形 $ABCDE$，过点 A 的切线与 CD 的交点和 AB 与 DE、BC 与 AE 的交点共线(图 2). (2) 圆锥曲线的内接四边形 $ABCD$，过点 A、C 的切线、两双对边的交点共线(图 3). (3) 圆锥曲线的内接三角形 ABC，过三顶点的切线与对边的交点共线(图 4).

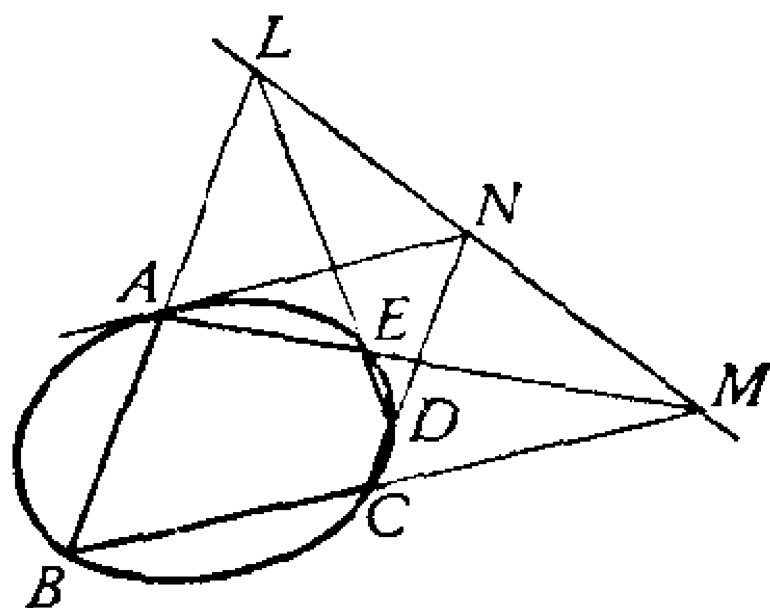


图 2

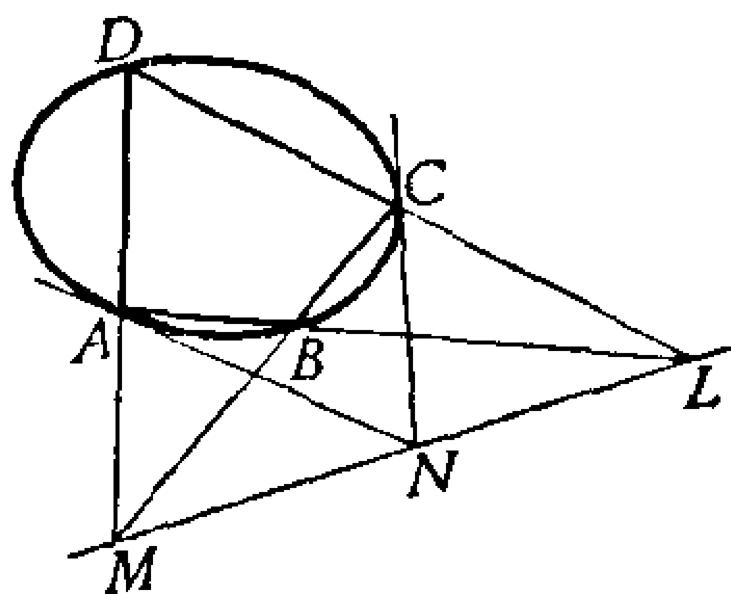


图 3

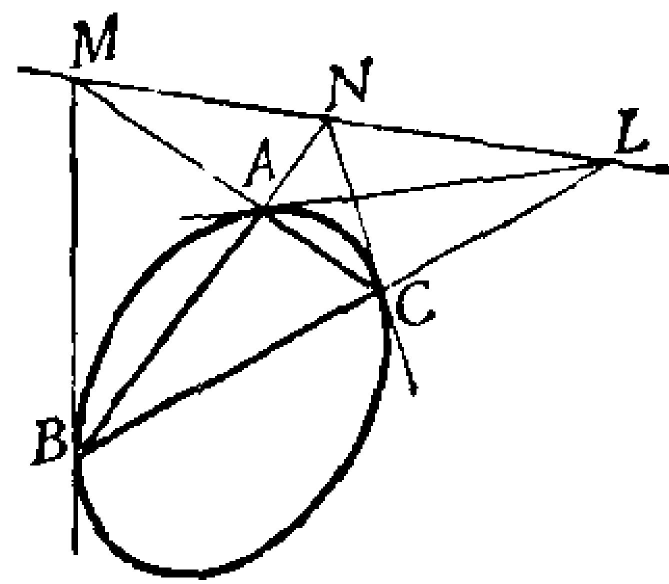


图 4

1135. 圆锥曲线的外切六边形 $ABCDEF$ 的三对角线 AD、BE、CF 共点.

[分析] 设圆锥曲线的外切六边形 $ABCDEF$ 六边的切点分别为 A'、B'、C'、D'、E'、F'. ∵ A、D 两点的极线为 $A'F'$、$C'D'$，∴ $A'F'$ 与 $C'D'$ 的交点 N 的极线必为 AD. 因此可利用帕斯卡定理(见上题)，与共线点的极线必共点(参见第 1076 题)推证本题.

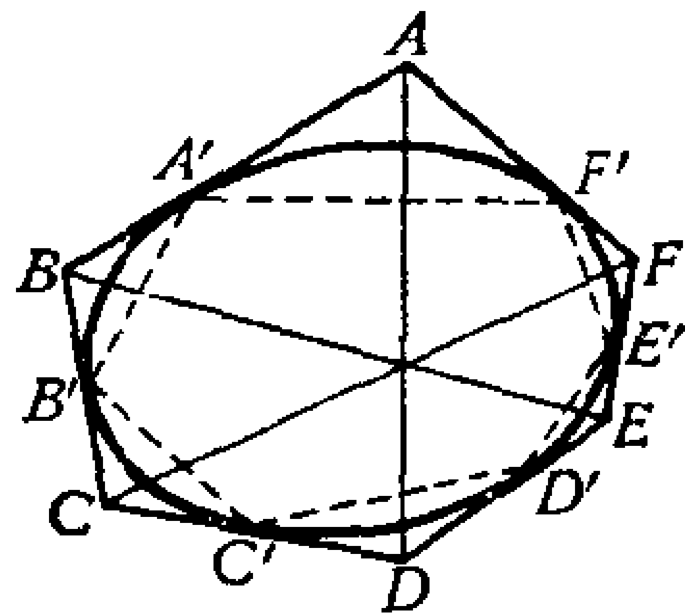


图 1

[证] 设圆锥曲线的外切六边形 $ABCDEF$ 六边的切点分别为 A'、B'、C'、D'、E'、F'. ∵ 点 A 的极线为 $F'A'$，点 D 的极线为 $C'D'$. 设 $F'A'$ 与 $C'D'$ 交于点 N，即 N 既在点 A 的极线上又在点 D 的极线上. ∴ 点 N 的极线必过点 A 与点 D，即点 N 的极线为 AD. 同理 $A'B'$ 与 $D'E'$ 的交点 L 的极线为 BE; $B'C'$、$E'F'$ 的交点 M 的极线为 CF. 据帕斯卡定理 L、M、N 三点共线，∴ 它们的极线 AD、BE、CF 共点，即六边形的三对角线共点.

［说明］　本定理亦称布利安香(Brianchon)定理．由此还可推出以下两定理：

(1) 圆锥曲线的外切五边形，一顶点与对边切点的连线和另两对相对顶点的连线共点(图2)．

(2) 圆锥曲线的外切三角形，各顶点与对边的切点的连线共点(图3)．

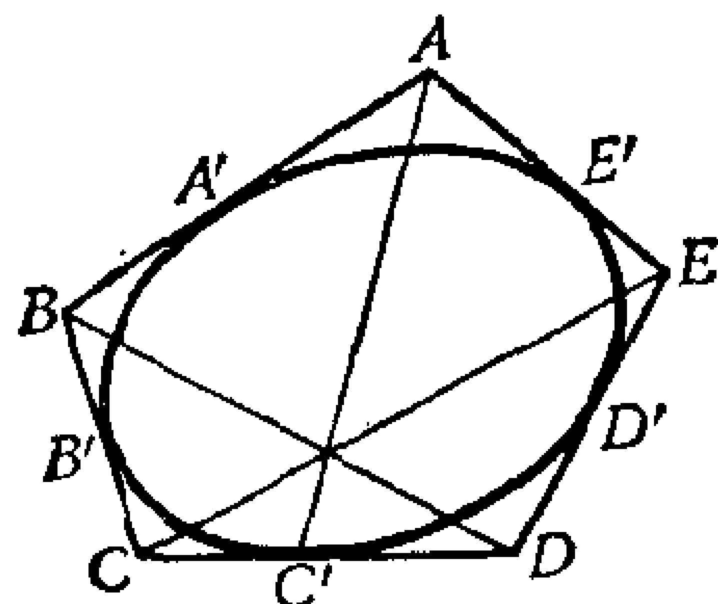


图 2

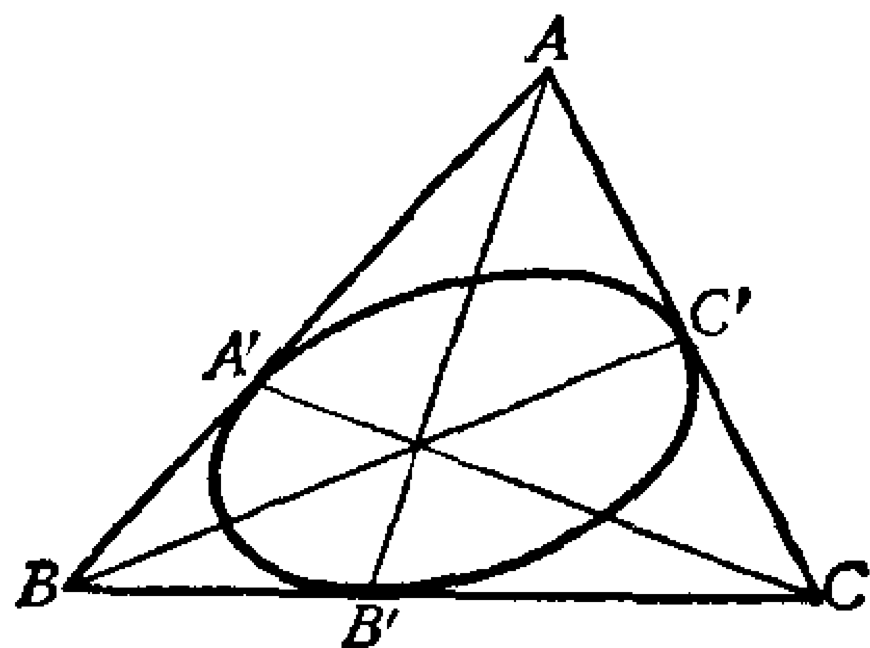


图 3

1136．设正圆锥面的母线与轴线的夹角为 α，圆锥顶点 S 到一平面 π 的距离为 d，平面 π 与圆锥轴线 SS' 的夹角为 θ；此平面与正圆锥面相截所得的曲线为 C，证明：(1) 当 $d\neq0$，$\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，曲线 C 为圆；(2) 当 $d\neq0$，$0<\alpha<\theta<\frac{\pi}{2}$ 时，曲线 C 为椭圆；(3) 当 $d\neq0$，$\alpha>\theta>0$ 时，曲线 C 为双曲线；(4) 当 $d\neq0$，$\alpha=\theta$ 时，曲线 C 为抛物线；(5) 当 $d=0$，$\alpha<\theta<\frac{\pi}{2}$ 时，曲线 C 为一点；(6) 当 $d=0$，$\alpha>\theta\geqslant0$ 时，曲线 C 为两相交直线；(7) 当 $d=0$，$\alpha=\theta$ 时，曲线 C 为两重合直线．

［证］　设正圆锥顶点 S 在平面 π 上的射影为 O，OS 与圆锥的轴线 SS' 所确定的平面与 π 的交线为 OB，在 π 上过 O 作 $OA\perp OB$，以 OA、OB 分别为 x、y 轴建立直角坐标系 xOy．设 $P(x, y)$ 为曲线 C 上任意一点，点 P 在 OA、OB 上的射影分别为 M、N．

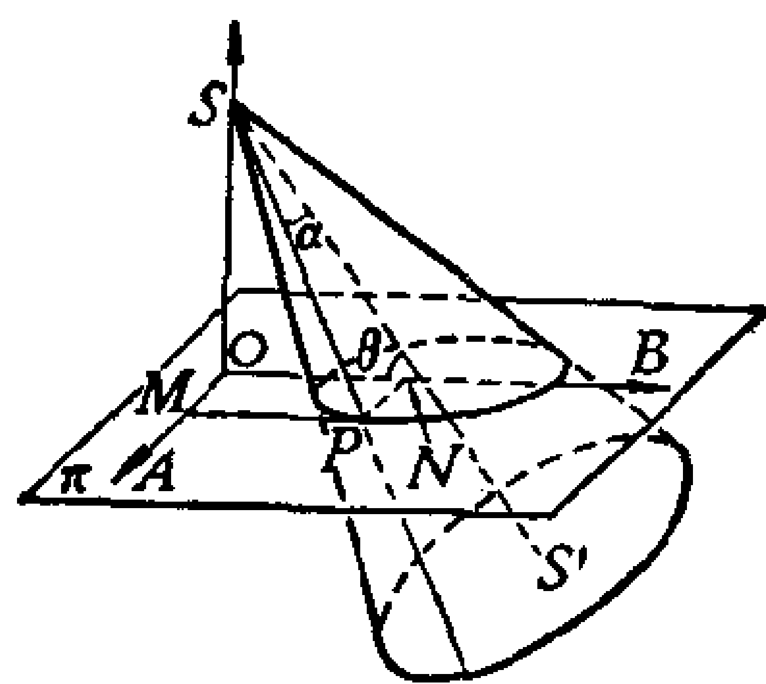


图 1

$$\overrightarrow{SP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OS},$$

$$|\overrightarrow{SP}|=\sqrt{x^2+y^2+d^2},$$

$$(\overrightarrow{SP})_{SS'}=(\overrightarrow{OM})_{SS'}+(\overrightarrow{ON})_{SS'}-(\overrightarrow{OS})_{SS'}$$

$$=y\cos\theta-d\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$

$$=y\cos\theta+d\sin\theta=\sqrt{x^2+y^2+d^2}\cos\alpha.$$

$$\therefore\quad (y\cos\theta+d\sin\theta)^2=(x^2+y^2+d^2)\cos^2\alpha\ \cdots①.$$

由于上述运算是可逆的，∴ 方程 ① 是点 $P(x, y)$ 在曲线 C 上的充要条件，即方程 ① 是曲线 C 的方程，整理化简得

$$x^2\cos^2\alpha+y^2(\cos^2\alpha-\cos^2\theta)-dy\sin 2\theta+d^2(\cos^2\alpha-\sin^2\theta)=0.$$

(1) 当 $\theta=\frac{\pi}{2}$, $d\neq 0$ 时，曲线 C 的方程为 $(x^2+y^2)\cos^2\alpha-d^2\sin^2\alpha=0$.
∵ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, ∴ $\cos\alpha\neq 0$, ∴ 曲线 C 是圆: $x^2+y^2=d^2\operatorname{tg}^2\alpha$;

(2) 当 $d\neq 0$, $0<\alpha<\theta<\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos\alpha>\cos\theta>0$, $\cos^2\alpha>\cos^2\theta$, ∴ 曲线 C 方程中的 x^2、y^2 的系数同号，又缺 xy 项，进行配方可化成椭圆的标准方程，故曲线 C 为椭圆(图 1);

(3) 当 $d\neq 0$, $\frac{\pi}{2}>\alpha>\theta>0$ 时， $0<\cos\alpha<\cos\theta$, $\cos^2\alpha-\cos^2\theta<0$,
∴ 曲线 C 的方程中的 x^2、y^2 的系数异号，又缺 xy 项，进行配方可化成双曲线的标准方程，故曲线 C 为双曲线(图 2);

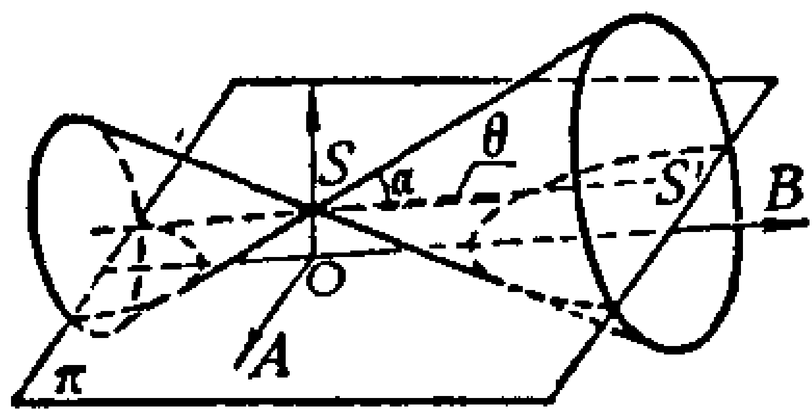


图 2

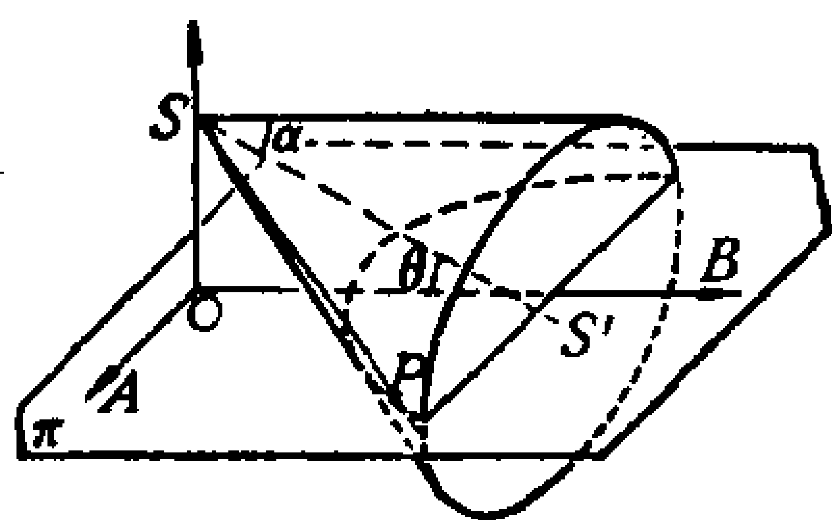


图 3

(4) 当 $d\neq 0$, $\alpha=\theta$ 时，$\cos\alpha=\cos\theta$, 曲线 C 的方程为

$$x^2\cos^2\alpha-dy\sin 2\alpha+d^2\cos 2\alpha=0.$$

∵ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, ∴ $\sin 2\alpha\neq 0$, 故曲线 C 是抛物线(图 3);

(5) 当 $d=0$, $0<\alpha<\theta<\frac{\pi}{2}$ 时，曲线 C 的方程为

$$x^2\cos^2\alpha+y^2(\cos^2\alpha-\cos^2\theta)=0.$$

$\because$ $\cos\alpha>\cos\theta>0$, $\cos^2\alpha-\cos^2\theta>0$. $\therefore$ 曲线 C 为一点 $O(0, 0)$;

(6) 当 $d=0$, $\frac{\pi}{2}>\alpha>\theta\geqslant 0$ 时，曲线 C 的方程为

$$x^2\cos^2\alpha-y^2(\cos^2\theta-\cos^2\alpha)=0.$$

$\because$ $\cos^2\theta>\cos^2\alpha$, $\therefore$ 曲线 C 为两相交直线;

(7) 当 $d=0$, $\theta=\alpha$ 时，曲线 C 的方程为: $x^2\cos^2\alpha=0$. 但 $\cos\alpha\neq 0$, $\therefore$ 曲线 C 的方程为 $x^2=0$, 曲线 C 为两重合直线.

[说明] 此为圆锥曲线命名的由来.

1137. **椭圆上三点 P_1、P_2、P_3 的三密切圆交于椭圆上同一点 K. 求证 (1) P_1、P_2、P_3、K 四点共圆; (2) $\triangle P_1P_2P_3$ 的重心与椭圆中心重合.**

[证] (1) 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, P_1、P_2、P_3、K 的离心角分别为 α、β、γ、δ. 如果过 P_1 的任意圆与椭圆再交于 P_1'、P_1''、K, 而 P_1'、P_1'' 的离心角为 α'、α''. 根据第 680 题的结论得 $\alpha+\alpha'+\alpha''+\delta=2m\pi$, $m\in J$. 如果此圆为椭圆在点 P_1 的密切圆，则 $\alpha=\alpha'=\alpha''$(参见第 655 题). $\therefore$ $\alpha=\frac{2m\pi}{3}-\frac{\delta}{3}$. 同理可得 $\beta=\frac{2m'\pi}{3}-\frac{\delta}{3}$, $\gamma=\frac{2m''\pi}{3}-\frac{\delta}{3}$. 因 α、β、γ 是椭圆上相异三点，故 m、m'、m'' 只能分别是 1、2、3. $\because$ $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\frac{2\pi}{3}-\frac{\delta}{3}+\frac{4\pi}{3}-\frac{\delta}{3}+2\pi-\frac{\delta}{3}+\delta=4\pi$. $\therefore$ P_1、P_2、P_3、K 四点共圆.

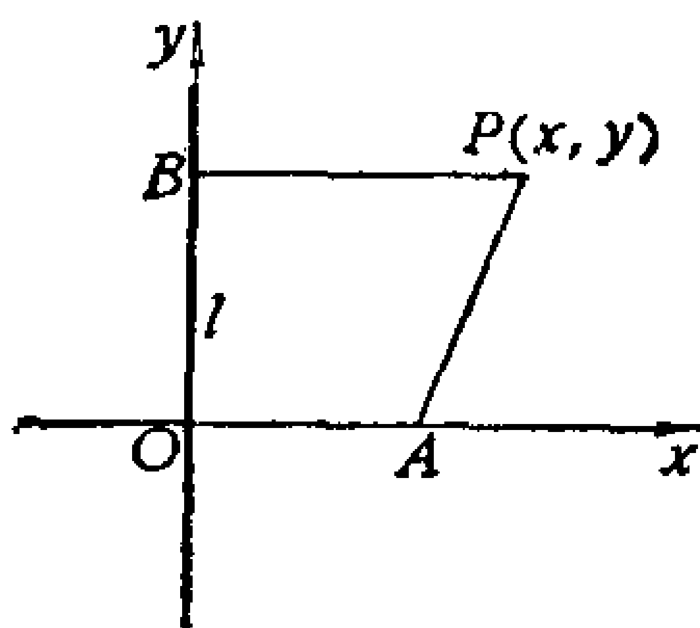
(2) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\delta}{3}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\delta}{3}\right)+\cos\left(2\pi-\frac{\delta}{3}\right)$ $=2\cos\left(\pi-\frac{\delta}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\delta}{3}=0$. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\delta}{3}\right)$ $+\sin\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\delta}{3}\right)+\sin\left(2\pi-\frac{\delta}{3}\right)=2\sin\left(\pi-\frac{\delta}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\delta}{3}=0$. 因此 $\triangle P_1P_2P_3$ 的重心坐标: $x=\frac{a}{3}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)=0$, $y=\frac{b}{3}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)=0$. 即三角形的重心与椭圆中心重合.

[说明] 本题结论亦称斯坦纳(Steiner)定理. 椭圆上三点 P_1、P_2、P_3 的密切圆均过椭圆上同一点 K, 点 K 称为斯坦纳点. 具有斯坦纳点的椭圆称为斯坦纳椭圆.

§7. 轨 迹 题

1138. 已知一定点 A，一定直线 l 与正的常数 λ、μ、d，B 为动点 P 在 l 上的射影. 若点 P 满足：$\lambda|PA|+\mu|PB|=d$. 求点 P 的轨迹.

［解］ 取 A 在 l 上射影 O 为原点，OA 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系. 设 A 的坐标为 $(a,\ 0)$，动点 P 的坐标为 $(x,\ y)$，则



$$\lambda\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}+\mu|x|=d.$$

化简得

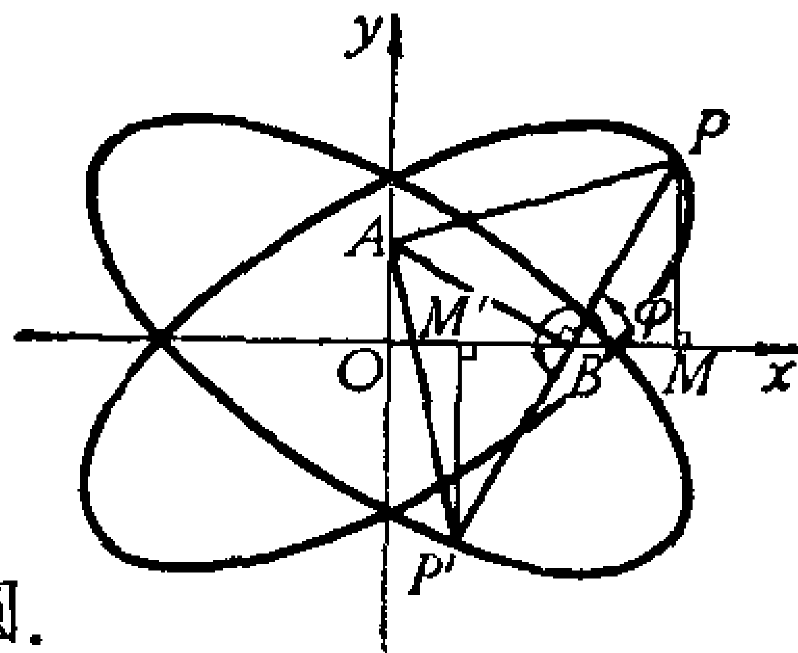
$$(\lambda^2-\mu^2)x^2+\lambda^2y^2-2a\lambda^2x+2d\mu|x|+\lambda^2a^2-d^2=0.$$

当 $\lambda>\mu$ 时，轨迹是椭圆；当 $\lambda=\mu$ 时，轨迹是抛物线；当 $\lambda<\mu$ 时，轨迹是双曲线.

1139. 一等腰直角 $\triangle ABP$，腰长 $|AB|=|BP|=a$，当直角顶点 B 和另一顶点 A 分别在 x、y 轴上移动时，求第三顶点 P 的轨迹.

［解］ 设点 P 坐标为 $(x,\ y)$. 取 $\angle xBP=\varphi$ 为参数，则

$$\begin{aligned}x&=OM=OB+BM=BM-BO\\&=a\cos\varphi-a\cos(\varphi\pm90^\circ)\\&=a\cos\varphi\pm a\sin\varphi\ \cdots①,\\y&=MP=a\sin\varphi\ \cdots②.\end{aligned}$$



由①、②消去参数 φ，得 $(x\mp y)^2+y^2=a^2$，即 $x^2\mp2xy+2y^2=a^2$. ∴ 点 P 的轨迹是两椭圆.

1140. 一边长为 a 的等边 $\triangle ABC$ 的两顶点 A、B 分别在 x、y 轴上滑动，试求第三个顶点 C 的轨迹.

［解一］ 设点 C 坐标为 $(x,\ y)$. 取 $\angle xAC=\varphi$ 为参数，则

$$x = OM = AM - AO = a\cos\varphi - a\cos(\varphi \pm 60°)$$
$$= \frac{a}{2}\cos\varphi \pm \frac{\sqrt{3}}{2}a\sin\varphi \cdots ①;$$
$$y = MC = a\sin\varphi \cdots ②.$$

从 ①、② 消去参数 φ，得

$$y^2 + (2x \mp \sqrt{3}y)^2 = a^2,$$

即点 C 的轨迹方程是

$$4x^2 \mp 4\sqrt{3}xy + 4y^2 = a^2.$$

轨迹是两椭圆.

1141．设三角形两边 OA、OB 的位置固定，且 $\angle AOB \neq 90°$，而第三边为过一定点的动直线，试求此三角形的垂心的轨迹方程.

［解］ 取 $\triangle OAB$ 的顶点 O 为原点，直线 OA 为 x 轴，建立直角坐标系如图，则 OA 为 $y=0$，OB 为 $y=kx$，其中 k 为定值.

设 $C(a, b)$ 为定点，$H(x, y)$ 为轨迹上任意一点. 过 C 的动直线为 $y-b=\lambda(x-a)$，其中 λ 为参数. 当动直线平行 y 轴时，垂心在 $(a, 0)$. $\lambda \neq k$，$\lambda \neq 0$，$\lambda \neq \frac{b}{a}$，否则不构成三角形. 过

$$\begin{cases} y = kx \\ y - b = \lambda(x - a) \end{cases}$$

的交点 B 而与 OA 垂直的直线为 $y-b-\lambda(x-a)=\mu(y-kx)$，其中 $\mu=1$，即 $(k-\lambda)x = b - a\lambda \cdots ①$；$OH$ 的方程为 $x+\lambda y=0 \cdots ②$. 消去参数 λ，得所求轨迹方程 $kxy + x^2 = by + ax$（除去原点）.

1142．若二次曲线 $f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 的弦所在的直线过定点 $M(m, n)$，试求弦的中点的轨迹方程.

［解］ 设二次曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 的过定点 $M(m, n)$ 的弦所在直线的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\theta \\ y = y_0 + t\sin\theta \end{cases}（t \text{ 为参数}）\cdots ①,$$

其中(x_0, y_0)是此弦的中点坐标. 将其代入二次曲线方程，得关于t的二次方程

$$(A\cos^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta)t^2+[(2Ax_0+By_0+D)\cos\theta+(Bx_0+2Cy_0+E)\sin\theta]t+f(x_0, y_0)=0.$$

当其二次项系数不为零，且判别式$\varDelta\geqslant 0$时，方程有两实根t_1、t_2. 由于(x_0, y_0)为过定点$M(m, n)$的弦的中点坐标，故$t_1+t_2=0$，则

$$(2Ax_0+By_0+D)\cos\theta+(Bx_0+2Cy_0+E)\sin\theta=0\cdots②.$$

当$\theta\neq\frac{\pi}{2}$时，$\cos\theta\neq 0$，由①得$\operatorname{tg}\theta=\frac{n-y_0}{m-x_0}\cdots③$. 以$\cos\theta$除②式两边，并以③代入，得

$$(2Ax_0+By_0+D)+(Bx_0+2Cy_0+E)\cdot\frac{y_0-n}{x_0-m}=0.$$

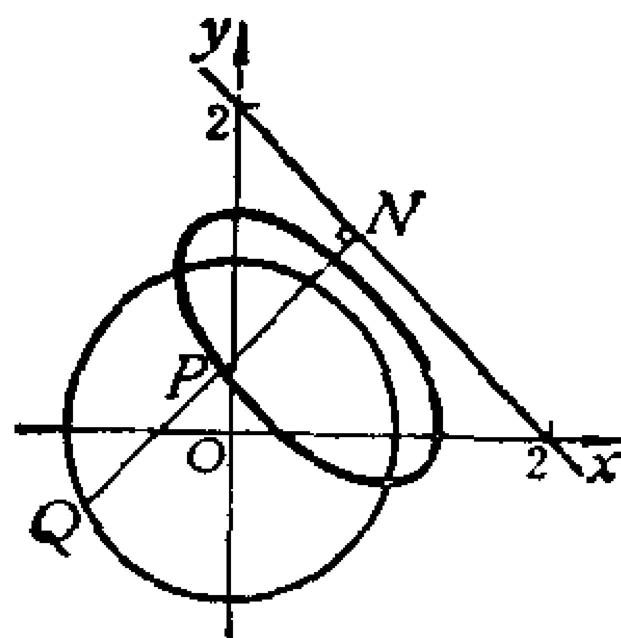
以x、y代换x_0、y_0，化简得

$$2Ax^2+2Bxy+2Cy^2-(2Am+Bn-D)x-(Bm+2Cn-E)y-(Dm+En)=0\cdots④.$$

当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，②式为$Bx_0+2Cy_0+E=0$. 但此时弦所在的直线方程为$x=m$. 弦的中点坐标$\left(m, -\frac{Bm+E}{2C}\right)$仍满足方程④，故方程④即为所求的轨迹方程.

［说明］ 由于参数过多，轨迹纯粹性的限制条件：$A\cos^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta\neq 0$，$\varDelta\geqslant 0$的讨论太繁，故从略.

1143. 自单位圆$x^2+y^2=1$上一动点Q引直线$x+y-2=0$的垂线，垂足为N. 求线段QN中点P的轨迹.



［解］ 设点Q的坐标为$(\cos\theta, \sin\theta)$，因为直线QN垂直已知直线

$$x+y-2=0\cdots①,$$

故其方程为

$$x-y=\cos\theta-\sin\theta\cdots②.$$

由①、②解得点N的横坐标

$$x_N=1+\frac{\cos\theta-\sin\theta}{2}.$$

设点 P 的坐标为 (x, y)，则 $x=\frac{2+3\cos\theta-\sin\theta}{4}\cdots$③. 由②、③解得 $2\cos\theta=3x+y-2\cdots$④, $2\sin\theta=x+3y-2\cdots$⑤. ④^2+⑤^{2}并化简，即得点 P 的轨迹方程为

$$5x^2+6xy+5y^2-8x-8y+2=0\cdots⑥.$$

因 $\Delta=-64<0$，故此方程的曲线为椭圆型. 令其中心坐标为 $(h、k)$，则从方程组 $\begin{cases}10h+6k-8=0\\6h+10k-8=0\end{cases}$ 解得 $h=\frac{1}{2}$，$k=\frac{1}{2}$. 经平移后，方程⑥可化简为 $5x'^2+6x'y'+5y'^2=2$. 再经旋转，将方程化简为 $\frac{x''^2}{\frac{1}{4}}+y''^2=1$. 故所求的动点轨迹为中心在 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$，半长轴为 1，半短轴为 $\frac{1}{2}$ 的一椭圆.

1144. F 为圆锥曲线 C 的焦点，P 为 C 上一点，点 M 分线段 FP 成 $FM:MP=\lambda$，求点 M 的轨迹.

［解］ 设圆锥曲线 C 的方程为 $\rho=\frac{a}{1+e\cos\theta}\cdots$①，点 P 的坐标为 (ρ_1, θ_1)，点 M 的坐标为 (ρ', θ_1). $\because$ $FM:MP=\lambda$，$\therefore$ $\rho'=\lambda(\rho_1-\rho')$. 解得 $\rho_1=\frac{1+\lambda}{\lambda}\rho'$. $\because$ 点 P 在圆锥曲线 C 上，$\therefore$ $\rho_1=\frac{a}{1+e\cos\theta_1}$，即 $\frac{1+\lambda}{\lambda}\rho'=\frac{a}{1+e\cos\theta_1}$. 以 ρ、θ 代换 ρ'、θ_1 得 $\rho=\frac{\frac{\lambda}{1+\lambda}a}{1+e\cos\theta}$. 故所求的轨迹仍为一圆锥曲线.

［说明］ 凡轨迹上的动点是随已知曲线上的对应动点而运动的轨迹题，都可取已知曲线上的动点坐标为参数，运用轨迹条件，以轨迹上的动点坐标表示参数的值，然后代入已知曲线方程，即得所求轨迹的方程. 这一方法对直角坐标系和极坐标系都适用.

1145. 求通过四个已知点 P、Q、R、S 的圆锥曲线的中心的轨迹(P、Q、R、S 四点中无三点共线).

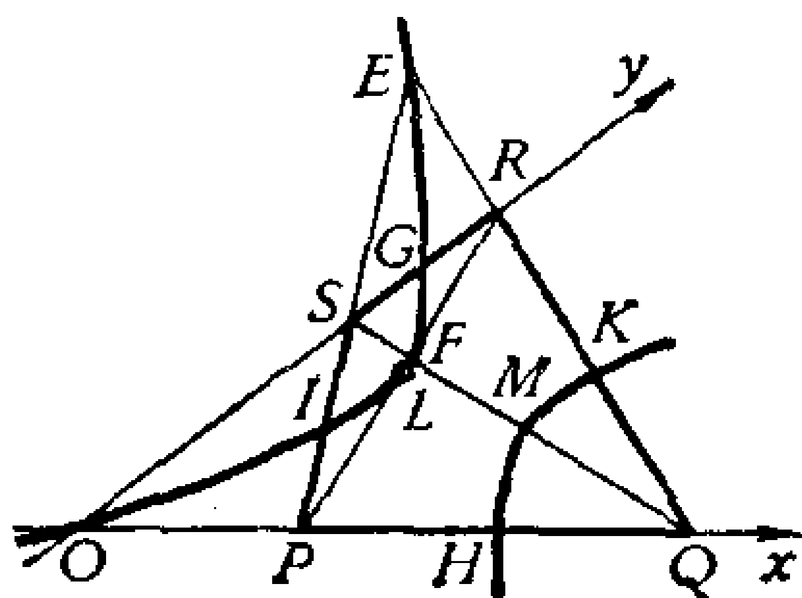
［分析］ 求出过此四点的圆锥曲线系的方程后，根据二次曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 的中心为两直线 $\begin{cases}2Ax+By+D=0\\Bx+2Cy+E=0\end{cases}$ 的交点，

消去参数即可获解.

[解一] 不妨假设四边形 $PQRS$ 有一双对边 PQ、RS 相交于点 O, 取其为 x、y 轴, 建立斜坐标系. 令 $OP=a$, $OQ=b$, $OR=c$, $OS=d$; P、Q、R、S 四点的坐标分别为 $(a,0)$、$(b,0)$、$(0,c)$、$(0,d)$. 设过 P、Q、R、S 四点的二次曲线方程为 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+1=0$…①. ∵ 曲线过 P、Q 两点, ∴ 方程 $Ax^2+Dx+1=0$ 的两根为 a、b, 故 $a+b=-\frac{D}{A}$, $ab=\frac{1}{A}$. ∴ $A=\frac{1}{ab}$, $D=-\frac{a+b}{ab}$. ∵ 曲线过 R、S 两点, ∴ 方程 $Cy^2+Ey+1=0$ 的两根为 c、d, 故 $c+d=-\frac{E}{C}$, $cd=\frac{1}{C}$. ∴ $C=\frac{1}{cd}$, $E=-\frac{c+d}{cd}$.

∴ 过 P、Q、R、S 四点的圆锥曲线系方程为

$$\frac{1}{ab}x^2+\lambda xy+\frac{1}{cd}y^2-\frac{a+b}{ab}x-\frac{c+d}{cd}y+1=0.$$



其中 λ 为任意常数. 其中心为下列两直线的交点:

$$\frac{2}{ab}x+\lambda y-\frac{a+b}{ab}=0\cdots②,$$

$$\lambda x+\frac{2}{cd}y-\frac{c+d}{cd}=0\cdots③.$$

从 ②、③ 消去参数 λ, 即得轨迹方程

$$2cdx^2-2aby^2-cd(a+b)x+ab(c+d)y=0.$$

其轨迹为二次曲线.

[解二] 直线 PQ、RS 的方程为 $y=0$, $x=0$. 直线 PR、QS 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{c}=1$, $\frac{x}{b}+\frac{y}{d}=1$. ∴ 过 P、Q、R、S 的二次曲线系方程为

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{c}-1\right)\left(\frac{x}{b}+\frac{y}{d}-1\right)=\lambda xy,$$

即 $\frac{x^2}{ab}+\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ad}-\lambda\right)xy+\frac{y^2}{cd}-\frac{a+b}{ab}x-\frac{c+d}{cd}y+1=0$.

如令 $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ad}-\lambda=\lambda'$, 则所得结果同[解一], 下略.

[说明] 本题轨迹 $2cdx^2-2aby^2-cd(a+b)x+ab(c+d)y=0$ 通过四边形 $PQRS$ 两双对边的交点与对角线交点 O、E、F, 还过四边和两对角线

的中点 H、G、I、K、L、M. 因此，称为九点圆锥曲线. 轨迹的中心 $\left(\frac{a+b}{4}, \frac{c+d}{4}\right)$为四边形 $PQRS$ 的中心.

1146. 等轴双曲线系与 y 轴相切于原点，且过定点 $M(1, 1)$，求其中心的轨迹方程.

[分析] 二次曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 若为等轴双曲线，则两渐近线的斜率为方程 $A+Bk+Ck^2=0$ 的两根，而等轴双曲线的两渐近线互相垂直，$\therefore \frac{A}{C}=-1$，故等轴双曲线方程为 $x^2+Bxy-y^2+Dx+Ey+F=0$.

[解] 设等轴双曲线方程为 $x^2+Bxy-y^2+Dx+Ey+F=0$. $\because$ 此等轴双曲线与 y 轴相切于原点，$\therefore -y^2+Ey+F=0$ 的两根为零，$\therefore E=F=0$. 又因曲线过定点 $M(1, 1)$，$\therefore 1+B-1+D=0$，即 $D=-B$，故此等轴双曲线方程为 $x^2+Bxy-y^2-Bx=0$，其中 B 为参数. 这双曲线中心坐标为方程组 $\begin{cases}2x+By-B=0\\Bx-2y=0\end{cases}$ 的解. 消去 B，即得中心的轨迹方程 $x^2+y^2-y=0$，故轨迹为圆.

[说明] 等轴双曲线方程一般可以设为 $x^2+Bxy-y^2+Dx+Ey+F=0$，其中含有四个参数，故四个条件可确定一条等轴双曲线. 三个条件可以确定一单参数的等轴双曲线系，从此可求其中心的轨迹.

1147. 求 $\triangle ABC$ 的外接等轴双曲线系的中心的轨迹方程.

[解] 设 $\triangle ABC$ 三顶点在坐标轴上，坐标分别为 $A(a, 0)$、$B(0, b)$、$C(c, 0)$，且 $b\neq 0$. 等轴双曲线方程为 $x^2+Bxy-y^2+Dx+Ey+F=0$. $\therefore$ a、c 是方程 $x^2+Dx+F=0$ 的根，且 b 满足：$-b^2+Eb+F=0$. $\therefore D=-(a+c)$，$F=ac$，$E=\frac{b^2-ac}{b}$. 于是双曲线方程为 $x^2+Bxy-y^2-(a+c)x+\frac{b^2-ac}{b}y+ac=0$，其中心为两直线

$$\begin{cases}2x+By-(a+c)=0\cdots①\\Bx-2y+\dfrac{b^2-ac}{b}=0\cdots②\end{cases}$$

的交点. 从①、②消去参数 B，即得中心的轨迹方程

$$2x^2+2y^2-(a+c)x-\frac{b^2-ac}{b}y=0,$$

故轨迹为圆.

［说明］ 此轨迹过 $\triangle ABC$ 三边的中点，三高的垂足，以及垂心到三顶点连线的中点，即 $\triangle ABC$ 的九点圆.

1148. 圆锥曲线 $Ax^2+By^2=1$ 的两切线在 x 轴上截得的线段长为 $2k$，试证两切线交点的轨迹方程为 $By^2(Ax^2+By^2-1)=Ak^2(By^2-1)^2$.

［分析］ 先求自曲线外一点 $(x_0,\ y_0)$ 所引曲线的两切线方程，再求此两切线在 x 轴上截得的线段长. 即可得解.

［解］ 设 $P(x_0,\ y_0)$ 为轨迹上任意一点，则点 P 关于圆锥曲线 $Ax^2+By^2=1$ 的切点弦方程为 $Ax_0x+By_0y=1$. 由提要(8.73)可得与此圆锥曲线切于两切点的二次曲线系方程为

$$(Ax_0x+By_0y-1)^2=\lambda(Ax^2+By^2-1)\cdots①.$$

当曲线①过点 $P(x_0,\ y_0)$ 时，$(Ax_0^2+By_0^2-1)^2=\lambda(Ax_0^2+By_0-1)$，故 $\lambda=Ax_0^2+By_0^2-1$. 此时曲线①即为过点 P 与两切点的两直线，亦即过点 P 的两切线方程. 所以过点 P 的两切线方程为 $(Ax_0x+By_0y-1)^2=(Ax_0^2+By_0^2-1)(Ax^2+By^2-1)$. 此两切线在 x 轴上两截距 x_1、x_2 为方程

$$A(By_0^2-1)x^2+2Ax_0x-(Ax_0^2+By_0^2)=0$$

的两个根.

$$\because\quad x_1+x_2=\frac{-2x_0}{By_0^2-1},\quad x_1x_2=-\frac{Ax_0^2+By_0^2}{A(By_0^2-1)},$$

又

$$\because\quad 2k=|x_1-x_2|,$$

$$\therefore\quad 4k^2=(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$$

$$=\frac{4x_0^2}{(By_0^2-1)^2}+\frac{4(Ax_0^2+By_0^2)}{A(By_0^2-1)}.$$

以 $(x,\ y)$ 代换 $(x_0,\ y_0)$，化简即得 $By^2(Ax^2+By^2-1)=Ak^2(By^2-1)^2$.

1149. 圆锥曲线 $\alpha x^2+\beta y^2=1$ 的两切线与圆锥曲线 $ax^2+2hxy+by^2=1$ 的两共轭直径平行，求证：两切线交点的轨迹方程为另一圆锥曲线 $ax^2+2hxy+by^2=\dfrac{a}{\alpha}+\dfrac{b}{\beta}$.

〔解〕　设过点$P(x,\ y)$所引曲线$\alpha x^2+\beta y^2=1$的切线的斜率为m，则m满足方程$y=mx\pm\sqrt{\frac{1}{\alpha}m^2+\frac{1}{\beta}}$，即

$$m^2\left(x^2-\frac{1}{\alpha}\right)-2xym+y^2-\frac{1}{\beta}=0\cdots①.$$

方程①的两根m_1、m_2，即过点P的两切线的斜率，

$$\therefore\quad m_1+m_2=\frac{2xy}{x^2-\frac{1}{\alpha}}\cdots②,\quad m_1m_2=\frac{y^2-\frac{1}{\beta}}{x^2-\frac{1}{\alpha}}\cdots③.$$

如果此两切线与圆锥曲线$ax^2+2hxy+by^2=1$的共轭直径平行，则m_1、m_2满足$a+h(m_1+m_2)+bm_1m_2=0\cdots④$．以②、③代入④，即得轨迹方程

$$a+h\frac{2xy}{x^2-\frac{1}{\alpha}}+\frac{b\left(y^2-\frac{1}{\beta}\right)}{x^2-\frac{1}{\alpha}}=0,\ \text{即}\ ax^2+2hxy+by^2=\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}.$$

1150．求原点在圆锥曲线$ax^2+2hxy+by^2=2x$的动切线上射影的轨迹方程．

〔分析〕　如令自原点到切线的垂线与Ox轴的夹角为θ，原点到切线的距离为ρ，则射影的极坐标为$(\rho,\ \theta)$，从而可写出对应的切线方程．利用此切线与已知圆锥曲线相切的条件可得轨迹的极坐标方程．

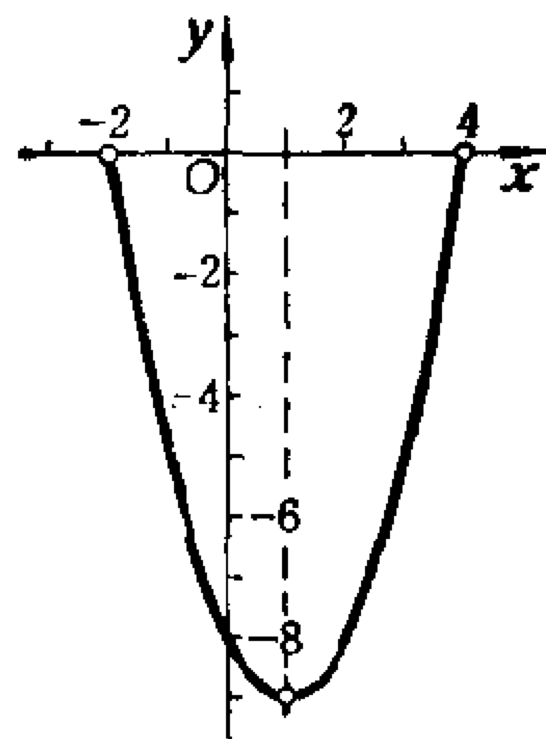
〔解〕　设$P(\rho,\ \theta)$为轨迹上任一点，则圆锥曲线的切线为$x\cos\theta+y\sin\theta=\rho$．因$\sin\theta$、$\cos\theta$不同时为零，不妨设$\sin\theta\neq0$，得$y=\frac{\rho-x\cos\theta}{\sin\theta}$，代入圆锥曲线方程得$ax^2+2hx\cdot\frac{\rho-x\cos\theta}{\sin\theta}+b\left(\frac{\rho-x\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2=2x$，即$(a\sin^2\theta-2h\sin\theta\cos\theta+b\cos^2\theta)x^2+2(\rho h\sin\theta-\rho b\cos\theta-\sin^2\theta)x+b\rho^2=0$．这方程有两等根，

$$\therefore(h\rho\sin\theta-b\rho\cos\theta-\sin^2\theta)^2=b\rho^2(a\sin^2\theta-2h\sin\theta\cos\theta+b\cos^2\theta).$$

此即所求轨迹的极坐标方程．　$\because\sin^2\theta=\frac{y^2}{x^2+y^2}$，$\therefore$可将轨迹方程化为直角坐标方程：$(h^2-ab)(x^2+y^2)^2+2(x^2+y^2)(bx-hy)+y^2=0$．

1151．椭圆$kx^2+9y^2-2kx+18ky+9k^2-8k=0$的焦点在与$x$轴平行的直线上，试求此椭圆焦点的轨迹．

［分析］ 因椭圆方程中 k 是任意常数，且无 xy 项，故利用配方或平移可得焦点坐标. 消去参数 k，即得轨迹方程. 但应注意 k 的允许值范围对轨迹范围的限制.



［解］ 椭圆方程经配方得

$$k(x-1)^2+9(y+k)^2=9k,$$

$\because k\neq 0$（否则，方程不是椭圆），得

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+k)^2}{k}=1.$$

因椭圆焦点在与 x 轴平行的直线上，$\therefore 0<k<9$. 椭圆中心是 $(1,\ -k)$，故两焦点是 $F_1(1-\sqrt{9-k},\ -k)$、$F_2(1+\sqrt{9-k},\ -k)$.

设 $P(x,\ y)$ 为轨迹上任意一点，则 $\begin{cases}x=1\pm\sqrt{9-k}\\ y=-k.\end{cases}$ 消去 k，得轨迹方程 $(x-1)^2=y+9\ (-9<y<0)$. 故所求轨迹是以 $(1,\ -9)$ 为顶点、开口向上的抛物线在点 $(1,\ -9)$ 至 $(-2,\ 0)$ 和 $(1,\ -9)$ 至 $(4,\ 0)$ 间的两段（不包括端点）.

1152. **一通径长为 $4c$ 的抛物线与两坐标轴相切而滑动，求证：焦点的轨迹方程为 $x^2y^2=c^2(x^2+y^2)$；顶点的轨迹方程为 $x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})=c^2$.**

［分析］ 设抛物线与两坐标轴相切的切点坐标分别为 $A(a,\ 0)$、$B(0,\ b)$，a、b 为参数，利用第1097题的结果，即可得解.

［解］ 设抛物线与 x、y 轴分别切于点 $A(a,\ 0)$、$B(0,\ b)$. 根据第1097题，其焦点坐标为：

$$x=\frac{ab^2}{a^2+b^2}\cdots①,\quad y=\frac{a^2b}{a^2+b^2}\cdots②;\quad c=\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^{3/2}}\cdots③.$$

从①、②、③消去参数 a、b，即得焦点的轨迹方程 $c^2(x^2+y^2)=x^2y^2$. 又，抛物线顶点坐标为：$x=\dfrac{ab^4}{(a^2+b^2)^2}\cdots④$，$y=\dfrac{a^4b}{(a^2+b^2)^2}\cdots⑤$. 设 $\dfrac{b}{x^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{a}{y^{\frac{1}{3}}}=t$，由④、⑤得 $a=ty^{\frac{1}{3}}$，$b=tx^{\frac{1}{3}}$. 代入③：$c^2=\dfrac{t^2x^{4/3}y^{4/3}}{(x^{2/3}+y^{2/3})^3}$；代入④：$x=\dfrac{t^5x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{t^4(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})^2}$，即 $t=\dfrac{(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})^2}{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$. 消去 t，即得

$$c^2=x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}).$$

1153. 抛物线与两坐标轴相切，焦点到原点的距离为定值 c. 求证顶点的轨迹方程为 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{2}{3}}$.

[解] 设抛物线与 x、y 轴分别切于点 $A(a, 0)$ 和 $B(0, b)$，a、b 为参数，则据第 1097 题抛物线的焦点坐标为$\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$，顶点坐标为：$x=\frac{ab^4}{(a^2+b^2)^2}$…①，$y=\frac{a^4b}{(a^2+b^2)^2}$…②. 又焦点到原点的距离为定值 c，$\therefore c^2=\frac{a^2b^4}{(a^2+b^2)^2}+\frac{a^4b^2}{(a^2+b^2)^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$…③. 从①、②、③中消去 a、b，即得：$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\frac{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{8}{3}}+a^{\frac{8}{3}}b^{\frac{2}{3}}}{(a^2+b^2)^{\frac{4}{3}}}=\frac{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^{\frac{4}{3}}}=c^{\frac{2}{3}}$.

1154. 长轴、短轴的长分别为 $2a$、$2b$ 的椭圆，在第一象限与两坐标轴相切而滑动，求椭圆中心的轨迹.

[解] 设点(x_0, y_0)为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两垂直相交的切线的交点，切线方程为 $y=kx\pm\sqrt{k^2a^2+b^2}$. 于是有 $y_0=kx_0\pm\sqrt{k^2a^2+b^2}$，$(y_0-kx_0)^2=k^2a^2+b^2$，即 $k^2(x_0^2-a^2)-2kx_0y_0+y_0^2-b^2=0$. 这方程的两根 k_1、k_2 表示过点(x_0, y_0)的椭圆两垂直切线的斜率，故 $k_1k_2=-1$. 由韦达定理，$-1=k_1k_2=\frac{y_0^2-b^2}{x_0^2-a^2}$. $\therefore x_0^2+y_0^2=a^2+b^2$. 因而椭圆中心在任何时候与两垂直切线交点之间的距离恒等于 $\sqrt{a^2+b^2}$. $\because$ 椭圆在第一象限沿两坐标轴相切而滑动时，椭圆中心须满足条件：$x\geqslant b$ 与 $y\geqslant b$. $\therefore$ 椭圆与两轴相切而滑动时，它的中心轨迹是圆 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 在点(a, b)和(b, a)之间的一段圆弧.

[说明] 若没有第一象限的条件，则所求轨迹应由与 x 轴、y 轴及原点对称的四段圆弧组成.

1155. 长轴、短轴的长分别为 $2a$、$2b$ 的椭圆和两坐标轴相切而滑动，求椭圆焦点的轨迹方程.

[解] 设与两坐标轴相切而滑动的椭圆两焦点坐标为(x_1, y_1)、(x_2, y_2)，根据第668题，椭圆两焦点到切线的距离之积等于b^2，即$x_1x_2=b^2\cdots$①，$y_1y_2=b^2\cdots$②；又$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=4(a^2-b^2)\cdots$③. 从①、②、③消去两个参数$x_2$、$y_2$，得$\left(x_1-\dfrac{b^2}{x_1}\right)^2+\left(y_1-\dfrac{b^2}{y_1}\right)^2=4(a^2-b^2)$. 即$(x_1^2+y_1^2)+b^4\left(\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{y_1^2}\right)=4a^2$，亦即$(x_1^2+y_1^2)(x_1^2y_1^2+b^4)=4a^2x_1^2y_1^2$. 以$x$、$y$代换$x_1$、$y_1$，即得焦点的轨迹方程$(x^2+y^2)(x^2y^2+b^4)=4a^2x^2y^2$.

1156. 求证：过四个点$(\pm a, 0)$、$(0, \pm b)$的圆锥曲线系的主轴的端点的轨迹方程为

$$\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)(x^2+y^2)=x^2-y^2.$$

[证一] 过四个点$(\pm a, 0)$、$(0, \pm b)$的圆锥曲线系方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+2\lambda xy=1\cdots①.$$

若其主轴的倾角为θ，则$\operatorname{tg}2\theta=\dfrac{2\lambda}{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}}$，而主轴端点的直角坐标为$x=p\cos\theta$，$y=p\sin\theta$（$p$为半主轴长）.

$$\therefore\quad 2\lambda=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\operatorname{tg}2\theta=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\frac{2\sin\theta\cdot\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$$
$$=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\frac{2xy}{x^2-y^2}\cdots②.$$

从①与②消去λ，即得轨迹方程$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)\dfrac{2x^2y^2}{x^2-y^2}=1$. 化简得$\left(\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)(x^2+y^2)=x^2-y^2$.

[证二] 过四个点$(\pm a, 0)$、$(0, \pm b)$的圆锥曲线系为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+2\lambda xy=1$. 若其主轴的倾角为$\theta$，主轴端点$P$的坐标为$(p\cos\theta, p\sin\theta)$，则过$P$的直线$x\cos\theta+y\sin\theta=p$与圆锥曲线系在点$P$处的切线重合，切线方程为

$$\frac{p\cos\theta\cdot x}{a^2}+\frac{p\sin\theta\cdot y}{b^2}+2\lambda\cdot\frac{p\cos\theta\cdot y+p\sin\theta\cdot x}{2}=1,$$

即
$$x\left(\frac{p\cos\theta}{a^2}+\lambda p\sin\theta\right)+y\left(\lambda p\cos\theta+\frac{p\sin\theta}{b^2}\right)=1.$$

$$\therefore \begin{cases} \dfrac{p\cos\theta}{a^2}+\lambda p\sin\theta=\dfrac{\cos\theta}{p}, \\ \lambda p\cos\theta+\dfrac{p\sin\theta}{b^2}=\dfrac{\sin\theta}{p}. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}+\lambda\,\mathrm{tg}\,\theta=\dfrac{1}{p^2}\cdots①, \\ \dfrac{1}{b^2}+\lambda\,\mathrm{ctg}\,\theta=\dfrac{1}{p^2}\cdots②. \end{cases}$$

由 ①、② 消去参数 λ, 得所求轨迹的极坐标方程是

$$\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{a^2}\right)\mathrm{ctg}\,\theta=\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{b^2}\right)\mathrm{tg}\,\theta.$$

化为直角坐标得

$$\left(\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{x}{y}=\left(\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{1}{b^2}\right)\frac{y}{x},$$

即
$$\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)(x^2+y^2)=x^2-y^2.$$

1157. 设 λ 为参数, 求证: 双曲线系 $x^2-y^2+\lambda xy=a^2$ 的顶点的轨迹方程为 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

[分析] 先设双曲线的顶点坐标, 然后求出顶点坐标满足的曲线系方程. 同时, 顶点又在双曲线系 $x^2-y^2+\lambda xy=a^2$ 上, 故所求轨迹即此两曲线系交点的轨迹.

[证] 因双曲线系 $x^2-y^2+\lambda xy=a^2\cdots①$ 没有一次项, 故它的中心在原点, 设其实轴与 x 轴的夹角为 θ, 则顶点坐标为 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ (ρ 为半实轴长). 而 $\mathrm{tg}\,2\theta=\dfrac{\lambda}{1-(-1)}$, $\therefore$ 顶点在曲线系

$$\lambda=2\,\mathrm{tg}\,2\theta=\frac{4\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\frac{4\rho\sin\theta\cdot\rho\cos\theta}{\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta}=\frac{4xy}{x^2-y^2}$$

上, 即 $\lambda(x^2-y^2)=4xy\cdots②$. 从 ① 与 ② 消去参数 λ, 即得顶点的轨迹方程 $x^2-y^2+\dfrac{4x^2y^2}{x^2-y^2}=a^2$, 即 $(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=a^2(x^2-y^2)$, 亦即

$$(x^2+y^2)^2=a(x^2-y^2).$$

[说明] (1) 求圆锥曲线的顶点的轨迹, 大多可转化为求两曲线系交点的轨迹. (2) 以上两题的轨迹都应除去原点.

1158. 一直角 $\triangle AOB$, 点 O 为原点, 点 A、B 的坐标为 $(2h, 0)$、$(0, 2k)$, 求证点 O 在 $\triangle AOB$ 的外接抛物线系的准线上的射影的轨迹方程为 $k^2x^4+h^2y^4+2xy(x^2+y^2)(kx+hy)=0$.

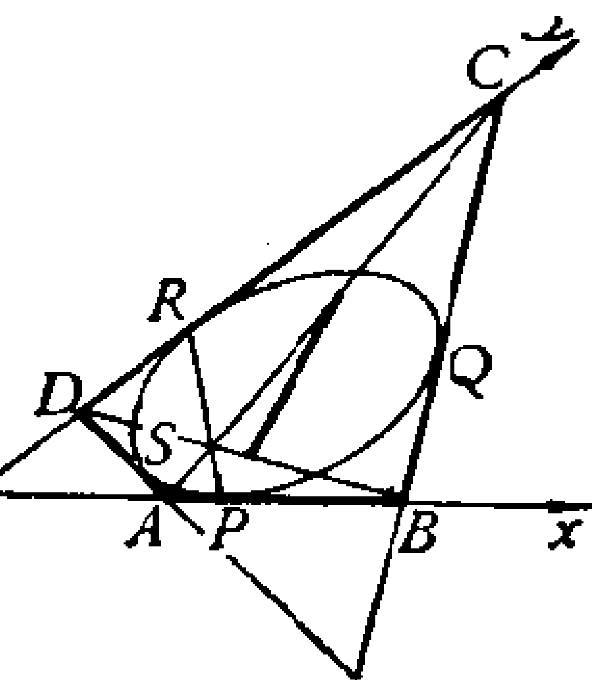
［分析］ 因抛物线由焦点及准线所确定，故可设抛物线的焦点坐标为(a, b)，准线方程为$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$，再根据轨迹条件建立含参数$a$、$b$、$\alpha$、$p$的五个方程，消去以上四个参数即得所求.

［解］ 设抛物线的焦点为$F(a, b)$，准线方程为$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$，则抛物线方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=(x\cos\alpha+y\sin\alpha-p)^2$，∵抛物线过点$O(0, 0)$、$A(2h, 0)$和$B(0, 2k)$. ∴$a^2+b^2=p^2$…①，$(2h-a)^2+b^2=(2h\cos\alpha-p)^2$…②，$a^2+(2k-b)^2=(2k\sin\alpha-p)^2$…③. 原点$O$在准线上的射影为：$x=p\cos\alpha$…④，$y=p\sin\alpha$…⑤. 从①、②、③得：$h\sin^2\alpha-a+p\cos\alpha=0$…⑥，$k\cos^2\alpha-b+p\sin\alpha=0$…⑦. 以④、⑤代入⑥、⑦：$a=x+h\sin^2\alpha$…⑧，$b=y+k\cos^2\alpha$…⑨. 由①、④、⑤得$x^2+y^2=a^2+b^2=p^2$. 又以$\sin\alpha=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$代入⑧、⑨：$a=x+\frac{hy^2}{x^2+y^2}$，$b=y+\frac{kx^2}{x^2+y^2}$. ∴$x^2+y^2=\left(x+\frac{hy^2}{x^2+y^2}\right)^2+\left(y+\frac{kx^2}{x^2+y^2}\right)^2$，化简得

$$k^2x^4+h^2y^4+2xy(x^2+y^2)(kx+hy)=0.$$

1159. 求对边互不平行的凸四边形$ABCD$的内切椭圆中心的轨迹.

［解］ 设四边形$ABCD$的一双对边AB和CD相交于点O，取AB、CD所在直线为x、y轴建立斜坐标系. 设四顶点的坐标分别为$A(a, 0)$、$B(b, 0)$、$C(0, c)$、$D(0, d)$，两切点P、R的连线方程为$\alpha x+\beta y-1=0$，则四边形$ABCD$的内切椭圆方程可设为$(\alpha x+\beta y-1)^2=2\lambda xy$，其中$\alpha$、$\beta$、$\lambda$为参数；直线$DA$方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{d}=1$. 曲线$F$：$\left(\alpha x+\beta y-\frac{x}{a}-\frac{y}{d}\right)^2=2\lambda xy$



表示DA与椭圆交点和原点的连线. ∵直线DA与椭圆相切，∴曲线F为两重合直线. 故$\left(\alpha-\frac{1}{a}\right)^2x^2+2\left[\left(\alpha-\frac{1}{a}\right)\left(\beta-\frac{1}{d}\right)-\lambda\right]xy+\left(\beta-\frac{1}{d}\right)^2y^2=0$的判别式：$\Delta=4\left[\left(\alpha-\frac{1}{a}\right)\left(\beta-\frac{1}{d}\right)-\lambda\right]^2-4\left(\alpha-\frac{1}{a}\right)^2\left(\beta-\frac{1}{d}\right)^2=0$.

∵$\lambda\neq0$，∴$\left(\alpha-\frac{1}{a}\right)\left(\beta-\frac{1}{d}\right)-\lambda=-\left(\alpha-\frac{1}{a}\right)\left(\beta-\frac{1}{d}\right)$，即

$$\lambda=2\left(\alpha-\frac{1}{a}\right)\left(\beta-\frac{1}{d}\right)\cdots①.$$

∵ 直线 BC $\frac{x}{b}+\frac{y}{c}=1$ 与椭圆相切，同理可得

$$\lambda=2\left(\alpha-\frac{1}{b}\right)\left(\beta-\frac{1}{c}\right)\cdots②.$$

椭圆 $(\alpha x+\beta y-1)^2=2\lambda xy$ 的中心为方程组:

$$\begin{cases}\alpha^2x+(\alpha\beta-\lambda)y-\alpha=0\\(\alpha\beta-\lambda)x+\beta^2y-\beta=0\end{cases}$$

的解. ∵ 椭圆有中心, ∴ $\begin{vmatrix}\alpha^2 & \alpha\beta-\lambda\\ \alpha\beta-\lambda & \beta^2\end{vmatrix}=\lambda(2\alpha\beta-\lambda)\neq0$, 故 $\lambda\neq0$, $2\alpha\beta-\lambda\neq0$.

$$\therefore\ \begin{cases}x=\dfrac{\beta}{2\alpha\beta-\lambda}\\[2ex] y=\dfrac{\alpha}{2\alpha\beta-\lambda}.\end{cases}$$

从①得 $2\alpha\beta-\lambda=\frac{2\beta}{a}+\frac{2\alpha}{d}-\frac{2}{ad}$, 即

$$\frac{2\beta}{2\alpha\beta-\lambda}d+\frac{2\alpha}{2\alpha\beta-\lambda}a-\frac{2}{2\alpha\beta-\lambda}=ad;$$

从②得 $2\alpha\beta-\lambda=\frac{2\beta}{b}+\frac{2\alpha}{c}-\frac{2}{bc}$, 即

$$\frac{2\beta}{2\alpha\beta-\lambda}c+\frac{2\alpha}{2\alpha\beta-\lambda}b-\frac{2}{2\alpha\beta-\lambda}=bc.$$

$$\therefore\quad 2dx+2ay-\frac{2}{2\alpha\beta-\lambda}=ad\cdots③,\ 2cx+2by-\frac{2}{2\alpha\beta-\lambda}=bc\cdots④.$$

③−④, 即得轨迹方程 $2(d-c)x+2(a-b)y=ad-bc$. ∵ 对角线 AC、BD 的中点: $\left(\frac{a}{2},\ \frac{c}{2}\right)$、$\left(\frac{b}{2}、\frac{d}{2}\right)$均满足此轨迹方程, ∴ 轨迹为连结两对角线中点的线段.

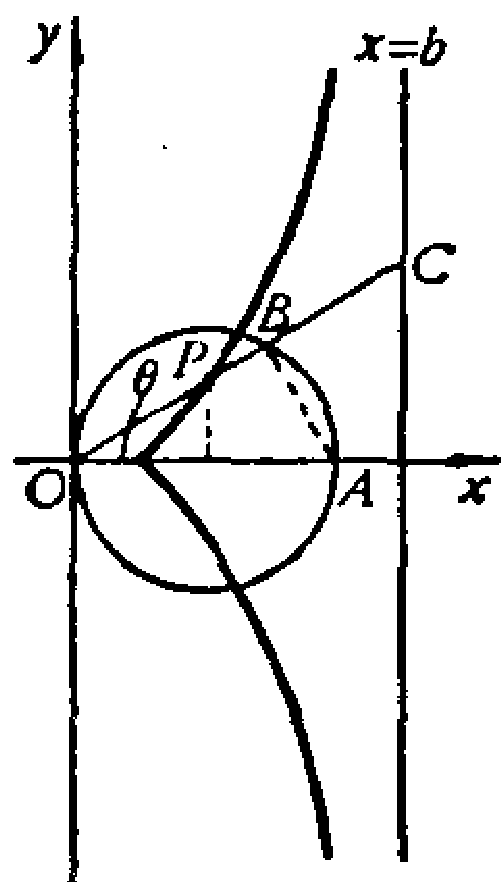
[说明]　此轨迹所在直线称为四边形 $ABCD$ 的牛顿(Newton)线.

第九章　高次曲线、超越曲线

§1. 高 次 曲 线

1160. 过原点 O 作任意直线，交圆 $x^2+y^2-ax=0$ 于点 B，交定直线 $x=b$ $(b\geqslant a>0)$ 于点 C，在此直线上截取 $OP=BC$，求点 P 的轨迹方程.

［分析一］ 假设过原点的直线的斜率已知，则点 B、C 的坐标均可利用斜率的值求得，于是通过 $OP=BC$ 即可求得轨迹方程.



［解一］ 设过 O 的直线方程为 $y=kx\cdots$①，则与已知圆 $x^2+y^2-ax=0$ 的交点 B 的坐标为$\left(\dfrac{a}{1+k^2}, \dfrac{ak}{1+k^2}\right)$. 又由①和 $x=b$，得点 C 的坐标为(b, kb). 设点 P 的坐标为(x, y)，则由 $OP=BC$ 得 $x^2+y^2=\left(\dfrac{a}{1+k^2}-b\right)^2+\left(\dfrac{ak}{1+k^2}-bk\right)^2=\dfrac{[a-b(1+k^2)]^2}{1+k^2}\cdots$②.

由①得 $k=\dfrac{y}{x}$，代入②并化简，得 $(x^2+y^2)^2x^2=[ax^2-b(x^2+y^2)]^2$.

$\because$ OP 与 BC 同向，$\therefore$ 点 P 必在 y 轴右方，即 $x>0$. 故所求的轨迹方程为$(x^2+y^2)(b-x)=ax^2$.

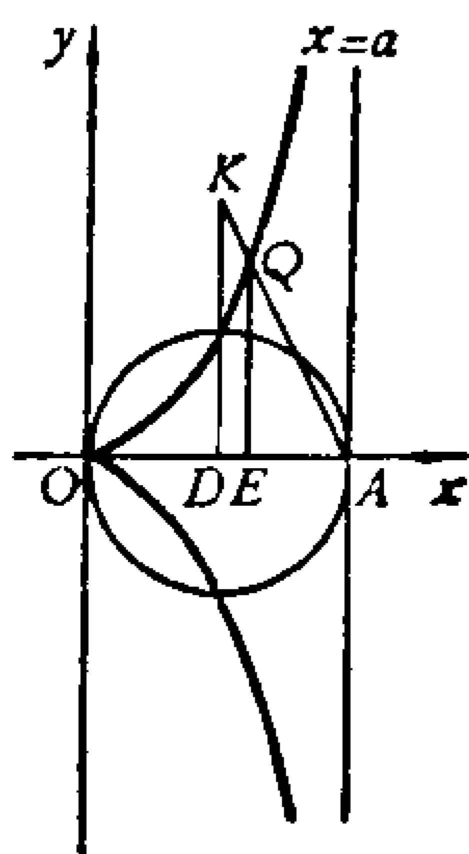
［分析二］ 由于 O、P、B、C 四点共线，故可从夏尔定理得到由这些点为端点的有向线段之间的关系，并运用极坐标求得动点的轨迹.

［解二］ $\because$ O、P、B、C 四点共线，$\therefore$ $OC=OB+BC$；又 $\because$ $BC=OP$，$\therefore$ $OC=OB+OP\cdots$①. 设点 P 的坐标为(ρ,θ)，则 $OC=b\sec\theta$，$OB=a\cos\theta$，而 $OP=\rho$. 代入①，得 $b\sec\theta=a\cos\theta+\rho$，即 $\rho=(b\sec\theta-a\cos\theta)$. 此即所求轨迹的极坐标方程.

［说明］ 此轨迹称为蔓叶线. 当 $a=b$ 时，轨迹为 $y^2=\dfrac{x^3}{a-x}$.

过圆心 D 作 $DK\perp OA$，使 $DK=a$. 连结 AK 交蔓叶线于点 Q，点 Q 在 OA 上的射影为 E. $\because 2DA=DK$，$\therefore EQ=2EA$. 又 $\because$ 点 Q 在蔓叶线上，$\therefore EQ^2=\dfrac{OE^3}{OA-OE}=\dfrac{OE^3}{EA}$，故

$$EQ^3=2\cdot OE^3.$$



若已知立方体的棱长为 l，它的倍立方体的棱长为 l'，按 $l':l=EQ:OE$，作出 l'，则 $l'^3=2l^3$. 同样，若取 $DK=\dfrac{n}{2}a$，则可以求出 n 倍积立方体的棱长.

1161. O 是直径为 a 的圆 C 上一定点，作弦 OB，并在弦 OB 所在的直线上取一点 P，求满足下列各条件的点 P 的轨迹方程：(1) $|BP|$ 等于点 B 到直径 OA 的距离；(2) $|BP|=a$；(3) $|BP|=|AB|$；(4) $|BP|=\dfrac{3}{2}a$.

［解］ 以点 O 为极点，射线 OA 为极轴建立极坐标系(图 1)，则圆 C 的方程为 $\rho=a\cos\theta$. 设点 B 的坐标是 (ρ_0,θ_0). $\because$ 点 B 在圆 C 上，$\therefore \rho_0=a\cos\theta_0\cdots$①. 又设点 P 的坐标为 (ρ,θ)，显然 $\theta=\theta_0\cdots$②，且 $|BP|=|\rho-\rho_0|$.

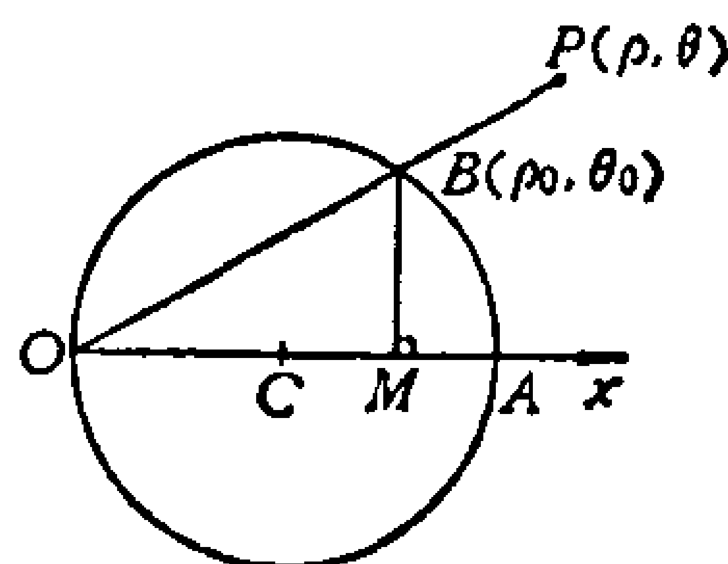


图 1

(1) 作 $BM\perp OA$，垂足为 M，则 $|BM|=|\rho_0\sin\theta_0|$. $\because |BP|=|BM|$，$\therefore |\rho-\rho_0|=|\rho_0\sin\theta_0|$，即 $\rho-\rho_0=\pm\rho_0\sin\theta_0\cdots$③. 由①、②、③ 可得 $\rho=a(1\pm\sin\theta)\cos\theta$. 由于方程 $\rho=a(1+\sin\theta)\cos\theta$ 和 $\rho=a(1-\sin\theta)\cos\theta$ 表示同一曲线，故所求的轨迹方程为 $\rho=a(1+\sin\theta)\cos\theta$. 以极点为原点，极轴所在直线为 x 轴建立直角坐标系后，其对应的直角坐标方程为 $(x^2+y^2)(x^2+y^2-ax)^2=a^2x^2y^2$.

(2) $\because |BP|=a$，$\therefore |\rho-\rho_0|=a$，即 $\rho-\rho_0=\pm a\cdots$④. 由①、②、④ 可得 $\rho=a(\cos\theta\pm1)$. 由于方程 $\rho=a(\cos\theta+1)$ 和 $\rho=a(\cos\theta-1)$ 表示同一曲线，故所求的轨迹方程为 $\rho=a(\cos\theta+1)$. 以极点为原点，极轴所在直线为 x 轴建立直角坐标系后，其对应的直角坐标方程为

$$(x^2+y^2-ax)^2=a^2(x^2+y^2).$$

(3) ∵ $|BP|=|AB|$, 而 $|AB|=|a\sin\theta|$, ∴ $|\rho-\rho_0|=|a\sin\theta|$, 即 $\rho-\rho_0=\pm a\sin\theta$…⑤. 由 ①、②、⑤ 可得 $\rho=a(\cos\theta\pm\sin\theta)$. 此即所求的轨迹方程. 以极点为原点, 极轴所在直线为 x 轴建立直角坐标系后, 其对应的直角坐标方程为 $x^2+y^2-ax\mp ay=0$.

(4) ∵ $|BP|=\frac{3a}{2}$, ∴ $|\rho-\rho_0|=\frac{3a}{2}$, 即 $\rho-\rho_0=\pm\frac{3a}{2}$…⑥. 由 ①、②、⑥ 可得 $\rho=a\left(\cos\theta\pm\frac{3}{2}\right)$. 由于 $\rho=a\left(\cos\theta+\frac{3}{2}\right)$ 和 $\rho=a\left(\cos\theta-\frac{3}{2}\right)$ 表示同一曲线, 故所求的轨迹方程为 $\rho=a\left(\cos\theta+\frac{3}{2}\right)$. 以极点为原点, 极轴所在直线为 x 轴建立直角坐标系后, 其对应的直角坐标方程为

$$4(x^2+y^2-ax)^2=9a^2(x^2+y^2).$$

[说明] 以上 (2) 的轨迹称为心脏线(图 2). (4) 的轨迹中如取 $|BP|=b$, 则轨迹方程为 $\rho=a\cos\theta+b$. 其曲线称为蜗线(图 3).

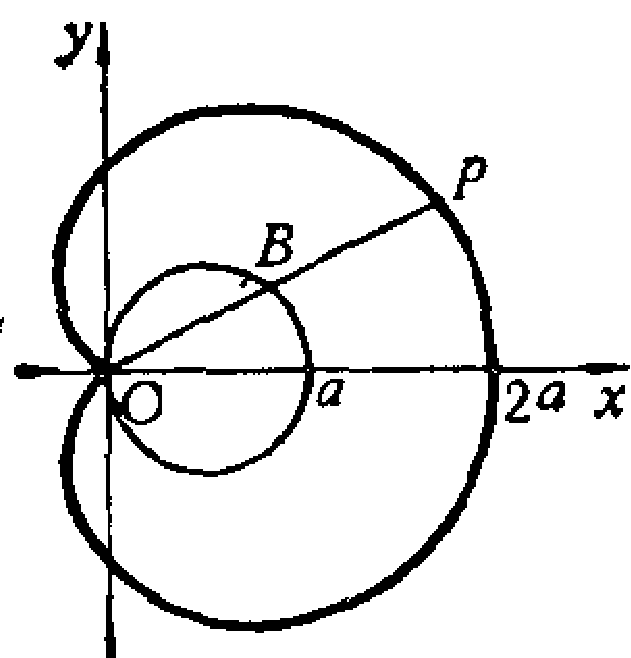


图 2

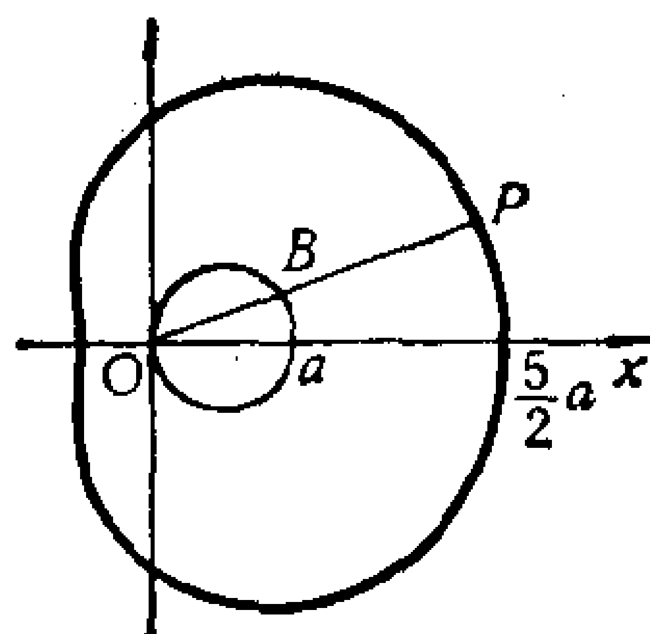


图 3

1162. 一动点 P 与两定点 F、F' 的距离之乘积为一常量 a^2, 两定点间的距离为 $2b$, 取连结两定点的直线作为 x 轴, 两定点连线的中点为坐标原点. 求点 P 的轨迹方程.

[解] 设 $P(x, y)$ 为轨迹上任意一点. ∵ $|PF|\cdot|PF'|=a^2$,

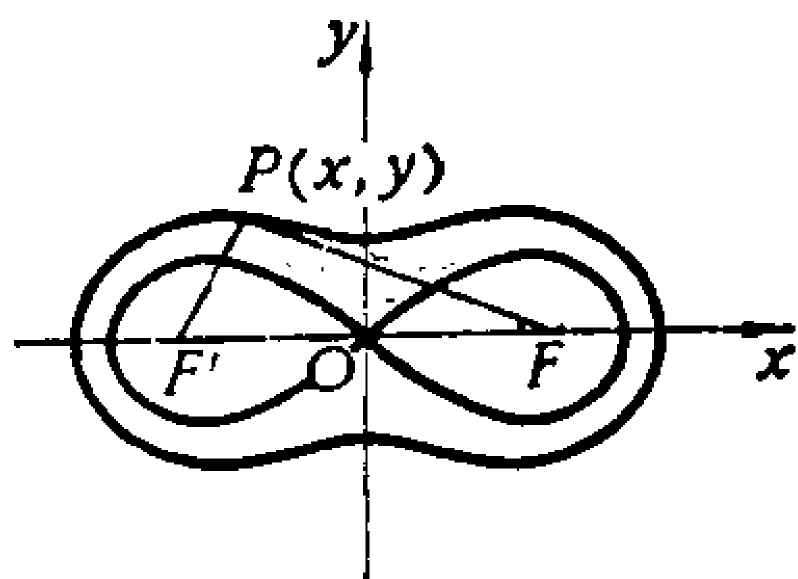
$$\therefore\quad \sqrt{(x+b)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-b)^2+y^2}=a^2.$$

两边平方后, 得 $(x^2+y^2+b^2)^2-4b^2x^2=a^4$, 整理后即得所求的方程

$$(x^2+y^2)^2-2b^2(x^2-y^2)=a^4-b^4.$$

〔说明〕 此轨迹称为卡西尼(Cassini)卵形线. 如取原点O为极点, Ox轴为极轴, 建立极坐标系. 设$P(\rho,\ \theta)$为轨迹上任意一点, 则相应的极坐标方程为

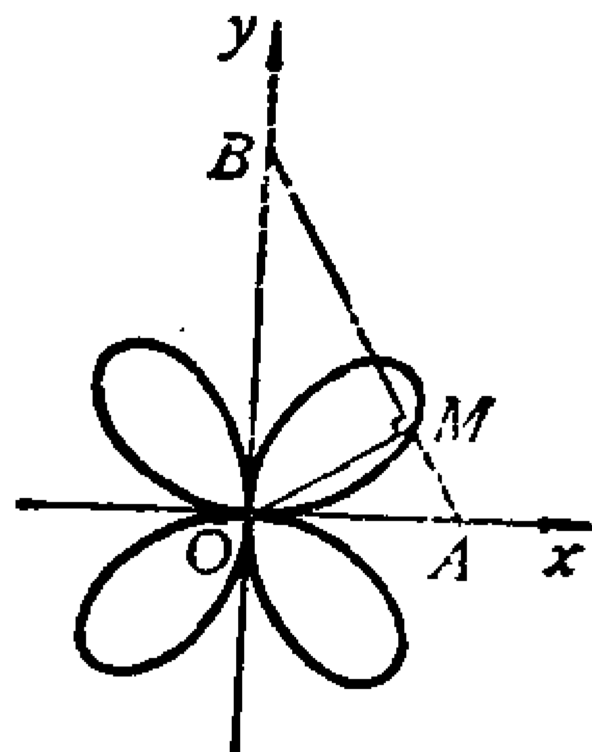
$$\rho^2=b^2\cos 2\theta\pm\sqrt{a^4-b^4\sin^2 2\theta}.$$



当两定点间距离为$2a$, 动点P与两定点的距离之积为a^2时, 点P的轨迹方程为$\rho^2=2a^2\cos 2\theta$. 其轨迹称为贝努利(Bernoulli)双纽线, 是卡西尼卵形线在$a=b$时的特例.

1163. 一定长为$2a$的线段AB, 两端分别在x、y轴上滑动. 求原点在此线段上的射影M的轨迹.

〔分析〕 若点M的坐标确定, 则点A、B的坐标可用点M的坐标表示. 利用$|AB|=2a$, 即可求得轨迹方程.



〔解〕 设原点在线段AB上的射影为$M(u,\ v)$, 则直线OM的方程为$vx-uy=0$, 从而直线AB的方程为$ux+vy=u^2+v^2$. 显然u、v都不等于0, 故直线AB与x、y轴的交点A、B的坐标分别为$\left(\frac{u^2+v^2}{u},0\right)$、$\left(0,\frac{u^2+v^2}{v}\right)$. $\because\ |AB|=2a$,

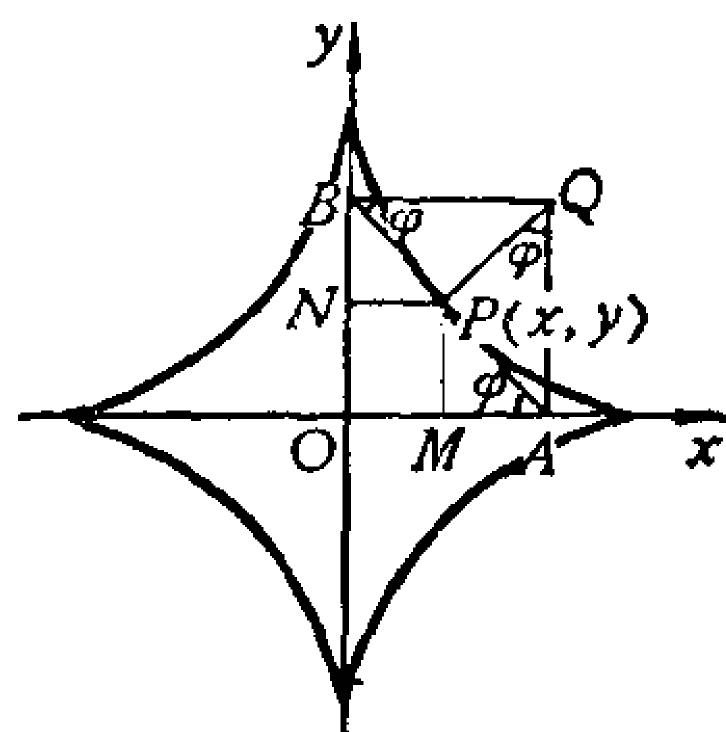
$$\therefore\quad\left(\frac{u^2+v^2}{u}\right)^2+\left(\frac{u^2+v^2}{v}\right)^2=4a^2.$$

化简, 并以x、y分别代换u、v, 即得所求的轨迹方程$(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2$. 若以原点为极点, 以x轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 可得$\rho=\pm a\sin 2\theta$. 因方程$\rho=a\sin 2\theta$和$\rho=-a\sin 2\theta$表示同一曲线, 故所求轨迹的极坐标方程为$\rho=a\sin 2\theta$. 轨迹为四叶玫瑰线.

1164. 一定长为a的线段, 两端A、B分别在x、y轴上滑动. 过点A、B分别作y轴、x轴的平行线相交于点Q, 试求点Q在线段AB上的射影P的轨迹.

〔解〕 设点P坐标为$(x,\ y)$. 取$\angle ABQ=\varphi$为参数, 则$\angle OAB=\angle PQA=\varphi$. $x=OM=NP=BP\cos\varphi=BQ\cos^2\varphi=a\cos^3\varphi$, $y=MP=$

$AP\sin\varphi = AQ\sin^2\varphi = a\sin^3\varphi$. 故轨迹的参数方程为$\begin{cases}x=a\cos^3\varphi\\y=a\sin^3\varphi.\end{cases}$ 当P在其它象限时，所得结果相同. 此轨迹称为内摆线，或称星形线.



1165. 围绕定点O旋转的直线交不过O的定直线l于点Q，在直线OQ上取一点P，使$|QP|$为定长b，试求点P的轨迹方程.

［解一］ 取定点O为极，过O向l引垂线为极轴，建立极坐标系. 设$P(\rho、\theta)$为轨迹上任意一点，O到l的距离为a，l与极轴的交点为$A(a, 0)$. $\because$ $OP=OQ+QP$，而$OP=\rho$，$OQ=a\sec\theta$，$QP=\pm b$，$\therefore$ $\rho=a\sec\theta\pm b$. $\because$ $\rho=a\sec\theta+b$与$\rho=a\sec\theta-b$表示同一曲线，$\therefore$ 所求轨迹方程为$\rho=a\sec\theta+b$. 当$\theta\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$时，$\rho=a\sec\theta+b$表示此曲线的外支，$\rho=a\sec\theta-b$表示曲线的内支.

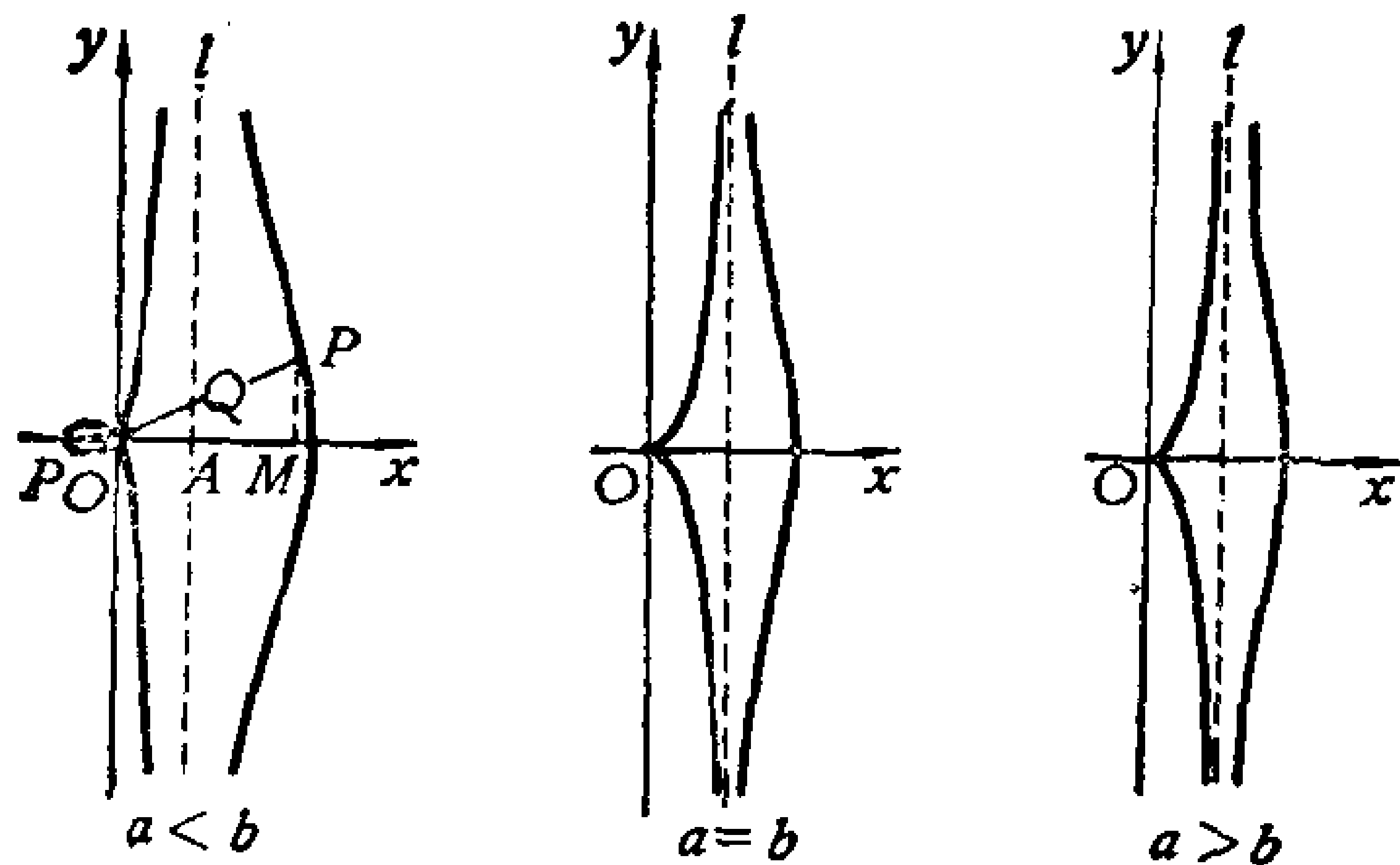


图 1

［解二］ 取O为原点，过O向l引垂线OA为x轴，建立直角坐标系. 设$P(x, y)$为轨迹上任意一点，P在x轴上的射影为M，点A的坐标为$(a, 0)$，$\because$ $\triangle OAQ\backsim\triangle OMP$，$|OQ|:|OA|=|OP|:|OM|$，

$$\therefore\ (\sqrt{x^2+y^2}\pm b)x=a\sqrt{x^2+y^2}，即(x-a)^2(x^2+y^2)=b^2x^2.$$

［说明］ (1)此轨迹称为蚌线. 可用以三等分任意角. 设已知角$\angle AOB$,

点B在OA上的射影为A，以AB为定直线l，取$b=2|OB|$，作蚌线如图 2. 过B作$BC\perp AB$，交蚌线于点C，连结OC，则$\angle AOC=\frac{1}{3}\angle AOB$. 理由如下：设$OC$交$AB$于$D$，$CD$的中点为$M$. $\because M$是直角$\triangle BCD$斜边CD的中点，$\therefore |BM|=\frac{1}{2}|CD|=|OB|=|CM|$，$\therefore \angle AOC=\angle OCB=\angle CBM$. 而$\angle BOM=\angle OMB=2\angle OCB$，$\therefore \angle AOC=\frac{1}{2}\angle BOM=\frac{1}{3}\angle AOB$.

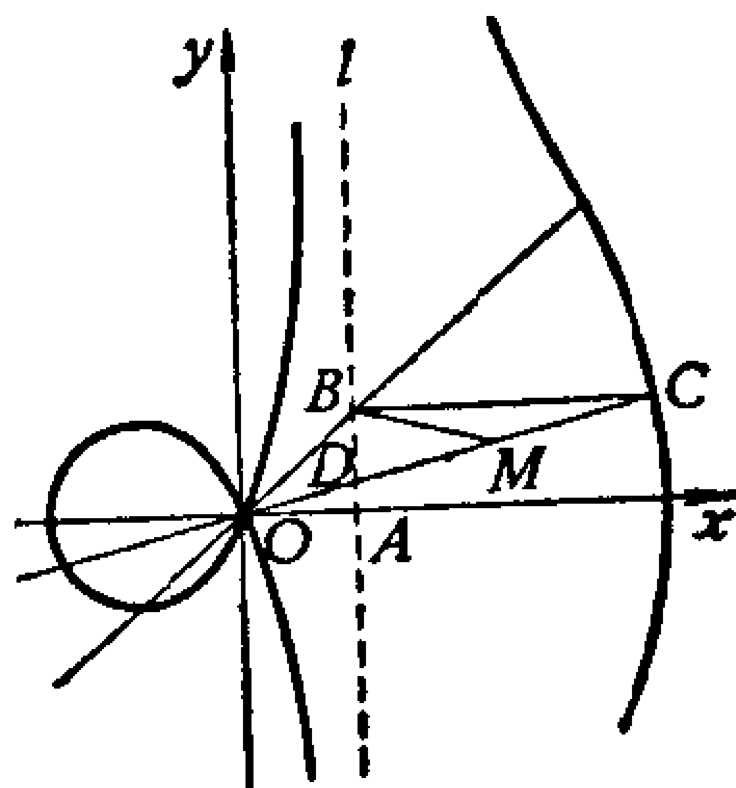


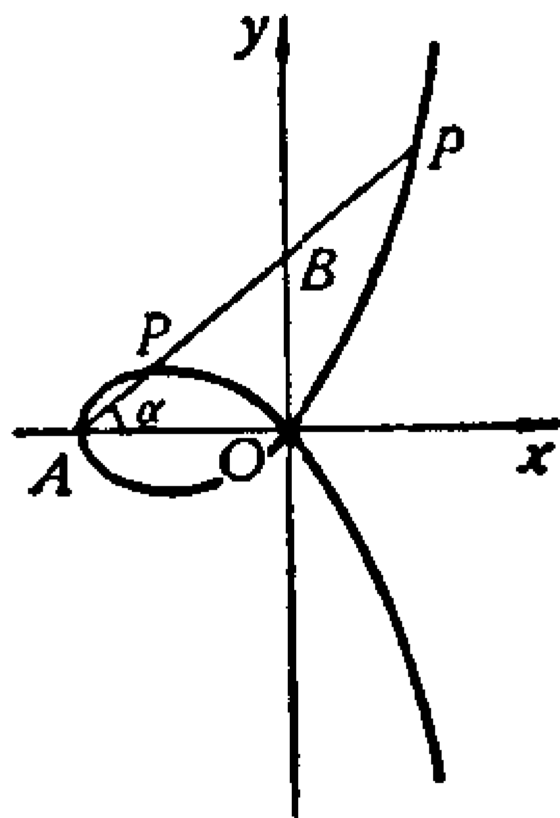
图 2

(2) 过原点O的任意直线交曲线$F(\rho,\theta)=0$于点Q，在OQ上截取一点P，使$|QP|=b$(定长)，则点P的轨迹称为“一般蚌线”，方程为

$$F(\rho\pm b,\ \theta)=0.$$

1166. 过定点$A(-a,\ 0)$ $(a>0)$作任意直线交y轴于点B. 在直线AB上取一点P，使$|BP|=|OB|$，求点P的轨迹方程.

［分析一］ 点P的位置决定于点B，在假设点B的坐标后，点P的坐标便可用点B的坐标表示，消去参数，即得所求的轨迹方程.



［解一］ 设点P的坐标为$(x,\ y)$，点B的坐标为$(0,\ \lambda)$. $\because |BP|=|OB|$，$\therefore x^2+(y-\lambda)^2=\lambda^2$，即$x^2+y^2=2\lambda y\cdots$①. 又$\because A$、$B$、$P$三点共线，

$$\therefore \begin{vmatrix} -a & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}=0,$$

即$ay=\lambda(a+x)\cdots$②. 由①、②消去λ，得$y^2(a-x)=x^2(a+x)$. 显然，由于$a>0$，$\therefore x\neq a$. 故所求的轨迹方程为$y^2=x^2\frac{a+x}{a-x}$.

［分析二］ 点P的位置依赖于点B，而点B的位置又依赖于直线AB的倾角，故也可选择AB的倾角为参数解之.

［解二］ 设点P的坐标为$(x,\ y)$，$\angle xAP=\alpha$，则$OB=a\operatorname{tg}\alpha$，$\because |BP|$

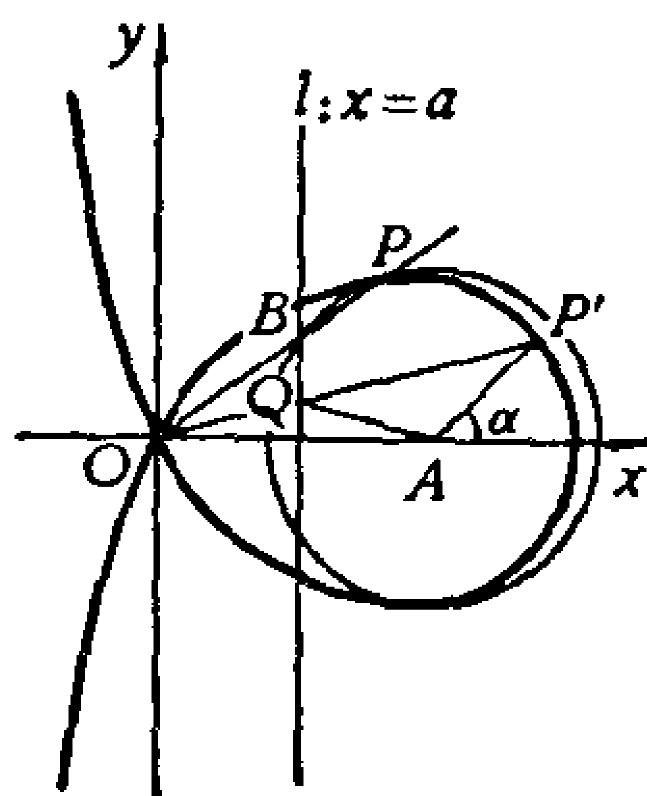
$=|OB|$，$\therefore\ |BP|=\pm a\operatorname{tg}\alpha$. 又 $x=|BP|\cos\alpha$，即 $x=\pm a\sin\alpha\cdots$①；$y=|BP|\sin\alpha+a\operatorname{tg}\alpha$，即 $y=\operatorname{tg}\alpha(a\pm a\sin\alpha)\cdots$②. ① 代入 ②，得 $y=(a+x)\operatorname{tg}\alpha\cdots$③. 当 $\alpha\neq0$ 时，由 ①、③ 分别得：$\csc\alpha=\pm\frac{a}{x}\cdots$④，$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{a+x}{y}\cdots$⑤. ④^2 − ⑤^2，得 $\frac{a^2}{x^2}-\frac{(a+x)^2}{y^2}=1$. 化简即为 $y^2=x^2\frac{a+x}{a-x}\cdots$⑥. 当 $\alpha=0$ 时，由 ①、② 可得 $x=0$，$y=0$，仍适合方程 ⑥，故 ⑥ 式即所求的轨迹方程.

以原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，即得其极坐标方程为

$$\rho=-\frac{a\cos2\theta}{\cos\theta}.$$

［说明］ 此轨迹曲线称为环索线.

1167. 已知定点 $A(2a,\ 0)$，定直线 l：$x=a(a\neq0)$. 过原点 O 作任意直线交定直线 l 于点 B，以 A 为圆心，$|AB|$ 为半径作圆，交 OB 或其延长线于另一点 P. 求点 P 的轨迹.



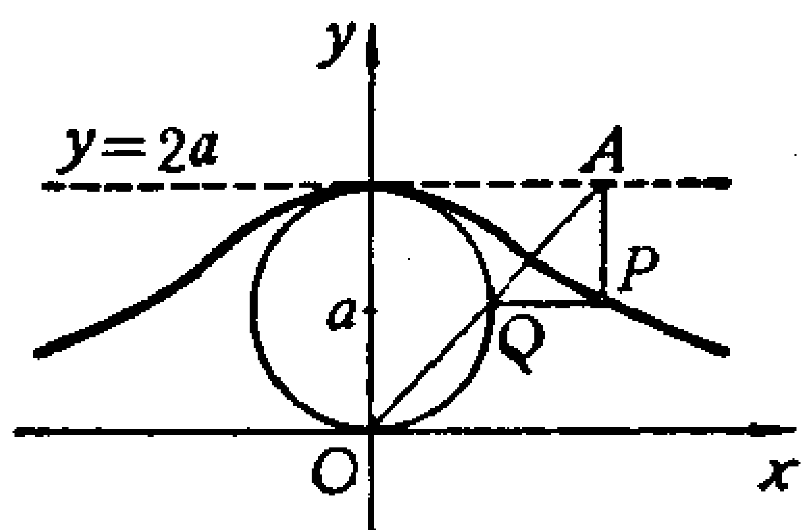
［分析］ 由于点 P 的位置决定于点 B，而点 B 在直线 l：$x=a$ 上，故可选取其纵坐标为参数解之.

［解］ 设点 B 的坐标为 $(a,\ t)$，其中 t 为参数，则直线 OB 的方程为 $tx=ay\cdots$①. 又以 A 为圆心，$|AB|$ 为半径的圆方程为 $(x-2a)^2+y^2=a^2+t^2\cdots$②. 当 $x\neq0$ 时，由 ① 得 $t=\frac{ay}{x}$，代入②，并化简得 $(3a-x)(a-x)x^2=y^2(a+x)(a-x)\cdots$③. 当点 P 不在直线 l 上时，则 $x\neq a$. 又 $\because a\neq0$，$\therefore$ 由 ③ 式可知 $x\neq-a$. 故 ③ 式可化为 $y^2=x^2\frac{3a-x}{a+x}\cdots$④. 当 $x=0$ 时，由 ① 得 $y=0$；显然 $(0,\ 0)$ 也是轨迹上的点（此时点 B 为以 AO 为一边所作的等边三角形的顶点），且 $(0,\ 0)$ 也满足方程 ④. 当点 P 在 l 上时，$|OB|=|AB|$，且圆 A 与 OB 相切于 B，因而点 B 与 P 重合. 此时，点 P 的坐标为 $(a,\ a)$ 或 $(a,\ -a)$. 这两点的坐标也满足方程 ④，故所求的轨迹方程即 $y^2=x^2\frac{3a-x}{a+x}$，其轨迹如图所示.

［说明］ 运用此曲线可以三等分任意角 α. 其方法如下：以点 A 为角 α 的顶点，Ax 为其始边，设其终边交曲线于点 P'，连结 O、P'，交直线 l 于点 Q. ∵ 点 Q 在线段 OA 的垂直平分线上，∴ $\angle AOP'=\angle OAQ$. 又 $|AQ|=|AP'|$，∴ $\angle AQP'=\angle AP'Q$. 而 $\angle AQP'=2\angle AOP'$，∴ $\angle xAP'=\angle AOP'+\angle AP'Q=3\angle AOP'$，即 $\angle AOP'=\frac{1}{3}\angle xAP'=\frac{\alpha}{3}$. 故 $\angle AOP'$ 为角 α 的 $\frac{1}{3}$. 由于此曲线可用于三等分任意角，故名三等分曲线.

1168. 从原点 O 作任意直线交圆 $x^2+y^2-2ay=0\ (a>0)$ 于点 Q，交定直线 $y=2a$ 于点 A. 过 Q 与 A 分别作 x、y 轴的平行线，相交于点 P，求点 P 的轨迹方程.

［分析］ 点 Q 的位置确定后，点 A 及点 P 的位置也随之而定. 故可选取点 Q 的坐标为参数解之.



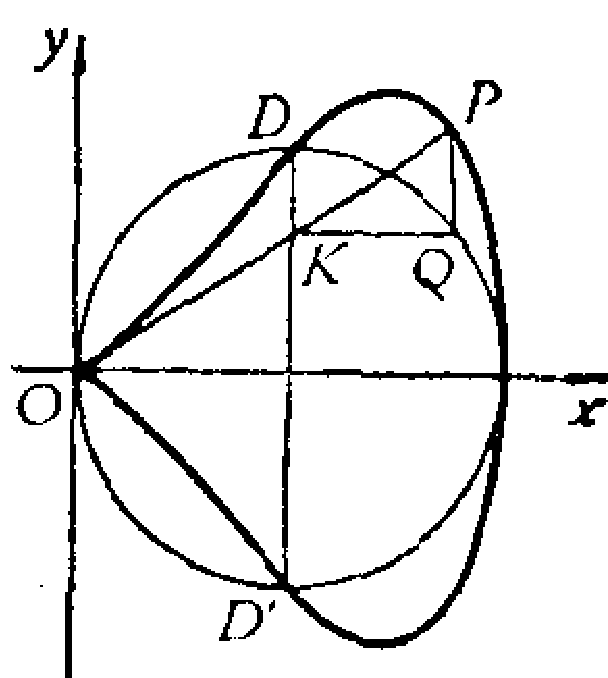
［解］ 设点 P 的坐标为 $(x,\ y)$，点 Q 的坐标为 $(x_0,\ y_0)$. ∵ Q 不能与 O 重合，∴ $y_0\neq 0$. 又直线 OQ 的方程为 $x_0y=y_0x$，而点 A 是 OQ 和直线 $y=2a$ 的交点，故其坐标为 $\left(\frac{2ax_0}{y_0},\ 2a\right)$. ∵ PQ 和 PA 分别平行于 x、y 轴，∴ $x=\frac{2ax_0}{y_0}$，$y=y_0$；即 $x_0=\frac{xy}{2a}\cdots$①，$y_0=y\cdots$②. 又点 Q 在圆 $x^2+y^2-2ay=0$ 上，∴ $x_0^2+y_0^2-2ay_0=0\cdots$③. 从①、②、③消去 x_0、y_0，即得所求的轨迹方程 $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$.

此轨迹曲线称为箕舌线.

1169. 已知 Q 为圆 $x^2+y^2-2ax=0(a>0)$ 上的动点，过 Q 且与 x 轴平行的直线交圆之定直径 $DD'(x=a)$ 于 K. 直线 OK 与过 Q 而与 y 轴平行的直线交于 P 点，求点 P 的轨迹方程.

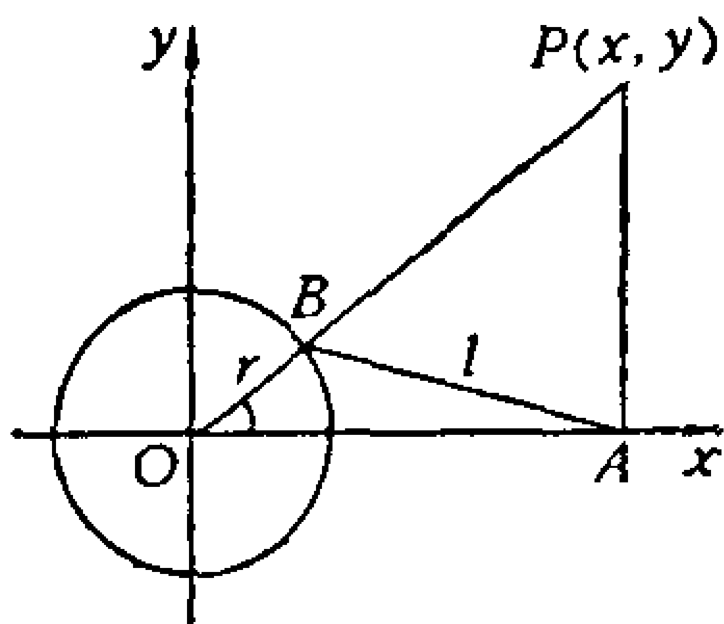
［解］ 设点 Q 的坐标为 $(x_0,\ y_0)$，则 $x_0^2+y_0^2-2ax_0=0\cdots$①，点 K 的坐标为 $(a,\ y_0)$，直线 OK 的方程为 $y=\frac{y_0}{a}x\cdots$②. 当 $x\neq 0$ 时，$y_0=\frac{ay}{x}$. 又直

线PQ的方程为$x=x_0$,代入①,得$x^2+\frac{a^2y^2}{x^2}-2ax=0$,即$x^4-2ax^3+a^2y^2=0\cdots③$. 当$x=0$时，由②可知$y=0$，则直线$OK$与$PQ$的交点为(0, 0)，仍适合方程③，故所求的轨迹方程即$x^4-2ax^3+a^2y^2=0$.



[说明] 所求轨迹称为皮利福姆(Piriforme)曲线，其图象如图所示. 曲线所围的面积$S=\pi a^2$.

1170. 在曲柄连杆机构中，取曲柄的旋转中心为原点，导轨为x轴，曲柄$|OB|=r$，连杆$|AB|=l$，过A作x轴的垂线交曲柄OB的延长线于点P，当机构运动时，求点P的轨迹方程.



[解] 设点P的坐标为(x, y)，取$\angle AOB=\theta$为参数，则$y=x\operatorname{tg}\theta\cdots①$,

$x^2+r^2-2rx\cos\theta=l^2\cdots②$. 由①得$\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}\cdots③$，由②得$\sec\theta=\frac{2rx}{x^2+r^2-l^2}\cdots④$. $④^2-③^2$，即得所求的轨迹方程

$$(x^2+y^2)(x^2+r^2-l^2)^2=4r^2x^4 \quad (l-r\leqslant x\leqslant l+r).$$

§2. 超越曲线

1171. 如图，一宽为a的矩形长木条沿着半径为r的定圆无滑动地滚动. 试求木条外缘上某点P的轨迹方程.

[分析一] 根据轨迹条件$\overset{\frown}{AB}=|BF|$，取$\angle AOB=\varphi$为参数，求出点$P$的坐标即得解.

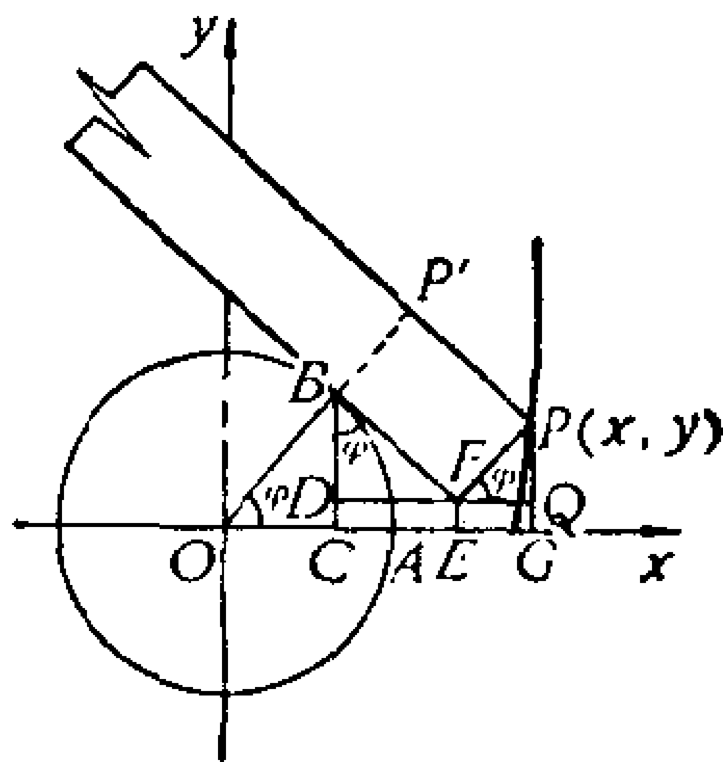


图 1

[解一] 以定圆圆心O为原点，O、F、P共线时所在直线为x轴，建立直角坐标系如图1. 设点P的坐标为(x, y)，取$\angle AOB=\varphi$为参数，则$\angle PFQ=\angle FBC=\varphi$，$|BF|=\overset{\frown}{AB}$.

$$\therefore \begin{cases} x=OC+DF+FQ=r\cos\varphi+r\varphi\sin\varphi+a\cos\varphi \\ \quad =(r+a)\cos\varphi+r\varphi\sin\varphi \\ y=GP=CB-DB+QP=r\sin\varphi-r\varphi\cos\varphi+a\sin\varphi \\ \quad =(r+a)\sin\varphi-r\varphi\cos\varphi. \end{cases}$$

此即轨迹的参数方程. 这一解法适用于点 P 在第一象限内的情况.

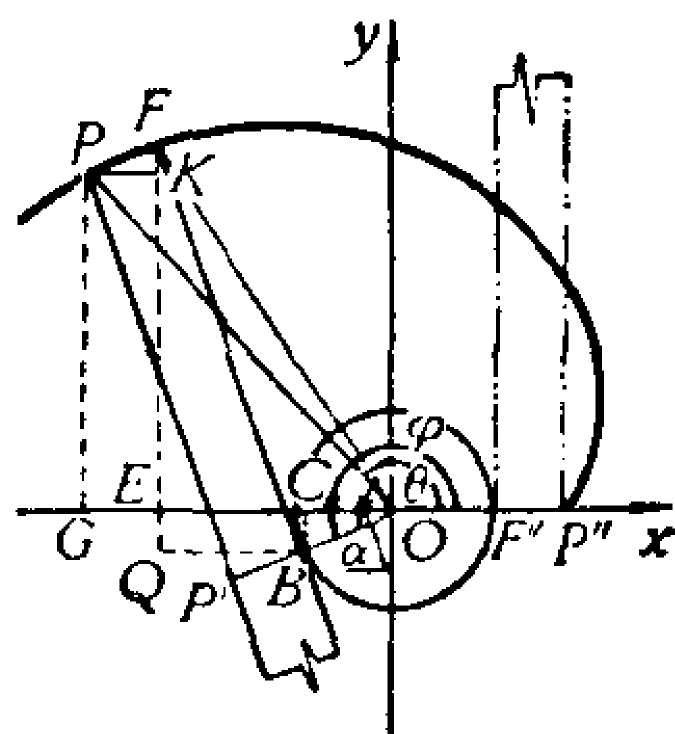


图 2

当点 P 位于第二象限时(图 2), $\because FP\parallel OB$, Ox 与 BF 的夹角为 $\varphi-\frac{\pi}{2}$, $|BF|=r\varphi$.

$$\therefore \quad x=OG=OC+CE+EG$$

$$=r\cos\varphi+BF\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)+a\cos\varphi$$

$$=(r+a)\cos\varphi+r\varphi\sin\varphi,$$

$$y=GP=QF-QE-KF=BF\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)+r\sin\varphi+a\sin\varphi$$

$$=(r+a)\sin\varphi-r\varphi\cos\varphi.$$

当点 P 在第三、四象限时, 可仿第一、二象限处理.

[分析二]　选取 $\angle AOB=\varphi$ 为参数, 运用轨迹条件 $\overset{\frown}{AB}=|BF|$, $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FP}$, 利用向量射影定理: $x=(\overrightarrow{OP})_{Ox}$, $y=(\overrightarrow{OP})_{Oy}$, 即可得解.

[解二]　坐标系与参数同[解一].

$$\because \quad \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FP},$$

$$\therefore \quad x=(\overrightarrow{OP})_{Ox}=(\overrightarrow{OB})_{Ox}+(\overrightarrow{BF})_{Ox}+(\overrightarrow{FP})_{Ox}$$

$$=r\cos\varphi+a\cos\varphi+r\varphi\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=(r+a)\cos\varphi+r\varphi\sin\varphi,$$

$$y=(\overrightarrow{OP})_{Oy}=(\overrightarrow{OB})_{Oy}+(\overrightarrow{BF})_{Oy}+(\overrightarrow{FP})_{Oy}$$

$$=r\sin\varphi+a\sin\varphi+r\varphi\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=(r+a)\sin\varphi-r\varphi\cos\varphi.$$

[分析三]　如取 $\angle BOP=\alpha$ 为参数, 运用极坐标系也可得解.

[解三]　以 O 为极点, O、F、P 共线时所在直线为极轴, 建立极坐标系. 设 $P(\rho,\theta)$ 为轨迹上任意一点, 取 $\angle BOP=\alpha$ 为参数.

$$\because \quad \rho=OP=\frac{r+a}{\cos\alpha}, \quad r(\theta+\alpha)=(r+a)\operatorname{tg}\alpha.$$

$$\therefore \begin{cases}\rho=(r+a)\sec\alpha\\ \theta=\dfrac{r+a}{r}\operatorname{tg}\alpha-\alpha.\end{cases}$$

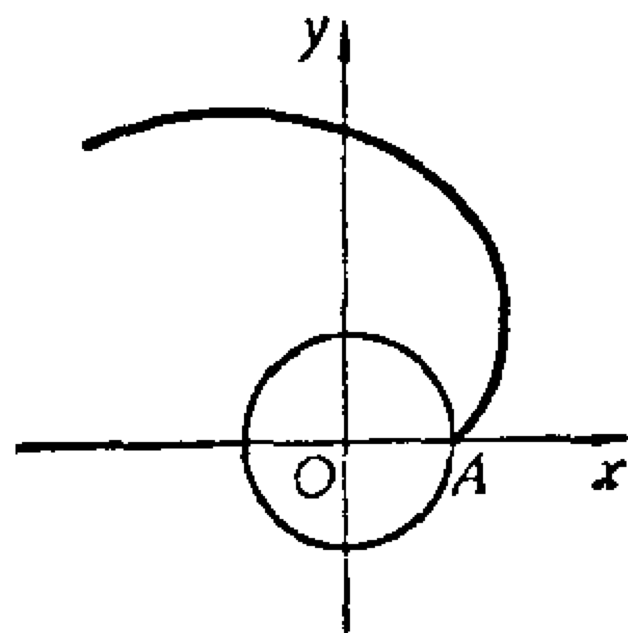


图 3

［说明］ 这类轨迹题用向量或复数解较方便.其中［解二］无论图形画在什么象限都能适用.

$a=0$ 时，此轨迹是圆的渐开线(图 3)；$a\neq 0$ 时，称为等距渐开线.

圆的渐开线是研制齿轮理论的工具，还可应用于制作渐开线变压器.

1172. 一半径为 r 的圆，在定直线上作无滑动的滚动，试求圆上一定点 P 的轨迹. 若 P 为圆内一定点或圆外一定点，且与圆心距离为 l，则轨迹各是什么曲线？

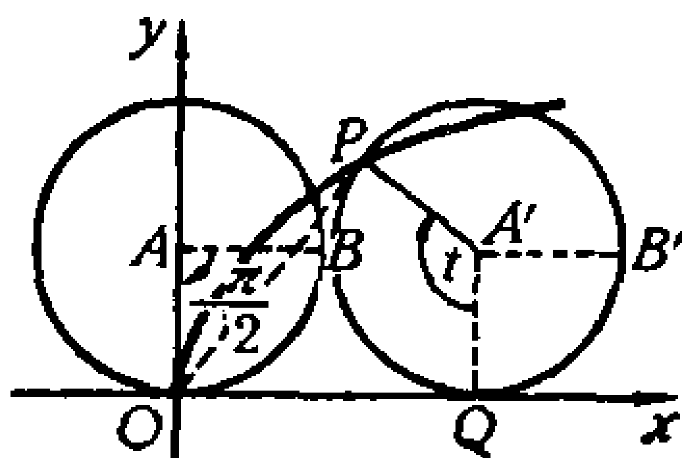


图 1

［解］ 取定直线为 x 轴，点 P 在 x 轴上时的一个位置为原点，建立直角坐标系，且以此时圆的位置为初始位置(图 1). 设 $P(x,y)$ 为轨迹上任意一点. 取圆的转动角度 t 为参数. $\because \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QA'}+\overrightarrow{A'P}$,

$$\therefore \begin{cases}x=(\overrightarrow{OP})_{Ox}=(\overrightarrow{OQ})_{Ox}+(\overrightarrow{QA'})_{Ox}+(\overrightarrow{A'P})_{Ox}\cdots ①,\\ y=(\overrightarrow{OP})_{Oy}=(\overrightarrow{OQ})_{Oy}+(\overrightarrow{QA'})_{Oy}+(\overrightarrow{A'P})_{Oy}\cdots ②.\end{cases}$$

因为 $|OQ|=\overset{\frown}{QP}$ 的长 $=rt$；$\overrightarrow{AO}$ 与 x 轴成 $-\frac{\pi}{2}$ 角，按顺时针旋转 t 角后，$\overrightarrow{A'P}$ 与 x 轴成 $-\frac{\pi}{2}-t$ 角，代入 ①，得 $x=rt+0+r\cos\left(-\frac{\pi}{2}-t\right)=r(t-\sin t)$；代入 ②，得 $y=0+r+r\sin\left(-\frac{\pi}{2}-t\right)=r(1-\cos t)$. 所以当点 P 在动圆 A 上一定点时，它的运动轨迹为

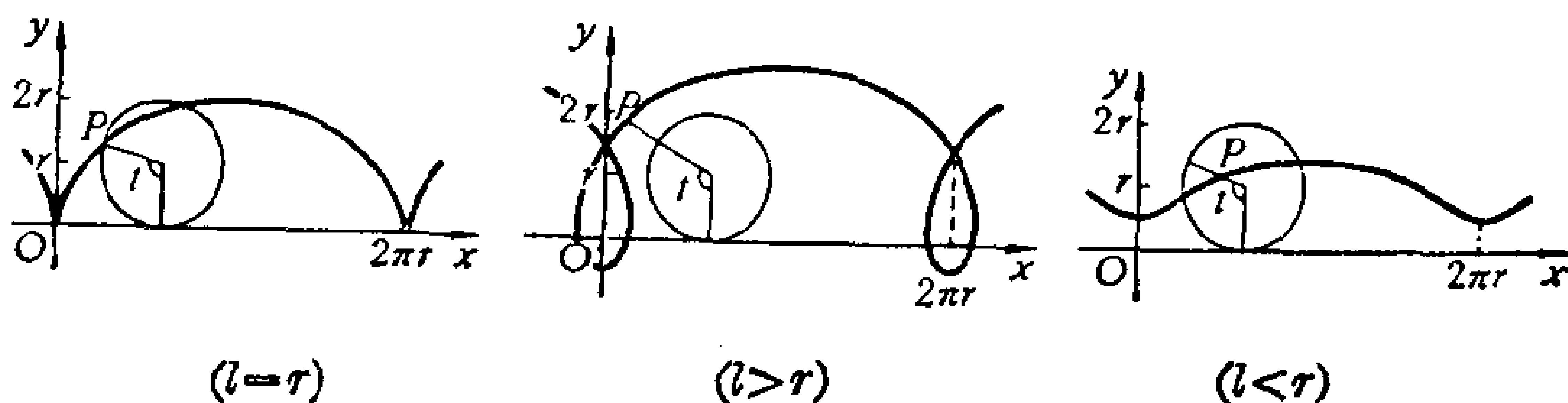
$$\begin{cases}x=r(t-\sin t)\\ y=r(1-\cos t).\end{cases}$$

当点 P 在动圆内离圆心距离 $l<r$ 时，$|A'P|=l$，用同样方法可导出点 P 轨迹为 $\begin{cases}x=rt-l\sin t\\ y=r-l\cos t.\end{cases}$

当点 P 在动圆外离圆心距离 $l>r$ 时，类似地可得点 P 的轨迹为

$$\begin{cases} x=rt-l\sin t \\ y=r-l\cos t. \end{cases}$$

［说明］ 当点 P 在动圆上时，轨迹称为摆线或旋轮线．当 $l>r$ 时，轨迹称长幅摆线；当 $l<r$ 时，轨迹称短幅摆线，两者统称次摆线．摆线也是研究齿轮齿面曲线的理论工具．



1173．一定圆 O，半径为 R；一动圆 C，半径为 $r(R>r)$．当动圆与定圆内切而滚动时，试求动圆上一定点 P 的轨迹．

［解］ 取点 P 在两圆相切的切点 P' 时的动圆位置为初始位置(图 1)．以初始位置的两圆连心线为 x 轴，O 为原点，建立直角坐标系．设动圆经过某一时刻后，圆心在 C．令 OC' 绕点 O 转到 OC 位置时转过的角为 t，小圆的半径 $C'P'$ 绕圆心转到 CP 位置时转过的角为 φ，则 $Rt=r(-\varphi)$，$(\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{CP})=t+\varphi=-\left(\frac{R}{r}-1\right)t$ $=-(m-1)t$，其中 $m=\frac{R}{r}>1$．

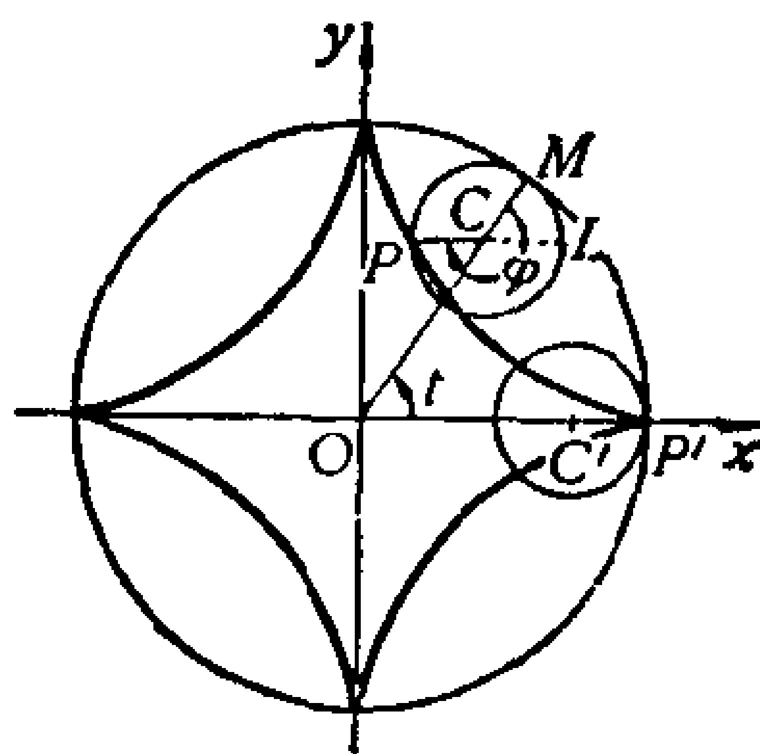


图 1

$$x=(\overrightarrow{OP})_{Ox}=(\overrightarrow{OC})_{Ox}+(\overrightarrow{CP})_{Ox}=(R-r)\cos t+r\cos[-(m-1)t]$$
$$=(R-r)\cos t+r\cos(m-1)t,$$
$$y=(\overrightarrow{OP})_{Oy}=(\overrightarrow{OC})_{Oy}+(\overrightarrow{CP})_{Oy}=(R-r)\sin t+r\sin[-(m-1)t]$$
$$=(R-r)\sin t-r\sin(m-1)t.$$

用 m 代替 $\frac{R}{r}$，得 $\begin{cases} x=r[(m-1)\cos t+\cos(m-1)t] \\ y=r[(m-1)\sin t-\sin(m-1)t]. \end{cases}$ 其中 t 为参数，r 是动圆半径，m 是定圆与动圆的半径之比．

[说明] 当 $m=2$ 时，轨迹方程为 $\begin{cases} x=2r\cos t \\ y=0, \end{cases}$ 故轨迹是定圆位于 x 轴上的直径(图 2).

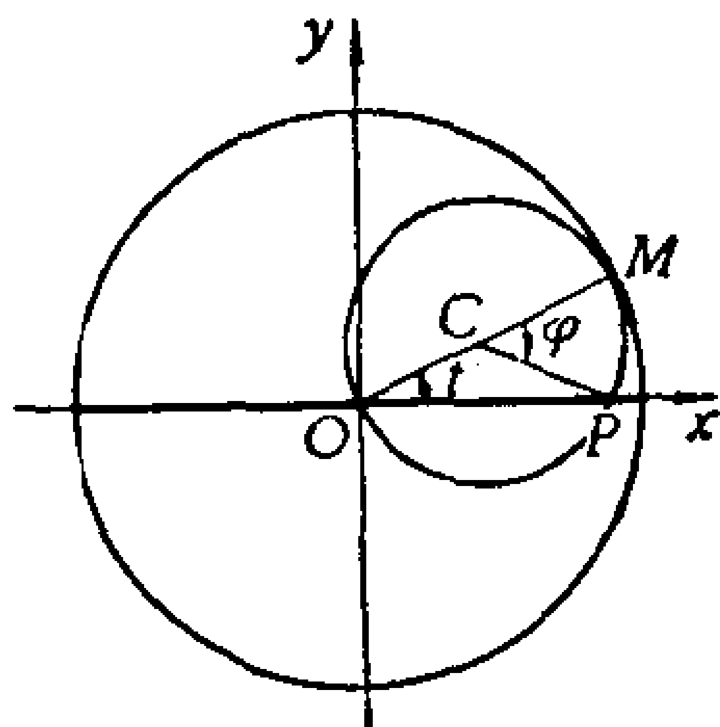


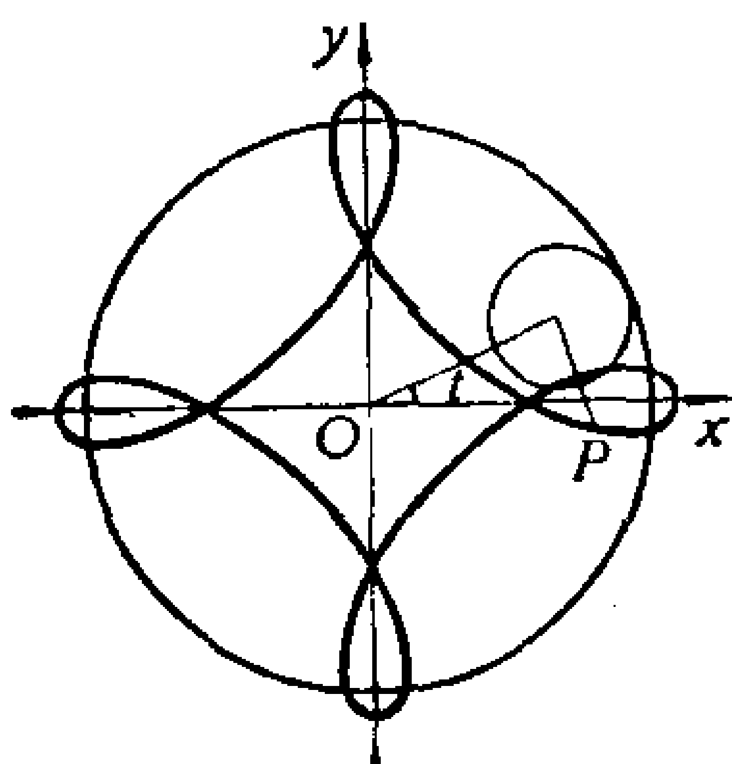
图 2

当 $m=4$ 时，轨迹方程为

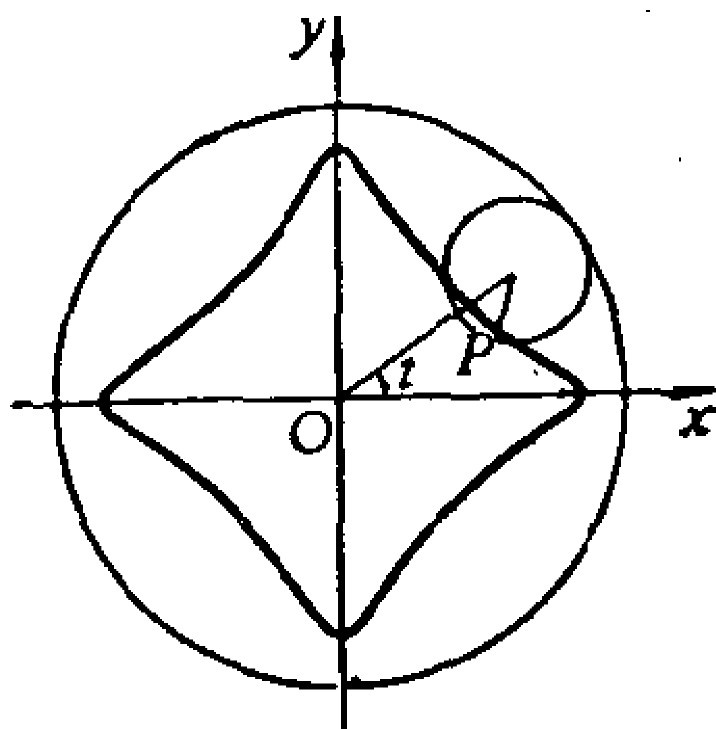
$$\begin{cases} x=r(3\cos t+\cos 3t)=R\cos^3 t \\ y=r(3\sin t-\sin 3t)=R\sin^3 t. \end{cases}$$

此轨迹称为四尖内旋轮线，也称星形线(图 1).

当 m 为任意值时，轨迹称为圆内旋轮线或内摆线. 如点 P 位于动圆半径上，到动圆圆心的距离为 λr，当 $\lambda>1$ 时，轨迹称为长幅圆内旋轮线; 当 $0<\lambda<1$ 时，轨迹称为短幅圆内旋轮线，统称为内次摆线.

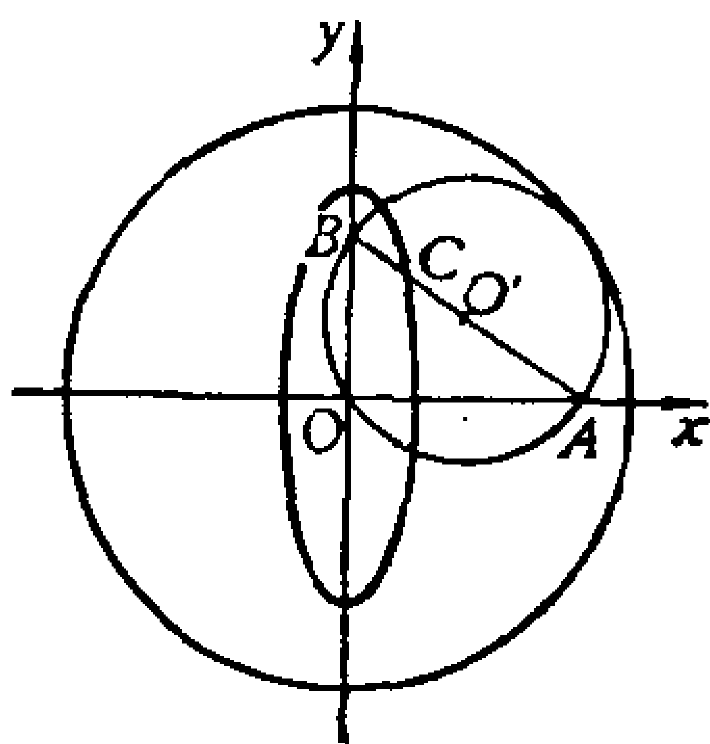


长幅 $(\lambda>1)$



短幅 $(\lambda<1)$

1174. **一圆沿着与之内切而半径大一倍之圆无滑动地滚动，引一条固定在小圆中的直径，求此直径两端点之间的某一定点的轨迹.**



[分析] 根据上题的[说明]可知，小圆定直径的两端点轨迹应是大圆的两条互相垂直的定直径. 故本题可化为: 设长为一定(小圆的直径)的线段的两端点在两条互相垂直的直线上移动，求其上某一定点的轨迹.

[解] 设定圆 O 的半径为 $2r$，动圆 O' 的半径为 r，AB 是小圆的直径，C 为此直径上的一点. 取 O 为原点，OA 为 x 轴.

当小圆滚动时，由上题[说明]可知，点 A、B 的轨迹分别为互相垂直的

两直径. $\therefore \angle AOB=90^\circ$, 可取 OB 为 y 轴建立直角坐标系如图. 设 $C(x, y)$ 为轨迹上任意一点, $|BC|=a$, $|AC|=b$.

$\because \dfrac{|x|}{a}=\dfrac{|OA|}{2r}, \dfrac{|y|}{b}=\dfrac{|OB|}{2r}$; 又 $OA^2+OB^2=(2r)^2$, $\therefore \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

因此动圆定直径上任一点描出的轨迹是椭圆,该椭圆的半长轴与半短轴分别是这点到直径两端的距离.

1175. 一定圆 O, 半径为 R; 一动圆 C, 半径为 r. 当动圆与定圆外切而滚动, 试求动圆上一定点 P 的轨迹.

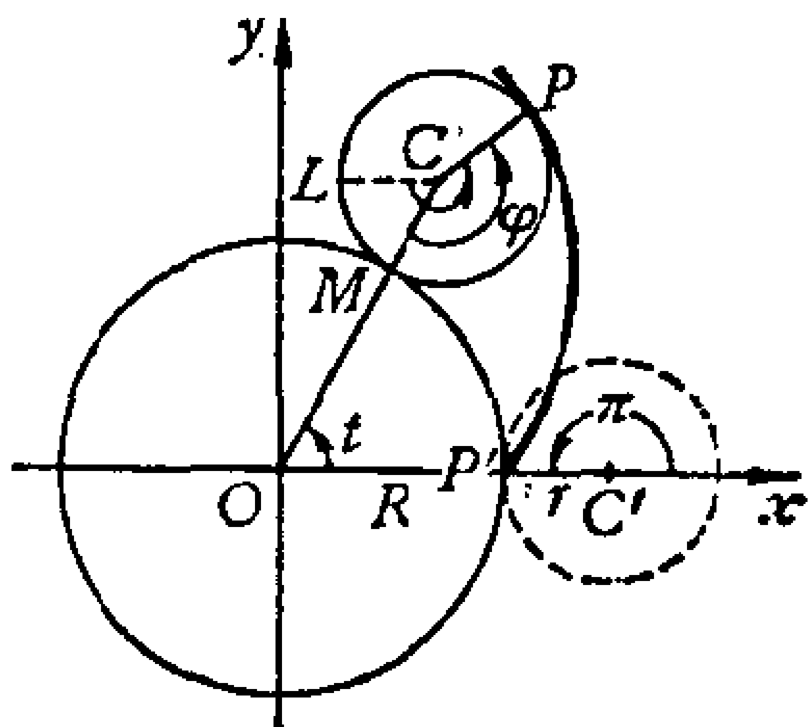


图 1

[解] 取点 P 在两圆相切的切点 P' 时的动圆位置为初始位置(图 1). 以初始位置的两圆连心线为 x 轴, O 为原点, 建立直角坐标系. 设动圆经过某一时刻后, 圆心在 C. 令 $t=\angle C'OC$. 用 φ 表示半径 $C'P'$ 的旋转角: $\angle MCP=\varphi$. $CL \parallel C'P'$, 且与 x 轴反向, 而 CP 是半径 $C'P'$ 的新位置. $\because \angle LCM=t$, $\therefore \angle LCP=\varphi+t$. 根据题意, $\overset{\frown}{P'M}=\overset{\frown}{PM}$, 即 $Rt=r\varphi$, 由此得 $\angle LCP=\dfrac{R+r}{r}t=\left(\dfrac{R}{r}+1\right)t$. 令 $\dfrac{R}{r}=m$, 得 $\angle LCP=(m+1)t$;

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{CP})=180^\circ+(m+1)t.$$

$$\begin{aligned} x&=(R+r)\cos t+r\cos[180^\circ+(m+1)t]\\ &=(R+r)\cos t-r\cos(m+1)t,\\ y&=(R+r)\sin t+r\sin[180^\circ+(m+1)t]\\ &=(R+r)\sin t-r\sin(m+1)t. \end{aligned}$$

用 m 代替 $\dfrac{R}{r}$, 得 $\begin{cases} x=r[(m+1)\cos t-\cos(m+1)t] \\ y=r[(m+1)\sin t-\sin(m+1)t]. \end{cases}$ 其中 t 为参数, r 是动圆半径, m 是定圆与动圆的半径之比.

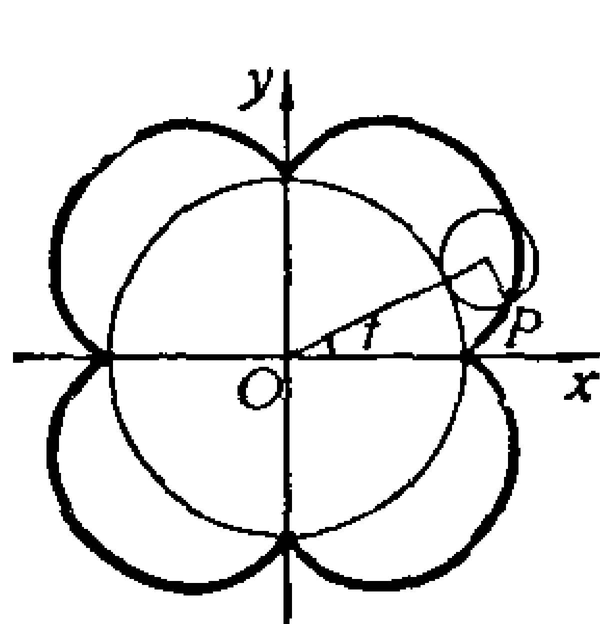
[说明] 当 m 是无理数时, 点 P 不可能返回初始位置 $(R, 0)$, 因而当动圆继续滚动时, 描出完全新的曲线, 并且也不会重复已经走过的路程. 实际上, 如果点 P 回到初始位置, 则说明定圆周长的某一整数倍(q 倍)和动圆周长的某一整数倍(p 倍)相等, 即 $2\pi R\cdot q=2\pi r\cdot p$, 得 $\dfrac{R}{r}=\dfrac{p}{q}$, 即 $m=$

$\frac{R}{r}$ 为有理数.

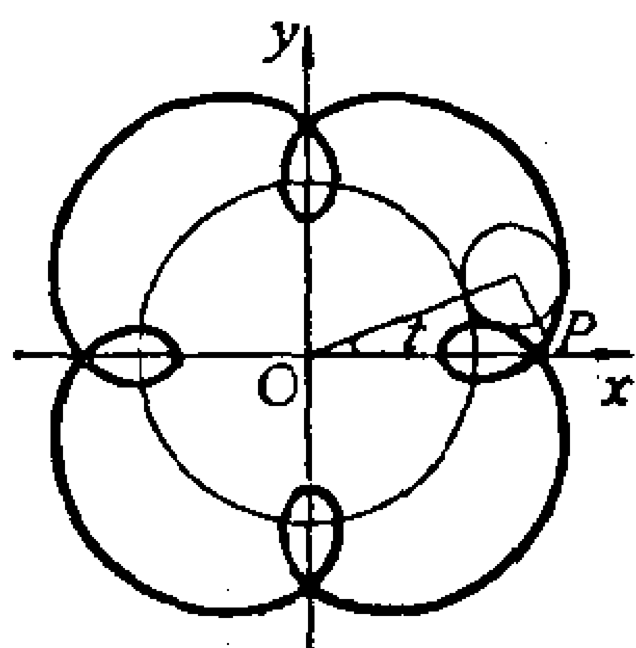
此轨迹称为圆外旋轮线或外摆线. 当 $m=1$ 时, 轨迹称为心脏线. 如点 P 在动圆的一半径上, 距动圆中心的距离为 λr, 当 $\lambda>1$ 时, 轨迹称为长幅外摆线; 当 $0<\lambda<1$ 时, 称为短幅外摆线, 统称为外次摆线, 其方程为

$$\begin{cases} x=r[(m+1)\cos t-\lambda\cos(m+1)t] \\ y=r[(m+1)\sin t-\lambda\sin(m+1)t]. \end{cases}$$

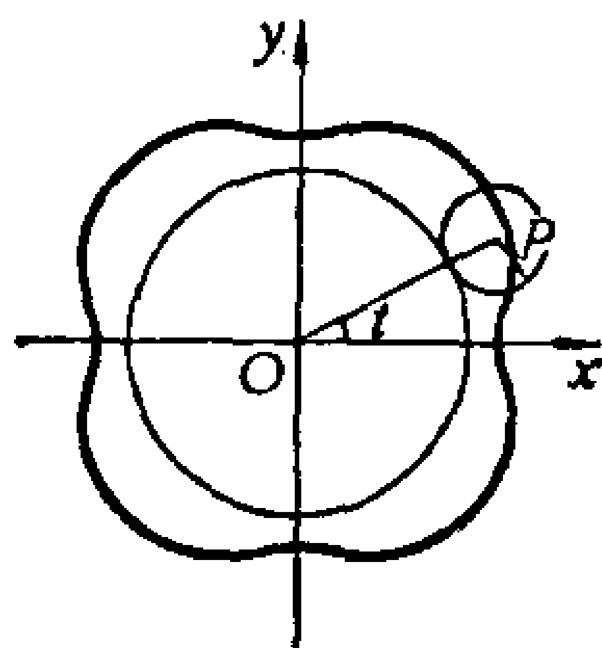
下列三图分别是当 $m=4$ 时的外摆线、长幅外摆线和短幅外摆线.



$(\lambda=1)$

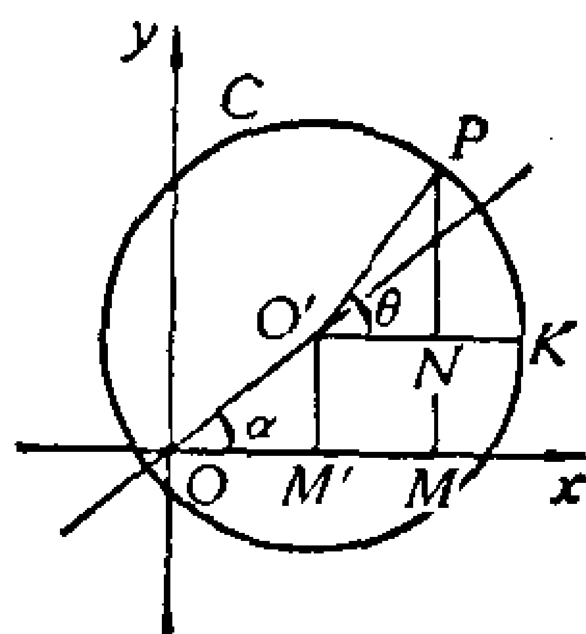


长幅 $(\lambda>1)$



短幅 $(\lambda<1)$

1176. 一半径为 r 的圆 C 的圆心, 在过原点 O 倾角为 α 的一条直线上运动, 圆 C 上一点 P 沿圆 C 作逆时针匀速圆周运动, 圆 C 中心的速率与 P 的速率相等, 当 C 的中心在坐标原点时, P 在 x 轴的正半轴上, 求点 P 的轨迹方程.



[解] 设圆 C 的中心在 $O'(x', y')$ 时, 点 P 坐标为 (x, y). 取 $\angle NO'P=\theta$ 为参数, $O'N$ 与圆 C 交于 K. 则 $|OO'|=\overset{\frown}{PK}=r\theta$, $\angle xOO'=\alpha$. $\because \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P}$, $\therefore x=(\overrightarrow{OP})_{Ox}=(\overrightarrow{OO'})_{Ox}+(\overrightarrow{O'P})_{Ox}=r\theta\cos\alpha+r\cos\theta$; $y=(\overrightarrow{OP})_{Oy}=(\overrightarrow{OO'})_{Oy}+(\overrightarrow{O'P})_{Oy}=r\theta\sin\alpha+r\sin\theta$. $\therefore$ 点 P 的轨迹方程是

$$\begin{cases} x=r(\theta\cos\alpha+\cos\theta) \\ y=r(\theta\sin\alpha+\sin\theta). \end{cases}$$

1177. 试证: 在同一坐标系中, 当外摆线的动圆半径 r 无限增大时, 外摆线的极限情况即其定圆的渐开线.

[分析] 只需将外摆线的参数方程看作曲线上动点的横坐标、纵坐标分别关于 r 的函数，然后验证当 r 无限增大时其极限就是渐开线方程.

[解] 外摆线的参数方程是:

$$\begin{cases} x=r[(m+1)\cos\theta-\cos(m+1)\theta]\cdots① \\ y=r[(m+1)\sin\theta-\sin(m+1)\theta]\cdots②. \end{cases}$$

其中 θ 为参数, $m=\dfrac{R}{r}$, R 为定圆半径, r 为动圆半径. 由 ① 得

$$\begin{aligned} x&=r\left[\left(\frac{R}{r}+1\right)\cos\theta-\cos\left(\frac{R}{r}+1\right)\theta\right] \\ &=R\cos\theta+r\left[\cos\theta-\cos\left(\frac{R}{r}+1\right)\theta\right] \\ &=R\cos\theta+2r\sin\left(\frac{R}{2r}+1\right)\theta\cdot\sin\frac{R}{2r}\theta \\ &=R\cos\theta+\frac{R\theta\sin\left(\frac{R}{2r}+1\right)\theta\cdot\sin\frac{R}{2r}\theta}{\frac{R}{2r}\theta}. \end{aligned}$$

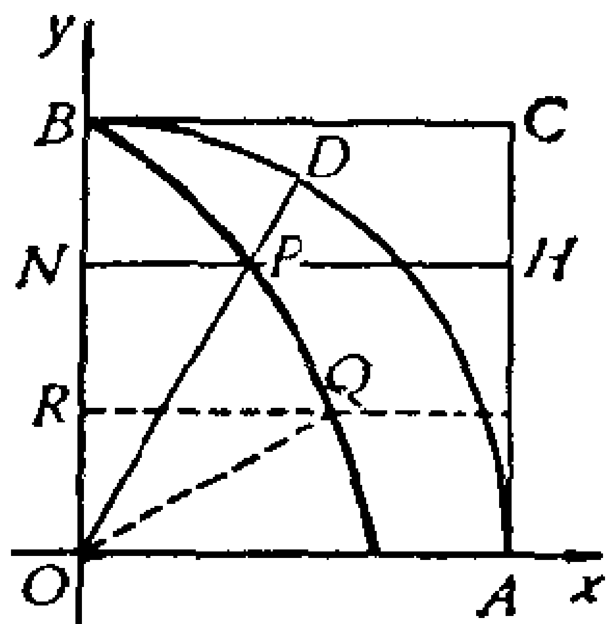
当 $r\to\infty$ 时, 则 $\dfrac{R}{2r}\theta\to0$, $\dfrac{\sin\frac{R}{2r}\theta}{\frac{R}{2r}\theta}\to1$, $x\to R(\cos\theta+\theta\sin\theta)$; 由 ② 得

$$\begin{aligned} y&=r\left[\left(\frac{R}{r}+1\right)\sin\theta-\sin\left(\frac{R}{r}+1\right)\theta\right] \\ &=R\sin\theta+r\left[\sin\theta-\sin\left(\frac{R}{r}+1\right)\theta\right] \\ &=R\sin\theta-2r\cos\left(\frac{R}{2r}+1\right)\theta\cdot\sin\left(\frac{R}{2r}\theta\right) \\ &=R\sin\theta-\frac{R\theta\cos\left(\frac{R}{2r}+1\right)\theta\cdot\sin\frac{R}{2r}\theta}{\frac{R}{2r}\theta}. \end{aligned}$$

当 $r\to\infty$ 时, $y\to R(\sin\theta-\theta\cos\theta)$. 所以, 当动圆半径 $r\to\infty$ 时, 外摆线的极限情况是圆的渐开线:

$$\begin{cases} x=R(\cos\theta+\theta\sin\theta) \\ y=R(\sin\theta-\theta\cos\theta) \end{cases} \quad (\theta\text{ 为参数}).$$

1178. 圆 O 的一直角扇形 OAB，一半径自初始位置 OA 绕 O 作匀角速旋转到半径 OB 位置，与另一半径自初始位置 OA 作匀速平移到过点 B 的切线位置，所需时间相等，求此两动半径交点的轨迹方程.



［分析］ 因两动半径均自 OA 出发，分别同时到达 OB、BC. 设一动半径自 OA 旋转到 OB 共用 T 秒，从运动开始经过 t 秒后两动半径分别运动到 OD 与 NH 的位置，相交于点 P. 则 $ON=\frac{OB}{T}t$，$\overparen{AD}=\frac{\overparen{AB}}{T}t$，故 $ON:OB=\overparen{AD}:\overparen{AB}$，从此可求 $\angle AOP$ 与轨迹方程.

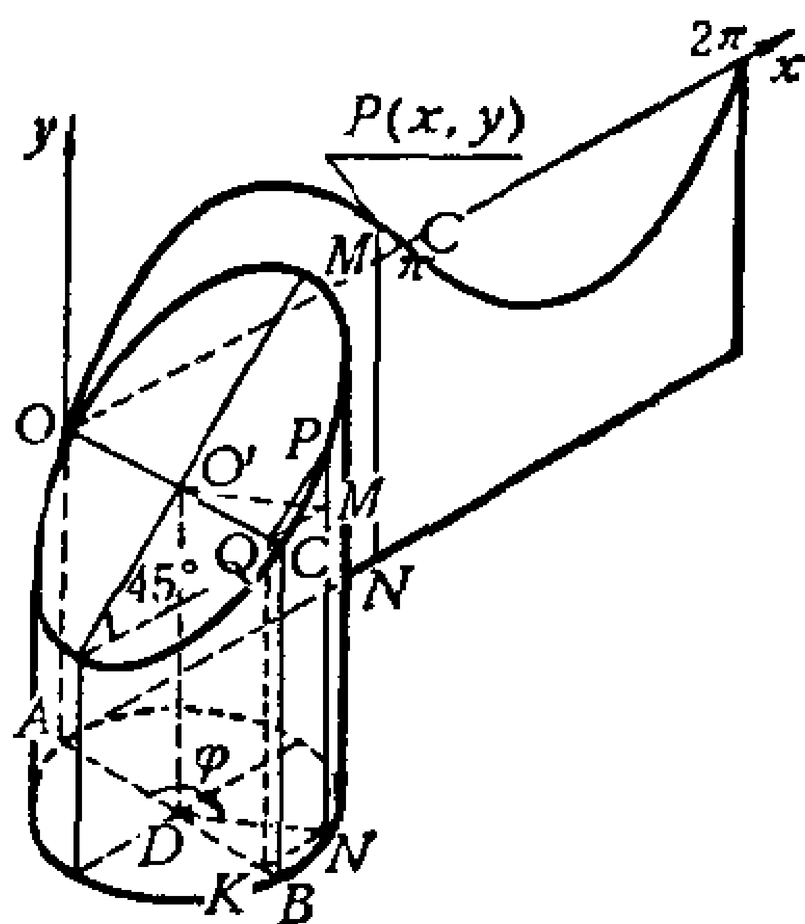
［解一］ 取 O 为原点，OA 所在直线为 x 轴，建立坐标系. 设 $P(x, y)$ 为轨迹上任意一点，$\because ON:OB=\overparen{AD}:\overparen{AB}$，令 $|OA|=|OB|=a$，则 $\overparen{AD}=\frac{\pi a|ON|}{2|OB|}=\frac{\pi y}{2}$，$\angle AOP=\frac{\overparen{AD}}{a}=\frac{\pi y}{2a}$. $\therefore y=x\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2a}(0\leqslant y<a)$. 此即轨迹的直角坐标方程.

［解二］ 取 O 为极点，OA 为极轴，建立极坐标系，设 $P(\rho, \theta)$ 为轨迹上任意一点，$\because ON:OB=\overparen{AD}:\overparen{AB}$，$ON=\rho\sin\theta$，$\overparen{AD}=a\theta$，$|OB|=a$，$\overparen{AB}=\frac{\pi}{2}a$，$\therefore \frac{\rho\sin\theta}{a}=\frac{a\theta}{\frac{\pi}{2}a}$，$\therefore \rho=\frac{2a\theta}{\pi\sin\theta}$，$\theta\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

［说明］ 此轨迹称为圆积线，为古希腊的希庇亚斯(Hippias)所发现，可用此曲线解决化圆为方和 n 等分任意角问题. 设已知圆半径为 a，则圆周长 $c=2\pi a$，圆面积为 $A=\pi a^2$，$\therefore A=\frac{1}{2}ca$. 从圆积线方程 $y=x\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2a}$，求其在 x 轴上的截距 $OE=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2a}}=\frac{2a}{\pi}$，$\therefore 2a=\pi\cdot OE=\frac{c}{2a}\cdot OE$，即 $\frac{OE}{2a}=\frac{2a}{c}$. 故 c 为 OE、$2a$、$2a$ 的第四比例项，可作出. 再设与圆等积的正方形边长为 l，$\because l^2=\frac{1}{2}ca$，即 l 为 $\frac{1}{2}c$ 与 a 的比例中项，故也可作出. 如以 O 为顶点、OA 为始边作已知角 α，终边 OP 交圆积线于点 P，过 P 作 OA 的平行线交 OB 于点 N，n 等分 ON，使 $|OR|=\frac{1}{n}|ON|$，过 R 作

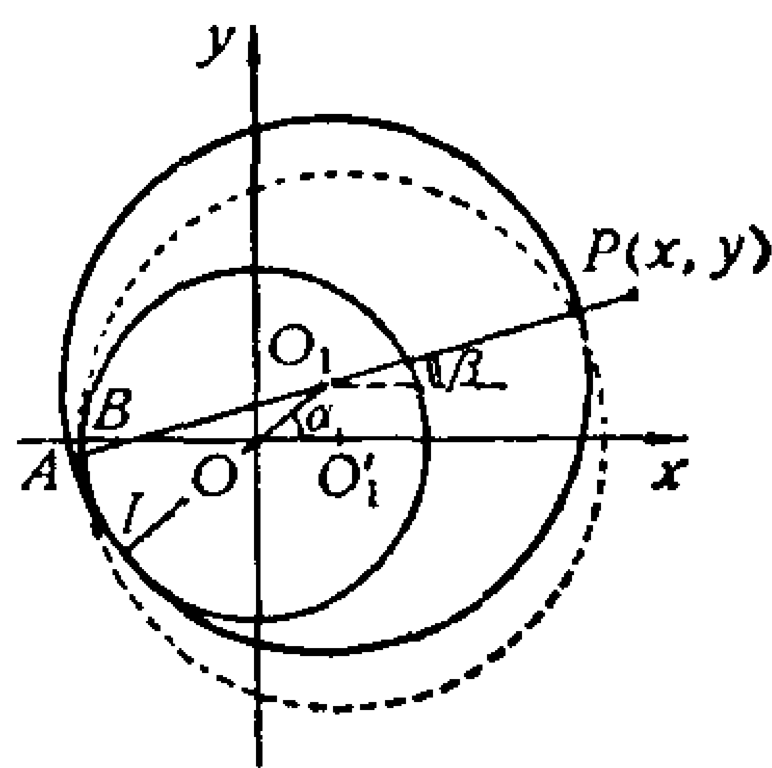
OA 的平行线交圆积线于点 Q，令 $\angle AOQ=\varphi$，$\because \dfrac{\alpha}{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{ON}{a}$，$\dfrac{\varphi}{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{OR}{a}$，$\therefore \dfrac{\alpha}{\varphi}=\dfrac{ON}{OR}=n$，即 $\varphi=\dfrac{1}{n}\alpha$。

1179. 一直圆柱被一与水平面成 45° 角的平面所截，沿一母线将其剪开展平. 试证截口展平所得曲线为正弦曲线.



［证］ 将圆柱沿母线 OA 剪开展平，取 O 为原点，截口椭圆展平后短轴 OC 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系如图. 取圆柱半径为单位长度. 设圆柱截口曲线上任一点为 $P(x,y)$，P 在底面上射影为 N，OC 在底面上的射影为 AB，O'、D 分别为 OC、AB 的中点，在 PN 上自 N 起取 $NM=O'D$，连结 $O'M$ 及 DN，则 $\angle ADN=\angle OO'M=\varphi$. 自 N 在底面内作 $NK\perp AB$，自 M 作 $MQ\parallel NK$ 交 OC 于 Q，连 PQ，则 $PQ\perp OC$，$\angle PQM=45°$. $\therefore MP=QM=\sin\varphi$. 由此得 $x=OM=\overset{\frown}{AN}=\varphi$，$y=MP=\sin\varphi$. 消去参数 φ，即得截口展平后所得曲线为正弦曲线 $y=\sin x$.

1180. 动圆 O_1 与定圆 O 相内切，圆 O 在圆 O_1 内，动圆半径 r 与定圆半径 k 的比为 $3:2$，P 为圆 O_1 的定半径(或其延长线)上的一点，且 $|O_1P|=R$ (定值). 求当圆 O_1 与圆 O 内切滚动时，点 P 的轨迹方程.



［分析］ 因为 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1P}$，故只要求出 $(\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{OO_1})$ 和 $(\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{O_1P})$，本题即可解决. 而这两个角可以从 $\overset{\frown}{AI}=\overset{\frown}{BI}$ 中求得.

［解］ 取定圆 O 的圆心 O 为原点，以 O 与圆 O_1 的初始位置的圆心 O_1' 的连线为 x 轴，建立直角坐标系. 此时，圆 O_1' 与圆 O 相切于点 B，O_1' 与点 P 连线与 x 轴重合. 当动圆 O_1 的中心 O_1 绕着 O 滚动转过 $\angle xOO_1=\alpha$ 时，原来圆 O_1' 上 B 点随着滚动到达圆 O_1 上的 A 点. 设圆 O_1

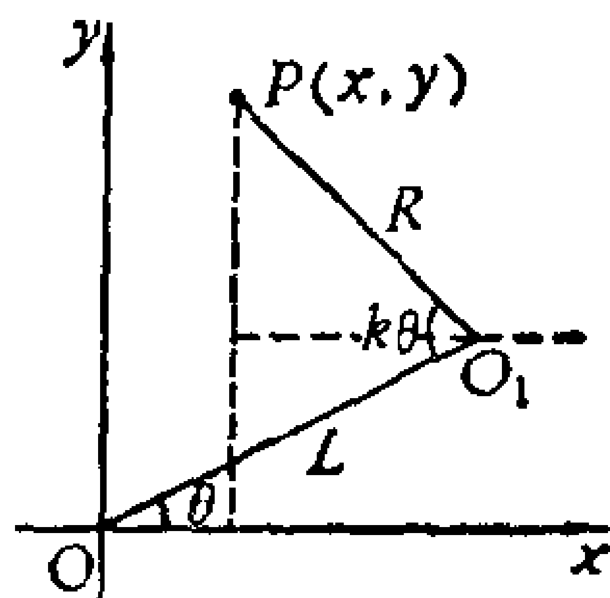
与圆 O 相切于 I, 并设 $\overline{AO_1P}$ 与 Ox 的夹角为 β, $\angle AO_1I=\theta$, $|OO_1|=e$, $P(x, y)$为轨迹上任意一点. $\because$ 动圆与定圆半径之比: $r:k=3:2$, 又 $\because$ $\widehat{AI}$(圆 O_1)$=\widehat{BI}$(圆 O), $\therefore k\alpha=r\theta$, $\theta=\frac{2}{3}\alpha$, $\beta=\alpha-\theta=\frac{1}{3}\alpha$. $\because \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1P}$, $\therefore (\overrightarrow{OP})_{Ox}=(\overrightarrow{OO_1})_{Ox}+(\overrightarrow{O_1P})_{Ox}$, $(\overrightarrow{OP})_{Oy}=(\overrightarrow{OO_1})_{Oy}+(\overrightarrow{O_1P})_{Oy}$.

$$\therefore \begin{cases} x=e\cos\alpha+R\cos\frac{\alpha}{3} \\ y=e\sin\alpha+R\sin\frac{\alpha}{3}. \end{cases}$$

其中 α 为参数,此即点 P 轨迹的参数方程.

[说明] 此轨迹是三角活塞转子发动机的气缸的缸体理论型曲线.

1181. 点 O_1 绕定点 O 作逆时针方向匀角速 ω 旋转, 点 P 绕 O_1 作顺时针方向匀角速 $k\omega$ 旋转 (k 为常数). 且 $|O_1P|=R$, $|OO_1|=L$, $0<R<L$, 而 $L-R\ll R$. 试求点 P 的轨迹方程.



[解] 以点 P 在 O、O_1 的连线上时为起始位置. 取定点 O 为原点, O 与 O_1 的起始位置的连线为 x 轴,建立直角坐标系. 经过 t 秒后,点 $P(x, y)$运动到如图所示位置. 令$\angle xOO_1=\theta$ 为参数,则 $\theta=\omega t$, $\angle PO_1O=k\omega t=k\theta$, $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{O_1P})=\pi-(k-1)\theta$. $\because \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1P}$,

$$\therefore \begin{cases} x=(\overrightarrow{OP})_{Ox}=(\overrightarrow{OO_1})_{Ox}+(\overrightarrow{O_1P})_{Ox}=L\cos\theta+R\cos[\pi-(k-1)\theta] \\ \quad =L\cos\theta-R\cos(k-1)\theta, \\ y=(\overrightarrow{OP})_{Oy}=(\overrightarrow{OO_1})_{Oy}+(\overrightarrow{O_1P})_{Oy}=L\sin\theta+R\sin[\pi-(k-1)\theta] \\ \quad =L\sin\theta+R(k-1)\sin\theta. \end{cases}$$

此即点 P 轨迹的参数方程.

[说明] 本题是车床切削正多边形零件的数学原理. 可根据需要选用不同的 k 的值. 如 $k=2$ 时, 轨迹为 $\begin{cases} x=(L-R)\cos\theta \\ y=(L+R)\sin\theta, \end{cases}$ 即椭圆 $\frac{x^2}{(L-R)^2}+\frac{y^2}{(L+R)^2}=1$. 显然 $L-R$ 更比 $L+R$ 小得多,故可用以加工正方形零件. 一般情况下,轨迹为摆线族.

§3. 螺　线

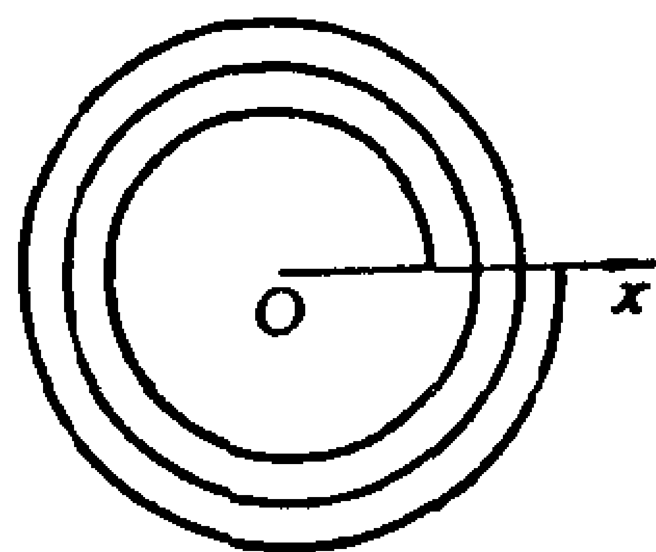
1182. 当 θ 按公差为 2 的等差数列增大时，阿基米德螺线 $\rho=k\theta$ 的极径按公差为 3 的等差数列增大，求 k.

［解］ 由条件可得 $\rho=k\theta\cdots$①，$\rho+3=k(\theta+2)\cdots$②. ①代入②，得 $k\theta+3=k(\theta+2)$. $\therefore k=\frac{3}{2}$.

1183. 在对数螺线 $\rho=2^{\theta}$ 中所有的极径都增加两倍，要使它与原先的螺线相合，应当将它以怎样的角旋转？

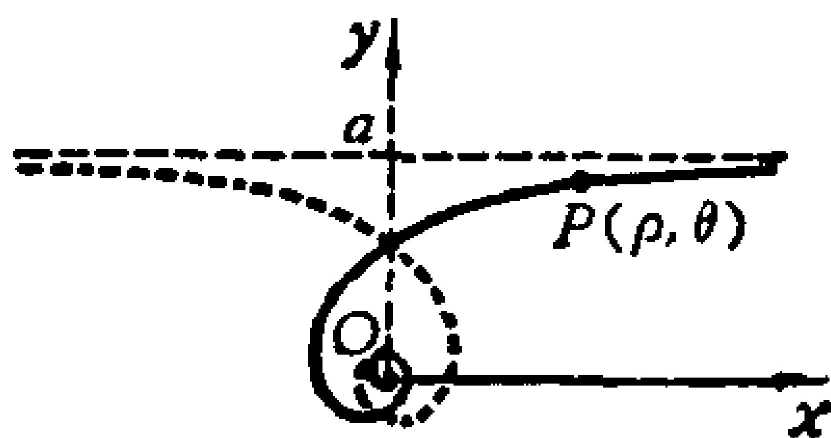
［解］ 对数螺线 $\rho=2^{\theta}$ 的极径增加两倍后，所得的螺线方程为 $\rho=3\cdot2^{\theta}$. 设将所得的螺线按逆时针旋转 α 角以后，能与螺线 $\rho=2^{\theta}$ 重合，则有 $2^{\theta}=3\cdot2^{\theta-\alpha}$. $\therefore 2^{\alpha}=3$, $\alpha=\log_2 3$.

1184. 等速螺线共有三圈，螺线上距中心最近距离为 20 cm，最远距离为 35 cm，求螺线的方程.



［解］ 取中心为极点，以中心与螺线上距中心最近点的连线为极轴，建立极坐标系.

设等速螺线方程为 $\rho=\rho_0+a\theta$，由已知 $\rho_0=20$（以 1 cm 为单位长）. 若等速螺线按逆时针旋转，则当 $\theta=6\pi$ 时，$\rho=35$. 即 $35=20+a\cdot6\pi$，解得 $a=\frac{5}{2\pi}$. 这时等速螺线方程为 $\rho=20+\frac{5}{2\pi}\theta(0\leqslant\theta\leqslant6\pi)$；若等速螺线按顺时针旋转，则当 $\theta=-6\pi$ 时，$\rho=35$. 即 $35=20-a\cdot6\pi$，解得 $a=-\frac{5}{2\pi}$. 这时等速螺线方程为 $\rho=20-\frac{5}{2\pi}\theta(-6\pi\leqslant\theta\leqslant0)$.



1185. 动点的极径与极角成反比例，求动点的轨迹方程.

［解］ 设 $P(\rho,\ \theta)$ 为轨迹上任意一点，a 为反比例系数($a\neq 0$)，则 $\rho\theta=a$ 为所求轨迹方程.

［说明］ 此轨迹称双曲螺线或倒数螺线.

1186. 设 x 轴截圆 $x^2+y^2=a^2$ 于点 $C(a,\ 0)\ (a>0)$，在圆周上取一弧 CB 使其长等于抛物线 $y^2=4cx$ 上一点 $(x_0,\ y_0)$ 的横坐标 x_0. 延长半径 OB 至 P，使 $BP=y_0$. 试求点 P 的轨迹方程.

［解］ 设 P 为轨迹上任意一点，其极坐标为 $(\rho,\ \theta)$，则 $\rho=a+y_0\cdots$①，$\theta=\dfrac{x_0}{a}\cdots$②；又 $y_0^2=4cx_0\cdots$③. 从①、②、③消去参数 x_0、y_0，得

$$(\rho-a)^2=4ac\theta.$$

［说明］ 此轨迹称为抛物螺线(图 2).

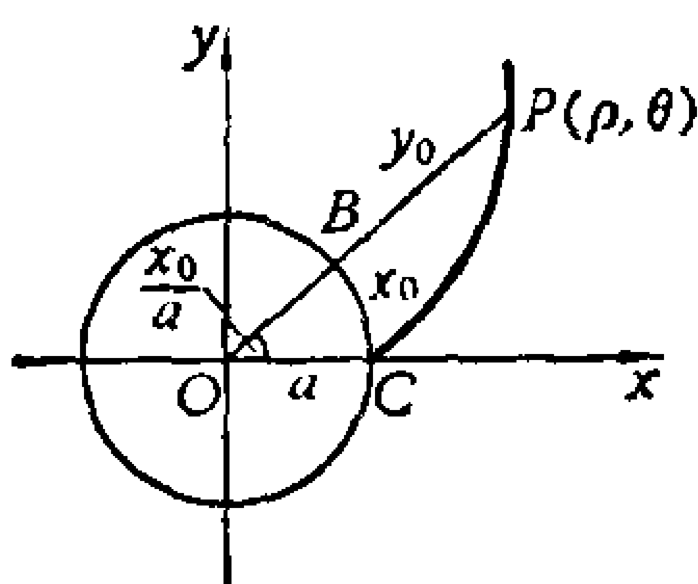


图 1

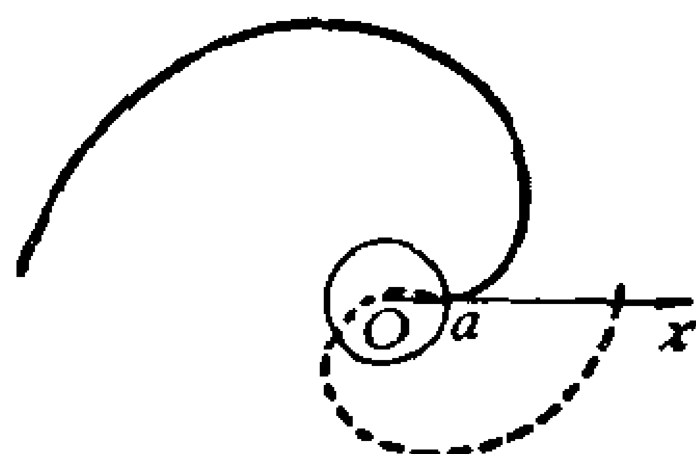
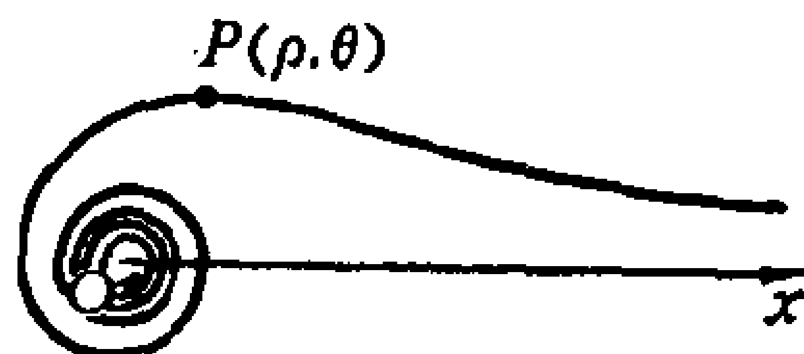


图 2

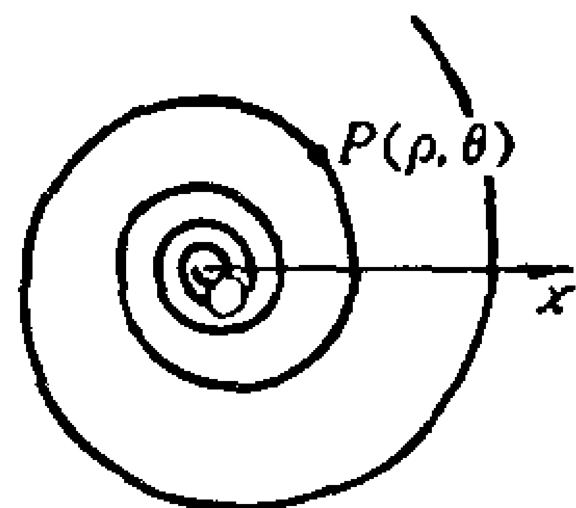
1187. 设动点的极径的平方与极角成反比例，求此动点的轨迹方程.



［解］ 设 $P(\rho,\ \theta)$ 为动点坐标，a^2 为反比例系数($a>0$)，则 $\rho^2\theta=a^2$ 或 $\rho=\dfrac{a}{\sqrt{\theta}}$ 即为所求之轨迹方程.

［说明］ 此轨迹称为连锁螺线.

1188. 设动点的极径的自然对数与极角成正比例，求此动点的轨迹方程.



［解］ 设 $P(\rho,\ \theta)$ 为轨迹上任意一点，a 为正比

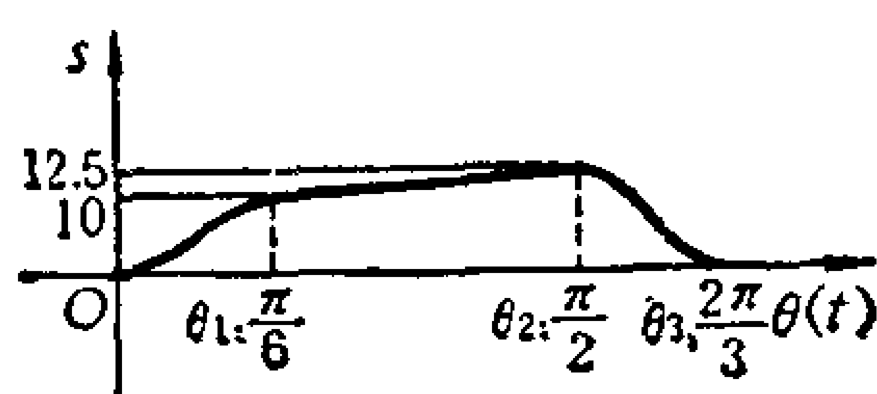
例系数，则 $\ln\rho=a\theta$ 即为所求的轨迹方程.

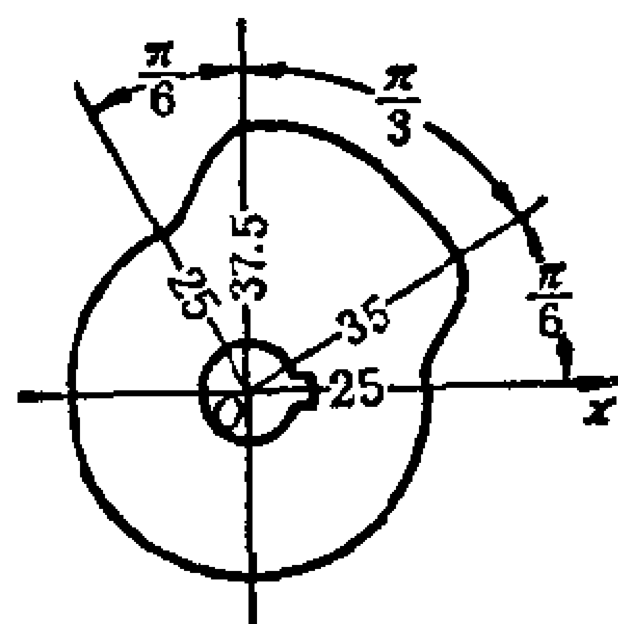
［说明］ 此轨迹称为对数螺线.

1189. 一对心尖端移动推杆凸轮机构，凸轮按图面顺时针作匀角速旋转，凸轮基圆半径 $\rho_0=25\,\text{mm}$，推杆运动规律如下：

凸轮转角 θ	$0\to\frac{\theta_1}{2},\frac{\theta_1}{2}\to\theta_1$	$\theta_1\to\theta_2$	$\theta_2\to\frac{\theta_2+\theta_3}{2},\frac{\theta_2+\theta_3}{2}\to\theta_3$	$\theta_3\to2\pi$
推杆移动	等加/减速上升 H	等速上升 h	等加/减速下降 $H+h$	停　留

其中 $\theta_1=\frac{\pi}{6}$, $\theta_2=\frac{\pi}{2}$, $\theta_3=\frac{2\pi}{3}$, $H=10\,\text{mm}$, $h=2.5\,\text{mm}$. 试求凸轮曲线的极坐标方程.





［分析］ 当凸轮以角速度 ω 旋转时，从动杆的顶尖，一面（随凸轮表面上的点到旋转中心的距离变化）在凸轮半径方向上移动，一面又在凸轮轮廓表面上滑动，故凸轮曲线就是当凸轮旋转时，从动杆端点按照一定的运动规律在凸轮上画出的轨迹线. 若将凸轮看作不动，而从动杆以角速度 $-\omega$ 绕凸轮转动，同时又按一定规律作径向移动，则从动杆端点的轨迹，就是凸轮曲线. 故利用匀变速直线运动方程 $s=s_0+\frac{1}{2}at^2\left(t=\frac{\theta}{\omega}\right)$，取 $p=\frac{a}{2\omega^2}$，即 $s=s_0+p\theta^2$，就可求出凸轮曲线的极坐标方程.

［解］ 当 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{12}\right]$时，从动杆径向位移：$s=p_1\theta^2$（初速为零的匀加速运动）；当 $\theta=\frac{\pi}{12}$ 时，$s=\frac{H}{2}=5$；$\therefore 5=p_1\left(\frac{\pi}{12}\right)^2$，$p_1=\frac{720}{\pi^2}$，故 $s=\frac{720}{\pi^2}\theta^2$.

当 $\theta\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$时，$s=H-p_1'\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)^2$（匀减速上升运动）；$\theta=\frac{\pi}{12}$时，

$$s=\frac{H}{2}=5;\quad \therefore\quad \frac{H}{2}=H-p_1'\left(\frac{\theta_1}{2}-\theta_1\right)^2,\quad p_1'=\frac{2H}{\theta_1^2}=\frac{720}{\pi^2},$$

$$\therefore\quad s=10-\frac{720}{\pi^2}\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)^2.$$

当$\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$时，$s=H+p(\theta-\theta_1)$（匀速运动）；$\theta=\theta_2=\frac{\pi}{2}$时，$s=H+h$，

$\therefore p=\frac{h}{\theta_2-\theta_1}=\frac{7.5}{\pi}$，故$s=H+\frac{h}{\theta_2-\theta_1}(\theta-\theta_1)$，即

$$s=10+\frac{7.5}{\pi}\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right).$$

当$\theta\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{12}\right]$时，$s=H+h-p_2(\theta-\theta_2)^2$（匀加速下降运动）；$\theta=\frac{7\pi}{12}$时，

$$s=\frac{1}{2}(H+h)=6.25,\ p_2=\frac{H+h}{2(\theta-\theta_2)^2}=\frac{900}{\pi^2},$$

故
$$s=12.5-\frac{900}{\pi^2}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

当$\theta\in\left[\frac{7\pi}{12},\frac{2\pi}{3}\right]$时，$s=p_2'(\theta-\theta_3)^2$（可看作从$\theta=\frac{2\pi}{3}$反过来到$\theta=\frac{7\pi}{12}$的匀减速运动）；$\theta=\frac{1}{2}(\theta_2+\theta_3)=\frac{7\pi}{12}$时，

$$s=\frac{1}{2}(H+h),\quad \therefore\quad p_2'=\frac{H+h}{2(\theta-\theta_2)^2}=\frac{900}{\pi^2},$$

故
$$s=\frac{900}{\pi^2}\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)^2.$$

当$\theta\in\left[\frac{2\pi}{3},2\pi\right]$时，$s=0$. 从此可得凸轮曲线的极坐标方程：

$$\rho=\begin{cases}25+\frac{720}{\pi^2}\theta^2, & \theta\in\left[0,\frac{\pi}{12}\right]\\ 35-\frac{720}{\pi^2}\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)^2, & \theta\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]\\ 35+\frac{7.5}{\pi}\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right), & \theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]\\ 37.5-\frac{900}{\pi^2}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)^2, & \theta\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{12}\right]\\ 25+\frac{900}{\pi^2}\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)^2, & \theta\in\left[\frac{7\pi}{12},\frac{2\pi}{3}\right]\\ 25, & \theta\in\left[\frac{2\pi}{3},2\pi\right].\end{cases}$$

§4. 复平面上点的轨迹

1190. 设 $z=\frac{1}{(1+i\omega T)}$ 为复平面上的点，其中 T 为正的常数，$\omega\in(0,+\infty)$. 求点 z 的轨迹.

[分析一]　求点 z 的轨迹，实质即求复数 z 的实部 x 与虚部 y 之间的关系式.

[解一]　设 $z=x+yi$,

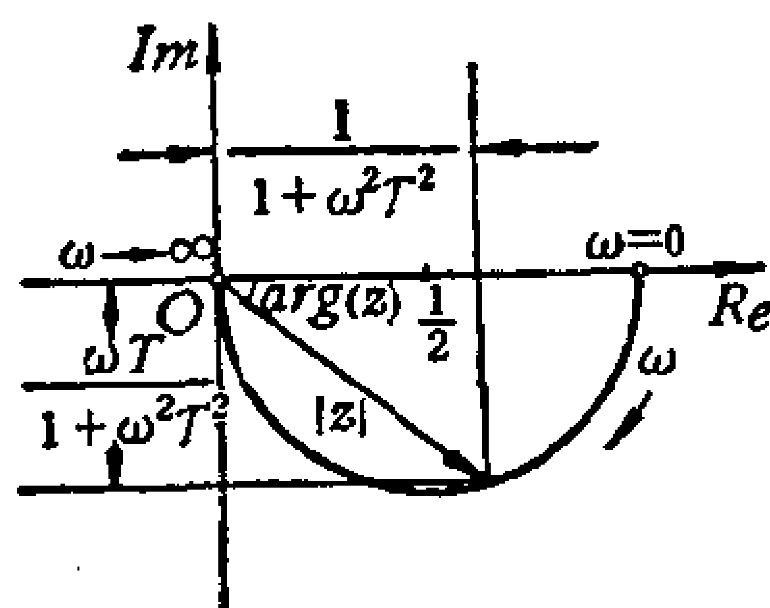
$$\because\quad z=\frac{1}{1+i\omega T}=\frac{1-i\omega T}{1+\omega^2T^2}=\frac{1}{1+\omega^2T^2}-\frac{\omega T}{1+\omega^2T^2}i,$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{1+\omega^2T^2}\cdots①,\qquad y=\frac{-\omega T}{1+\omega^2T^2}\cdots②.$$

$\because\omega\in(0,+\infty)$, $\therefore y<0$. 从①、②消去参数 ω，得

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left[\frac{1-\omega^2T^2}{2(1+\omega^2T^2)}\right]^2+\left[\frac{-\omega T}{1+\omega^2T^2}\right]^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2,\ (y<0).$$

$\therefore$ 点 z 的轨迹是以 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 为中心，$\frac{1}{2}$ 为半径的下半圆.



[分析二]　求 z 的模 ρ 与幅角 θ 之间的关系式，即得点 z 轨迹的极坐标方程.

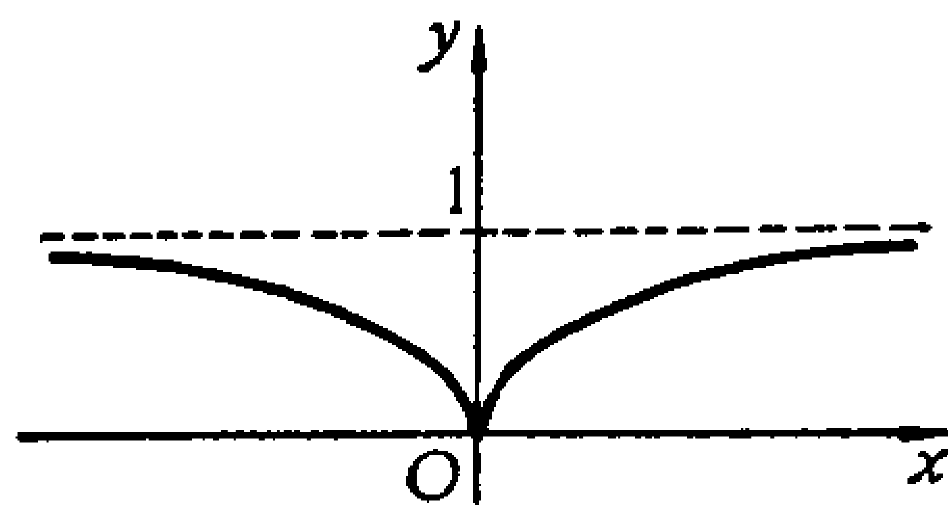
[解二]　设 $z=\rho e^{i\theta}$，则 $\rho=|z|=\left|\frac{1}{1+i\omega T}\right|=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\cdots①$, $\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}[\arg(z)]=-\omega T\cdots②$. 以②代入①，消去 ω 得 $\rho=\frac{1}{\sec\theta}=\cos\theta$. 由于 $\omega\in(0,+\infty)$，故 $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$. 点 z 的轨迹同[解一].

[说明]　(1) 本题来源于工程控制理论求正弦传递函数的一阶因子 $(1+i\omega T)^{-1}$ 的极坐标图.

(2) 求复平面上点的轨迹，一般都可利用复数线性式或三角函数式及复数相等的概念，先求轨迹的参数方程，然后消去参数得解. 有时也可利

用 z 与常数 z_0 的差的模为定值得解. 如本题中易证 $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$, 即可得点 z 的轨迹.

1191. 设 w、z 为复数, w 的方程 $w^2+z\cdot w+zi=0$ 恒有实根 α (α 为实参数), 试求点 z 的轨迹.

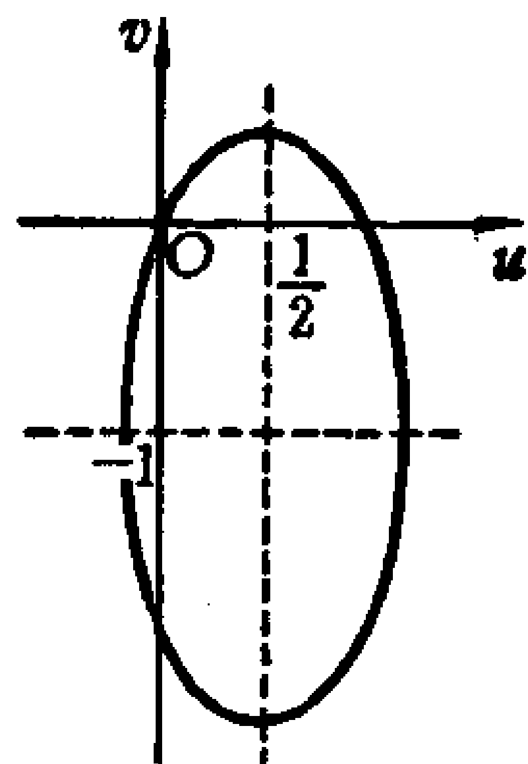


[分析] 根据方程的根的概念和复数相等的定义, 可得含点 z 的坐标 x、y 和 α 的两个方程, 消去参数 α 即得解.

[解] 因 w 的方程 $w^2+z\cdot w+zi=0$ 恒有实根 α, 故 $\alpha^2+\alpha z+zi=0\cdots$①, 令 $z=x+yi$(x、y 为实数)代入①, 得 $(\alpha^2+\alpha x-y)+i(y\alpha+x)=0$, $\therefore \begin{cases}\alpha^2+\alpha x-y=0\cdots②,\\ y\alpha+x=0\cdots③.\end{cases}$ 从②、③中消去参数 α: 当 $y=0$ 时, 得 $x=0$, $\alpha=0$, 即轨迹过原点; 当 $y\neq0$ 时, $\alpha=-\frac{x}{y}$, 代入②: $\left(-\frac{x}{y}\right)^2+\left(-\frac{x}{y}\right)x-y=0$, 即 $x^2=\frac{y^3}{(1-y)}$. 轨迹称为蔓叶线(如图).

[说明] 这类轨迹题, 对动点的制约条件, 蕴含于复数概念和方程的理论之中. 以求轨迹方程的参数法则为指导, 将制约条件转化为方程, 消去参数即可得解.

1192. 设二次方程 $x^2+(2+i)x+4uv+(2u-v)i=0$(u、v 为实数)有实根. 求点 (u, v) 的轨迹.



[分析] 利用方程有实根, 及一复数等于零时其实部和虚部均为零, 即可求得 u、v 间的关系.

[解] 设方程 $x^2+(2+i)x+4uv+(2u-v)i=0$ 的实根为 α, 则 $\alpha^2+(2+i)\alpha+4uv+(2u-v)i=0$, 即 $\alpha^2+2\alpha+4uv+(\alpha+2u-v)i=0$, $\therefore \alpha^2+2\alpha+4uv=0\cdots$①; $\alpha+2u-v=0$, 即 $\alpha=v-2u\cdots$②. ②代入①, 得 $4u^2+v^2-4u+2v=0$, 即 $\frac{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}+\frac{(v+1)^2}{(\sqrt{2})^2}=1$. 故所求的轨迹为椭圆.

1193. 设复平面上的点 z 在单位圆上运动，试求点 $w=z(z+1)$ 的轨迹方程.

［分析］ 由于 z 在单位圆上，故其实部和虚部间具有一定的关系，从而利用 w 和 z 的关系即可求得 w 的实部和虚部之间的关系式.

［解］ 设 $z=\cos\theta+i\sin\theta$, $w=x+yi$. 则

$$x+yi=z^2+z=(\cos 2\theta+\cos\theta)+i(\sin 2\theta+\sin\theta),$$

$$\therefore\ \begin{cases} x=\cos\theta+\cos 2\theta\cdots① \\ y=\sin\theta+\sin 2\theta\cdots②. \end{cases}$$

$①^2+②^2$, 得 $x^2+y^2=2+2\cos\theta$, $\therefore \cos\theta=\frac{1}{2}(x^2+y^2-2)$. 代入 ①, 得

$$x=\frac{1}{2}(x^2+y^2-2)+\frac{1}{2}(x^2+y^2-2)^2-1,$$

即

$$(x^2+y^2-2)^2+(x^2+y^2-2x-4)=0.$$

由 ① 得 $-\frac{9}{8}\leqslant x\leqslant 2$, 故其轨迹为蜗线的一段.

1194. 已知复数 z 的模为 r, 幅角为 θ, 且复数 $w=z+\frac{1}{z}$. (1)当 θ 固定 $\left(\theta\neq\frac{n\pi}{2},\ n\in J\right)$, r 在 $(0,\ +\infty)$ 上变动时，求复数 w 在复平面上的轨迹; (2)当 r 固定 $(r\neq 1)$, θ 在 $[0,\ 2\pi]$ 内变化时，求复数 w 在复平面上的轨迹.

［分析］ 由于 w 和 z 具有一定的关系，故 w 的实部和虚部分别都可用 r、θ 表示. 于是视 r 为参数，并消去它，即可得(1)中所要求的轨迹; 视 θ 为参数，并消去它，即可得(2)中所要求的轨迹.

［解］ 设 $w=x+iy$, $(x,\ y\in R)$, 则

$$x+iy=z+\frac{1}{z}=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

$$=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta.$$

$$\therefore\ \begin{cases} x=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta\cdots① \\ y=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta\cdots②. \end{cases}$$

(1) 当θ固定时，$\because \theta\neq\frac{n\pi}{2}$，$\therefore \sin\theta\neq 0$，$\cos\theta\neq 0$.

$$\frac{x^2}{\cos^2\theta}=r^2+\frac{1}{r^2}+2\cdots③,$$

$$\frac{y^2}{\sin^2\theta}=r^2+\frac{1}{r^2}-2\cdots④.$$

③$-$④，得 $\frac{x^2}{4\cos^2\theta}-\frac{y^2}{4\sin^2\theta}=1$. 所求轨迹是双曲线.

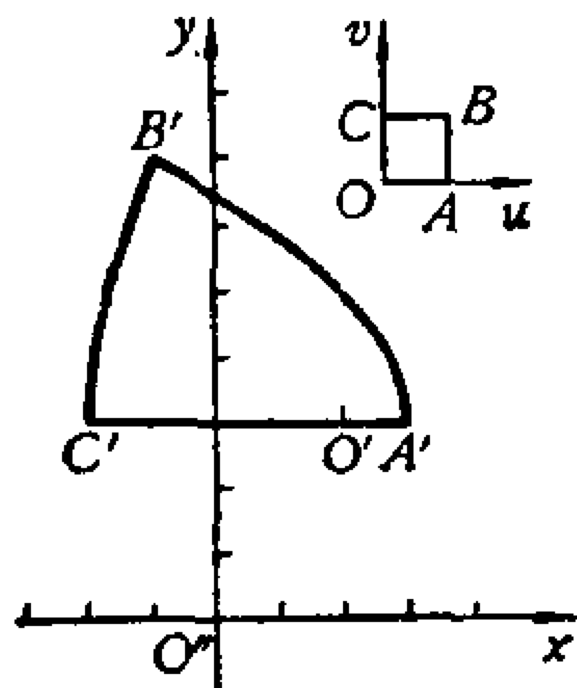
(2) 当r固定时，

由①得
$$\frac{x}{r+\frac{1}{r}}=\cos\theta\cdots⑤,$$

由②得
$$\frac{y}{r-\frac{1}{r}}=\sin\theta\cdots⑥.$$

⑤^2+⑥^2，消去θ得 $\frac{x^2}{\left(r+\frac{1}{r}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}=1$. 所求轨迹是椭圆.

1195. 坐标平面内点$Q(u, v)$在顶点为$O(0, 0)$、$A(1, 0)$、$B(1, 1)$、$C(0, 1)$的正方形周界上移动. 当$P(x, y)$满足$x+yi=(u+2vi)^2+2+3i$时$(x, y\in R)$，求点$P(x, y)$的轨迹，并画出轨迹的图形.



[分析] 根据条件，将x、y表示成u、v的代数式后，再根据点Q在已知正方形的各边上移动，分别消去参数即得其轨迹方程.

[解] $\because x+yi=(u^2-4v^2+2)+(4uv+3)i$,

$$\therefore \begin{cases} x=u^2-4v^2+2 \\ y=4uv+3. \end{cases}$$

当$Q(u, v)$在线段OA上移动时，$v=0$且$0\leqslant u\leqslant 1$. 这时，$2\leqslant x=u^2+2\leqslant 3$且$y=3$. $\therefore P(x, y)$在线段$O'A'$上移动. 当Q在线段AB上移动时，$u=1$且$0\leqslant v\leqslant 1$. 这时，$x=3-4v^2$且$y=4v+3$，消去v得$(y-3)^2=-4(x-3)$，其中$-1\leqslant x\leqslant 3$且$3\leqslant y\leqslant 7$. $\therefore$点P在抛物线弧$A'B'$上移动. 当Q在线段BC上移动时，$v=1$且$0\leqslant u\leqslant 1$. 这时，$x=u^2-2$且$y=4u+3$，消

去 u 得 $(y-3)^2=16(x+2)$，其中 $-2\leqslant x\leqslant -1$ 且 $3\leqslant y\leqslant 7$. $\therefore$ 点 P 在抛物线弧 $B'C'$ 上移动. 当 Q 在线段 CO 上移动时，$u=0$ 且 $0\leqslant v\leqslant 1$. 这时，$-2\leqslant x=2-4v^2\leqslant 2$ 且 $y=3$. $\therefore P$ 在线段 $C'O'$ 上移动.

综上所述，点 P 轨迹由抛物线弧 $A'B'$ 与 $B'C'$ 和直线段 $C'O'A'$ 组成.

§5. 最大值、最小值

1196. 点 $P(x, y)$ 在曲线 $x^2y-x^2+4xy+6y-2x-3=0$ 上运动，求点 P 在最高点和最低点时的坐标.

[分析] 在曲线 $x^2y-x^2+4xy+6y-2x-3=0$ 中确定 y 的取值范围，求得 y 的最大值、最小值，就是曲线的最高点和最低点的纵坐标.

[解] 把 $x^2y-x^2+4xy+6y-2x-3=0$ 整理成关于 x 的二次方程 $x^2(y-1)+x(4y-2)+6y-3=0$. $\because x$ 是实数，$\therefore \Delta=(4y-2)^2-4(y-1)\cdot(6y-3)\geqslant 0$，即 $2y^2-5y+2\leqslant 0$，$(2y-1)(y-2)\leqslant 0$. $\therefore \frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 2$. y 的最大值是 2，最小值是 $\frac{1}{2}$. $y=\frac{1}{2}$ 时，$x=0$；$y=2$ 时，$x=-3$. $\therefore$ 曲线最高点坐标为 $(-3, 2)$，最低点坐标为 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

1197. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上两动点 P、Q 在中心 O 张直角(即 $\angle POQ=90°$). 试求 $\frac{1}{|OP|}+\frac{1}{|OQ|}$ 的最大值与最小值.

[分析] 由 $\angle POQ=90°$，$|OP|=\rho_1$，$|OQ|=\rho_2$，并取 $\angle xOP=\theta$ 为参数，则 P、Q 的坐标可求. 利用 P、Q 在椭圆上的条件，可得 $\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}$ 为定值. 从此可得 $\left(\frac{1}{|OP|}+\frac{1}{|OQ|}\right)^2$ 与 θ 的函数关系.

[解] 设 $\angle xOP=\theta$，$|OP|=\rho_1$，$|OQ|=\rho_2$，则 P、Q 两点的坐标分别为 $(\rho_1\cos\theta, \rho_1\sin\theta)$、$(\pm\rho_2\sin\theta, \rho_2\cos\theta)$. $\because P$、Q 在椭圆上，

$$\therefore \quad \frac{\rho_1^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\rho_1^2\sin^2\theta}{b^2}=1,$$

$$\frac{\rho_2^2\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\rho_2^2\cos^2\theta}{b^2}=1;$$

即
$$\frac{1}{\rho_1^2}=\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2},\quad \frac{1}{\rho_2^2}=\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2}.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

$$\frac{1}{\rho_1^2\rho_2^2}=\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\left(\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}\right)\sin^2\theta\cos^2\theta+\frac{\sin^4\theta+\cos^4\theta}{a^2b^2}$$
$$=\frac{(a^2-b^2)^2}{4a^4b^4}\sin^2 2\theta+\frac{1}{a^2b^2}.$$

$$\left(\frac{1}{|OP|}+\frac{1}{|OQ|}\right)^2=\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}+\frac{2}{\rho_1\rho_2}$$
$$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+2\sqrt{\frac{(a^2-b^2)^2}{4a^4b^4}\sin^2 2\theta+\frac{1}{a^2b^2}}.$$

当 $\sin^2 2\theta=1$ 时，$\left(\frac{1}{|OP|}+\frac{1}{|OQ|}\right)_{\max}=\sqrt{2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}$；当 $\sin^2 2\theta=0$ 时，$\left(\frac{1}{|OP|}+\frac{1}{|OQ|}\right)_{\min}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

1198. 复数 z 满足 $\left|z+\frac{1}{z}\right|=1$，求复平面上点 z 的轨迹方程与 $|z|$ 的最大值、最小值.

[分析一]　由 $z=x+yi$，$z+\frac{1}{z}$ 的实部、虚部均可用 x、y 的式子表出，根据 $\left|z+\frac{1}{z}\right|=1$ 即可得点 z 的轨迹方程. 又因 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$，据此可求 $|z|$ 的最大、最小值.

[解一]　设 $z=x+yi$，则 $\left|z+\frac{1}{z}\right|=\left|x+yi+\frac{1}{x+yi}\right|=\left|x+\frac{x}{x^2+y^2}+i\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right|=\sqrt{\left(x+\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2+\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2}=1$，即 $(x^2+y^2)^2+2(x^2-y^2)+1=x^2+y^2$. $\therefore$ 点 z 的轨迹方程为 $(x^2+y^2)^2=3y^2-x^2-1$. $\because$ $|z|^2=x^2+y^2$，$\therefore$ $|z|^4-3|z|^2+1=-4x^2\leqslant 0$，故

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}\leqslant|z|^2\leqslant\frac{3+\sqrt{5}}{2},\quad 即\quad \frac{\sqrt{5}-1}{2}\leqslant|z|\leqslant\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

$$\therefore\quad |z|_{\max}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1),\qquad |z|_{\min}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1).$$

[分析二]　$\because z\cdot\bar{z}=|z|^2$，$\therefore \left(z+\frac{1}{z}\right)\overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)}=\left|z+\frac{1}{z}\right|^2=1$. 从此可导出$|z|$所满足的方程，于是点$z$的轨迹方程与$|z|$的最大、最小值可求.

[解二]　$\because\ \left|z+\frac{1}{z}\right|=1$，$\therefore \left(z+\frac{1}{z}\right)\overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)}=1$，$\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}\right)=1$，

$z\cdot\bar{z}+\frac{1}{z\cdot\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}+\frac{z}{\bar{z}}=1$. $|z|^2+\frac{1}{|z|^2}+\frac{2[R^2(z)-I^2(z)]}{|z|^2}=1$,　$|z|^4+1+4R^2(z)-2[R^2(z)+I^2(z)]=|z|^2$，即 $|z|^4-3|z|^2+1=-4R^2(z)$. 从此可得点z的轨迹方程与$|z|$的最大、最小值同[解一].

[分析三]　因 $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$，而$\left|z+\frac{1}{z}\right|=1$，可见$|z|$与$\theta$之间有函数关系，从此可求点$z$的轨迹方程与$|z|$的最大、最小值.

[解三]　设 $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$，$\because\ \left|z+\frac{1}{z}\right|=1$，$\therefore\ \left|z+\frac{1}{z}\right|^2=$

$$\frac{|z^2+1|^2}{|z|^2}=\frac{||z|^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)+1|^2}{|z|^2}=\frac{(|z|^2\cos 2\theta+1)^2+|z|^4\sin^2 2\theta}{|z|^2}$$

$=\frac{|z|^4+2|z|^2\cos 2\theta+1}{|z|^2}=1$，故 $\frac{|z|^4-|z|^2+1}{2|z|^2}=-\cos 2\theta\cdots$①. $\therefore -1\leqslant\frac{|z|^4-|z|^2+1}{2|z|^2}\leqslant 1$，即 $|z|^4+|z|^2+1\geqslant 0\cdots$②，$|z|^4-3|z|^2+1\leqslant 0\cdots$③.
令 $|z|=\rho$，则由①即得点z轨迹的极坐标方程. ②恒能成立. 由③可得$|z|$的最大、最小值同[解一].

[分析四]　由于已知条件为$\left|z+\frac{1}{z}\right|=1$，故可用复数模的三角不等式，求$|z|$的最大、最小值.

[解四]　$\because\ 1=\left|z+\frac{1}{z}\right|\geqslant\left||z|-\frac{1}{|z|}\right|$，当且仅当$z$与$\frac{1}{z}$幅角之差为$\pi$的奇数倍数时，等号成立.

$$\therefore\quad -1\leqslant|z|-\frac{1}{|z|}\leqslant 1,$$

故

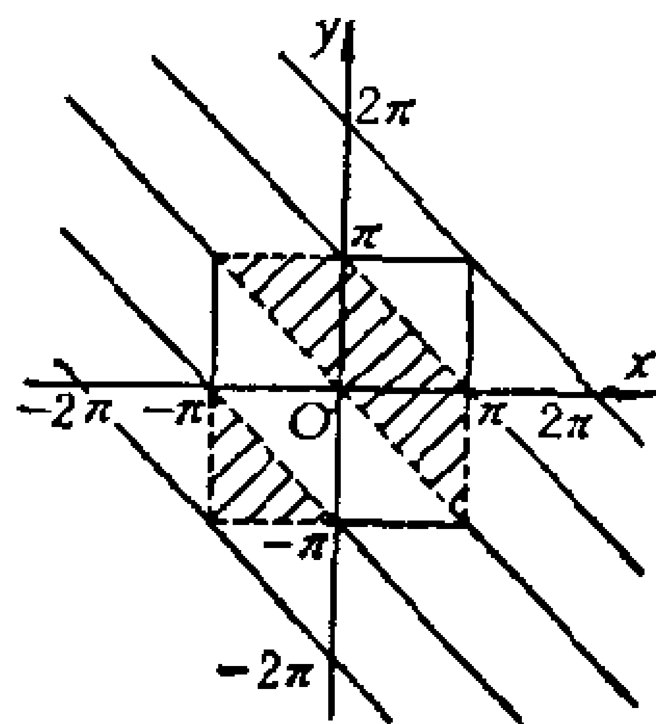
$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\leqslant|z|\leqslant\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

即　　$|z|_{\max}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, $|z|_{\min}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

［说明］ 有关复数模的问题，可根据复数的线性式、三角函数式模的概念进行探索，如［解一］、［解三］；也可根据 $z\cdot\bar{z}=|z|^2$，或复数模的三角不等式进行分析，如［解二］、［解四］.

§6. 其　它

1199. 作点集 $D=\{(x,y)\mid\sin(x+y)>0,\ |x|<\pi,\ |y|<\pi\}$ 的图形.



［分析］ 根据条件先找出边界的方程即可画出图形.

［解］ $\because\ |x|<\pi,\ |y|<\pi,$

$\therefore\quad -2\pi<x+y<2\pi.\qquad \because\ \sin(x+y)>0,$

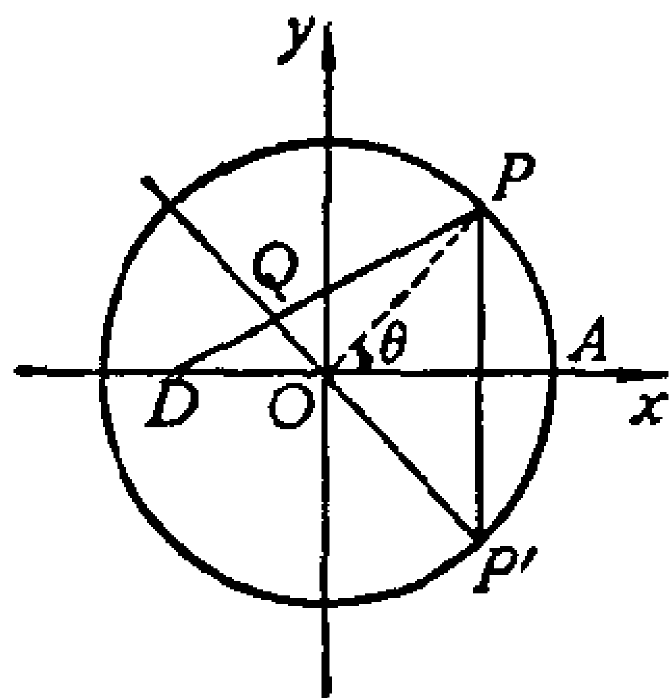
$\therefore\quad 0<x+y<\pi,\ -2\pi<x+y<-\pi.$

$D=\{(x,y)\mid\sin(x+y)>0,\ |x|<\pi,\ |y|<\pi\}$

$=\{(x,y)\mid -\pi<x<\pi,\ -\pi<y<\pi,\ 0<x+y<\pi,\ -2\pi<x+y<-\pi\}.$

集合 D 所示的平面区域为图中影阴所示(不包括边界).

1200. 设点 P 在圆 $x^2+y^2=b^2(b>0)$ 的第一象限的弧上运动，圆与 x 轴正半轴的交点为 A，点 P 关于 x 轴的对称点 P'，$D(-a,0)(a>0)$ 为定点，直线 DP 与 $P'O$ 交于点 Q. 当 P 沿着圆弧向点 A 逼近时，试求 $|OQ|$ 之长的极限值.



［分析］ $|OQ|$ 随点 P 的位置而定，故可先求出 $|OQ|$ 与点 P 坐标的函数关系后，再求其极限值.

［解］ 设 $\angle AOP=\theta$，直线 OP' 的参数方程为

$$\begin{cases}x=t\cos(\pi-\theta)=-t\cos\theta\\ y=t\sin(\pi-\theta)=t\sin\theta\end{cases}\cdots①,$$

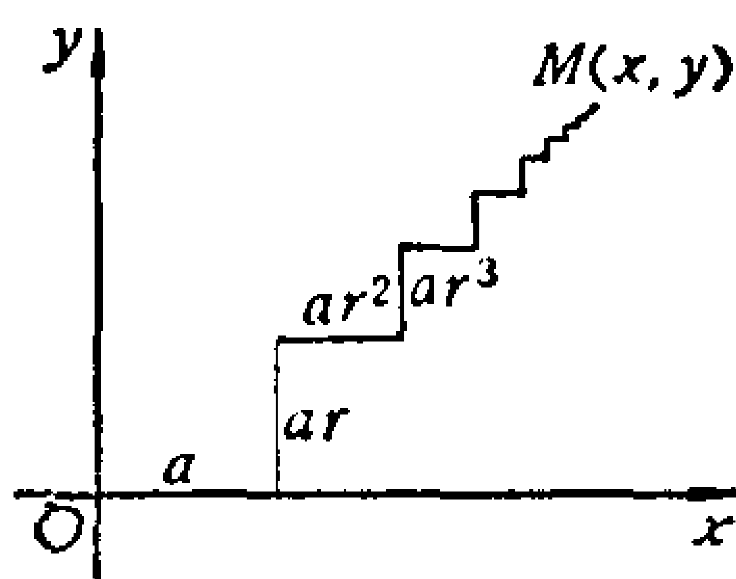
直线 DP 的方程为 $(b\cos\theta+a)y=b(x+a)\sin\theta\cdots②$，以 ① 代入 ②，得

$$t\sin\theta(b\cos\theta+a)=b\sin\theta(-t\cos\theta+a),\quad \therefore\quad t=\frac{ab}{a+2b\cos\theta},$$

即 $$|OQ|=\frac{ab}{a+2b\cos\theta}.\quad \lim_{P\to A}|OQ|=\lim_{\theta\to 0}\frac{ab}{a+2b\cos\theta}=\frac{ab}{a+2b}.$$

1201. 动点M从原点出发,沿x轴的正方向前进$a(a>0)$,然后向左转90°角,沿y轴的正向继续前进$ar(0<r<1)$,再向右转90°角,沿x轴的正向继续前进ar^2,如此无限地进行下去.(1)求动点M的极限点坐标;(2)如果r是参数,求极限点的轨迹.

［解］ 设点M坐标为(x, y), $\because 0<r<1$,



$\therefore\quad x=a+ar^2+ar^4+\cdots=\frac{a}{1-r^2}\cdots$①;

$y=ar+ar^3+\cdots=\frac{ar}{1-r^2}\cdots$②.

即点M坐标为$\left(\frac{a}{1-r^2}, \frac{ar}{1-r^2}\right)$. ①²－②², 再利用①消去参数$r$,得$x^2-y^2=ax\cdots$③. 从①、②知,$x$、$y$的符号与$a$的符号相同. $\because a>0$, $\therefore$ 点M的轨迹是双曲线③在第一象限的部分.

1202. 平面上两圆相交,A为一个交点.两质点同时从A出发,以定速分别在各自的圆周上依相同方向绕行.旋转一周后,两质点同时到达原出发点. 证明在这平面上有一定点P,使得在任何时刻P到两动点Q、Q'的距离相等.

［分析一］ 通过两质点的特殊位置,分别作对应点的连线的垂直平分线,它们的交点即为点P的位置,从而得解.

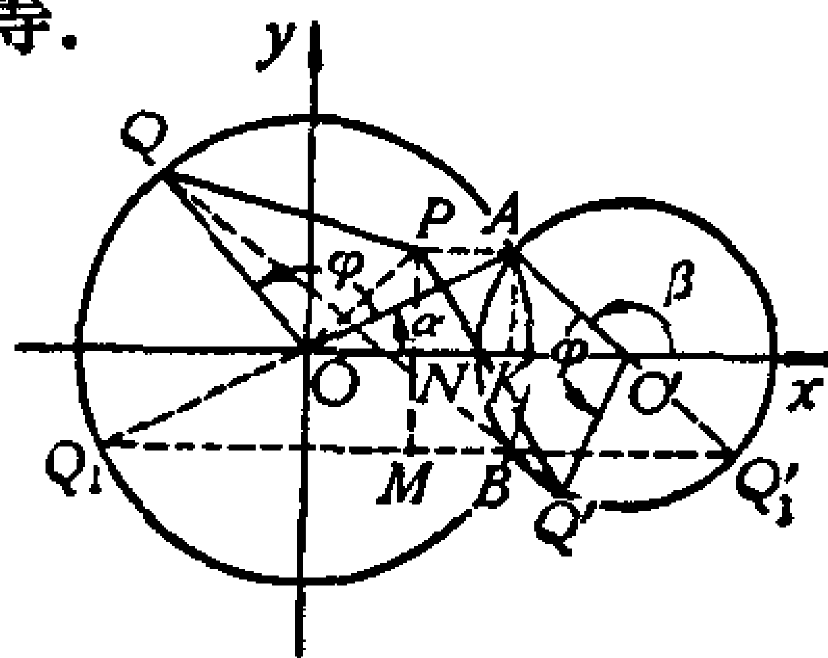


图 1

［证一］ 取圆O中心为原点,O、O'连线为x轴,建立直角坐标系(图1).令$\angle xOA=\alpha$, $\angle xO'A=\beta$, $\angle AOQ=\angle AO'Q'=\varphi$. 圆$O$、圆$O'$的半径分别为$R$、$r$. 点$Q$、$Q'$的坐标为$(R\cos(\alpha+\varphi), R\sin(\alpha+\varphi))$、$(R\cos\alpha-r\cos\beta+r\cos(\beta+\varphi), r\sin(\beta+\varphi))$,且$R\sin\alpha=r\sin\beta$. 当$\varphi=\pi$时,$Q_1(-R\cos\alpha, -R\sin\alpha)$、$Q_1'(R\cos\alpha-r\cos\beta-r\cos\beta, -r\sin\beta)$.

$\because R\sin\alpha=r\sin\beta$, $\therefore Q_1Q_1'$ 的中垂线为 $x=-r\cos\beta\cdots$①. 当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，$Q_2(-R\sin\alpha,\ R\cos\alpha)$、$Q_2'(R\cos\alpha-r\cos\beta-r\sin\beta,\ r\cos\beta)$. Q_2Q_2' 的斜率为 $k=\dfrac{R\cos\alpha-r\cos\beta}{-R\sin\alpha-R\cos\alpha+r\cos\beta+r\sin\beta}=\dfrac{R\cos\alpha-r\cos\beta}{r\cos\beta-R\cos\alpha}=-1$.

$\therefore Q_2Q_2'$ 的中垂线为

$$y-\frac{R\cos\alpha+r\cos\beta}{2}=x-\frac{R\cos\alpha-r\cos\beta-r\sin\beta-R\sin\alpha}{2},$$

即 $y=x+r\cos\beta+r\sin\beta\cdots$②. ①与②的交点为 $(-r\cos\beta,\ r\sin\beta)$，即点 P. 因为

$$\begin{aligned}|PQ|^2&=[R\cos(\alpha+\varphi)+r\cos\beta]^2+[R\sin(\alpha+\varphi)-r\sin\beta]^2\\&=R^2+r^2+2Rr[\cos(\alpha+\varphi)\cos\beta-\sin(\alpha+\varphi)\sin\beta]\\&=R^2+r^2+2Rr\cos(\alpha+\beta+\varphi).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|PQ'|^2&=[R\cos\alpha-r\cos\beta+r\cos(\beta+\varphi)+r\cos\beta]^2\\&\quad+[r\sin(\beta+\varphi)-r\sin\beta]^2\\&=[R\cos\alpha+r\cos(\beta+\varphi)]^2+[r\sin(\beta+\varphi)-R\sin\alpha]^2\\&=R^2+r^2+2Rr[\cos\alpha\cos(\beta+\varphi)-\sin(\beta+\varphi)\sin\alpha]\\&=R^2+r^2+2Rr\cos(\alpha+\beta+\varphi).\end{aligned}$$

$$\therefore\quad |PQ|=|PQ'|.$$

［分析二］ 欲证存在一定点 P 到 Q、Q' 的距离相等，可由证明 QQ' 的中垂线过定点着手，从而求出点 P 的坐标。

［证二］ 取 B 为原点，AB 所在直线为 y 轴建立直角坐标系(图 2). 点 A 的坐标为 $(0,\ b)$，则圆 O 的方程为 $x^2+y^2-2cx-by=0\cdots$①，圆 O' 的方程为 $x^2+y^2-2ax-by=0\cdots$②. 设任意时刻两质点到达的位置为 Q、Q'. $\because \angle AOQ=\angle AO'Q$, $\therefore \angle ABQ=180^\circ-\angle ABQ'$. 故 Q、B、Q' 三点共线. 取 $\angle xBQ=\theta$, $|BQ|=\rho_1$, $|BQ'|=\rho_2$，则点 Q、Q' 的坐标分别为 $(\rho_1\cos\theta,\ \rho_1\sin\theta)$、$(\rho_2\cos(\theta+\pi),\ \rho_2\sin(\theta+\pi))$. $\because$ 点 Q 在圆 O 上，$\therefore \rho_1^2-(2c\cos\theta+b\sin\theta)\rho_1=0$, $\rho_1=2c\cos\theta+b\sin\theta$; 点 Q' 在圆 O' 上，$\therefore \rho_2^2+(2a\cos\theta+b\sin\theta)\rho_2=0$, $\rho_2=-2a\cos\theta-b\sin\theta$. $\rho_1-\rho_2=2(a\cos\theta+c\cos\theta+b\sin\theta)$. QQ' 的中点 K

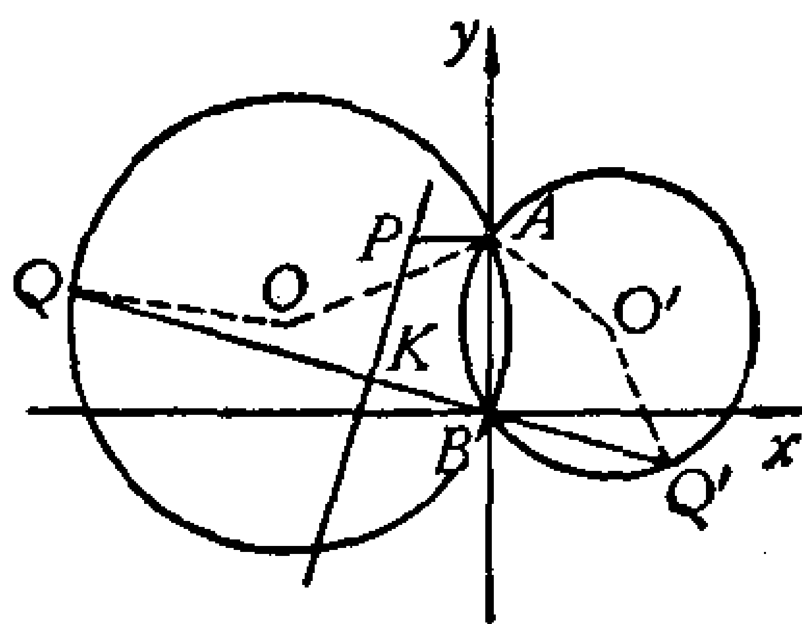


图 2

的坐标为$\left(\frac{\rho_1-\rho_2}{2}\cos\theta,\ \frac{\rho_1-\rho_2}{2}\sin\theta\right)$；$QQ'$ 的垂直平分线方程为 $x\cos\theta+y\sin\theta=a\cos\theta+c\cos\theta+b\sin\theta$，即 $(x-a-c)\cos\theta+(y-b)\sin\theta=0$．∴ QQ' 的垂直平分线过定点 $P(a+c,\ b)$，故 $|PQ|=|PQ'|$．

［说明］ 如果先证明 Q、B、Q' 在任何时刻都共线（如［证二］），当 $\varphi\to0$ 时 Q、Q' 趋近于 A，Q、Q' 的连线与直线 AB 重合．此时 QQ' 的中垂线为过 A 而与 AB 垂直的直线，那么就能更快求出点 P 的位置，使解的过程更简单．

1203．设 $\triangle ABC$ 三边 AB、BC、CA 的方程分别为 $P=0$，$Q=0$，$R=0$；其中 P、Q、R 分别为 $l_ix+m_iy+n_i=0\ (i=1,2,3)$，则直线系 $\lambda^2P+\lambda Q+R=0$（λ 为参数）中除至多两条直线外，每一条直线恒与二次曲线 $Q^2=4PR$ 相切．

［证］ 将直线系方程与二次曲线方程联立，得方程组(I)

$$\begin{cases}\lambda^2P+\lambda Q+R=0\cdots①\\ Q^2=4PR\cdots②.\end{cases}$$

由①得 $R=-\lambda^2P-\lambda Q$，代入②，得

$$4\lambda^2P^2+4\lambda PQ+Q^2=0,\quad 即\quad (2\lambda P+Q)^2=0.$$

由此得 $Q=-2\lambda P$，代入①，得 $\lambda^2P-R=0$．故方程组(II)

$$\begin{cases}\lambda^2P-R=0\cdots③\\ (2\lambda P+Q)^2=0\cdots④\end{cases}$$

与方程组(I)同解．方程组(II)即

$$\begin{cases}(\lambda^2l_1-l_3)x+(\lambda^2m_1-m_3)y+\lambda^2n_1-n_3=0\\ [(2\lambda l_1+l_2)x+(2\lambda m_1+m_2)y+(2\lambda n_1+n_2)]^2=0.\end{cases}$$

令
$$D=\begin{vmatrix}\lambda^2l_1-l_3 & \lambda^2m_1-m_3\\ 2\lambda l_1+l_2 & 2\lambda m_1+m_2\end{vmatrix},$$

即
$$D=(l_1m_2-l_2m_1)\lambda^2+2(l_1m_3-l_3m_1)\lambda+l_2m_3-l_3m_2.$$

故至多有两个实数 λ 能使 $D=0$，即直线系 $\lambda^2P+\lambda Q+R=0$ 中至多有两条直线使方程组(II)无解．除此之外，对于 λ 的任意实数，D 均不等于零，故方程组(II)有两组相同的实数解，亦即方程组(I)有两组相同的实数解．∵ $P=0$，$Q=0$，$R=0$ 围成三角形，∴ $Q^2=4PQ$ 是非退化二次曲线，它与直线 $\lambda^2P+\lambda Q+R=0$ 的两个交点重合，即二者相切．

[说明]　本题即证明了命题:"如果直线系(非直线束)方程含有一个参数,其次数为二次,则此直线系的包络为圆锥曲线".且给出求此类直线系的包络的一个简便方法,即将直线系方程看作所含参数的二次方程,由它有等根的条件,即可给出包络方程.

1204. 证明:过点($\sqrt{5}$, 0),且至少又过两有理点(坐标为有理数的点)的直线有且只有一条.

[分析]　只需找到一个二元一次方程,使它不仅有解$\begin{cases}x=\sqrt{5}\\y=0,\end{cases}$且至少有两组不同的有理数解,并证明这样的方程(不考虑其同解方程)只有一个.

[解]　过点($\sqrt{5}$, 0)和两个有理点$M_1(m_1, n_1)$、$M_2(m_2, n_2)$的直线l不可能与x轴垂直,即$m_1\neq m_2$,否则其方程为$x=\sqrt{5}$,则此直线上所有点的横坐标均为无理数$\sqrt{5}$,与它过有理点M_1、M_2矛盾. 故可设直线l的方程为$y=kx+b$.

∵ 直线l过(m_1, n_1)和(m_2, n_2),∴ $n_1=km_1+b$…①, $n_2=km_2+b$…②.由①、②解得$k=\dfrac{n_1-n_2}{m_1-m_2}$, $b=\dfrac{m_1n_2-n_1m_2}{m_1-m_2}$. ∵ m_1、n_1、m_2、n_2均为有理数,∴ k、b也是有理数. 但直线l过点($\sqrt{5}$, 0),故有$\sqrt{5}k+b=0$…③.
∵ ③式当且仅当$k=b=0$时才成立,∴ 满足条件的直线有且只有一条,其方程为$y=0$,即x轴.

[说明]　由于本题的证明只用到$\sqrt{5}$为无理数,并未涉及它具体的值,故用同样的方法也可证明经过点$(a, 0)$(a为无理数),且至少过两有理点的直线有且只有一条,即x轴.

1205. 在平面上给出无限个点,如果这些点中每两点之间的距离都是整数,则所有的点都在同一条直线上.

[分析]　显然,若无限个点中两两之间的距离不限于整数,它们可以不在同一直线上. 同样,若点是有限个,虽然它们两两之间距离均为整数,结论仍可能不成立. 故可从点的个数是无限个及它们中两两距离都是整数出发,用反证法证之.

[证]　设平面上给出的符合条件的无限个点的集合为S. 取P_1、$P_2\in S$,

并过这两点作直线 l_1. 若在 S 中存在不在直线 l_1 上的点 P_3, 则对于任意的 $P\in S$, 由 $|PP_1|$、$|PP_2|$、$|PP_3|$ 均为整数, 可得 $||PP_1|-|PP_2||=m$ (m 为正整数, 且 $m\leqslant|P_1P_2|-1$), 故点 P 必须在满足上述条件的 m 条双曲线, 或直线 l_1 上. 记在这 m 条双曲线上的点的集合为 S_1, 则

$$P\in S_1\cup l_1\cdots①.$$

同理, P 又必须在满足条件 $||PP_1|-|PP_3||=n$ (n 为正整数, 且 $n\leqslant|P_1P_3|-1$) 的 n 条双曲线, 或直线 P_1P_3 上. 记在这 n 条双曲线上的点的集合为 S_2, 直线 P_1P_3 为 l_2, 则 $P\in S_2\cup l_2\cdots②$. 由 ①、② 得

$$P\in(S_1\cup l_1)\cap(S_2\cup l_2)=(S_1\cap S_2)\cup(S_1\cap l_2)\cup(S_2\cap l_1)\cup(l_1\cap l_2).$$

显然 $S_1\cap l_2$、$S_2\cap l_1$、$l_1\cap l_2$ 均为有限集, 又 S_1 和 S_2 为两组焦点不尽相同的双曲线, 故 $S_1\cap S_2$ 也是有限集, 从而 $(S_1\cap S_2)\cup(S_1\cap l_2)\cup(S_2\cap l_1)\cup(l_1\cap l_2)$ 也是有限集. 这与 S 为无限集矛盾, 故 S 中不存在不在直线 l_1 上的点 P_3, 即 S 中所有的点都在同一条直线上.

题目分类索引

说　　明

本索引由“题目类型表”和“代号索引表”组成．每一题目用一个四位数作为代号，其代号的四个数字从左至右按下述原则确定：

第一位数　由题目所属的大类而定．题目共分四大类，分别用

1——表示轨迹题（包括轨迹的证明题）．

2——表示证明题（包括判断图形的性质和位置关系）．

3——表示计算题（包括求已知曲线的方程）．

4——表示作图题（包括对图形性质的讨论）．

凡题中要求作的曲线、图象，其方程或集合未给出的，均作为计算题．

第二位数　由题目的条件和结论中所涉及的几何图形而定．为便于记忆，结合本书目录中的章节编排，分别用：

1——表示题目中的几何图形只涉及点．

2——表示题目中的几何图形涉及直线或非封闭直线形（包括直线系，下同）．

3——表示题目中的几何图形涉及多边形．

4——表示题目中的几何图形涉及圆．

5——表示题目中的几何图形涉及椭圆．

6——表示题目中的几何图形涉及双曲线．

7——表示题目中的几何图形涉及抛物线．

8——表示题目中的几何图形涉及一般二次曲线．

9——表示题目中的几何图形涉及其它几何图形（包括高次曲线、超越曲线、立体图形等等）或不涉及任何几何图形．除轨迹题外，所有未知的曲线、图象均属此类．

凡题中涉及几种不同的图形，则以代号较大的数字作为该题的第二位数.

如果题中给出的曲线方程未明确为哪一种曲线，若该方程是一次的，则其第二位数为2；若方程是二次的，且不需用判别式就可确定是何种曲线的，则以该种曲线的代号为其第二位数；不能直接判定的二次方程其第二位数为8；若方程是极坐标方程或参数方程，其第二位数为9.

例如，第1095题："求过二次曲线 $x^2+2y^2-2=0$ 和 $2x^2-y-2=0$ 的交点，且与直线 $2x+2y-1=0$ 相切的二次曲线方程". 其中二次曲线 $x^2+2y^2-2=0$ 和 $2x^2-y-2=0$ 不需用判别式就可分别确定为椭圆（代号5）、抛物线（代号7），而结论涉及的二次曲线尚不能断定为何种二次曲线，则作一般二次曲线（代号8）论. 以上这些几何图形的代号以8为最大. 故此题代号的第二位数应确定为8.

第三、第四位数　可从"题目类型表"查得. 题目的类号（用1、2、3…表示）作为第三位数字；其型号（用(1)、(2)、(3)…表示）作为第四位数字. 类型两可的，以代号较大的数字为准，类下不分型的，第四位数字为0.

例如，第823题："设 $P(x_1, y_1)$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任意一点. 过 P 作双曲线的渐近线的平行线，分别与另一渐近线交于 Q、R. 求证 $|PQ|\cdot|PR|=\frac{1}{4}(a^2+b^2)$". 因这是一道证明题，故第一位数为2. 而按其条件和结论所涉及的几何图形，应取双曲线的代号6作为第二位数. 又因该题要求证明 $|PQ|$、$|PR|$ 的积为一不等于零的常量 $\frac{1}{4}(a^2+b^2)$，根据"题目类型表"查得其第三、第四位数分别为2、3，因此该题的代号为2623.

题目的代号确定后，就能从"代号索引表"中检索出有关题目的序号.

索 引 口 诀

首位数字大类定，
第二位数按图形，
欲得三位、四位数，
题目类型表中寻.

题目类型表

1. 轨 迹 题

1. 特殊点轨迹
  (1) 定比分点
  (2) 线段的中点
  (3) 弦的中点
  (4) 中心、外心、内心
  (5) 垂心、重心
  (6) 垂足、射影
  (7) 其它特殊点(切点、焦点、变换点等)
2. 图形的顶点或曲线(包括直线)的交点轨迹
  (1) 顶点(包括二次曲线对称轴的端点)
  (2) 两动直线的交点
  (3) 含有相等条件(包括平分一个量)的两动直线的交点
  (4) 切、法线的交点
  (5) 动曲线的交点
3. 动直线上点的轨迹
  (1) 含有相等条件的动点
  (2) 含有定值条件的动点
  (3) 含有其它条件的动点
4. 动曲线上点的轨迹
5. 其它动点轨迹
  (1) 含有相等条件的动点
  (2) 含有定值条件的动点(包括条件为两变量成正、反比例)
  (3) 含有其它条件的动点

2. 证 明 题

1. 证明等式、不等式及其它关系式
  (1) 一次等式(包括等差数列、平分某一量)
  (2) 二次及高次等式
  (3) 含有分式、根式的等式,比例式(包括等比数列)
  (4) 有关超越运算、矩阵的等式
  (5) 有关面积的等式
  (6) 不等式或其它关系式
2. 证明定值(凡运算结果为一不等于零的常量的,均属此类)
  (1) 线段、角、弧等量为定值(证明一个角为直角,归入"两直线的垂直关系")
  (2) 和、差为定值
  (3) 积、商及其和、差为定值
  (4) 幂、方根及其和、差为定值
  (5) 超越运算的结果为定值
  (6) 面积为定值
  (7) 不变式、不变量
  (8) 曲线的形状、大小不变,直线定向
3. 证明点与点、点与直线、点与曲线的位置关系
  (1) 点与点的位置关系(包括点不变)
  (2) 点在直线上(直线过点)、共线点
  (3) 动直线过定点、共点线

3. 计 算 题

4. 作 图 题

代 号 索 引 表

11

12

24

25

附　　录

解析几何简史

解析几何产生于十七世纪的欧洲，这不是偶然的．文艺复兴后的欧洲进入了一个生产力迅速发展、思想普遍活跃的时代．机械的广泛使用，促使人们对机械性能进行研究，这就需要运动学、动力学知识和相应的数学理论；建筑的兴盛，河道与堤坝的修建，又提出了有关固体力学和流体力学的问题，这些问题的合理解决需要正确的数学计算；航海事业的发展，向天文学，实际也是向数学提出了如何精确测定经纬度，如何计算各种不同形状船体的面积、体积与确定重心的方法；望远镜和显微镜的发明，提出了研究凹凸透镜的曲面形状问题，在数学上就需要研究求曲线的切线问题．所有这些都难以用初等几何、初等代数等常量数学来解决．于是，人们就相继转而研究变量数学．作为几何与代数相结合的产物——解析几何，也就在这种背景下问世．

几何学形成得很早，公元前三世纪就产生了具有完整演绎体系的欧几里得(Euclid，约公元前330—前275)的《几何原本》十三卷．半个世纪后，古希腊另一位数学家阿波罗尼斯(Apollonius，约公元前260—前170)著有《圆锥曲线论》八卷，它几乎包括了圆锥曲线的全部性质．但是，与古希腊所有的几何学一样，阿波罗尼斯的几何是一种静态的几何．它既未把曲线看作是一种动点的轨迹，更没有给出它的一般表示方法．这

种局限性在十六世纪前并没有引起注意，因为实践没有向几何学提出可能引起麻烦的课题．十六世纪以后的情况就不同了．哥白尼 (Nicolaus Copernicus, 1473—1543) 提出日心说，伽利略(Galileo Galilei, 1564—1642)由研究物体运动得出自由落体定律和抛体运动规律，都向几何学提出了用运动的观点来认识和处理圆锥曲线及其它几何曲线的课题．地球绕太阳运转的轨道是椭圆，物体斜抛运动的轨道是抛物线，这些都远不是靠建立在用平面截圆锥而得到的椭圆与抛物线的概念所能把握的．传统的几何学缺乏解决这些问题的有效办法，要能反映这类运动的轨迹及其性质，就必须从观点到方法都来一个变革，需要一种建立在运动观点上的几何学．

十六世纪代数学的发展也为产生解析几何创造了条件．我们知道，解析几何的基本方法是在引进坐标系的基础上，把由曲线所决定的两个坐标之间的关系用方程表示出来，通过对方程的研究来掌握曲线的性质．如果代数尚未符号化，那么即使煞费苦心地引进坐标，也不可能建立一般的曲线方程，更不可能在方法上引起划时代的变革．1591 年法国数学家韦达 (François Viète, 1540—1603) 首先在代数中有意识地系统地使用字母，他不仅用字母表示未知数(这在他之前早有人做了)，而且用以表示已知数，包括方程中的系数和常数．而象今天那样用 a、b、c…表示已知数，用 x、y、z…表示未知数则是后来笛卡儿(René Descartes, 1596—1650) 创始的．这样，代数就从一个过去以分别解决各特殊问题的、侧重于计算的数学分支，转变成一门研究一般类型问题和方程的学科，这就为由几何曲线建立代数方程并由代数方程来研究几何曲线铺平了道路．

但是有了坐标概念和可用于几何的代数，并不等于就能产生解析几何．事实上，用坐标系来确定点的位置，早在纪元前就

有人使用了.公元前四世纪,我国战国时代的石申就曾利用坐标方法记录了一百多颗恒星的方位，著成世界上最早的星表——《石氏星经》.阿波罗尼斯在研究圆锥曲线的时候也曾引用两条正交的直线作为一种坐标轴. 1486年,法国数学家奥雷斯姆(Nicole Oresme,约1323—1382)在他的著作中已经象后来的笛卡儿那样使用了纵轴和横轴来确定点的位置和变化状态了.虽然这些思想启发了后来的学者,但还不能算作解析几何.

同样,用代数形式表示几何命题的做法也出现得很早.我国数学家刘徽(约公元三世纪)在他的《海岛算经》一书中，把全部九个几何问题都用代数形式来表示;希腊的帕普斯(Pappus,三世纪末)也曾将代数系统地应用于几何; 1593年,韦达将古希腊著作中出现的以几何形式表示的恒等关系用代数形式表示出来,并且通过建立方程来帮助作图.但是,即使象韦达那样的工作,也仍然不能算是创立了解析几何. 事实上他只是在几何中用到了代数,而没有真正建立起代数与几何的本质联系.

真正将代数与几何沟通起来并创立解析几何的是十七世纪四十年代的两位法国数学家——费尔马(Pierre de Fermat,1601—1665)和笛卡儿.

1630年，费尔马写成《平面与立体轨迹引论》(发表于1679年),在这篇文章中费尔马把希腊数学中使用立体图形所发现的曲线的特征,通过引进坐标,以统一的方式译成了代数语言,使得各种不同的曲线都能用代数方程表示和研究.费尔马还具体研究了直线、圆和其它圆锥曲线的方程,注意到了坐标轴可以平移和旋转,并以此来化简方程.虽然如此,费尔马的解析几何还是不成熟的，他还没有完全克服阿波罗尼斯静态地研究几何曲线的影响,因此从解析几何的角度来说,它是不纯粹的.

通常人们都把笛卡儿作为解析几何的创立者.笛卡儿的解

析几何是以如下两个观念为基础的：一是坐标观念，二是把有互相关联的两个未知数的任意代数方程看成平面上的一条曲线的观念．对坐标，笛卡儿与前人所不同的是他不仅用坐标表示点的位置，而且将坐标通过“点动成线”的观点具体地用到建立曲线的方程上．对方程，笛卡儿不仅把它看成是未知数与已知数的关系式，而且更多地把它看作为两个变量之间的关系式，这正是对于处理几何曲线十分有效的新方法的思想基础．笛卡儿还把不同次数的几条曲线同时表示在一个坐标系中，这就使得解析几何的应用范围极大地扩展了．这是包括费尔马在内的任何前人都未曾做到的，它也是笛卡儿贡献的独特之处．笛卡儿把他的这一思想发表在1637年出版的他的解析几何著作——《几何》中．这是他的一本题为《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》著作的附录．

笛卡儿的另一个功绩在于他解开了捆绑在代数学上的一条绳索——齐次原则．所谓齐次原则是方程各项的次数必须一致，这是十六世纪以前西方数学家所拘泥的一个原则．齐次原则认为，由于体积、面积和长度不能互加，因此表示几何量之间关系的方程的各项也只能是齐次的．按这一规定，象方程$ax^2+bx+c=0$便无意义，因为ax^2是一个体积量，它怎么能与bx这个面积量以及c这个长度量相加呢？笛卡儿不理会这些，他通过引入单位数的概念，使所有的几何量都通过单位数而变成统一的数的表示．于是，图形中各种量之间的关系都可以化成数与数之间的关系，从而形成代数计算与几何作图之间的平行关系，开辟了把代数与几何巧妙地统一起来的道路．

笛卡儿对曲线建立方程主要有三个步骤：给定符号（字母）、引出式子、建立方程．即给图形中的各种线段不管是已知的还是未知的以相应的字母，再根据问题所给出的线段间的关系来

列出式子，然后依据存在着的相等关系来建立方程．笛卡儿指出，如果照这样建立起来的方程的个数等于未知数个数，那么解方程的结果是所要求的未知线段．如果方程的个数少于未知数的个数，那么方程是不定方程，它代表了一条由相应的点所组成的曲线．这些点是由逐次给一个未知数以不同的值，相应地得到另一个未知数的值而确定的．于是，一个在代数中看来意义不大的不定方程，由于引进了对一个未知数逐次给以确定值的变化的思想，就成了表示变量与函数关系的式子，并成为曲线的代数形式．

在这里，笛卡儿把以往对立着的两个研究对象"数"与"形"统一起来了，并在数学中引入了变量的概念，从而完成了数学史上一项划时代的变革．这一工作开拓了一个变量数学的崭新领域，特别是加速了微积分的成熟．恩格斯把解析几何称为最重要的数学方法之一．他高度评价了笛卡儿的革新思想，说："数学中的转折点是笛卡儿的变数．有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了，而他们也就立刻产生，……"(«自然辩证法»人民出版社 1971 年版第 236 页)．

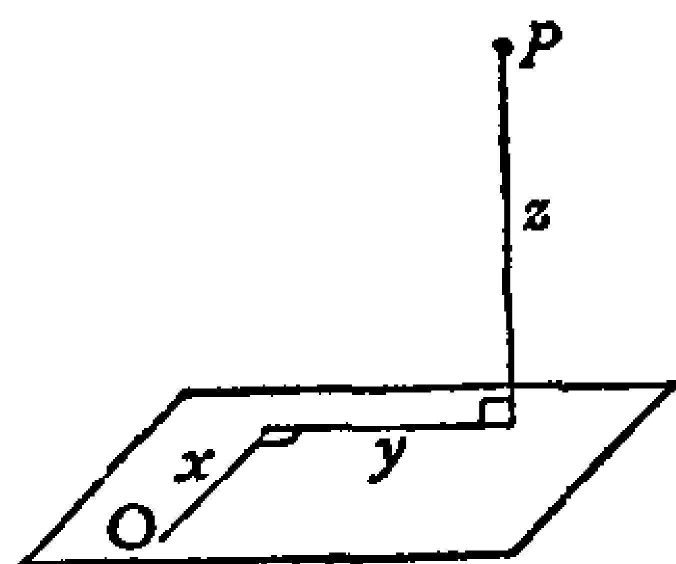
笛卡儿创立了解析几何学，他的贡献是伟大的，他的思想方法是划时代的．但是解析几何作为一门学科毕竟当时还很不完善，例如，笛卡儿当时尚未自觉地引进第二条坐标轴——y 轴．一百多年后瑞士数学家克拉默 (Gabriel Cramer, 1704—1752) 在他的«代数曲线分析引论»中才正式引入 y 轴．正是由于许多数学家在各个方面作了大量的修正和补充，才使它日臻完善．

1655 年英国数学家沃利斯 (John Wallis, 1616—1703) 首先引进负的纵、横坐标，这就使得解析几何可以在整个平面内研究曲线，从而摆脱了原来的局限．沃利斯还导出了各圆锥曲线

的方程，并且从这类方程都是二次的情况，把圆锥曲线定义为：含两个变量的二次方程的曲线. 沃利斯的这个定义第一次摆脱了把圆锥曲线仅仅看成是圆锥与平面的截线的观念，从而确立起圆锥曲线作为一种普通的平面曲线的地位. 1717 年英国数学家斯特林(James Stirling, 1692—1770)把 x 和 y 的一般二次方程化为若干标准型.

1691 年瑞士数学家雅各·伯努利(Jacob Bernoulli, 1654—1705)引入了极坐标(1671 年牛顿也曾提出过极坐标，但他的文章发表在 1736 年)，这极大地便利了某些曲线方程的建立，也使人们对曲线的认识更进了一步. 这时期先后发现了双纽线、卵形线、对数螺线、悬链线、旋轮线等各种特殊曲线. 1779 年德国数学家赫尔曼 (Jacob Hermann, 1678—1733)把极坐标的概念进一步完善，并给出了直角坐标和极坐标的变换公式. 瑞士数学家欧拉(Leonhard Euler, 1707—1783)则第一个在坐标中明确地使用三角函数，给出了现代形式下的极坐标系. 他还开创了曲线的参数表示.

解析几何的一个重要发展是由平面推广到空间. 这一工作最初出现在十七世纪，笛卡儿曾认识到：一个含有三个未知数——这三个数定出轨迹上的一个点 C——的方程，所代表的点 C 的轨迹是一个平面、一个球面或者是一个更复杂的曲面，这说明笛卡儿已经体会到他的方法可以推广到三维空间中的曲线和曲面上，但是他没有进一步去考虑这种推广. 1679 年法国数学家拉伊尔 (La Hire, 1640—1718) 对三维坐标几何作了较为特殊的讨论，他先用三个坐标表示空间中的点 P(见图)，然后写出了曲线的方程. 1715 年雅各·伯努利的弟弟约翰·伯努利(Johann Bernoulli,



1667—1748)首先引入我们现在通用的三个坐标平面,在这基础上,通过法国数学家帕朗(Autoine Parent, 1666—1716)、克莱罗(Alexis Claude Clairaut, 1713—1765)以及约翰·伯努利、赫尔曼等人的工作,弄清了曲面能用三个坐标变量的一个方程表示的思想;1731 年克莱罗又指出描述一条空间曲线需要两个曲面方程,他还揭示了这样一个事实:空间曲线的投影方程,即垂直于投影平面的柱面的方程,可以通过决定这条曲线的两个曲面方程的某种组合给出;赫尔曼则在 1732 年给出了绕 z 轴旋转的曲面方程的一般形式:$x^2+y^2=f(z)$.

1748 年欧拉的《分析引论》一书中出现了解析几何发展史上的重要一步,即给出了现代形式下的解析几何的系统的叙述,它可以视为现代意义下的第一本解析几何教程. 在这本书中,欧拉还给出了空间坐标的变换公式和六种曲面(锥面、柱面、椭球面、单叶双曲面和双叶双曲面、双曲抛物面以及抛物柱面)的标准形式.

继欧拉以后,法国数学家蒙日(Gaspard Monge, 1746–1818)对三维解析几何作了大量的研究. 他与他的学生阿歇特(Jean-Nicolas-Pierre Hachette, 1769—1834)证明了二次曲面的每一个平面截口是一条二次曲线,而平行截面截得的是相似的二次曲线. 他们还证明了单叶双曲面和双曲抛物面都能用一根直线按两种不同方式运动而得到,这类曲面称为直纹曲面.

1788 年,法国数学家拉格朗日(Joseph-Louis Lagrange, 1736—1813)在他的名著《解析力学》中以类似后来的向量形式表示力、速度、加速度等具有方向的量. 虽然拉格朗日没有对向量概念作更深入的研究,但是这种概念一经提出就引起人们很大的注意. 十八世纪八十年代在英国数学家吉布斯(Josiah Willard Gibbs, 1839—1903)和亥维赛德(Oliver Heaviside,

1850—1925)的努力之下，一门名为"向量代数"的学科诞生了．正如吉布斯所预料，向量代数的出现立即对解析几何产生深刻的影响，几何又一次从代数中吸收了新的活力．现在，向量代数已经成为解析几何学的重要组成部分．

纵观解析几何形成和发展的历史，可以这样说：解析几何的创立者是费尔马与笛卡儿，但是使解析几何演变成一个独立的而且充满活力的数学分支那要归功于十七、十八世纪的众多数学家，其中最主要的是欧拉、拉格朗日和蒙日．

十九世纪后，解析几何已经发展得相当完备，但这并不意味着解析几何的活力已经结束．作为二维和三维解析几何所研究问题的代数推广，人们开始讨论四维解析几何和 n 维甚至无穷维的解析几何，即考虑有四个或 n 个甚至无穷个未知数，而在结构上与二维和三维相类似的情况．

正当解析几何蓬勃发展的时候，以光滑曲线、曲面为其研究对象，且以数学分析和微分方程为研究工具的一门几何学的新分科——微分几何诞生了．虽然微分几何的研究手段不同于解析几何，但是微分几何的内容在很大程度上吸收了解析几何的成果，而这两门学科的发展又常常交织在一起．

二十世纪以来迅速发展的两个新的宽广的数学分支——泛函分析和代数几何，也都可以看作是古典解析几何的直接延续．因为前者是综合运用函数论、几何学、代数学的观点来研究无穷维向量空间及其上的函数，它的重要分支——希尔伯特空间及其中的自共轭算子谱分析理论可以看作是无限维向量空间的解析几何学；后者是研究以空间坐标的一个或多个代数方程所确定的点的轨迹(称为代数流形)，研究三次以上的代数曲线和代数曲面的几何性质；而二维或三维解析几何中的对象：直线、圆锥曲线、二次曲面都是它的特例．

在生产力发展的推动下，可以断言，几何学和整个科学文化将更加繁荣和发展. 如上所述，数学的许多分支在吸收了解析几何的思想方法，并在其它学科发展的影响下得到了蓬勃发展. 解析几何作为一门基础学科在数学中占有重要的地位，在数学发展史上发挥了它的积极作用.

（袁小明撰稿）

汉英对照解析几何名词

平面解析几何　plane analytic geometry
解析法　analytic method
解析证法　analytic demonstration
有向直线　directed line
有向线段的数量　the value of directed line segment
有向线段的长度　the length of directed line segment
向量　vector
单位向量　unit vector
零向量　zero vector
标量,纯量,数量　scalar
向量射影定理　the theorem of projection of vector
坐标　coordinate
有序数偶　ordered couple
坐标系　coordinate system
笛卡儿坐标系　Descartesian system of coordinates
笛卡儿坐标　Cartesian coordinates
坐标轴　coordinate axis
坐标平面　coordinate plane
原点　origin
横坐标　abscissa
横坐标轴　axis of abscissas
纵坐标　ordinate
纵坐标轴　axis of ordinates
直角坐标　rectangular coordinates
斜坐标　oblique coordinates
象限　quadrant
平面极坐标　polar coordinates in the plane
极,极点　pole
极轴　polar axis
极径,向量径　radius vector
极角　polar angle, vectorial angle
幅角　argument
距离　distance
分点　point of division
定比分点　point of definite ratio division
中点　middle point
内分　internal division
外分　external division
斜率　slope
倾角,斜角　inclination, angle of inclination
面积　area
坐标变换　coordinate transformation
坐标轴的平移　translation of axes
坐标轴的旋转　rotation of axes
对称变换　symmetric transformation
轴对称　axial symmetry
对称轴　axis of symmetry

对称中心 center of symmetry
相似变换 similarity transformation
位似变换 homothetic transformation
相似中心 center of similarity
反演 inversion
反演中心 center of inversion
行列式 determinant
矩阵 matrix
判别式 discriminant
入射角 angle of incidence
反射角 angle of reflection
旋转角 angle of rotation
有向角 directed angle
方位角 azimuthal angle
射线 ray, half line
折线 broken line, polygonal line
一维空间 one-dimensional space
二维空间 two-dimensional space

曲线 curve
方程 equation
点标方程 equation in point coordinates
直角坐标方程 equation in rectangular coordinates
极坐标方程 equation in polar coordinates
参数方程 parametric equation
描迹 tracing curve
方程讨论 discussion of an equation
截距 intercept
对称,对称性 symmetry
曲线系 family of curves

参数 parameter
轨迹 locus; loci(pl.)
虚点 imaginary point
无穷远点 point at infinity
消去法 elimination method
消去式,结式 eliminant
必要条件 necessary condition
充分条件 sufficient condition
充要条件 necessary and sufficient condition
流动坐标 current coordinates
极限情况 limiting case
极限点 limit point, limiting point
极限位置 limit position, limiting position
极大(值) maximum, maximal value
极小(值) minimum, minimal value

直线 line, right line, straight line
直线方程,一次方程,线性方程 linear equation
斜截式 slope intercept form
点斜式 point slope form
两点式 two-point form
截距式 intercept form
法线式 normal form
参数式 parametric form
一般式,普通式 general form
两直线的夹角 angle of intersection of two lines, angle between two lines
平行 parallel

垂直，正交 perpendicularity
正交，直交 orthogonal
重合 coincide
垂线，垂直(于) perpendicular
交点 the point of intersection
三角形 triangle
角平分线 angular bisector
中垂线 perpendicular bisector
中线 median
高 altitude
重心 center of gravity, barycenter
垂心 orthocenter
内心 center of inscribed circle, incenter
外心 center of circumscribed circle, circumcenter
旁心 escenter
四边形 quadrilateral
对角线 diagonal, diagonal line
平行四边形 parallelogram
菱形 rhombus, diamond
完全四边形 complete quadrilateral
多边形 polygon
直线系(族) family of straight lines
(直)线束 pencil of lines
点线间的距离 distance from a point to a line
离差 dispersion
法化因子 normal factor
共线点 collinear points
共点线 concurrent lines
二次齐次方程 homogeneous equation of second degree
圆 circle
点圆 null circle, point circle
虚圆 imaginary circle
半径 radius
直径 diameter
同心圆 concentric circles
圆系(族) family of circles, system of circles
共轴圆 coaxial circles
直交圆 orthogonal circles
根轴 radical axis
根心 radical center
圆周 circumference(of a circle)
圆的一般方程 general equation of circle
圆心轨迹 deferent
割线 secant
弦 chord
切线 tangent
法线 normal
切点弦 chord at contact
极与极线 pole and polar
公切线 common tangent
内、外公切线 internal, external common tangent
外接圆 cicumcircle, cicumscribed circle
内切圆 inscribed circle
外切圆 externally tangent circle
旁切圆 escribed circle
公共弦 common chord
弧 arc
扇形 sector
弓形 segment of a circle
圆周角 angle in a circular segment, angle of circumference

弓形角 angle of a circular segment
圆心角 central angle
点对圆的幂 power of a point with respect to a circle
切线长 length of tangent

椭圆 ellipse
点椭圆 null ellipse, point ellipse
双曲线 hyperbola
共轭双曲线 conjugate hyperbolas
等轴(边)双曲线, 直角双曲线 equilateral, rectangular hyperbola
抛物线 parabola
共焦点抛物线 confocal parabolas
共焦点圆锥曲线 confocal conics
顶点 vertex; vertices(pl.)
焦点 focus; foci, focuses(pl.)
准线 directrix
长轴 major axis
半长轴 semimajor axes
短轴 minor axis
半短轴 semiminor axes
实轴,贯轴 real axis
横截轴 transvers axis
虚轴, 共轭轴 imaginary axis, conjugate axis
通径,正焦弦 latus-rectum
焦半径 focal radius
焦距 focal distance, focal length
焦点弦 focal chord
焦点性质 focal property
离心率 eccentricity
离心角 eccentric angle
辅助圆 auxiliary circle
共轭直径 conjugate diameters
补弦 supplementary chords
法线弦 normal chord
次切线 subtangent
次法线 subnormal
准圆 director circle
渐近线 asymptote

圆锥曲线 conic section
锥,锥面 cone
圆锥 circular cone
二次曲线 quadric curve
一般二次方程 the general equation of the second degree
主轴 principal axis
不变量,不变式 invariant
半不变式, 半不变量 semi-invariant
有心锥线 central conic,conic with center
无心锥线 non-central conic, conic without center
常态二次曲线 non-degenerate conic
退化二次曲线 degenerate conic
二次曲线的特征方程 characteristic equation of quadratic curve
二次曲线的特征根 characteristic roots of quadratic curve
密切圆 osculating circle
密切弦 osculating chord
密切二次曲线 osculating conic

代数曲线 algebraic curve
超越曲线 transcendental curve

立方抛物线，三次抛物线 cubical parabola

半立方抛物线，半三次抛物线 semicubical parabola

倍立方曲线 curve of duplication of cube

三等分角线 trisectrix

蔓叶线 cissoid

箕舌线 witch, versiera

蚌线 conchoid

一般蚌线 *general conchoid*

环索线 strophoid

皮利福姆曲线 Piriforme curve

蜗线 limacon

心脏线 cardioid

双纽线 lemniscate

卵形线 oval

叶形线 folium

旋轮线，摆线 cycloid

长、短幅旋轮线，次摆线 prolate, curtate cycloid, trochoid

圆内旋轮线，内摆线 hypocycloid

长、短幅圆内旋轮线，内次摆线 hypotrochoid

圆外旋轮线，外摆线 epicycloid

长、短幅圆外旋轮线，外次摆线 epitrochoid

星形线 astroid

四尖内摆线 *hypocycloid of four cusps*

圆的渐开线 involute of the circle

圆积线，割圆曲线 quadratrix

等速螺线 spiral of uniform velocity

阿基米得螺线 spiral of Archimedes

双曲螺线 hyperbolic spiral

倒数螺线 reciprocal spiral

对数螺线 logarithmic spiral

代数螺线 algebraic spiral

等角螺线 equiangular spiral

抛物螺线 parabolic spiral

费尔马螺线 *Fermat's spiral*

连锁螺线，平方倒数螺线 lituus

玫瑰线 rose curve

四瓣玫瑰线 four leaved rose curve

渐屈线 evalute

垂足曲线 pedal curve

包络 envelope

[General Information]
书名=数学题解辞典　平面解析几何
作者=唐秀颖主编
页数=771
SS号=10170174
出版日期=1983年06月第1版

前言
目录
正文